

ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии  
Институт Кибернетики

**СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Том 32**

**ГЕОМЕТРИЯ**



**Тбилиси  
2005**

## **Редакционная коллегия**

### **Главный редактор:**

*Р. В. Гамкрелидзе* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

### **Заместитель главного редактора:**

*Г. Харатишвили* (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

### **Члены редколлегии:**

*А. А. Аграчев* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

*Г. Гиоргадзе* (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

*Е. С. Голод* (Московский государственный университет)

*И. Т. Кигурадзе* (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

*А. Лаши* (Грузинский технический университет)

*Е. Ф. Мищенко* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

*А. В. Овчинников* (Московский государственный университет)

*В. Л. Попов* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

*А. В. Сарычев* (Университет Флоренции)

*Г. Химшиашвили* (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

*Г. Г. Чоговадзе* (Академия наук Грузии)

### **Редактор серии «Геометрия»:**

*А. Г. Попов* (Московский государственный университет)

# **СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Том 32**

**ГЕОМЕТРИЯ**

**Геометрия тканей**

**კიბერნეტიკის ინსტიტუტი  
თბილისი**

**2005**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Артур Вердиевич Чакмазян</span> . Памяти друга<br>( <i>М. А. Аквис, С. Х. Арутюнян, В. В. Гольдберг, Ю. Г. Лумисте, В. А. Мирзоян, Б. А. Розенфельд, А. М. Шелехов</i> ) . . . . . | 3   |
| Классификация регулярных три-тканей, образованных пучками окружностей<br>( <i>А. М. Шелехов</i> ) . . . . .   | 7   |
| Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей<br>( <i>Г. А. Толстихина</i> ) . . . . .   | 29  |
| О дифференциально-топологической классификации криволинейных три-тканей<br>( <i>А. А. Уткин, А. М. Шелехов</i> ) . . . . .  | 116 |

# Артур Вердиевич Чакмазян

## Памяти друга

Второго февраля 2005 года скончался замечательный армянский геометр, педагог, доцент кафедры высшей алгебры и геометрии Армянского государственного педагогического университета имени Х. Абовяна, кандидат физико-математических наук Арто Вердиевич Чакмазян. Перестало биться сердце прекрасного человека, много сделавшего для развития геометрической науки, педагога, оказавшего неоценимую помощь молодежи, посвятившей себя математике.

А. В. Чакмазян родился 9 февраля 1931 г. в селе Верин Таглар бывшей Нагорно-Карабахской автономной области (ныне Нагорно-Карабахская Республика). После окончания сельской средней школы в 1947 г. и физико-математического факультета Ереванского государственного университета в 1952 г. он несколько лет работал в этом университете лаборантом кафедры высшей алгебры и геометрии и одновременно научным сотрудником в системе Академии наук Армянской ССР. В это время он интенсивно занимался математикой, в особенности изучением тех разделов геометрии, которые были для него новыми или недостаточно глубоко рассматривались в университетском курсе. Тогда на него сильное впечатление произвела книга «Пространства аффинной связности» одного из выдающихся российских геометров Александра Петровича Нордена. При детальном изучении этой монографии у молодого научного работника появились свои идеи, с которыми он обратился к автору книги. А. П. Норден сразу понял, что перед ним человек с оригинальным математическим мышлением и предложил ему свою помощь. В 1956–59 гг. Артур Вердиевич — аспирант кафедры геометрии Казанского государственного университета. В 1962 г. он успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Двойственная нормализация». А с А. П. Норденом они на всю жизнь остались большими друзьями.

С 1960 г. Артур Вердиевич работает на кафедре высшей алгебры и геометрии Ереванского государственного университета, где продолжает активно заниматься наукой. В 1966 г. ему было присвоено ученое звание доцента. В это время правительство Армянской ССР, озабоченное состоянием подготовки педагогических кадров, решило укрепить кафедры педагогических вузов. Доценту Чакмазяну, как одному из перспективных ученых, было предложено возглавить кафедру высшей алгебры и геометрии ведущего педагогического вуза республики — Армянского государственного педагогического университета имени Х. Абовяна. В 1972 г. он был избран на должность заведующего этой кафедры.

Благодаря научной активности Артура Вердиевича и его внимательному отношению к научной молодежи, в период 1972–76 гг. свыше десятка молодых перспективных студентов (М. А. Андикян, Ю. А. Апресян, Г. С. Аракелян, С. Х. Арутюнян, Г. Н. Багдасарян, М. А. Василян, В. К. Восканян, В. А. Мирзоян, В. А. Нерсисян, Л. П. Сафарян и др.) были направлены в лучшие учебные заведения страны, где под руководством ведущих отечественных ученых сделали свои первые шаги в серьезной науке. Почти все они успешно закончили аспирантуру, защитили кандидатские диссертации и в дальнейшем продолжили свои научные исследования. Двое из них (С. Х. Арутюнян и В. А. Мирзоян) стали докторами наук.

Одновременно Артур Вердиевич сам продолжал активно заниматься наукой. Накопленный им к тому времени материал требовал осмысления и обобщения. В 1976 г. он оставил заведование кафедрой и был командирован в Тартуский государственный университет, где под руководством одного из ведущих эстонских геометров Юло Гориевича Лумисте начал работу над докторской диссертацией. Результатом исследований явилась монография «Нормальная связность в геометрии подмногообразий», изданная в 1990 г. С 1978 г. Артур Вердиевич вернулся в Ереван и продолжил работу на кафедре, но с Ю. Г. Лумисте он всю жизнь поддерживал самые дружеские отношения.

Юло Гориевич и другие известные математики, друзья Артура Вердиевича — Анатолий Михайлович Васильев, Макс Айзикович Акивис, Владислав Викторович Гольдберг, Аркадий Львович Онищик приезжали в Ереван и читали спецкурсы в Армянском педагогическом университете.

Научная деятельность А. В. Чакмазяна началась в казанской геометрической школе, где он занимался задачами нормализации поверхности поверхностей в аффинном и проективном пространствах. Отсутствие метрики в этих пространствах приводит к необходимости задавать поле нормалей для данного подмногообразия, и изучение свойств различных нормализаций является сложной геометрической задачей. Артуру Вердиевичу удалось найти удачную нормализацию, которая теперь известна в научной литературе как нормализация Нордена—Чакмазяна. Задача изучения геометрии подмногообразий в многомерных аффинных и проективных пространствах принадлежит к числу важнейших задач дифференциальной геометрии, и здесь нормализация Нордена—Чакмазяна играет существенную роль при решении многих конкретных задач. До конца шестидесятих годов А. В. Чакмазян использует в своих исследованиях классические тензорные методы, однако, изучив метод внешних форм, он успешно начинает применять его в своих исследованиях.

Одной из характерных черт А. В. Чакмазяна как ученого всегда было стремление заниматься новыми задачами. В начале 1970-х гг. дифференциально-геометрические исследования как советских, так и ряда зарубежных геометров постепенно привели к необходимости более глубокого изучения нормальных расслоений, присоединенных к подмногообразиям классических пространств. Работы Чакмазяна со второй половины семидесятих годов посвящены в основном этой тематике. Если в метрических пространствах такие задачи более или менее исследованы, то в пространствах без метрики их решение требует каждый раз оригинальных подходов и идей, и лишь использование современных методов геометрических исследований дает возможность продвинуться в нужном направлении. Требуется исключительное упорство, целеустремленность и настойчивость, чтобы разобраться в сложнейших конструкциях расслоений над подмногообразием в аффинном или проективном пространстве и найти эффективный подход для решения той или иной задачи. Артуру Вердиевичу этих качеств было не занимать, поэтому ему удалось решить много интересных красивых геометрических задач. В те же годы Артур Вердиевич написал несколько работ по теории три-тканей на многообразиях — его неожиданно увлекла эта красивая геометрическая теория, у истоков которой стояли Бляшке и Черн, и которая полностью оформилась в работах его друзей-математиков М. А. Акивиса и В. В. Гольдберга.

В повседневной жизни Артур Вердиевич был скромным, непритязательным и доброжелательным человеком, общительным, дружелюбным, его любили и ценили друзья и коллеги. По его собственным словам, ему повезло в жизни: он занимался своим любимым делом, у него была хорошая семья и много друзей. Нам всем будет его не хватать, светлая ему память.

М. А. Акивис, Jerusalem College of Technology, Mahon Lev, Israel

С. Х. Арутюнян, Армянский государственный педагогический университет имени Х. Абовяна

В. В. Гольдберг, New Jersey Institute of Technology, U.S.A.

Ю. Г. Лумисте, Tartu State University, Estonia

В. А. Мирзоян, Ереванский государственный технический университет, Армения

Б. А. Розенфельд, Pennsylvania State University, USA

А. М. Шелехов, Тверской государственный университет, Россия

### СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ АРТУРА ВЕРДИЕВИЧА ЧАКМАЗЯНА

1. Двойственная нормализация// Докл. АН Арм. ССР. — 1959. — 28, № 4. — С. 151–157.
2. О двойственно нормализованных поверхностях евклидова пространства// Докл. АН Арм. ССР. — 1959. — 29. — С. 3–8.
3. Об одном преобразовании двойственно нормализованной поверхности// Докл. АН Арм. ССР. — 1960. — 30. — С. 187–192.
4. О полярно-двойственно нормализованных поверхностях пространства  $K_n$ // Докл. АН Арм. ССР. — 1960. — 31. — С. 129–132.

5. К теории кривизны двумерных поверхностей четырехмерного пространства// Докл. АН Арм. ССР. — 1962. — 32. — С. 177–181.
6. Эволютные поверхности двумерной двойственно нормализованной  $D_2$  в  $E_4$ // Докл. АН СССР. — 1962. — 144. — С. 1233–1236.
7. О поверхностях  $D_m$  пространства  $K_n$ // Докл. АН Арм. ССР. — 1963. — 36. — С. 71–75.
8. О поверхностях  $D_m$  пространства  $E_{2m}$ // Докл. АН Арм. ССР. — 1963. — 37. — С. 49–53.
9. О двумерных пространствах  $D_2$ , вложенных в евклидово пространство  $E_4$ // Докл. АН Арм. ССР. — 1965. — 40. — С. 3–6.
10. О двумерной двойственно нормализованной полосе в четырехмерном аффинном пространстве  $A_4$ // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1966. — 7. — С. 289–295.
11. О гауссовом кручении двумерной двойственно нормализованной поверхности  $D_2$ , вложенной в  $E_4$ // Докл. АН Арм. ССР. — 1967. — 44, № 3. — С. 97–100.
12. К теории двумерных двойственно нормализованных поверхностей  $D^2$  в  $E_n$ // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1968. — 9. — С. 79–85.
13. К теории двойственно нормализуемых  $m$ -мерных поверхностей  $V_m$  в  $E_n$ // Докл. АН СССР. — 1961. — 196. — С. 538–540.
14. Некоторые классы дважды нормализованных поверхностей четырехмерного проективного пространства// Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1972. — 13. — С. 325–332 (совместно с В. В. Гольдбергом).
15. Плоская три-ткань в проективном пространстве// Докл. АН Арм. ССР. — 1973. — 56. — С. 263–268.
16. Геодезические три-ткани на двумерном аффинно связном многообразии// Докл. АН Арм. ССР. — 1974. — 59. — С. 136–140.
17. Подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем// Сб. статей, посвященных А. П. Нордену в связи с его семидесятилетием/ Изв. вузов. Сер. мат. — 1974. — 5 (144). — С. 148–157 (совместно с Ю. Г. Лумисте).
18. Подмногообразия с параллельным  $p$ -мерным подрасслоением нормального расслоения/ Тез. докл. VI Всес. конф. по совр. пробл. геом. — Вильнюс, 1975. — С. 249–250.
19. Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства, допускающих параллельное нормальное векторное поле// Докл. АН Арм. ССР. — 1975. — 60, № 3. — С. 137–143 (совместно с М. А. Акивисом).
20. О подмногообразиях евклидова пространства с плоской нормальной связностью// Докл. АН Арм. ССР. — 1976. — 62, № 2. — С. 75–81 (совместно с М. А. Акивисом).
21. Подмногообразия с параллельным  $p$ -мерным подрасслоением нормального расслоения// Изв. вузов. Сер. мат. — 1976. — 8 (171). — С. 107–110.
22. Подмногообразия проективного пространства с параллельным подрасслоением нормального расслоения/ Тез. докл. Всес. геом. конф. «50 лет неевклидовой геометрии». — Казань, 1976. — С. 209.
23. Нормализованное по Нордену подмногообразие с параллельным полем нормальных направлений в  $P^n$ // Докл. АН СССР. — 1977. — 236, № 4. — С. 816–819.
24. Об одном классе подмногообразий в  $V_c^n$  с параллельным  $p$ -мерным подрасслоением нормального расслоения// Мат. заметки. — 1977. — 22, № 4. — С. 477–483.
25. Нормализованное по Нордену подмногообразие  $V_m$  в  $P_n$  с параллельным нормальным подрасслоением// Мат. заметки. — 1977. — 22, № 5. — С. 649–662.
26. Подмногообразия пространства постоянной кривизны с параллельным подрасслоением нормального расслоения// Укр. геом. сб. — 1977. — 20. — С. 132–140.
27. Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства с плоской нормальной аффинной связностью// В сб.: «Дифференциальная геометрия». — Калинин, 1977. — С. 120–129.
28. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия  $V_m$  в  $P_n$ // Проблемы геометрии. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1978. — 10. — С. 55–74.
29. О подмногообразиях пространства постоянной кривизны с параллельным полем нормальных  $p$ -направлений// Tartu Riikl. Ul. Toirnitised. — 1978. — 22. — С. 137–145.
30. Нормализованное по Нордену подмногообразие с параллельным полем нормальных направлений в  $P_n$ // Изв. вузов. Сер. мат. — 1980. — 1. — С. 57–63.
31. Нормальная связность и подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем в пространстве постоянной кривизны// Проблемы геометрии. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1981. — 12. — С. 3–30 (совместно с Ю. Г. Лумисте).
32. О нормализованных подмногообразиях с плоской нормальной связностью в проективном пространстве// Мат. заметки. — 1983. — 33, № 2. — С. 281–287.
33. Аффинная геометрия нормализованного подмногообразия с параллельными полями нормальных  $p$ -направлений// Tartu Riikl. Ul. Toimitised Vih. — 1984. — 665. — С. 81–89.

34. О нормальной связности нормализованного многообразия плоскостей в проективном пространстве// Изв. вузов. Сер. мат. — 1984. — 7 (266). — С. 74–79.
35. Об оснащениях с плоской нормальной связностью для подмногообразий аффинного пространства// Изв. вузов. Сер. мат. — 1987. — 1 (296). — С. 48–53.
36. Локальная структура подмногообразия  $M$  с параллельным векторным полем// Topics in Differential Geometry. — Debrecen, 1984. — С. 245–254.
37. Антиинвариантное подмногообразие кэлерова пространства с параллельным образом касательного расслоения// Изв. вузов. Сер. мат. — 1988. — 3. — С. 50–55.
38. Класс антиинвариантных подмногообразий в плоском кэлеровом пространстве// Изв. вузов. Сер. мат. — 1989. — 3. — С. 69–73.
39. Нормальная связность в геометрии нормализованных подмногообразий аффинного пространства// Проблемы геометрии. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1989. — 21. — С. 93–107.
40. Нормальная связность в геометрии подмногообразий. — Ереван: Арм. гос. ун-т им. Х. Абовяна, 1990.
41. Ковариантная производная и параллелизм второй фундаментальной формы нормализованного подмногообразия в проективном пространстве// Eesti Tead. Akad. Toirn., Fuus. Mat. — 1991. — 40, № 1. — С. 9–16 (совместно с Ю. Г. Лумисте).
42. Об одном классе CR-подмногообразий кэлерова многообразия// Изв. вузов. Сер. мат. — 1991. — 5. — С. 66–71.
43. Гиперповерхности с параллельной кубической формой в аффинном пространстве// Изв. вузов. Сер. мат. — 1994. — 8. — С. 67–71.
44. О гиперрасслоениях в соответствии Петерсона аффинного пространства// Изв. вузов. Сер. мат. — 1998. — 7. — С. 70–76.
45. Двойственно нормализованные подмногообразия и гиперповерхности кривизны// Rend. Sem. Mat. Messina, Ser. II. — 2001/2002. — 8. — С. 13–23 (совместно с М. А. Акивисом).
46. Индуцированные связности на подмногообразиях// Изв. вузов. Сер. мат. — 2004. — 10. — С. 3–18 (совместно с М. А. Акивисом и В. В. Гольдбергом).

## КЛАССИФИКАЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ, ОБРАЗОВАННЫХ ПУЧКАМИ ОКРУЖНОСТЕЙ

© 2005 г. А. М. ШЕЛЕХОВ

Аннотация. Доказано, что регулярных круговых три-тканей, кроме перечисленных в работе [14], не существует.

### СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| Введение . . . . .   | 7  |
| 1. Замечание о границах односвязных областей регулярной три-ткани . . . . .                              | 10 |
| 2. Пучки окружностей, для которых граничная кривая $\Gamma$ вырождается . . . . .                        | 13 |
| 3. Пучки окружностей, для которых граничная кривая $\Gamma$ распадается . . . . .                        | 16 |
| 4. Классификация круговых тканей параболического типа . . . . .  | 21 |
| 5. Классификация круговых тканей в случае, когда хотя бы два пучка не принадлежат одной связке . . . . . | 24 |
| Список литературы . . . . .  | 27 |

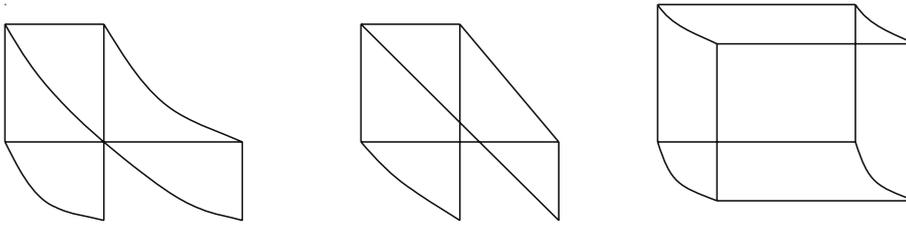
### ВВЕДЕНИЕ

Криволинейная три-ткань образована тремя гладкими семействами кривых на плоскости, причем в каждой точке области определения ткани три проходящие через нее кривые (по одной из каждого семейства) попарно трансверсальны. Последнее обстоятельство означает, что уравнение ткани, связывающее параметры линий, проходящих через одну точку, локально разрешимо относительно каждой из трех переменных. Таким образом, с каждой криволинейной три-тканью связана бинарная операция, обладающая свойством локальной двусторонней обратимости, — гладкая локальная квазигруппа.

Основное свойство три-ткани — трансверсальность линий — сохраняется при локально диффеоморфной замене параметров в семействах кривых, образующих ткань. Совокупность трех таких локальных диффеоморфизмов называется изотопией или изотопическим преобразованием. Изотопию можно рассматривать как локально диффеоморфное отображение заданной три-ткани на другую три-ткань, локально ей эквивалентную. Это наиболее широкое отношение эквивалентности, сохраняющее трансверсальность.

В. Бляшке и его коллеги по гамбургскому семинару (1920-е гг.) первыми обратили внимание на связь геометрических свойств три-тканей с алгебраическими свойствами соответствующей бинарной операции, получив на этом пути много красивых результатов, см. обзоры [3, 1, 17]. Самый простой и самый важный из них связан с понятием *регулярности* (или *шестиугольности*, или *параллелизуемости*).

Рассмотрим самую простую ткань — параллельную, образованную тремя семействами параллельных прямых. При подходящем выборе координат уравнение такой ткани запишется в виде  $z = x + y$  (напомним, что уравнение три-ткани связывает параметры линий ткани, проходящих через одну точку). Таким образом, параллельной ткани соответствует абелева группа (или квазигруппа, ей изотопная).

Рис. 1. Фигуры  $H$ ,  $T$ ,  $R$ 

Всякая ткань, эквивалентная параллельной, называется *параллелизуемой* или *регулярной*; ей также отвечает гладкая локальная квазигруппа, изотопная абелевой группе. Уравнение параллелизуемой ткани имеет вид  $\gamma(z) = \alpha(x) + \beta(y)$ , где  $x \rightarrow \alpha(x)$ ,  $y \rightarrow \beta(y)$ ,  $z \rightarrow \gamma(z)$  — локальные диффеоморфизмы.

На параллельных (а следовательно, и на параллелизуемых) тканях и только на них замыкаются всевозможные (достаточно малые) конфигурации, образованные линиями ткани — шестиугольные, Томсена, Рейдемейстера и т. д. (см. рис. 1). Поэтому такие ткани называются еще *шестиугольными* или *гексагональными*. Каждому из перечисленных условий замыкания отвечает соответствующее свойство абелевой группы и всех ее изотопов: моноассоциативность ( $x^2x = xx^2$ ), коммутативность и ассоциативность.

Легко проверяется, что три-ткань, образованная тремя пучками прямых, эквивалентна параллельной три-ткани, то есть также является регулярной. Но, если так можно выразиться, уже следующая по сложности три-ткань, образованная тремя пучками окружностей (в [25] мы предложили называть ее *круговой тканью*, или, короче,  *$S$ -тканью*), не является, вообще говоря, регулярной. В 1953 году на одной из своих лекций в Стамбуле Бляшке предложил найти все классы регулярных тканей, образованных пучками окружностей, и указал один из таких классов (три эллиптических пучка с попарно совпадающими вершинами). По существу, пишет он в своей книге [4], задача сводится к некоторому алгебраическому уравнению. Но алгебраическое уравнение, о котором говорил Бляшке, оказалось слишком большой степени и слишком сложным для анализа, поэтому полностью эта задача не была решена до сих пор. В настоящей работе мы впервые приводим ее полное решение.

В доказательствах мы широко используем проективную интерпретацию Дарбу многообразия окружностей на плоскости. В ней точки плоскости (окружности нулевого радиуса) изображаются точками некоторой овальной квадрики трехмерного проективного пространства  $P^3$ , которая называется квадрикой Дарбу (мы обозначаем ее  $Q$ ); окружности вещественного и чисто мнимого радиуса изображаются точками внешней и внутренней (по отношению к квадрике Дарбу) области пространства  $P^3$  соответственно; пучки окружностей — прямыми в  $P^3$ , связки окружностей — плоскостями. При этом гиперболические, эллиптические и параболические пучки изображаются, соответственно, прямыми, пересекающимися, не пересекающимися и касающимися квадрики Дарбу, параболические связки окружностей — плоскостями, касающимися квадрики Дарбу, ортогональные пучки окружностей — прямыми, сопряженными относительно квадрики Дарбу. Точки, принадлежащие окружности  $C$ , изображаются точками квадрики Дарбу, лежащими на пересечении этой квадрики с плоскостью, сопряженной точке  $C$ , и т. д. Три пучка окружностей, образующих три-ткань, изображаются, следовательно, тремя прямыми (мы будем обозначать их  $\ell_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ), а три окружности ткани из разных пучков, проходящие через точку  $M$ , изображаются тремя точками прямых  $\ell_\alpha$ , лежащими в одной и той же касательной плоскости к квадрике Дарбу в точке  $M$ .

Разными авторами в разное время были найдены различные классы круговых тканей. Перечислим их, следуя работе В. Лазаревой [14], где эти классы описаны также и в терминологии проективного пространства. При этом класс 6 мы разбиваем на 2 подкласса, поскольку в контексте нашего подхода к классификации они принципиально различны.

### Классификация регулярных круговых три-тканей по В. Б. Лазаревой.

**Класс 0.** Три пучка окружностей принадлежат одной связке. (Прямые  $\ell_\alpha$  принадлежат одной плоскости).

#### Класс 1.

- 1.1. Три гиперболических пучка с общей мнимой окружностью. В каждом пучке есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков.
- 1.2. Два эллиптических пучка и один гиперболический с общей вещественной окружностью. В каждом пучке есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков. (Прямые  $\ell_\alpha$  проходят через одну точку и являются ребрами тетраэдра, автополярного относительно квадрики Дарбу).

**Класс 2.** Два пучка ортогональны, в каждом из них есть окружность, принадлежащая третьему пучку. (Прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  сопряжены относительно квадрики Дарбу, а третья прямая их пересекает).

**Класс 3.** Два ортогональных параболических пучка, а третий — гиперболический, причем одна из его вершин совпадает с общей вершиной параболических пучков. (Прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  сопряжены и касаются квадрики Дарбу в точке  $A$ , через которую проходит третья прямая).

**Класс 4.** Пример Бляшке: все пучки эллиптические и определяются парами вершин  $(A, B)$ ,  $(B, C)$ ,  $(C, A)$ . (Прямые  $\ell_\alpha$  проходят через одну точку, а плоскости, содержащие пары этих прямых, касаются квадрики Дарбу).

**Класс 5.** Два эллиптических пучка определяются точками  $A, B$  и  $B, C$ , нулевые окружности третьего — гиперболического — пучка есть точки  $A$  и  $C$ . (Прямые  $\ell_1, \ell_2$  и прямая  $\tilde{\ell}_3$ , сопряженная прямой  $\ell_3$ , пересекаются в одной точке. Плоскости, определяемые парами прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$ ,  $\ell_1$  и  $\tilde{\ell}_3$ ,  $\ell_2$  и  $\tilde{\ell}_3$ , касаются квадрики Дарбу).

#### Класс 6.

- 6.1. Два параболических пучка, не принадлежащих одной связке, третий пучок эллиптический, причем его вершины совпадают с вершинами параболических пучков. (Две непересекающиеся прямые касаются квадрики Дарбу, а третья сопряжена прямой, соединяющей точки касания).
- 6.2. Два параболических пучка, принадлежащие одной связке, третий пучок эллиптический, причем его вершины совпадают с вершинами параболических пучков. (Две пересекающиеся прямые касаются квадрики Дарбу, а третья сопряжена прямой, соединяющей точки касания).

**Класс 7.** Эллиптический пучок имеет вершины  $A$  и  $B$ , точки  $B$  и  $C$  служат нулевыми окружностями гиперболического пучка, а третий — параболический — пучок имеет вершину в точке  $A$ . При этом общая окружность эллиптического и гиперболического пучков ортогональна окружности, проходящей через точки  $A, B$  и  $C$ . (Прямая  $\ell_1$  лежит в касательной плоскости к квадрике Дарбу, проведенной в точке пересечения последней с прямой  $\ell_2$ . Прямая  $\ell_3$  касается квадрики Дарбу и пересекает прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$ ).

Класс 4, как уже сказано, впервые описан В. Бляшке, классы 2 и 3 — Р. С. Балабановой в [2], классы 5 и 7 — в диссертации Эрдогана [19], классы 1 и 6 — В. Б. Лазаревой в [5]. Она нашла также все перечисленные в [14] круговые ткани, исходя из более общей задачи, а именно, рассматривая три-ткань  $W$ , высекаемую на произвольной гладкой поверхности  $V$  тремя пучками плоскостей. Используя метод внешних форм и подвижного репера, она выразила кривизну ткани  $W$  через асимптотическую форму и тензор Дарбу поверхности. Круговая ткань в этой конструкции возникает в том случае, когда поверхность  $V$  становится квадратикой, то есть совпадает со своей сопрягающейся квадратикой Дарбу.

Как показано в [25], уравнение круговой ткани может быть записано в наиболее общем виде в следующей симметричной форме:

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (0.1)$$

Здесь уравнения пучков окружностей, образующих три-ткань (обозначим их  $\lambda_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ), записаны в виде

$$S_{11} + x_1 S_{12} = 0, \quad S_{21} + x_2 S_{22} = 0, \quad S_{31} + x_3 S_{32} = 0, \quad (0.2)$$

где  $S_{\alpha 1}$  и  $S_{\alpha 2}$  — базисные окружности пучка  $\lambda_\alpha$ ,  $x_\alpha$  — параметр этого пучка. Уравнение базисной окружности, например,  $S_{\alpha 1}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} S_{\alpha 1} &\equiv a_{\alpha 1}(x^2 + y^2) + b_{\alpha 1}x + c_{\alpha 1}y + d_{\alpha 1} = 0, \\ d_\alpha &= d_{\alpha 1} + x_\alpha d_{\alpha 2}, \quad a_\alpha = a_{\alpha 1} + x_\alpha a_{\alpha 2}, \\ b_\alpha &= b_{\alpha 1} + x_\alpha b_{\alpha 2}, \quad c_\alpha = c_{\alpha 1} + x_\alpha c_{\alpha 2}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

В [25] обсуждается структура уравнения (0.1) и различные подходы к проблеме Бляшке. В частности, указывается, что регулярной круговой ткани соответствует в трехмерном проективном пространстве некоторая конфигурация, обобщающая известную конфигурацию Паппа—Бриансона на проективной плоскости (к ней мы вернемся в конце статьи).

В работах [13, 23, 21] рассматриваются различные многомерные аналоги задачи Бляшке. Три-ткани, образованные пучками коник, изучаются в [24, 26]. В [24] рассматривается три-ткань, высекаемая на произвольной кубической поверхности плоскостями трех пучков, оси которых лежат на этой поверхности. Такие ткани классифицированы по типу особых точек кубических поверхностей.

В [26] описаны три-ткани, которые получаются путем проектирования на плоскость семейств коник, лежащих на некоторой кубической поверхности. Найдено 15 типов таких тканей, в каждом из классов выделен подкласс регулярных тканей и подкласс тканей, эквивалентных круговым тканям.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

**Теорема 0.1.** *Иных классов регулярных круговых три-тканей, кроме перечисленных выше в классификации Лазаревой, не существует.*

Несколько слов об истории вопроса. Эрдоган считал, что нашел в своей диссертации [19] (результаты которой были опубликованы только в 1989 г. в [20]) все классы регулярных круговых тканей. Однако в 1986 г. в [15] был найден еще один класс (6.1 по классификации Лазаревой). В [20] Эрдоган уже доказывает, что иных классов, помимо перечисленных в [14], не существует. Но проверить это утверждение не представляется возможным, поскольку одно из основных предложений в [20], требующее сложных вычислений, приведено без доказательства. В настоящей работе мы даем прозрачное геометрическое доказательство теоремы 0.1.

## 1. ЗАМЕЧАНИЕ О ГРАНИЦАХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ РЕГУЛЯРНОЙ ТРИ-ТКАНИ

Прежде всего напомним, что в достаточно малой окрестности регулярной точки параллелизуемой три-ткани локальные координаты можно выбрать так, что уравнение этой ткани будет иметь такой же вид, как и уравнение параллельной ткани, то есть  $z = x + y$  или

$$x + y + z = 0. \quad (1.1)$$

Пусть теперь  $W$  — некоторая произвольная три-ткань, не обязательно параллелизуемая. Согласно определению ткани, если ее слои трансверсальны в некоторой точке, то и в соседних точках трансверсальность сохраняется. Однако в целом, то есть во всей области их определения слоения ткани могут не быть трансверсальными. Назовем множество точек, в которых трансверсальность нарушается, *граничными кривыми* ткани, поскольку они ограничивают односвязные области, в которых слоения ткани попарно трансверсальны. Всего на ткани имеются три граничные кривые

$\Gamma_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Если слоения ткани заданы уравнениями  $u_\alpha(x, y) = x_\alpha = \text{const}$ , то граничные кривые определяются следующими уравнениями:

$$\Gamma_\alpha : \begin{vmatrix} \frac{\partial u_\beta}{\partial x} & \frac{\partial u_\beta}{\partial y} \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial x} & \frac{\partial u_\gamma}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

причем индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  различны и принимают значения 1, 2, 3.

Поскольку уравнения граничных кривых  $\Gamma_\alpha$  получаются обращением в нуль миноров одной и той же матрицы, то в случае, если в окрестности некоторой точки две из этих кривых совпадают, то совпадают все три. (Геометрически это очевидно: если в некоторой точке линия одного из семейств касается линий двух других семейств, то последние две также касаются друг друга в этой точке.)

Вообще говоря, граничные кривые не имеют общей гладкой части. Поэтому все криволинейные ткани, в том числе — и регулярные, можно разделить на два типа: *ткани непараболического типа*, у которых кривые  $\Gamma_\alpha$  не имеют общей гладкой части, и *ткани параболического типа*, у которых граничные кривые имеют общий гладкий кусок.

Пусть в каждой точке некоторой области  $U$  два семейства линий ткани  $W$  трансверсальны. Тогда в области  $U$  локальные координаты можно выбрать так, что уравнение этой ткани будет иметь вид

$$z = f(x, y), \tag{1.2}$$

причем линии первых двух слоения этой ткани будут задаваться уравнениями  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ , а линии третьего слоения уравнением  $f = \text{const}$ . Ясно, что в области  $U$  кривой  $\Gamma_3$  не существует, а граничные кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  определяются соответственно уравнениями

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, граничные кривые не имеют общей гладкой части, т. е. рассматриваемая ткань является тканью непараболического типа.

В тех точках линии  $\Gamma_1$ , где  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ , нормаль к линии уровня функции  $f$  вертикальна, т.е. линия третьего семейства ткани касается горизонтальной линий ткани  $y = \text{const}$ . Аналогично, в тех точках линии  $\Gamma_2$ , где  $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ , линии третьего семейства касаются вертикальных линий  $x = \text{const}$ .

Известно [4], что три-ткань  $W$ , определяемая уравнением (1.2), будет регулярной тогда и только тогда, когда это уравнение имеет вид

$$z = f(\alpha(x) + \beta(y)). \tag{1.3}$$

Функция, стоящая в правой части, характеризуется условием Сен-Робера:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \ln \frac{f_x}{f_y} \right) = 0, \tag{1.4}$$

которое эквивалентно тому, что кривизна ткани равна нулю [4].

Рассмотрим регулярную ткань  $W$ , заданную уравнением (1.3). Линии этой ткани определяются уравнениями  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ , и  $\alpha(x) + \beta(y) = c = \text{const}$ . Граничные кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  этой ткани определяются уравнениями  $\alpha'(x) = 0$  и  $\beta'(y) = 0$  соответственно. Выясним, какой вид имеют решения этих уравнений.

Допустим, уравнение  $\alpha'(x) = 0$  имеет вещественное решение  $x = x_0$ . Поставив это решение в уравнение третьего семейства, получим соотношение

$$\alpha(x_0) + \beta(y) = c = \text{const}, \tag{1.5}$$

связывающее координату  $y$  точки граничной кривой и параметр  $c$  линии третьего семейства.

Если в соотношении (1.5) отсутствует переменная  $y$ , то оно удовлетворяется при некоторых значениях  $c$  и при любом  $y$ . Это означает, что линия  $x = x_0$  первого семейства ткани является

компонентой тех линий третьего семейства ткани, которые соответствуют найденным значениям параметра  $c$ .

Если в соотношении (1.5) присутствуют обе переменные, то в окрестности каждого решения  $(y, c)$ , где  $\beta'(y) \neq 0$ , существует гладкий кусок граничной кривой, текущая точка которого имеет координаты  $x_0, y(c)$ . Но это часть вертикальной линии  $x = x_0$ . С другой стороны, поскольку в рассматриваемых точках  $\alpha'(x) = 0$ , в них касаются линии второго и третьего семейств ткани.

Аналогичным образом доказывается, что всякий гладкий кусок граничной кривой, определяемой уравнением  $\beta'(y) = 0$ , есть либо линия второго семейства, принадлежащая некоторым линиям третьего семейства, либо часть линии второго семейства, в точках которой касаются линии первого и третьего семейства.

Поскольку уравнение (1.3) симметрично относительно переменных  $x, y, z$ , то его можно разрешить относительно любой из этих переменных. Следовательно, сделанный вывод будет верен и для граничной кривой первых двух семейств регулярированной ткани. Итак, доказана

**Теорема 1.1** (о границах регулярированной три-ткани непараболического типа). *Любой гладкий кусок граничной кривой  $\Gamma_\alpha$  регулярированной три-ткани  $W$  есть либо линия семейства  $\lambda_\alpha$  этой ткани, принадлежащая одновременно некоторой линии какого-то другого семейства ткани  $W$ , либо часть линии семейства  $\lambda_\alpha$ , в точках которой касаются линий из семейств  $\lambda_\beta$  и  $\lambda_\gamma$  ткани  $W$ .*

**Замечание 1.1.** Для нерегулярных тканей, заданных уравнением (1.2) общего вида, этот результат, вообще говоря, неверен. Поэтому теорема 1.1, при всей ее простоте, имеет принципиальное значение: оказывается, что хотя теория три-тканей существенно локальна, условие регулярности связано со строением границ области определения, что уже является предметом глобальной теории. При этом очевидно, что теорема 1.1 допускает многомерный аналог.

**Замечание 1.2.** В теореме 1.1 речь идет только о регулярных тканях непараболического типа. Строение граничных кривых регулярных тканей параболического типа описать сложно, поскольку, если мы, как и выше, запишем уравнение ткани в наиболее простом виде (1.2), то в соответствующей области определения ткани граничных кривых не окажется.

Приведем два примера регулярированной ткани параболического типа, слоения которых задаются, соответственно, уравнениями

$$u_1(f(x, y) - g(x, y)) = c_1, \quad u_2(g(x, y) - h(x, y)) = c_2, \quad u_3(h(x, y) - f(x, y)) = c_3,$$

и

$$u_1(x, y) + c_1 u_0(x, y) = 0, \quad u_2(x, y) + c_2 u_0(x, y) = 0, \quad u_3(x, y) + c_3 u_0(x, y) = 0.$$

**Замечание 1.3.** Некоторое утверждение, обратное теореме 1.1, сформулировать, вообще говоря, можно, но для решения рассматриваемой проблемы оно не требуется.

**Замечание 1.4.** Теорема 1.1 будет верна и в комплексной области, где линии ткани определяются теми же уравнениями  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  и  $f = \text{const}$ , но постоянные могут быть любыми комплексными числами (удовлетворяющими уравнению (1.2)).

**Замечание 1.5.** Приведем набросок геометрического доказательства теоремы 1.1.

Пусть два первых семейства линий ткани образуют декартову сеть, и  $\ell$  — некоторая линия третьего семейства этой ткани. Обозначим через  $\varphi$  угол, который линия  $\ell$  образует с горизонтальной линией ткани в некоторой точке  $M$ . При движении точки  $M$  по этой горизонтальной линии ткани угол  $\varphi$  непрерывно меняется, и пусть в какой-то точке  $M_0$ , лежащей на вертикали  $x = a$ , он оказался равным нулю. Тогда точка  $M_0$  оказывается на одной из граничных кривых  $\Gamma_\alpha$ . Если рассматриваемая ткань является регулярированной, то в силу замыкания шестиугольных фигур (см. рис. 1) при движении точки  $M$  по другой горизонтальной линии, близкой к первой, угол  $\varphi$  будет также стремиться к нулю и обратится в нуль на той же вертикали  $x = a$ .

Рассмотрим теперь круговую три-тканю  $W$ , заданную тремя пучками окружностей (0.2).

Пучок окружностей образует слоение (т.е. его уравнение можно записать в виде  $u(x, y) = \text{const}$ ) на всей плоскости, за исключением точек, которые являются его вершинами (вершинами

гиперболического пучка, как это принято, мы называем его нулевые окружности). Как видно из уравнений (0.2), функции  $u(x, y)$ , определяющие слоения круговой ткани, являются дробно-квадратичными. Вычисления показывают, что в общем случае граничная кривая двух пучков, образованная точками касания окружностей этих пучков, является кривой четвертого порядка специального вида:

$$A(x^2 + y^2)^2 + Bx(x^2 + y^2) + Cy(x^2 + y^2) + Dx^2 + Ey^2 + Fxy + Gx + Hy + L = 0.$$

В этой работе мы находим все регулярные круговые три-ткани, используя теорему 1.1. Задача рассматривается отдельно для тканей непараболического и параболического типа.

Что касается регулярных круговых тканей непараболического типа, то, согласно теореме 1.1, их граничными кривыми могут быть, во-первых, окружности, принадлежащие двум (или трем) пучкам одновременно, и, во-вторых, такие окружности пучков, в точках которых касаются окружности двух других пучков.

Иными словами, каждая из граничных кривых четвертого порядка должна распадаться на пару окружностей (может быть, нулевого или чисто мнимого радиуса). Поэтому применительно к круговой ткани теорема 1.1 выглядит следующим образом.

**Теорема 1.2** (о границах регулярной круговой три-ткани непараболического типа). *Граничными кривыми регулярной круговой три-ткани непараболического типа могут быть только окружности — вещественные, мнимые или нулевого радиуса (точки). При этом, если граничная окружность  $\Gamma_\alpha$  не является точкой или общей окружностью двух пучков, то она принадлежит пучку  $\lambda_\alpha$  и в ее точках касаются окружности двух других пучков.*

В связи с этим классификация регулярных круговых три-тканей непараболического типа сводится к следующей задаче: описать все такие пары пучков окружностей, для которых граничная кривая  $\Gamma$ , образованная точками касания окружностей этих пучков, распадается на две окружности.

На проективной модели образом граничной окружности  $\Gamma_\alpha$  будет точка, лежащая на прямой  $\ell_\alpha$  — образе пучка  $\lambda_\alpha$ . Общая окружность двух пучков изображается общей точкой соответствующих прямых  $\ell_\alpha$ .

Круговые три-ткани параболического типа будут описаны в разделе 4.

Заметим, что граничные кривые круговой ткани (не используя сам термин «граничные кривые») рассматривала еще В. Б. Лазарева в своей диссертации «Три-ткани на поверхностях в триаксиальном пространстве». В частности, она отметила, что граничная кривая двух пучков, принадлежащих одной связке, распадается на две окружности. Однако, ввиду отсутствия теоремы 1.1, она не использовала указанное свойство граничных кривых для классификации регулярных круговых тканей.

## 2. Пучки окружностей, для которых граничная кривая $\Gamma$ вырождается

В этом разделе мы опишем такие пары пучков окружностей, у которых по крайней мере одна из компонент граничной кривой вырождается в точку.

Сначала опишем кривую  $\Gamma$ , используя интерпретацию Дарбу. В этой интерпретации два пучка окружностей — две прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в проективном пространстве  $P^3$ . Две окружности пучков касаются друг друга тогда и только тогда, когда соответствующие им точки  $M_1$  и  $M_2$  прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  лежат на прямой, касающейся квадрики Дарбу  $Q$ . Очевидно, что при общем расположении прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  для каждой точки  $M_1$  прямой  $\ell_1$ , лежащей вне квадрики  $Q$ , можно найти две соответствующие ей точки  $M_2$  и  $M'_2$  на  $\ell_2$ : надо пересечь квадратик  $Q$  плоскостью  $[M_1\ell_2]$  и к полученной в пересечении конике провести касательные из точки  $M_1$ . При движении точки  $M_1$  по прямой  $\ell_1$  точки касания прямых  $M_1M_2$  и  $M_1M'_2$  с квадратикой  $Q$  будут описывать две части кривой  $\gamma$ , которая является образом кривой  $\Gamma$  при отображении Дарбу. Обозначим эти части  $\gamma'$  и  $\gamma''$ , а их прообразы —  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ . Эти части не изолированы, они имеют общие точки там, где прямые  $M_1M_2$  и  $M_1M'_2$  совпадают — это будут точки касания квадрики  $Q$  и плоскостей, проходящих через прямую  $\ell_2$ .

Допустим, одна из компонент граничной кривой  $\Gamma$ , например,  $\Gamma'$ , вырождается в точку. Тогда ее образ  $\gamma'$  в проективном пространстве есть точка, лежащая на квадрике Дарбу  $Q$ , причем, согласно определению граничной кривой, все касательные к квадрике  $Q$  в точке  $\gamma'$  должны пересекать прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$ . Очевидно, возможны только три случая расположения этих прямых: обе прямые лежат в касательной плоскости  $T_{\gamma'}$  к  $Q$ ; одна из них, например,  $\ell_1$ , лежит в  $T_{\gamma'}$ , а  $\ell_2$  проходит через  $\gamma'$ , но не лежит, вообще говоря, в плоскости  $T_{\gamma'}$ ; обе прямые пересекают  $Q$  в точке  $\gamma'$ , но не лежат, вообще говоря, в плоскости  $T_{\gamma'}$ .

В первом случае, поскольку обе прямые лежат в одной плоскости, они имеют общую точку  $D$ , которая является образом общей окружности  $S_0$  этих двух пучков. Другая компонента граничной кривой есть точка  $\Gamma'$  — вершина параболической связки окружностей, которой принадлежат оба пучка. Таким образом, граничная кривая представляет собой в данном случае точку  $\Gamma'$  и окружность  $S_0$ , причем, поскольку плоскость, полярно сопряженная точке  $D$  относительно квадрики Дарбу, проходит через точку  $\gamma'$ , то точка  $\Gamma'$  лежит на окружности  $S_0$ .

В третьем случае ситуация аналогичная.

Во втором случае, если прямая  $\ell_2$  не касается квадрики  $Q$  в точке  $\gamma'$  (иначе получаем подслучай первого случая), возможны 2 варианта:

- (а)  $\ell_2$  пересекает  $Q$  еще в одной точке, обозначим ее  $g$ , и прямая  $\ell_1$  лежит в касательной плоскости  $T_g$  к квадрике  $Q$ ;
- (б)  $\ell_2$  пересекает  $Q$  еще в одной точке  $g$ , но прямая  $\ell_1$  не лежит в касательной плоскости  $T_g$ .

В случае (а) прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  являются полярно сопряженными относительно квадрики Дарбу  $Q$ , а граничная кривая вырождается в пару точек — прообразы точек  $\gamma''$  и  $g$ .

Исследуем кривую  $\gamma''$  в случае (б). Напомним, что в этом случае прямая  $\ell_2$  пересекает квадрику Дарбу в точках  $\gamma'$  и  $g$ , а прямая  $\ell_1$  лежит в касательной плоскости  $T_{\gamma'}$ .

Обозначим  $\gamma' = A_3$ ,  $g = A_4$ , тогда  $\ell_2 = A_3A_4$ . Касательная плоскость к квадрике  $Q$  в точке  $g$  пересекает прямую  $\ell_1$  в некоторой точке, обозначим ее  $A_1$ . По построению, точка  $A_1$  полярно сопряжена точкам  $A_3$  и  $A_4$  (относительно  $Q$ ). Обозначим далее через  $A_2$  точку прямой  $\ell_1$ , сопряженную точке  $A_1$ , и найдем в репере  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , уравнение, определяющее кривую  $\gamma''$ .

Пусть квадрика Дарбу задается в выбранном репере уравнением

$$g_{ij}x^i x^j = 0. \quad (2.1)$$

Соответствующую билинейную симметричную форму  $g_{ij}x^i y^j$  обозначим, как обычно,  $(AB)$ , где  $A(x^i)$ ,  $B(y^j)$ . Тогда в силу выбора репера  $g_{ij} = (A_i A_j)$  и

$$g_{33} = g_{44} = 0, \quad g_{12} = 0, \quad g_{13} = g_{14} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad (2.2)$$

так что уравнение квадрики  $Q$  принимает вид

$$g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + 2g_{24}x^2 x^4 + 2g_{34}x^3 x^4 = 0. \quad (2.3)$$

Пусть  $M_1 = A_1 + uA_2$  — произвольная точка прямой  $\ell_1$  и  $M_2 = A_3 + vA_4$  — произвольная точка прямой  $\ell_2$ , отличная от точки  $A_3$  ( $v \neq 0$ ). Предположим, что прямая  $M_1M_2$  касается квадрики  $Q$  в точке  $M = M_1 + tM_2 = A_1 + uA_2 + t(A_3 + vA_4)$ . Тогда координаты точки  $M$  удовлетворяют уравнению (2.3), что дает соотношение

$$g_{11} + g_{22}u^2 + 2g_{24}tuv + 2g_{34}t^2v = 0. \quad (2.4)$$

Поскольку  $M$  — точка касания, то дискриминант уравнения (2.4) относительно  $t$  равен нулю, что дает, так как  $v \neq 0$ :

$$g_{24}^2 u^2 v - 2g_{34}(g_{11} + g_{22}u^2) = 0. \quad (2.5)$$

Обозначим рассмотренное соответствие, которое устанавливается между прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$  касательными к квадрике Дарбу, через  $\Phi$ . Тогда уравнение (2.5) есть уравнение этого соответствия. Прямые, соединяющие соответствующие точки  $M_1 = A_1 + uA_2$  и  $M_2 = A_3 + vA_4$ , касаются квадрики Дарбу вдоль кривой  $\gamma''$ , которая и является образом кривой  $\Gamma''$ . Текущая точка кривой  $\gamma''$

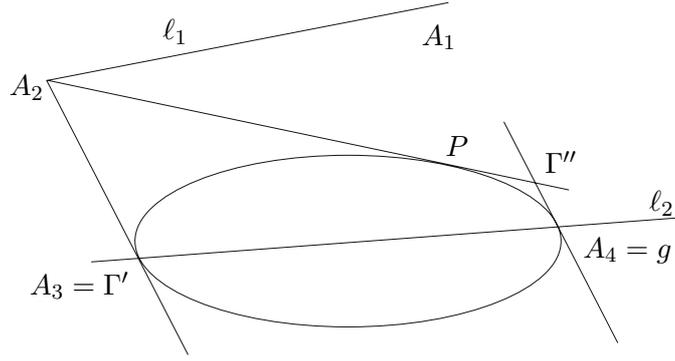


Рис. 2

имеет вид  $M = A_1 + uA_2 + t(A_3 + vA_4)$ , причем параметр  $t$  находим из уравнения (2.4) при условии (2.5):

$$t = -\frac{g_{24}u}{2g_{34}}. \quad (2.6)$$

Докажем, что кривая  $\Gamma''$  является окружностью. Поскольку при отображении Дарбу образом окружности является точка, то достаточно показать, что в  $P^3$  существует точка (обозначим ее также  $\Gamma''$ ), сопряженная всем точкам кривой  $\gamma''$ . Это будет означать, что кривая  $\gamma''$  является коникой — сечением квадрики Дарбу плоскостью, полярно сопряженной точке  $\Gamma''$ .

Обозначим координаты точки  $\Gamma''$  через  $x^i$ , тогда условие сопряженности  $(\Gamma'', M) = 0$  с учетом (2.6) имеет вид

$$2g_{34}(g_{11}x^1 + g_{22}ux^2 + g_{24}ux^4) - g_{24}u(g_{24}vx^2 + g_{34}x^4 + g_{34}vx^3) = 0. \quad (2.7)$$

Это соотношение должно выполняться для всех точек кривой, то есть при любых  $u$  и  $v$ . С другой стороны,

- (а)  $g_{34} \neq 0$ , так как прямая  $\ell_2$  пересекает квадрику Дарбу и точки  $A_3$  и  $A_4$  различны;
- (б)  $g_{11} \neq 0$ , так как точка  $A_1$  сопряжена точкам  $A_3$  и  $A_4$  и поэтому не может лежать на квадрике;
- (в)  $g_{24} \neq 0$ , иначе прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  сопряжены, этот случай рассмотрен выше.

С учетом сделанных замечаний из (2.7) получаем соотношения

$$x^1 = 0, \quad 2g_{22}x^2 + g_{24}x^4 = 0, \quad g_{24}x^2 + g_{34}x^3 = 0,$$

из которых находим искомую точку  $\Gamma''$ :

$$\Gamma'' = g_{24}g_{34}A_2 - g_{24}^2A_3 - 2g_{22}g_{34}A_4. \quad (2.8)$$

Непосредственно проверяется, что  $(\Gamma'', A_1) = 0$ ,  $(\Gamma'', A_4) = 0$ , то есть точка  $\Gamma''$  полярно сопряжена точкам  $A_1$  и  $A_4$ .

Однако эти два свойства еще не вполне определяют положение точки  $\Gamma''$ . Покажем, что прямая  $A_2\Gamma''$  касается квадрики Дарбу. Произвольная точка  $P$  этой прямой записывается в виде  $P = tA_2 + g_{24}^2A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4$ . Если  $P$  принадлежит  $Q$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению (2.3), что дает соотношение

$$g_{22}t^2 + 4g_{24}g_{34}g_{22}t + 4g_{24}^2g_{34}^2g_{22} = 0.$$

Это уравнение имеет двойной корень  $t = -2g_{24}g_{34}$ , следовательно, прямая  $A_2\Gamma''$  касается квадрики Дарбу в точке  $P = -2g_{24}g_{34}A_2 + g_{24}^2A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4$ . Иными словами,  $\Gamma''$  есть точка пересечения двух касательных к квадрике Дарбу, лежащих в плоскости  $[A_2A_3A_4]$ : одна касательная проведена в точке  $A_4$ , другая проведена из точки  $A_2$  (рис. 2). По-другому можно сказать, что точка  $\Gamma''$  принадлежит трем плоскостям: касательной плоскости к квадрике Дарбу, проходящей через прямую  $\ell_1$ ; плоскости  $[A_2A_3A_4]$ , сопряженной точке  $A_1$  — единственной точке, лежащей на прямой  $\ell_1$  и сопряженной прямой  $\ell_2$ ; одной из двух касательных плоскостей к квадрике Дарбу, проведенных в точках ее пересечения с прямой  $\ell_2$ , а именно той, которая не содержит точки  $A_1$ . Резюмирует вышесказанное следующее утверждение.

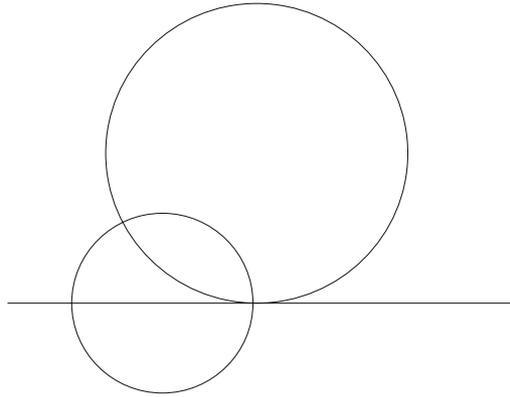


Рис. 3

**Лемма 2.1.** *Граничная кривая  $\Gamma$ , образованная точками касания окружностей, принадлежащих двум пучкам окружностей,*

- (а) *вырождается в окружность  $S_0$  и лежащую на ней точку  $\Gamma'$  тогда и только тогда, когда оба пучка принадлежат одной параболической связке окружностей с вершиной  $\Gamma'$ , тогда  $S_0$  — общая окружность пучков (в интерпретации Дарбу прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , изображающие пучки, лежат в одной и той же касательной плоскости к квадрике Дарбу  $Q$ , причем точка касания есть образ кривой  $\Gamma'$ );*
- (б) *вырождается в две точки — вершины эллиптического пучка тогда и только тогда, когда пучки окружностей ортогональны (в интерпретации Дарбу прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , изображающие пучки, сопряжены относительно квадрики Дарбу  $Q$ , причем вершины эллиптического пучка соответствуют точкам пересечения прямой  $\ell_2$  с  $Q$ );*
- (в) *вырождается в точку  $\Gamma'$  и не проходящую через нее окружность  $\Gamma''$  тогда и только тогда, когда один пучок эллиптический, другой гиперболический, и точка  $\Gamma'$  является вершиной первого пучка и нулевой окружностью второго. (В интерпретации Дарбу прямая  $\ell_2$ , изображающая гиперболический пучок, пересекает квадратик Дарбу  $Q$  в двух точках, одна из которых образ  $\Gamma'$ , а прямая  $\ell_1$ , изображающая другой пучок, лежит в касательной плоскости к  $Q$  в точке  $\gamma'$ ). При этом окружность  $\Gamma''$* 
  - (а) *проходит через другую нулевую окружность гиперболического пучка, отличную от  $\Gamma'$ ;*
  - (б) *ортогональна той окружности эллиптического пучка, которая ортогональна всем окружностям гиперболического пучка;*
  - (в) *проходит через вторую вершину эллиптического пучка, отличную от  $\Gamma'$  (см. рис. 3, на котором окружность  $\Gamma''$  изображена прямой), а точки  $\Gamma'$  и  $\gamma$  являются нулевыми окружностями гиперболического пучка.*

### 3. ПУЧКИ ОКРУЖНОСТЕЙ, ДЛЯ КОТОРЫХ ГРАНИЧНАЯ КРИВАЯ $\Gamma$ РАСПАДАЕТСЯ

В этом параграфе мы найдем все такие пары пучков окружностей, для которых граничная кривая  $\Gamma$  распадается.

Если два пучка принадлежат одной связке, то изображающие их прямые лежат в одной плоскости  $\pi$  и пересекаются в некоторой точке  $D$ , которая является образом общей окружности  $S_0$  этих пучков. Граничная кривая в рассматриваемом случае распадается на окружность  $S_0$  и прообраз линии пересечения плоскости  $\pi$  с квадратикой Дарбу  $Q$ . Если точка  $D$  лежит внутри квадрики Дарбу, то окружность  $S_0$  будет мнимой (то есть, чисто мнимого радиуса). Вторая окружность будет мнимой, если плоскость  $\pi$  не пересекает  $Q$ , и вырождается в точку, если  $\pi$  касается  $Q$ .

Рассмотрим теперь два пучка, не принадлежащие одной связке. Такие пучки изображаются в проективном пространстве скрещивающимися прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , вообще говоря, не сопряженными

относительно квадрики Дарбу (в случае сопряженности, как мы уже знаем, кривая  $\Gamma$  вырождается в пару точек — вершины эллиптического пучка).

Пусть одна из компонент кривой  $\Gamma$ , например  $\Gamma''$ , является окружностью. Тогда в  $P_3$  существует точка (обозначим ее, как и выше, также  $\Gamma''$ ), сопряженная всем точкам образа  $\gamma''$  окружности  $\Gamma''$ .

Покажем, что если точка  $\Gamma''$  лежит на какой-либо из прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , то получается расположение прямых, описанное в разделе 2. Действительно, пусть точка  $\Gamma''$  лежит, например, на  $\ell_1$ . Тогда легко указать все прямые, касающиеся квадрики Дарбу  $Q$  и пересекающие прямую  $\ell_1$ . Это, во-первых, касательные к квадрике, проведенные из точки  $\Gamma''$ , а во-вторых, пучки касательных, лежащие в касательных плоскостях к  $Q$ , содержащих прямую  $\ell_1$ . Прямая  $\ell_2$  может пересекать континуум этих касательных только в том случае, если она либо лежит в одной из указанных касательных плоскостей, либо проходит через точку  $\Gamma''$ , либо проходит по крайней мере через одну из точек, в которых плоскости, содержащие прямую  $\ell_1$ , касаются квадрики Дарбу. Но все эти случаи перечислены в предыдущем параграфе.

Итак, будем считать, что точка  $\Gamma''$  не лежит ни на одной из прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$ . Тогда через нее проходит единственная прямая, пересекающая прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$ . Поместим в точки пересечения вершины репера  $A_1$  и  $A_3$  соответственно. Далее, точку  $A_2$  поместим на  $\ell_1$  и выберем ее полярно сопряженной точке  $A_1$  относительно  $Q$ . Аналогично, точку  $A_4$  поместим на  $\ell_2$  и выберем ее полярно сопряженной точке  $A_3$ . Тогда  $\ell_1 = A_1A_2$ ,  $\ell_2 = A_3A_4$ ,  $g_{12} = 0$ ,  $g_{34} = 0$ . Кроме того, нормируем репер так, чтобы  $\Gamma'' = A_1 + A_3$ . В выбранном репере уравнение квадрики Дарбу имеет вид

$$g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 + g_{44}(x^4)^2 + 2g_{13}x^1x^3 + 2g_{14}x^1x^4 + 2g_{23}x^2x^3 + 2g_{24}x^2x^4 = 0. \quad (3.1)$$

В дальнейшем нам понадобится определитель  $\Delta$  матрицы  $(g_{ij})$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= g_{44}(g_{11}g_{22}g_{33} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{13}^2) - g_{33}(g_{11}g_{24}^2 + g_{22}g_{14}^2) + (g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23})^2 = \\ &= g_{44}(g_{11}g_{22}g_{33} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{13}^2) \\ &+ g_{13}^2(g_{24}^2 - g_{22}g_{44}) + g_{14}^2(g_{23}^2) - g_{22}g_{33} - 2g_{13}g_{14}g_{23}g_{24}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Так как квадратика Дарбу овальная, то  $\Delta \neq 0$ .

Найдем уравнение соответствия  $\Phi$  в выбранном репере. Пусть, как и выше,  $M_1 = A_1 + uA_2$  — произвольная точка прямой  $\ell_1$  и  $M_2 = A_3 + vA_4$  — произвольная точка прямой  $\ell_2$ . Предположим, прямая  $M_1M_2$  касается квадрики  $Q$  в точке  $M = M_1 + tM_2 = A_1 + uA_2 + t(A_3 + vA_4)$ . Тогда координаты точки  $M$  удовлетворяют уравнению (3.1), что дает соотношение

$$g_{11} + g_{22}u^2 + g_{33}t^2 + g_{44}t^2v^2 + 2g_{13}t + 2g_{14}tv + 2g_{23}tu + 2g_{24}tuv = 0. \quad (3.3)$$

Поскольку  $M$  — точка касания, то дискриминант уравнения (3.3) относительно  $t$  равен нулю:

$$(g_{11} + g_{22}u^2)(g_{33} + g_{44}v^2) - (g_{13} + g_{14}v + g_{23}u + g_{24}uv)^2 = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) и есть уравнение соответствия  $\Phi$ .

В силу (3.4) из (3.3) находим:

$$t = -\frac{g_{13} + g_{14}v + g_{23}u + g_{24}uv}{g_{33} + g_{44}v^2}. \quad (3.5)$$

Условие сопряженности точек  $\Gamma''$  и  $M$  с учетом (3.5) имеет вид:

$$(g_{11} + g_{13} + g_{23}u)(g_{33} + g_{44}v^2) - (g_{13} + g_{33} + g_{14}v)(g_{13} + g_{14}v + g_{23}u + g_{24}uv) = 0. \quad (3.6)$$

Мы рассматриваем случай, когда кривая  $\Gamma$  распадается. Поэтому левая часть уравнения (3.4) распадается на две компоненты, причем хотя бы для одной из них соотношение (3.6) должно обращаться в тождество. Это означает, что уравнение (3.6) также распадается, причем содержит ту же компоненту, что и уравнение (3.4). Возможны следующие варианты: все коэффициенты уравнения (3.6) равны нулю; уравнения (3.4) и (3.6) совпадают; уравнения (3.4) и (3.6) распадаются и имеют общую компоненту. Рассмотрим все варианты последовательно.

**3.1.** Все коэффициенты уравнения (3.6) равны нулю:

$$g_{13}g_{23} = 0, \quad (3.7a)$$

$$g_{11}g_{33} - g_{13}^2 = 0, \quad (3.7b)$$

$$g_{14}(2g_{13} + g_{33}) = 0, \quad (3.7c)$$

$$g_{13}g_{24} + g_{14}g_{23} + g_{24}g_{33} = 0, \quad (3.7d)$$

$$g_{11}g_{44} - g_{14}^2 + g_{44}g_{13} = 0, \quad (3.7e)$$

$$g_{23}g_{44} - g_{14}g_{24} = 0. \quad (3.7f)$$

Случай 0:  $g_{13} = 0$  и  $g_{23} = 0$ . Из второго — четвертого уравнений (3.7) находим, что либо  $g_{33} = 0$ , либо  $g_{11} = g_{14} = g_{24} = 0$ . Как видно из (3.2), в обоих случаях  $\Delta = 0$ , что невозможно.

Случай 1:  $g_{13} = 0$ ,  $g_{23} \neq 0$ . Из второго уравнения (3.7) получаем  $g_{11}g_{33} = 0$ . Рассмотрим два подслучая.

Подслучай 1а:  $g_{33} = 0$ . Так как  $g_{23} \neq 0$ , из четвертого соотношения (3.7) получаем  $g_{14} = 0$ . Но тогда из пятого равенства (3.7) в силу того же неравенства  $g_{23} \neq 0$  находим, что  $g_{44} = 0$ . Три равенства  $g_{33} = 0$ ,  $g_{34} = 0$ ,  $g_{44} = 0$  вместе означают, что любая точка прямой  $A_3A_4$  лежит на квадрике  $Q$ . Но это невозможно, так как квадратика Дарбу является овальной.

Подслучай 1б:  $g_{11} = 0$ . Из пятого равенства (3.7) находим, что  $g_{14} = 0$ , то есть все коэффициенты  $g_{1i}$  равны нулю и, следовательно,  $\Delta = 0$ .

Случай 2:  $g_{23} = 0$ ,  $g_{13} \neq 0$ . Из шестого равенства (3.7) находим, что  $g_{14}g_{24} = 0$ .

Подслучай 2а:  $g_{14} = 0$ . В этом случае соотношения (3.7) сведутся к следующим:  $g_{11}g_{33} - g_{13}^2 = 0$ ,  $g_{24}(g_{13} + g_{33}) = 0$ ,  $g_{44}(g_{11} + g_{13}) = 0$ .

Если  $g_{24} = g_{44} = 0$ , то все коэффициенты  $g_{4i}$  равны нулю и, следовательно,  $\Delta = 0$ .

Если хотя бы один из коэффициентов  $g_{24}$ ,  $g_{44}$  не равен нулю, то получаем решение  $g_{13} + g_{33} = 0$ ,  $g_{11} + g_{13} = 0$ . Как видно из (3.2), и в этом случае  $\Delta = 0$ .

Подслучай 2б:  $g_{24} = 0$ ,  $g_{14} \neq 0$ . В этом случае соотношения (3.7) сведутся к следующим:

$$g_{33} = 4g_{11}, \quad g_{13} = -2g_{11}, \quad g_{14} = ag_{11}, \quad g_{44} = -a^2g_{11}, \quad (3.8)$$

где  $a$  — ненулевая постоянная. В этом случае  $\Delta \neq 0$ , и мы получаем нетривиальное решение системы (3.7).

Покажем, что соотношения (3.8) определяют такое же расположение прямых, которую мы обсуждали в п. б) второго параграфа (рис. 2). Для этого найдем точки пересечения прямой  $\ell_2 = A_3A_4$  с квадратикой Дарбу. В силу соотношений (3.8) уравнение последней примет вид

$$g_{22}(x^2)^2 + g_{11}((x^1)^2 + 4(x^3)^2 - a^2(x^4)^2 - 4x^1x^3 + 2ax^1x^4) = 0. \quad (3.9)$$

Подставляя сюда  $x^3 = x^4 = 0$  (уравнения прямой  $\ell_2 = A_3A_4$ ), найдем координаты точек пересечения:  $K_1(0, 0, a, 2)$  и  $K_1(0, 0, a, 2)$ .

Теперь найдем уравнения касательных плоскостей к квадрике Дарбу в этих точках (обозначим их  $T_1$  и  $T_2$  соответственно). Пусть  $M(x^i)$  — текущая точка касательной плоскости  $T_1$ , тогда она сопряжена точке  $K_1(0, 0, a, 2)$  относительно квадрики Дарбу и выполняется равенство  $(K_1, M) = 0$ . В силу (3.9) это уравнение имеет вид  $2x^3 - ax^4 = 0$ . Аналогично находим уравнение касательной плоскости  $T_2$ :  $2x^1 - 2x^3 - ax^4 = 0$ .

Как видно, касательная плоскость  $T_1$  содержит прямую  $\ell_1 = A_1A_2$ , а касательная плоскость  $T_2$  пересекает прямую  $A_1A_3$  в точке  $\Gamma'' = A_1 + A_3$ , то есть в той самой точке, которая является полюсом граничной окружности.

Итак, с точностью до обозначений и выбора репера геометрическое расположение прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  оказалось таким же самым, как и случае (б) из леммы 2.1.

**3.2.** Уравнения (3.4) и (3.6) совпадают.

Поскольку в этих уравнениях свободные члены одинаковы, то нужно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях. Рассматривая всевозможные варианты, во всех случаях приходим к равенству  $\Delta = 0$ .

**3.3.** Уравнения (3.4) и (3.6) распадаются и имеют общую компоненту.

3.3.1. Пусть уравнение (3.4) распадается на две компоненты вида  $auv + ux + cv + d = 0$ . Как известно, дробно-линейное соответствие между прямыми является проективным, а прямые, соединяющие соответствующие точки двух прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , находящихся в проективном соответствии, образуют демиквадрику — одно из семейств линейчатой поверхности второго порядка (обозначим последнюю через  $K$ ). При этом сами прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  входят во второе семейство образующих квадрики  $K$ .

Напомним, что по условию задачи образующие квадрики  $K$  касаются квадрики Дарбу  $Q$ . Отсюда следует, во-первых, что сама квадрика  $K$  касается  $Q$ , а во-вторых, что прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  касаются квадрики  $Q$ . Но если две квадрики касаются друг друга, то линия касания является кривой второго порядка. Такие квадрики порождают параболический пучок квадрик, касающихся друг друга вдоль общей кривой.

Перечисленные свойства еще не полностью характеризуют рассматриваемое решение. Дадим его полное описание. Рассмотрим евклидову модель проективного пространства, в которой квадрика Дарбу является сферой. Тогда квадрика  $K$  является однополостным гиперболоидом вращения и касается сферы вдоль некоторой окружности. Но в силу симметрии все прямолинейные образующие гиперболоида вращения из одного семейства образуют одинаковый угол с плоскостью этой окружности. Поэтому рассматриваемое решение строится следующим образом. Проводим через точки касания прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  со сферой плоскость, которая образует с этими прямыми одинаковый угол. Таких плоскостей две, причем они ортогональны. Каждая из них пересекает сферу по окружности, обозначим последние  $\gamma'$  и  $\gamma''$ . Эти кривые и будут образами коник  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ , на которые распадается граничная кривая  $\Gamma$ .

Чтобы построить квадрику  $K$ , нужно взять на одной из указанных окружностей произвольную точку и провести через нее еще одну касательную прямую к сфере под тем же углом к плоскости окружности  $\gamma'$  (или  $\gamma''$ ). Совокупность трансверсалей к трем полученным прямым и образует квадрику  $K$ . Если эту конструкцию подвергнуть произвольному проективному преобразованию, то получится решение наиболее общего вида.

Заметим кстати, что поскольку гиперболоид вращения может быть получен путем вращения одной из образующих около общей (со сферой) оси, то его проективный образ замечается прямой под действие некоторого однопараметрического семейства проективных преобразований специального вида, сохраняющих одну из осей автополярного репера и преобразующих сопряженную ей ось в плоскости, ортогональной неподвижной оси.

В рассматриваемом случае прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , поскольку они касаются квадрики Дарбу, изображают параболические пучки окружностей. При этом, в силу вышесказанного, все окружности обоих пучков образуют один и тот же угол с окружностями  $\gamma'$  и  $\gamma''$ . Покажем, как найти эти окружности, если пучки заданы.

Пусть один параболический пучок задается базисной окружностью  $B_1$  и точкой  $A_1$  на ней — вершиной пучка, в которой касаются друг друга все окружности пучка; другой — окружностью  $B_2$  и вершиной  $A_2$ . Проведем касательные к базисным окружностям в вершинах пучка и построим биссектрисы угла, образованного этими касательными. Точка пересечения биссектрис со срединным перпендикуляром к отрезку  $A_1A_2$  и даст центры искомых окружностей.

Вернемся опять в проективное пространство. Поскольку окружности  $\gamma'$  и  $\gamma''$  проходят через точки  $A_1$  и  $A_2$  — вершины параболических пучков, то их поляры относительно квадрики Дарбу (обозначим их, как и выше,  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ ) лежат на прямой  $\tilde{m}$ , сопряженной прямой  $m = A_1A_2$ . Прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  пересекают прямую  $\tilde{m}$ , причем точки пересечения (поскольку плоскости окружностей  $\gamma'$  и  $\gamma''$  делят пополам углы между прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$ ) делят гармонически пару точек  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ .

В рассматриваемом случае уравнение (3.6), естественно, выполняется тождественно.

3.3.2. Допустим, уравнение (3.4) распадается на линейную компоненту и левую часть уравнения (3.6). Выпишем коэффициенты этих уравнений. Для уравнения (3.4):

$$a_{22} = g_{22}g_{44} - g_{24}^2, \quad a_{21} = -2g_{23}g_{34}, \quad (3.10a)$$

$$a_{12} = -2g_{14}g_{24}, \quad (3.10b)$$

$$a_{11} = -2g_{14}g_{23} - 2g_{13}g_{24}, \quad (3.10c)$$

$$a_{20} = g_{22}g_{33} - g_{23}^2, \quad (3.10d)$$

$$a_{02} = g_{11}g_{44} - g_{14}^2, \quad (3.10e)$$

$$a_{10} = -2g_{13}g_{23}, \quad (3.10f)$$

$$a_{01} = -2g_{13}g_{14}, \quad a = g_{11}g_{33} - g_{13}^2. \quad (3.10g)$$

Для уравнения (3.6):

$$b_{12} = g_{23}g_{44} - g_{14}g_{24}, \quad (3.11a)$$

$$b_{11} = -g_{13}g_{24} - g_{33}g_{24} - g_{14}g_{23}, \quad (3.11b)$$

$$b_{02} = g_{11}g_{44} + g_{13}g_{44} - g_{14}^2, \quad (3.11c)$$

$$b_{10} = -g_{13}g_{23}, \quad (3.11d)$$

$$b_{01} = -2g_{13}g_{14} - g_{33}g_{14}, \quad (3.11e)$$

$$b = g_{11}g_{33} - g_{13}^2. \quad (3.11f)$$

Поскольку уравнение (3.4) степени 2, а уравнение (3.6) — степени 1 относительно  $u$ , то искомым линейный множитель имеет вид  $cu + d$ . Умножив на него левую часть уравнения (3.4), мы должны получить левую часть уравнения (3.6). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем, прежде всего (так как  $a = b$ ), что  $d = 1$ . Остальные равенства примут следующий вид:

$$a_{02} = b_{02}, \quad (3.12a)$$

$$a_{01} = b_{01}, \quad (3.12b)$$

$$a_{22} = b_{12}c, \quad (3.12c)$$

$$a_{21} = b_{11}c, \quad a_{20} = b_{10}c, \quad (3.12d)$$

$$a_{12} = b_{02}c + b_{12}, \quad a_{11} = b_{01}c + b_{11}, \quad (3.12e)$$

$$a_{10} = bc + b_{01}, \quad (3.12f)$$

Из первых двух уравнений системы (3.12) в силу обозначений (3.10) и (3.11) находим  $g_{13}g_{44} = 0$ ,  $g_{14}g_{33} = 0$ .

Случай  $g_{33} = g_{44} = 0$ , как было сказано выше, невозможен (поскольку еще выполняется равенство  $g_{34} = 0$ , то получается, что квадрика Дарбу имеет прямолинейную образующую  $A_3A_4$ ).

Если  $g_{13} = g_{33} = 0$ , то из уравнений (3.11) находим, что  $b_{10} = 0$ , тогда из (3.12) получаем  $a_{20} = 0$  и  $g_{23} = 0$ . Таким образом, все  $g_{3i} = 0$ , что невозможно.

Если  $g_{13} = g_{14} = 0$ , то из уравнений (3.10) и (3.11) находим, что  $a_{11} = 0$ ,  $b_{10} = 0$ ,  $b_{01} = 0$ . Тогда из (3.12) следует  $a_{20} = g_{22}g_{33} - g_{23}^2 = 0$  и  $b_{11} = -g_{24}g_{33} = 0$ . Если  $g_{24} = 0$ , то  $\Delta = 0$ . Если  $g_{33} = 0$ , то из предыдущего равенства получаем  $g_{23} = 0$ . Но тогда все  $g_{3i} = 0$ , то есть опять  $\Delta = 0$ .

Если  $g_{14} = g_{44} = 0$ , то из уравнений (3.11), (3.10) и (3.12) последовательно находим  $b_{12} = 0$ ,  $a_{22} = 0$ ,  $g_{24} = 0$ . Итак, все  $g_{4i} = 0$  и  $\Delta = 0$ .

3.3.3. Допустим, что оба уравнения (3.4) и (3.6) имеют одинаковую линейную компоненту. Вид левой части уравнения (3.6) показывает, что эта линейная компонента не может содержать обе переменные,  $u$  и  $v$ . Пусть, например, она содержит только  $u$ , а ее корень обозначим  $u_0$ . Таким образом, уравнение (3.4) удовлетворяется при  $u = u_0$  и при любом  $v$ . Геометрически это означает, что любая прямая, проходящая через точку  $M_0 = A_1 + u_0A_2$  прямой  $\ell_1$  и произвольную точку прямой  $\ell_2$ , касается квадрики Дарбу. Это может быть, как уже отмечалось, только в случае, когда точка  $M_0$  лежит на квадрике Дарбу а прямая  $\ell_2$  лежит в касательной плоскости  $T$  к этой квадрике

в точке  $M_0$ . В этом случае одна из компонент кривой  $\gamma$  вырождается в точку  $M_0$ , и мы приходим к ситуации, описанной в разделе 2.

Ясно, что то же самое мы получим, если левая часть уравнения (3.4) содержит линейную компоненту, зависящую только от  $v$  или разлагается на два квадратичных множителя, каждый из которых зависит только от одной из переменных.

Результаты этого и предыдущего параграфов объединяет следующее утверждение.

**Теорема 3.1.** *Пусть даны 2 пучка окружностей, и  $\Gamma$  — кривая (четвертого порядка), образованная точками касания окружностей этих пучков. Если кривая  $\Gamma$  распадается, то только на точки и окружности (в том числе, и мнимые), причем возможны только следующие варианты.*

- 1) *Оба пучка принадлежат одной эллиптической связке. В этом случае кривая  $\Gamma$  распадается на вещественную окружность — общую окружность пучков, и мнимую окружность — прообраз линии пересечения плоскости, изображающей связку, с квадрикой Дарбу.*
- 2) *Оба пучка принадлежат одной параболической связке. В этом случае кривая  $\Gamma$  распадается на точку — вершину параболического пучка и проходящую через нее общую окружность пучков.*
- 3) *Оба пучка принадлежат одной гиперболической связке. В этом случае одна компонента граничной кривой  $\Gamma$  есть вещественная окружность — прообраз линии пересечения плоскости, изображающей пучок, с квадрикой Дарбу. Вторая компонента — общая окружность пучков — может быть как вещественной, так и мнимой.*
- 4) *Пучки, один из которых эллиптический, а второй — гиперболический, ортогональны. В этом случае граничная кривая вырождается в две точки — вершины эллиптического пучка.*
- 5) *Один из пучков гиперболический, одна из его нулевых окружностей является вершиной другого — эллиптического — пучка. В этом случае граничная кривая распадается на точку — общую вершину двух пучков, и окружность, которая*
  - (а) *проходит через другую вершину гиперболического пучка;*
  - (б) *ортогональна той окружности эллиптического пучка, которая ортогональна всем окружностям гиперболического пучка;*
  - (в) *проходит через вторую вершину эллиптического пучка.*
- 6) *Оба пучка параболические. В этом случае граничная кривая распадается на две ортогональные окружности, каждая из которых проходит через вершины пучков и пересекает окружности обоих пучков под одним и тем же углом.*

Случай (4) является частным случаем (5), но, тем не менее, нам будет удобнее их различать. Заметим еще раз, что возможны только три случая расположения пучков, при которых изображающие их прямые в проективном пространстве не пересекаются, - это случаи (4), (5) и (6). В дальнейшем для краткости будем говорить «прямые находятся в положении (4)» и т. п.

#### 4. КЛАССИФИКАЦИЯ КРУГОВЫХ ТКАНЕЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Согласно определению, ткани параболического типа характеризуются тем, что граничные кривые, соответствующие трем парам пучков, имеют общую гладкую компоненту.

Если граничные кривые совпадают, то для любых двух касающихся окружностей  $S_1$  и  $S_2$  из первых двух пучков в третьем пучке найдется окружность  $S_3$ , которая касается в той же самой точке окружностей  $S_1$  и  $S_2$ . Напомним, что в проективной интерпретации касающиеся друг друга окружности пучков изображаются точками прямых  $\ell_\alpha$ , лежащими на касательной к квадрике Дарбу  $Q$  (обозначим эти точки тоже  $S_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ). Следовательно, все три точки  $S_\alpha$  лежат на одной и той же касательной к квадрике  $Q$ .

Из геометрических соображений понятно, что при произвольном расположении прямых  $\ell_\alpha$  относительно квадрики  $Q$  (то есть для круговой ткани общего вида) существуют конечное число трансверселей этих прямых (по-видимому, не более двух) которые касаются квадрики  $Q$ . У ткани параболического типа таких трансверселей будет континуум.

Возможны следующие случаи.

**Случай А.** Прямые  $l_\alpha$  лежат в одной плоскости  $\pi$  (пучки окружностей принадлежат одной связке). В этом случае каждая касательная к квадрике Дарбу  $Q$ , лежащая в плоскости  $\pi$ , пересекает все прямые  $l_\alpha$ . Следовательно, общая компонента граничных кривых  $\Gamma_\alpha$  есть окружность, которая изображается в проективном пространстве линией пересечения плоскости  $\pi$  с квадрикой Дарбу  $Q$ . Она будет мнимой, если плоскость  $\pi$  не пересекает  $Q$ , и точкой, если плоскость  $\pi$  касается  $Q$ . Отметим, что эта ткань того же типа, что и первый пример параболической ткани, приведенный в замечании 1.3. Другие компоненты граничных кривых есть общие окружности пучков, они изображаются в проективном пространстве точками пересечения прямых  $l_\alpha$  (или соответствующими сечениями квадрики Дарбу плоскостями, полярно сопряженными этим точкам).

**Случай Б.** Прямые  $l_1$  и  $l_2$  лежат в плоскости  $\pi$ , касающейся квадрики Дарбу в некоторой точке  $\gamma''$ , а третья проходит через эту точку, но не лежит в плоскости  $\pi$ . В этом случае множество трансверсалей состоит из пучка касательных к квадрике Дарбу в точке  $\gamma''$  и еще одной прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$ . Таким образом, общая компонента граничных кривых есть окружность нулевого радиуса — точка  $\gamma''$ . Другие компоненты граничных кривых (точнее, их образы в проективном пространстве): для прямых  $l_1$  и  $l_2$  — точка их пересечения, для каждой из пар пар прямых  $l_1$  и  $l_3$ ,  $l_2$  и  $l_2$  — точка  $\Gamma''$ , описанная в разделе 2.

Заметим, что в случае, когда две из трех прямых  $l_\alpha$  лежат в плоскости  $\pi$ , не касающейся квадрики Дарбу, а третья не лежит в плоскости  $\pi$ , множество общих трансверсалей прямых  $l_\alpha$  состоит не более чем из двух прямых.

**Случай В.** Прямые  $l_\alpha$  находятся в общем положении, то есть попарно скрещиваются. В этом случае множество трансверсалей представляет собой демиквадрику — семейство прямолинейных образующих некоторой линейчатой поверхности второго порядка, обозначим ее, как и выше, через  $K$ . Повторяя рассуждения, проведенные в разделе 3.3.1, приходим к выводу, что квадрики  $K$  и  $Q$  касаются вдоль некоторой коники  $S_0$ , прямые  $l_\alpha$  входят во второе семейство образующих квадрики  $S_0$  и также касаются квадрики Дарбу  $Q$  в некоторых точках (обозначим их соответственно  $A$ ,  $B$  и  $C$ ), лежащих на конике  $S_0$ . При этом (см. раздел 3.3.1) граничная кривая, например, первых двух пучков есть пара окружностей:  $S_0$  и ортогональная ей окружность  $S_3$ , проходящая через точки  $A$  и  $B$ ; аналогично, для других пар пучков граничными кривыми будут пары окружностей  $S_0$  и  $S_1$ ,  $S_0$  и  $S_2$ . Таким образом, окружность  $S_0$  есть общая компонента граничных кривых.

**Случай Г.** Прямые  $l_\alpha$  имеют общую точку  $D$ . Тогда через  $D$  проходит конус касательных к квадрике  $Q$ , пересекающих прямые  $l_\alpha$  (мнимый, если точка  $D$  находится внутри  $Q$ , и пучок, если  $D$  лежит на  $Q$ ). Поэтому общая компонента граничных кривых есть окружность — прообраз точки  $D$ . Другие компоненты граничных кривых соответствуют линиям пересечения квадрики  $Q$  с плоскостями, содержащими пары прямых  $l_\alpha$ .

Отметим, что эта ткань того же типа, что и второй пример параболической ткани, приведенный в замечании 1.3.

Теперь в каждом из перечисленных классов мы должны указать подкласс регулярных тканей.

В случае А ткань всегда является регулярной (класс 0 по классификации Лазаревой, см. Введение).

Покажем, что в случае В ткань регулярной быть не может. Согласно теореме 1.2, граничная окружность  $S_3$  должна принадлежать третьему пучку, изображаемому прямой  $l_3$ . Следовательно, полюс  $P_3$  окружности  $S_3$  относительно квадрики Дарбу должен лежать на прямой  $l_3$ , а поскольку прямая  $l_3$  целиком лежит на линейчатой квадрике  $Q$ , то и  $P_3 \in Q$ . С другой стороны, поскольку окружность  $S_3$  проходит через точки  $A$  и  $B$ , полюс  $P_3$  лежит на прямой, полярно сопряженной прямой  $AB$ , то есть на пересечении касательных плоскостей  $T_A$  и  $T_B$  к квадрике Дарбу  $Q$  в точках  $A$  и  $B$ . Но, так как квадрики  $K$  и  $Q$  касаются вдоль коники  $S_0$ , на которой лежат точки  $A$  и  $B$ , то касательные плоскости  $T_A$  и  $T_B$  к квадрике Дарбу являются также и касательными плоскостями к линейчатой квадрике  $K$ . А касательная плоскость к линейчатой квадрике, содержит образующие, проходящие через точку касания. Таким образом, плоскость  $T_A$  содержит прямую  $l_1$ , проходящую

через точку  $A$ , и некоторую другую образующую (обозначим ее  $m_1$ ), проходящую через эту точку. Аналогично, плоскость  $T_B$  содержит прямые  $l_2$  и  $m_2$ , проходящие через точку  $B$ . Отсюда вытекает, что касательные плоскости  $T_A$  и  $T_B$  содержат две общие точки, лежащие на квадрике  $K$ : точку пересечения образующих  $l_1$  и  $m_2$ , и точку пересечения образующих  $l_2$  и  $m_1$ . Из предыдущего вытекает, что полюс  $P_3$  должен быть одной из этих точек. Но тогда получается, что через  $P_3$  проходит три различных образующих квадрики  $K - l_3$  и, например,  $l_1$  и  $m_2$ , что невозможно.

Рассмотрим случай Б. Заметим прежде всего, что каждая пара прямых  $l_1$  и  $l_3$ ,  $l_2$  и  $l_3$  расположена относительно квадрики Дарбу так, как показано на рис. 2. Пусть одна из прямых  $l_1$  или  $l_2$  (например,  $l_1$ ) не проходит через точку  $\Gamma''$ . Тогда по лемме 2.1 паре прямых  $l_1$  и  $l_3$  отвечает граничная кривая, полюс которой находится вне плоскости  $\pi$ , содержащей прямые  $l_1$  и  $l_2$  (см.рис. 2). Но по теореме 1.2 в случае регулярности ткани этот полюс должен находиться на прямой  $l_2$ , что невозможно.

Пусть теперь в случае Б обе прямые  $l_1$  и  $l_2$  проходят через точку  $\Gamma''$ . Тогда паре прямых  $l_1$  и  $l_3$  отвечает граничная кривая  $\gamma_1$ , являющаяся линией пересечения плоскости этих прямых с квадрикой  $Q$ , а паре прямых  $l_2$  и  $l_3$  — аналогичная кривая  $\gamma_2$ . Согласно теореме 1.2 для регулярности необходимо, чтобы полюс коники  $\gamma_1$  лежал на прямой  $l_2$ , а полюс коники  $\gamma_2$  — на прямой  $l_1$ . Но это означает, что прямые  $l_1$  и  $l_2$  должны быть полярно сопряжены, и мы получаем класс 3 по классификации Лазаревой.

Рассмотрим случай Г — прямые  $l_\alpha$  проходят через точку  $D$ . Плоскости, в которых лежат пары прямых  $l_1$  и  $l_2$ ,  $l_2$  и  $l_3$ ,  $l_3$  и  $l_1$ , обозначим соответственно  $\pi_3$ ,  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .

**1.** Точка  $D$  находится внутри квадрики Дарбу  $Q$ . Тогда все плоскости  $\pi_\alpha$  пересекают  $Q$ , и линии пересечения являются образами граничных кривых, не являющихся общими окружностями каких-либо двух пучков. Поэтому, по теореме 1.2, в случае регулярности ткани полюс каждой из этих линий пересечения — а это одновременно и полюс соответствующей плоскости  $\pi_\alpha$  — должен лежать на прямой  $l_\alpha$ . В этом случае прямые  $l_\alpha$  являются ребрами автополярного (относительно  $Q$ ) тетраэдра, и мы получаем регулярную три-ткань — класс 1 по классификации Лазаревой.

**2.** Точка  $D$  находится вне квадрики Дарбу  $Q$ .

**2а.** Если хотя бы одна из прямых  $l_\alpha$ , например,  $l_1$ , пересекает  $Q$ , то по теореме 1.2 в случае регулярности проходящие через  $l_1$  плоскости  $\pi_2$  и  $\pi_3$  должны быть сопряжены относительно  $Q$  (каждая должна содержать полюс другой), а полюс плоскости  $\pi_1$  должен лежать на  $l_1$ . В результате опять приходим к классу 1.

**2б.** Пусть ни одна из прямых  $l_\alpha$  не имеет общих точек с  $Q$ . Рассмотрим различные случаи расположения плоскостей  $\pi_\alpha$ .

Если все плоскости  $\pi_\alpha$  не касаются  $Q$ , то их полюсы находятся внутри  $Q$  и не могут лежать на соответствующих прямых  $l_\alpha$ . Следовательно, условие теоремы 1.2 не может быть выполнено, и ткань не может быть регулярной.

Если все плоскости  $\pi_\alpha$  касаются  $Q$ , то мы получаем класс 4 по классификации Лазаревой.

Предположим, две плоскости, пусть  $\pi_1$ , и  $\pi_2$ , касаются  $Q$ , а третья —  $\pi_3$  — не касается  $Q$ . По теореме 1.2 полюс  $P_3$  плоскости  $\pi_3$  должен лежать на  $l_3$ . Получается, что прямые  $l_1$  и  $l_2$ , с одной стороны, лежат в плоскости  $\pi_3$ , а с другой — в касательных плоскостях к  $Q$ , проходящих через полюс  $P_3$ . Отсюда вытекает, что прямые  $l_1$  и  $l_2$  должны касаться квадрики  $Q$ , что в рассматриваемом случае исключено.

Предположим, только одна из плоскостей, пусть  $\pi_1$ , касается  $Q$ . Тогда полюсы плоскостей  $\pi_2$  и  $\pi_3$ , проходящих через  $l_1$ , находятся внутри  $Q$ , и не могут лежать соответственно на прямых  $l_2$  и  $l_3$ . Таким образом, условие теоремы 1.2 не может быть выполнено, и ткань не может быть регулярной.

**2в.** Пусть одна из прямых  $l_\alpha$ , например,  $l_1$ , касается  $Q$  в точке  $T_1$ , а плоскость  $\pi_1$  не касается  $Q$ . По теореме 1.2 полюс плоскости  $\pi_1$  должен лежать на  $l_1$ , следовательно, эта плоскость должна проходить через точку  $T_1$ . Но тогда получается, что точка  $T_1$  есть общая точка прямых  $l_\alpha$ , что

невозможно, так как в рассматриваемом случае точка  $D$  пересечения лежит вне квадрики Дарбу  $Q$ .

Допустим, прямая  $l_1$  касается  $Q$ , плоскость  $\pi_1$  касается  $Q$ , но лежащие в ней прямые  $l_2$  и  $l_3$  не касаются  $Q$ . Тогда по теореме 1.2 полюс плоскости  $\pi_2$  должен лежать на  $l_2$ , а полюс плоскости  $\pi_3$  — на  $l_3$ , то есть плоскости  $\pi_2$  и  $\pi_3$  должны быть ортогональны. Но это невозможно, поскольку они пересекаются по прямой  $l_1$ , касающейся квадрики  $Q$ .

**2г.** Предположим далее, две прямые,  $l_1$  и  $l_2$ , касаются  $Q$  в точках  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Тогда по теореме 1.2 полюс плоскости  $\pi_3$ , в которой лежат эти прямые, должен принадлежать прямой  $l_3$ . Следовательно,  $l_3$  лежит на пересечении касательных плоскостей к  $Q$ , проведенных в точках  $T_1$  и  $T_2$ , и мы приходим к классу 6.2.

**2д.** В случае, если все три прямые касаются квадрики Дарбу, ткань не может быть регулярной. Действительно, полюсы плоскостей  $\pi_\alpha$  в этом случае не могут лежать на соответствующих прямых  $l_\alpha$ .

**3.** Точка  $D$  пересечения прямых  $l_\alpha$  находится на квадрике Дарбу  $Q$ . В этом случае прямые  $l_\alpha$  либо касаются квадрики  $Q$ , либо ее пересекают.

Если все они касаются  $Q$ , то получаем класс 0.

Если все прямые  $l_\alpha$  пересекают  $Q$ , то, как и в случае 2д, полюсы плоскостей  $\pi_\alpha$  не могут лежать на соответствующих прямых  $l_\alpha$ . Поэтому ткань не может быть регулярной.

**3а.** Пусть одна из прямых, например,  $l_1$  касается  $Q$  в точке  $D$ , а две другие пересекают  $Q$ . Тогда по теореме 1.2 полюс плоскости  $\pi_2$  должен лежать на  $l_2$ , а полюс плоскости  $\pi_3$  — на  $l_3$ , то есть плоскости  $\pi_2$  и  $\pi_3$  должны быть ортогональны. Но это невозможно, поскольку они пересекаются по прямой  $l_1$ , касающейся квадрики  $Q$ .

**3б.** Если две прямые ( $l_1$  и  $l_1$ ) касаются  $Q$  в точке  $D$ , а третья ( $l_3$ ) пересекает  $Q$ , то плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , проходящие через  $l_3$ , должны быть ортогональны. Отсюда вытекает, что прямые  $l_1$  и  $l_1$  являются полярно сопряженными, и мы приходим к классу 3 по классификации Лазаревой.

Результаты этого параграфа объединяет

**Теорема 4.1.** *Существует всего 4 типа регулярных тканей параболического типа — классы 0, 1, 3 и 6.2 по классификации Лазаревой.*

## 5. КЛАССИФИКАЦИЯ КРУГОВЫХ ТКАНЕЙ В СЛУЧАЕ, КОГДА ХОТЯ БЫ ДВА ПУЧКА НЕ ПРИНАДЛЕЖАТ ОДНОЙ СВЯЗКЕ

Два пучка, не принадлежащие одной связке, изображаются в проективном пространстве скрещивающимися прямыми. Такие две прямые могут находиться в одном из трех положений, описанных в пп.4 — 6 теоремы 3.1. Ткань в этом случае, как следует из предыдущего параграфа, является тканью непараболического типа.

**1.** Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  находятся в положении (5), то есть расположены как на рис. 2. Тогда, согласно теореме 1.2, третья прямая должна проходить через полюс  $\Gamma''$ .

**1а.** Прямая  $l_3$  пересекает прямые  $l_1$  и  $l_2$ . Поскольку через точку  $\Gamma''$  может проходить только одна прямая, пересекающая  $l_1$  и  $l_2$ , то  $l_3 = A_2P$ . При этом граничная кривая для прямых  $l_1$  и  $l_3$  вырождается в точку  $P$ , а граничная кривая для прямых  $l_2$  и  $l_3$  есть коника, изображенная на рис. 2, — линия пересечения плоскости, содержащей эти прямые, с квадратом Дарбу. Полюс этой коники есть точка  $A_1$ . Поскольку точка  $A_1$  лежит на прямой  $l_1$ , то получается, что условие теоремы 1.2 выполнено для каждой пары из прямых  $l_\alpha$ . Ткань в рассматриваемом случае является регулярной, и как легко увидеть по описанной геометрической конструкции, в точности совпадает со случаем 7 из классификации Лазаревой.

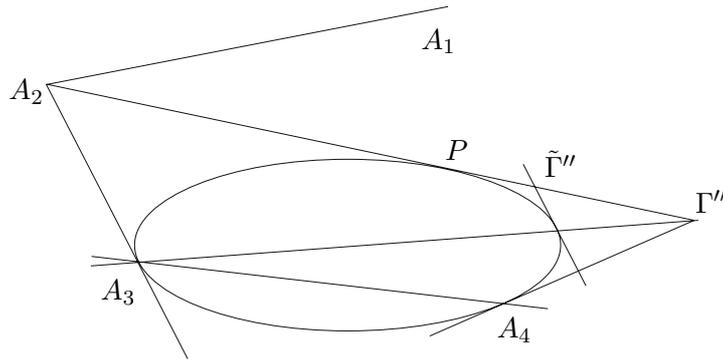


Рис. 4

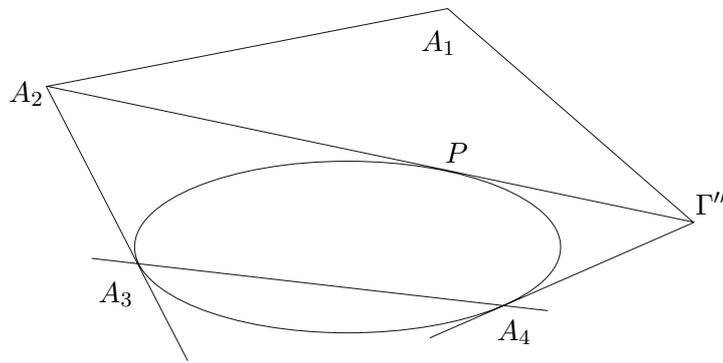


Рис. 5

**16.** Пусть теперь прямая  $l_3$  не пересекает прямую  $l_1$ , тогда эти прямые должны находиться в положении (5), как и прямые  $l_1$  и  $l_2$ . Это означает, что прямая  $l_3$ , так же, как и прямая  $l_2$ , проходит через точку  $A_3$  (рис. 4), т.е.  $l_3 = A_3\Gamma''$ .

Найдем полюс граничной окружности для пары прямых  $l_1$  и  $l_3$  (обозначим его  $\tilde{\Gamma}''$ ). Для этого, согласно теореме 3.1, проведем касательную к квадрике Дарбу во второй точке пересечения этой квадрики с прямой  $l_3 = A_3\Gamma''$ . Тогда  $\tilde{\Gamma}''$  есть точка пересечения проведенной касательной и касательной  $A_2P$  (см. рис. 4).

Согласно теореме 1.2, если ткань регулярная, то точка  $\tilde{\Gamma}''$  лежит на прямой  $l_2$ , что, как видно из рис. 4, невозможно. Следовательно, в этом случае ткань не может быть регулярной.

**1в.** Прямая  $l_3$  пересекает прямую  $l_1$ , но не пересекает  $l_2$ . Согласно теореме 3.1, пара прямых  $l_3, l_2$  может находиться только в положении (5), как и пара прямых  $l_1, l_2$ . Но тогда прямая  $l_3$  должна проходить через точку  $A_1$  — полюс плоскости  $A_1A_2A_3$ , поскольку она, как и прямая  $l_2$ , лежит в этой плоскости. В результате получается симметричная картина, изображенная на рис. 5. На ней, как и на рис. 2, точка  $A_1$  является полюсом плоскости  $A_2A_3A_4$ , и через нее проходит прямая, полярно сопряженная прямой  $l_2$  (поскольку она получается пересечением касательных плоскостей к квадрике Дарбу в точках  $A_3$  и  $A_4$ ). Условие теоремы 1.2 в данном случае выполнено, а ткань является регулярной и совпадает со случаем 5 из классификации Лазаревой.

**2.** Допустим, прямые  $l_1$  и  $l_2$  находятся в положении (4), то есть полярно сопряжены относительно квадрики Дарбу, причем  $l_1$  не пересекает квадрiku Дарбу.

**2а.** Допустим, прямая  $l_3$  не пересекает прямую  $l_1$ . Тогда, в силу теоремы 3.1, прямые  $l_1$  и  $l_3$  должны находиться в положении (5), то есть прямая  $l_3$  должна проходить через одну из точек, в которых прямая  $l_2$  пересекает квадрiku  $Q$ . Поместим вершины  $A_1$  и  $A_2$  репера на  $l_1$ , причем  $A_2$  в точку пересечения прямой  $l_1$  с плоскостью прямых  $l_2$  и  $l_3$ . Вершины  $A_3$  и  $A_4$  репера поместим

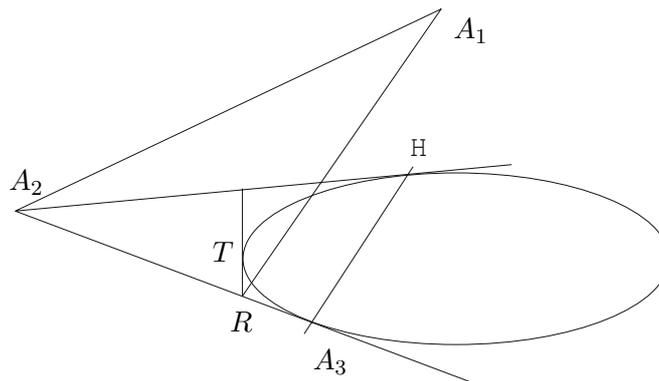


Рис. 6

в точки пересечения прямой  $l_3$  с квадрикой Дарбу. Тогда, с точностью до обозначений, получим расположение прямых, изображенное на рис. 2, причем  $l_2 = A_3P$ , а  $l_3 = A_3A_4$ .

Согласно теореме 1.2, точка  $\Gamma''$ , являющаяся полюсом граничной кривой пучков — прообразов прямых  $l_1$  и  $l_3$ , должна (в случае регулярности ткани) лежать на прямой  $l_2 = A_3P$ , что, как видно из рис. 2, невозможно (иначе прямые  $l_2$  и  $l_3$  совпадают). Следовательно, прямая  $l_3$  не может не пересекать прямую  $l_1$ .

**26.** Допустим, прямая  $l_3$  пересекает прямую  $l_1$ , но не пересекает прямую  $l_2$ . Тогда, в силу теоремы 3.1, прямые  $l_2$  и  $l_3$  должны находиться в положении (5), то есть прямая  $l_3$  должна лежать в одной из касательных плоскостей к квадрике Дарбу  $Q$ , проведенных в точках ее пересечения с прямой  $l_2$ . Пусть, как и выше,  $l_2 = A_3P$ , точки  $A_3$  и  $A_3$  лежат на  $Q$ ,  $A_1$  — точка пересечения прямых  $l_1$  и  $l_3$ , и прямая  $l_3$  лежит в касательной плоскости  $T_{A_3}$ . Пусть  $T$  — точка касания квадрики Дарбу другой плоскости, проходящей через  $l_3$ . По построению, плоскость  $[TPA_3]$  полярно сопряжена точке  $A_1$ . Поместим вершину репера  $A_2$  в точку пересечения плоскости  $[TPA_3]$  и прямой  $l_1$ , тогда получим картину, изображенную на рис. 6, где точка  $\Gamma''$  является полюсом граничной кривой прямых  $l_2$  и  $l_3$  (ср. с рис. 2). По теореме 1.2 в случае регулярности ткани эта точка должна лежать на прямой  $l_1$ , но тогда точка  $R$  совпадет с точкой  $A_3$  и прямая  $l_3$  пересечет прямую  $l_2$ , что в рассматриваемом случае исключено.

Итак, мы получили, что если прямая  $l_3$  не пересекает хотя бы одну из полярно сопряженных прямых  $l_1$  и  $l_2$ , то ткань не является регулярной. Таким образом, мы получили утверждение, доказанное еще в [2]: если два пучка из трех ортогональны, то круговая ткань будет регулярной тогда и только тогда, когда в каждом из этих пучков есть окружность, принадлежащая третьему пучку. Все регулярные ткани в этом случае исчерпываются классом 2 из классификации Лазаревой.

**3.** Рассмотрим регулярную ткань в случае, когда прямые  $l_1$  и  $l_2$  находятся в положении (6), то есть касаются квадрики Дарбу в точках  $A_1$  и  $A_2$ . Напомним (см. раздел 3.3.1), что граничная кривая в этом случае распадается на две ортогональные окружности, образы которых  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  лежат на прямой, полярно сопряженной прямой  $A_1A_2$ . Но по теореме 1.2 точки  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  в случае регулярности должны лежать на прямой  $l_3$  — образе третьего пучка, и мы получаем класс 6.1 из классификации Лазаревой.

Результатом этого параграфа является следующая

**Теорема 5.1.** *Существует всего 4 класса регулярных круговых тканей, у которых хотя бы два из трех пучков, образующих ткань, не принадлежат одной связке, — это ткани типа 2, 5, 6.1 и 7 по классификации Лазаревой.*

В этом параграфе мы перечислили регулярные круговые ткани, у которых по крайней мере 2 пучка из трех не принадлежат одной связке окружностей. В проективном пространстве такой ткани отвечает тройка прямых, по крайней мере две из которых не лежат в одной плоскости. Альтернативой является случай, когда любая пара из трех прямых лежит в одной плоскости. Здесь две возможности: либо все три прямые лежат в одной плоскости, либо все три проходят

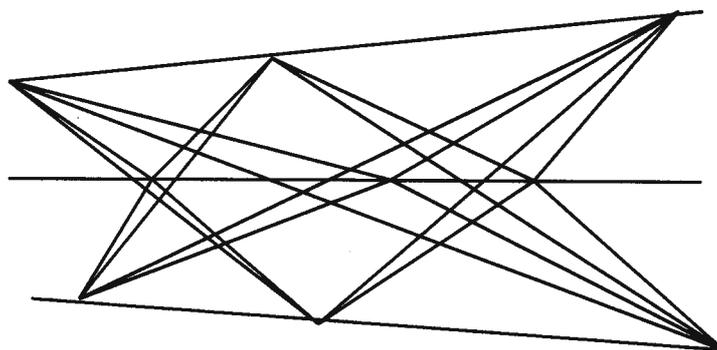


Рис. 7

через одну точку. Но эти случаи мы уже рассмотрели. Таким образом, мы перебрали всевозможные варианты расположения прямых, при которых ткань может быть регулярной, и получили только те классы, которые имеются в классификации Лазаревой. Теорема 0.1 доказана.

В заключение отметим одно следствие, касающееся пространственной конфигурации Паскаля-Паппа, о которой упоминалось во Введении со ссылкой на работу [25]. Эта конфигурация соответствует конфигурации  $H$ , изображенной на рис. 1, и состоит из трех прямых  $\ell_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , девяти точек и шести плоскостей, касающихся некоторой поверхности второго порядка  $Q$  (см. рис. 7, на котором квадрика  $Q$  не изображена). В силу теоремы 0.1 указанная конфигурация существует только при таком расположении прямых  $\ell_\alpha$  относительно квадрики  $Q$ , которое соответствует тому или иному классу регулярных круговых тканей. Отсюда вытекает, в частности, что при произвольном расположении прямых, то есть когда они попарно скрещиваются, пространственная конфигурация Паскаля-Паппа не существует.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аквис М. А. Дифференциальная геометрия тканей// Проблемы геометрии. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1983. — 15. — С. 187–208.
2. Балабанова Р. С. Шестоъгълни три-тъкани от снопове окръжности, два от които са спрегнати// Науч. тр. Пловдив. ун-т. Сер. мат. — 1973. — 11, №. 4. — С. 128–141.
3. Белоусов В. Д., Рыжков В. В. Геометрия тканей// Алгебра. Топология. Геометрия. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1972. — 10. — С. 159–188.
4. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. — М.: Физматгиз, 1959.
5. Лазарева В. Б. Три-тъкани, образованные семействами окружностей на плоскости// Дифференциальная геометрия. — Калинин: КГУ, 1977. — С. 49–64.
6. Лазарева В. Б. Три-тъкани на двумерной поверхности в триаксиальном пространстве// Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград: КГУ, 1979. — 10. — С. 54–79.
7. Лазарева В. Б. О три-тъканях, порожденных тремя  $r$ -плоскостями в проективном пространстве размерности  $2r + 1$ // Ткани и квазигруппы. — Калинин: КГУ, 1981. — С. 56–68.
8. Лазарева В. Б. Об одном классе многомерных параллелизуемых три-тъканей// Материалы 5 конф. молодых ученых УДН. — М.: Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1982. — С. 47–50. Деп. в ВИНТИ 15.07.1982, № 3814-82 Деп.
9. Лазарева В. Б. О три-тъкани Дарбу на поверхности в триаксиальном пространстве// Ткани и квазигруппы. — Калинин: КГУ, 1982. — С. 45–55.
10. Лазарева В. Б. Об одном классе поверхностей, несущих сеть кривых второго порядка// Материалы 6 конф. молодых ученых УДН. — М.: Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1983. — С. 104–107. Деп. в ВИНТИ 5.03.1984, № 1316-84 Деп.
11. Лазарева В. Б. О соприкасающихся гомографиях точечного соответствия трех прямых// Ткани и квазигруппы. — Калинин: КГУ, 1984. — С. 70–76.

12. Лазарева В. Б. О гомографиях Годо в трехмерном проективном пространстве// Проблемы теории тканей и квазигрупп. — Калинин: КГУ, 1985. — С. 84–89.
13. Лазарева В. Б. К геометрии  $n$ -аксиального пространства// Ткани и квазигруппы. — Калинин: КГУ, 1987. — С. 68–75.
14. Лазарева В. Б. Параллелизуемые три-ткани, образованные пучками окружностей// Ткани и квазигруппы. — Калинин: КГУ, 1988. — С. 74–77.
15. Лазарева В. Б., Орлова О. В. Об одном классе шестиугольных три-тканей, образованных пучками окружностей// Ткани и квазигруппы. — Калинин: КГУ, 1986. — С. 115–119.
16. Лазарева В. Б., Шелехов А. М. О геометрической интерпретации инвариантного оснащения точечного соответствия трех прямых// Изв. вузов. Сер. мат. — 1984. — 1984, — 9. — С. 43–47.
17. Aklivis M. A., Goldberg V. V. Differential geometry of webs// Handbook of Differential Geometry. Chap. 1. — Elsevier, 2000. — С. 1–152.
18. Aklivis M. A., Shelekhov A. M. Geometry and algebra of multidimensional three-webs. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1992.
19. Erdogan H. I. Düzlemde 6-gen doku teşkil eden çember demety 3-üzleri/ Ph.D. Thesis. — Istanbul: Istanbul Teknik Ueniv., 1974.
20. Erdogan H. I. Triples of circle-pencils forming a hexagonal three-web in  $E^2$ // J. Geom. — 1989. — 35, №№ 1-2. — С. 39–65.
21. Erdogan H. I. Hexagonal surface webs formed by  $n$  pencils of spheres belonging to the same bundle// J. Geom. — 1990. — 38, №№ 1-2. — С. 39–41.
22. Erdogan H. I. Die Sechseck- $n$ -Waben in der Ebene, welche von  $n$  Kreis büscheln erzeugt werden// J. Geom. — 1991. — 40, №№ 1-2. — С. 47–59.
23. Lazareva V. B. Three-axial geometry and its multidimensional analogues// Differ. Geom. and Appl./ Proc. Conf., Dubrovnik, June 26–July 3, 1988. — Univ. Novi Sad, Novi Sad, 1989. — С. 141–144.
24. Lazareva V. B. Three-webs on cubic surfaces// Webs and Quasigroups. — Tver: Tver State Univ., 1996–1997. — С. 101–126.
25. Lazareva V. B., Shelekhov A. M. Around the Blaschke problem in the web theory// Webs and Quasigroups. — Tver: Tver State Univ., 1996–1997. — С. 65–73.
26. Lazareva V. B., Shelekhov A. M. Three-webs formed by pencils of conics// Webs and Quasigroups. — Tver: Tver State Univ., 2000. — С. 63–76.

## АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ ТРИ-ТКАНЕЙ, ОБРАЗОВАННЫХ СЛОЕНИЯМИ РАЗНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

© 2005 г. Г. А. ТОЛСТИХИНА

### СОДЕРЖАНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| Введение . . . . .   | 29  |
| 1. Основные понятия теории три-тканей $W(p, q, p + q - 1)$ . . . . .                       | 42  |
| 2. $(p + 1)$ -ткани и $(q + 1)$ -ткани, индуцируемые тканью $W(p, q, p + q - 1)$ . . . . . | 49  |
| 3. Три-ткани $WR(1, q)$ . . . . .  | 60  |
| 4. 4-ткань $\tilde{W}_2$ , индуцированная три-тканью $WR(1, 3)$ . . . . .                  | 66  |
| 5. Структурные уравнения три-ткани $W(p, q, p + q - 1)$ . . . . .                          | 70  |
| 6. Примеры три-тканей $WR(p, q)$ . . . . .   | 72  |
| 7. Тожество обобщенной ассоциативности . . . . .   | 77  |
| 8. Об ассоциативных координатных моноидах три-ткани $W(p, q, r)$ . . . . .                 | 80  |
| 9. Три-ткани $GW(p, q, q)$ , определяемые группами Ли преобразований . . . . .             | 83  |
| 10. Квазигруппы Бола преобразований и определяемые ими три-ткани . . . . .                 | 102 |
| Список литературы . . . . .  | 111 |

### ВВЕДЕНИЕ

**0.1.** Гладкие функции  $z = f(x, y)$  вида

$$f : X \times Y \rightarrow Z,$$

где

$$X \subset \mathbb{R}^q, \quad Y \subset \mathbb{R}^p, \quad Z \subset \mathbb{R}^{p+q-r}, \quad p, q, r \in \mathbb{N}, \quad r < p + q, \quad p \leq q \leq r,$$

и в каждой точке области определения ранги матриц Якоби  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$  и  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$  максимальны, будем называть гладкими группоидами и записывать также в виде

$$z = x \cdot y. \tag{0.1}$$

С другой стороны, уравнение (0.1) определяет на многообразии  $\mathcal{M} = X \times Y$  три-ткань  $W(p, q, r)$ , образованную тремя слоениями  $\lambda_w$  общего положения,  $w = 1, 2, 3$  (см. [10]). Здесь  $\lambda_1$  —  $q$ -параметрическое слоение  $p$ -мерных подмногообразий  $x = \text{const}$ ,  $\lambda_2$  —  $p$ -параметрическое слоение  $q$ -мерных подмногообразий  $y = \text{const}$ ,  $\lambda_3$  —  $(p + q - r)$ -параметрическое слоение  $r$ -мерных подмногообразий  $z = \text{const}$ . При этом через каждую точку  $A$  из  $\mathcal{M}$  проходит один и только один слой каждого слоения; любые два слоя  $\mathcal{F}_1 \subset \lambda_1$  и  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$  имеют не более одной общей точки; слои  $\mathcal{F}_3 \subset \lambda_3$  и  $\mathcal{F}_1 \subset \lambda_1$ , имеющие общую точку, пересекаются по подмногообразию размерности  $r - q$ , а слои  $\mathcal{F}_3 \subset \lambda_3$  и  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$ , имеющие общую точку, пересекаются по подмногообразию размерности  $r - p$ .

В классической теории тканей различают плоские ткани ( $p = q = r = 1$ ) и многомерные три-ткани, образованные поверхностями одинаковой размерности ( $p = q = r$ ). Мы рассматриваем «неклассический» случай, когда все размерности различны. Изучение тканей последнего типа мотивируется не только внутренними потребностями теории, стремлением к завершенности и полноте, но, прежде всего, многочисленными приложениями. Теория тканей богата сильными геометрическими методами, которые позволяют эффективно изучать геометрию гладких функций многих

вещественных переменных в случае, когда эти переменные разбиты на две группы, т.е. рассматриваются как два векторных аргумента. При разном разбиении получаются различные три-ткани  $W(p, q, r)$  с разными  $p, q, r$  и, соответственно, с разными свойствами.

Теория три-тканей  $W(p, q, r)$ , образованных слоениями разных размерностей, появилась значительно позднее классической теории три-тканей  $W(r, r, r)$ , поэтому первая из них развивается по аналогии со второй (основная терминология, понятия, определения, результаты и т. д.). С другой стороны, ясно, что в теории тканей  $W(p, q, r)$  должны появиться качественно новые объекты, отсутствующие в классической теории тканей.

Как и классическая теория тканей, теория тканей  $W(p, q, r)$  существенно локальна. Вообще говоря, имеется всего несколько работ, посвященных глобальной теории тканей [113, 114]. Все существенные геометрические результаты получаются пока именно локальными методами, в рамках локальных теорий.

Следуя классической теории, группоид, определяемый уравнением (0.1), назовем координатным группоидом три-ткани  $W(p, q, r)$ . Этот группоид не является, вообще говоря, квазигруппой и будет таковой только в случае  $p = q = r$ .

Как и в классической теории, ткани  $W(p, q, r)$  будем рассматривать с точностью до локальных диффеоморфизмов

$$\tilde{x} = \alpha(x), \quad \tilde{y} = \beta(y), \quad \tilde{z} = \gamma(z). \quad (0.2)$$

Напомним, что тройка преобразований вида (0.2) называется изотопическим преобразованием или изотопией, а изотопии вида  $(\alpha, \beta, \text{id})$  называются главными [18].

Пусть в каких-либо локальных координатах уравнения (0.1) имеют вид

$$z^\xi = f^\xi(x^i, y^\alpha), \quad \xi = \overline{1, p+q-r}, \quad i = \overline{1, q}, \quad \alpha = \overline{1, p}. \quad (0.3)$$

Здесь укажем существенное отличие от классической теории. Дело в том, что преобразования вида (0.2) не сохраняют, вообще говоря, размерность слоев ткани  $W(p, q, r)$ . Например, группоид

$$z^1 = x^1 + x^2 + y^1 \quad (0.4)$$

при изотопии  $\bar{x}^1 = x^1 + x^2$ ,  $\bar{x}^2 = x^2$  перейдет в группоид  $z^1 = \bar{x}^1 + y^1$ .

Проблемы с размерностью возникают в случае, если, например, часть переменных  $x^i$  отделена от других переменных, т.е. уравнения (0.3) имеют вид

$$z^\xi = f^\xi(x^1, \dots, x^{k_0}, \varphi^u(x^i), y^1, \dots, y^p), \quad (0.5)$$

где индекс  $u$  пробегает некоторое (конечное) множество значений и

$$\rho = \text{rank} \left( \frac{\partial \varphi^u}{\partial x^i} \right) < q - k_0. \quad (0.6)$$

В этом случае после изотопического преобразования

$$\tilde{x}^{\hat{u}} = \varphi^{\hat{u}}, \quad \hat{u} = \overline{k_0+1, k_0+\rho}, \quad \tilde{x}^{k_0+\rho+1} = x^{k_0+\rho+1}, \dots, \tilde{x}^q = x^q, \quad (0.7)$$

где  $\varphi^{\hat{u}}$  суть  $\rho$  функционально независимых функций из набора  $\varphi^u$ , число переменных  $x^i$  в уравнениях (0.3) уменьшается.

Аналогично, в случае, если уравнение (0.3) имеет вид

$$z^\xi = f^\xi(x^1, \dots, x^q, y^1, \dots, y^{s_0}, \phi^u(y^\alpha)),$$

причем

$$\varrho = \text{rank} \left( \frac{\partial \phi^u}{\partial y^\alpha} \right) < p - s_0,$$

после изотопического преобразования

$$\tilde{y}^{\check{u}} = \phi^{\check{u}}, \quad \check{u} = \overline{s_0+1, s_0+\varrho}, \quad \tilde{y}^{s_0+\varrho+1} = y^{s_0+\varrho+1}, \dots, \tilde{y}^p = y^p$$

число переменных  $y^\alpha$  в уравнениях (0.3) также уменьшится.

В дальнейшем будем считать, что число переменных  $x^i$  и  $y^\alpha$  в уравнениях (0.3) уже «минимизировано» с помощью описанной процедуры.

Локальные диффеоморфизмы  $\alpha, \beta, \gamma$  можно рассматривать как замену координат на базах слоений ткани  $W(p, q, r)$ , либо как локально диффеоморфное отображение ткани  $W(p, q, r)$ , заданной на многообразии  $\mathcal{M}$ , на эквивалентную ей три-ткань  $\tilde{W}(p, q, r)$ , заданную на многообразии  $\tilde{\mathcal{M}}$ . При этом пара  $(\alpha, \beta)$  определяет локальный диффеоморфизм многообразия  $\mathcal{M}$  на многообразии  $\tilde{\mathcal{M}}$ , при котором слоение  $\lambda_w$  ткани  $W(p, q, r)$ ,  $w = 1, 2, 3$ , переходит в слоение  $\tilde{\lambda}_w$  ткани  $\tilde{W}(p, q, r)$ . Поэтому многообразие  $\mathcal{M}$ , несущее три-ткань  $W(p, q, r)$ , представляет собой  $G$ -структуру, структурная группа которой действует в касательном расслоении многообразия  $\mathcal{M}$  и является подгруппой полной линейной группы  $GL(p + q)$ , оставляющей инвариантными подпространства размерности  $p, q$  и  $r$  (см. [11]). При различных  $p, q, r$  получается, естественно, и разная геометрия.

Из сказанного вытекает, что координатные группоиды эквивалентных три-тканей изотопны и, наоборот, если координатные группоиды три-тканей  $W(p, q, r)$  и  $\tilde{W}(p, q, r)$  изотопны, то эти ткани эквивалентны. Изотопия — наиболее широкое отношение эквивалентности, сохраняющее размерность пересечения слоев ткани. Это отношение эквивалентности определяет геометрию, изучающую инцидентные структуры на три-ткани. В первую очередь, это — геометрические, алгебраические и аналитические условия замыкания различных конфигураций, образованных слоями ткани.

Напомним, что основы теории три-тканей были заложены участниками гамбургского геометрического семинара, руководимого В. Бляшке (1926–28 гг.). Бляшке, его ученики и коллеги, среди которых наиболее известны имена Бола, Рейдемейстера и Томсена, изучали, в основном, плоские три-ткани, т.е. ткани  $W(1, 1, 1)$  (см. библиографию в обзорах [7, 20]). На семинаре Бляшке впервые возникла идея рассматривать геометрический образ, определяемый функцией двух переменных  $X \times Y \rightarrow Z$ , как три-ткань на прямом произведении  $X \times Y$ . Именно поэтому удалось определить различные конфигурации на три-ткани, изображенные на рис. 1. На этих рисунках и на всех последующих три слоения, образующие три-ткань, изображаются, соответственно, вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями.

На произвольной три-ткани эти конфигурации, вообще говоря, не замыкаются. Ткани, на которых указанные конфигурации являются замкнутыми, называются, соответственно, шестиугольными тканями ( $H$ ), тканями Томсена ( $T$ ), Рейдемейстера ( $R$ ), Бола: левыми ( $B_l$ ), правыми ( $B_r$ ) и средними ( $B_m$ ).

Как выяснилось, замыкание конфигураций на криволинейных три-тканях эквивалентно выполнению в их координатных лупах соответствующих тождеств.

| Тождество<br>в координатной лупе            | Условие<br>замыкания конфигурации |
|---|-----------------------------------|
| $(u \circ u) \circ u = u \circ (u \circ u)$ | $H$ (шестиугольность)             |
| $u \circ v = v \circ u$                     | $T$ (Томсена)                     |
| $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$ | $R$ (Рейдемейстера)               |
| $(u \circ u) \circ v = u \circ (u \circ v)$ | $B_l$ (левое Бола)                |
| $u \circ (v \circ v) = (u \circ v) \circ v$ | $B_r$ (правое Бола)               |
| $u \circ (v \setminus u) = (u/v) \circ u$   | $B_m$ (среднее Бола)              |

Здесь  $(\circ)$  — операция в координатной лупе  $\ell_{(a,b)}(\circ)$ , которая определяется на третьем слоении ткани так, как показано на рис. 2, где  $a$  и  $b$  — параметры фиксированных слоев первого и второго слоений ткани,  $u$  и  $v$  — параметры произвольных слоев третьего слоения,  $e$  — единица лупы  $\ell_{(a,b)}(\circ)$ . Поскольку все рассуждения носят локальный характер, то слои  $u, v$  и  $u \circ v$  следует рассматривать в достаточно малой окрестности точки  $O$  (или слоя  $e$ ). Символами  $\setminus$  и  $/$  обозначены, соответственно, левая и правая обратные операции для операции  $\circ$ .

Условия замыкания  $B_l, B_r$  и  $B_m$  не являются независимыми. В [19] доказано, что выполнение двух из этих условий влечет третье. Ткани, на которых замыкаются фигуры всех трех указанных типов, называются тканями Муфанг ( $M$ ) (см. [13]).

Оказалось [23], что на криволинейных три-тканях условия замыкания всех конфигураций эквивалентны: замыкание конфигураций какого-либо одного типа влечет замыкание конфигураций любого другого типа. Но условия замыкания различаются для многомерных три-тканей  $W(r, r, r)$ ,

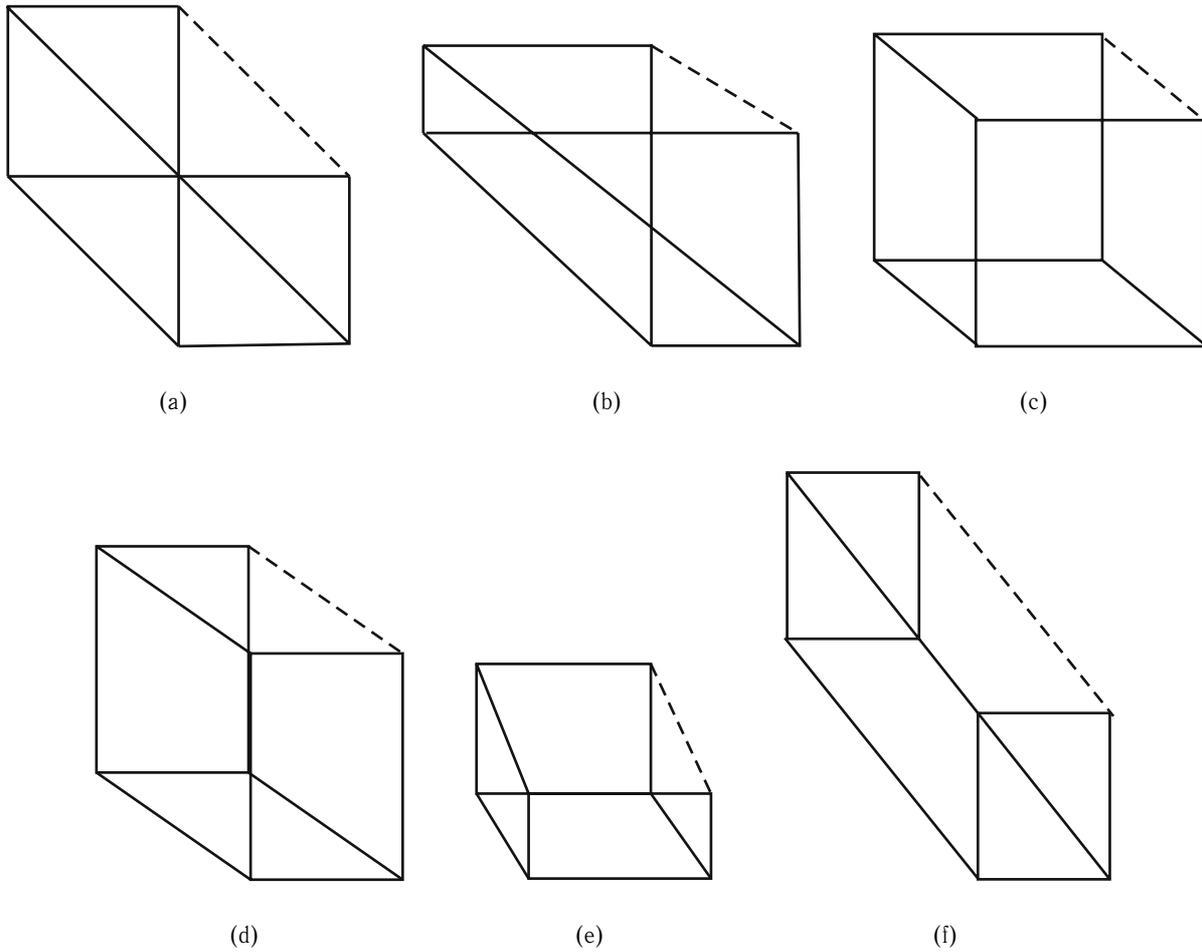


Рис. 1

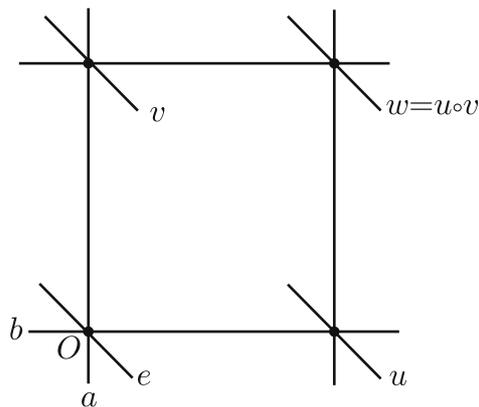


Рис. 2

изучение которых было начато Г. Боллом [100] и С. Черном [103]. В [100] рассматривалась три-ткань двумерных поверхностей в четырехмерном пространстве, в [103] построена теория инвариантов три-ткани  $W(r, r, r)$  общего вида.

Дальнейшее развитие теории многомерных три-тканей связано с выходом в свет в 1955 г. книги В. Бляшке «Введение в геометрию тканей» (русский перевод М. А. Акивиса, 1959 г.). С этого момента началось активное исследование три-тканей в России. Изложение полученных результатов

и библиографию см. в [7, 20, 78, 80, 88, 89, 91, 104]. Мы приведем лишь те понятия и результаты, которые, на наш взгляд, следует обобщить для три-тканей  $W(p, q, r)$ .

Дифференциальные уравнения три-ткани  $W(r, r, r)$  общего вида и некоторых специальных классов были впервые найдены Черном [103]. Структурные уравнения ткани  $W(r, r, r)$  в терминах внешних форм и внешнего дифференциального исчисления записаны Акивисом в [3] в симметричной форме:

$$\begin{aligned} d\omega_1^i &= \omega_1^j \wedge \omega_j^i + a_{jk}^i \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \\ d\omega_2^i &= \omega_2^j \wedge \omega_j^i - a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \\ d\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + b_{jkl}^i \omega_1^k \wedge \omega_2^l, \end{aligned} \quad (0.8)$$

где  $i, j, k, l = \overline{1, r}$ . Величины  $a = (a_{jk}^i)$  и  $b = (b_{jkl}^i)$  являются тензорами и называются соответственно тензорами кручения и кривизны три-ткани. Они удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям и соотношениям

$$b_{[jkl]}^i = 2a_{[jk}^m a_{m|l]}^i. \quad (0.9)$$

Поля тензоров  $a$  и  $b$  определяют три-ткань с точностью до эквивалентности (см. [3]).

Уравнения ткани  $W(r, r, r)$  общего вида в контравариантной форме записаны в работе [92]. Эта форма наиболее удобна для физических приложений, поскольку в физике чаще используются контравариантные методы.

В [12, 77, 81] найдены выражения для тензоров кручения, кривизны, ковариантных производных первого и второго порядка тензора кривизны через частные производные от функции  $z = f(x, y)$ , определяющей три-ткань. В [124] А. М. Шелехову удалось упростить формулу для тензора кривизны, по существу обобщив на многомерный случай уравнение Сен-Робера

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \frac{f_x}{f_y} = 0,$$

определяющее параллелизуемые три-ткани на плоскости.

Оказалось, что дифференциально-геометрические свойства три-ткани  $W(r, r, r)$  удобно описывать с помощью канонической аффинной связности  $\Gamma$ , тензоры кручения  $R_{JK}^I$  и кривизны  $R_{JKL}^I$  которой выражаются соответственно через тензоры  $a$  и  $b$ :

$$R_{JK}^I = \left\{ \begin{pmatrix} a_{jk}^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_{jk}^i \end{pmatrix} \right\}, \quad R_{JKL}^I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}b_{jkl}^i \\ -\frac{1}{2}b_{jkl}^i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}b_{jkl}^i \\ -\frac{1}{2}b_{jkl}^i & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

где  $I, J, K, L = \overline{1, 2r}$ . Впервые эта связность описана Черном в [103], где он нашел также тензорные характеристики многомерных три-тканей  $T$ ,  $R$  и  $H$ . Позже в работах [3, 13, 73] были найдены тензорные характеристики других классов три-тканей (таблица 1).

ТАБЛИЦА 1

| Ткань | Тензорная характеристика  | Порядок замкнутой $G$ -структуры |
|-------|---------------------------|----------------------------------|
| $T$   | $a = b = 0$               | 1                                |
| $R$   | $b = 0$                   | 2                                |
| $B_l$ | $b_{(jk)l}^i = 0$         | 3                                |
| $B_r$ | $b_{(j k l)}^i = 0$       | 3                                |
| $B_m$ | $b_{j(kl)}^i = 0$         | 3                                |
| $M$   | $b_{jkl}^i = b_{[jkl]}^i$ | 2                                |
| $H$   | $b_{(jkl)}^i = 0$         | 4                                |

Доказательство достаточности приведенных тензорных условий для различных классов тканей значительно сложнее, чем доказательство необходимости, и требует привлечения дифференциально-геометрических объектов более высокого порядка — ковариантных производных тензора кривизны [78]. Впервые достаточность тензорных условий для тканей  $T$ ,  $R$  и  $H$  доказал Черн [103]. Эти доказательства были существенно упрощены Акивисом в [3], в частности, за счет того, что он развил понятие трансверсально-геодезической поверхности ткани, неявно присутствующее в доказательствах Черна.

Достаточность тензорных условий для тканей Бола доказана В. И. Федоровой [73]. Заметим, кстати, что в настоящей работе мы существенно упрощаем доказательство Федоровой и находим необходимые и достаточные тензорные условия, характеризующие класс тканей Бола  $B_l(p, q, q)$ , образованных слоениями разной размерности.

Перечисленные классы тканей описаны также в терминах касательной  $W$ -алгебры и замкнутой  $G$ -структуры.

В [5] М. А. Акивис показал, что коммутатор  $[\xi, \eta]$  и ассоциатор  $\langle \xi, \eta, \zeta \rangle$ , определенные в касательном пространстве  $T_e(L)$  единицы  $e$  произвольной локальной аналитической лупы  $L$ , связаны между собой обобщенным тождеством Якоби

$$\langle \xi, \eta, \zeta \rangle + \langle \eta, \zeta, \xi \rangle + \langle \zeta, \xi, \eta \rangle - \langle \xi, \zeta, \eta \rangle - \langle \eta, \xi, \zeta \rangle - \langle \zeta, \eta, \xi \rangle = [[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta]. \quad (0.10)$$

Полученная бинарно-тернарная алгебра названа им касательной  $W$ -алгеброй лупы  $L$ . Эту алгебру К. Хофман и К. Штрамбах в [105] назвали алгеброй Акивиса. Это понятие обобщает понятие алгебры Ли группы Ли. Для последней ассоциатор равен нулю, а обобщенное тождество Якоби превращается в обычное тождество Якоби для алгебры Ли.

Свойства алгебры Акивиса изучались в работах [85, 102, 126, 127]. Так, в [127] построена алгебра Акивиса для произвольной неассоциативной алгебры  $B$  с операцией  $\cdot$ :

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x, \quad \langle x, y, z \rangle = (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z), \quad x, y, z \in B.$$

Эта алгебра обозначена  $\text{Ak}(B)$  и доказано, что любая алгебра Акивиса может быть изоморфно вложена в алгебру  $\text{Ak}(B)$  при соответствующем выборе алгебры  $B$  (см. [127]).

В случае, если  $L = \ell_{(a,b)}(\circ)$  — координатная лупа некоторой три-ткани, то ее коммутатор и ассоциатор определяются тензорами кручения и кривизны этой ткани:

$$[\xi, \eta]^i = -2a_{jk}^i \xi^j \eta^k, \quad \langle \xi, \eta, \zeta \rangle^i = b_{jkl}^i \xi^j \eta^k \zeta^l, \quad (0.11)$$

где тензоры  $a_{jk}^i$  и  $b_{jkl}^i$  вычисляются в точках  $x = a$ ,  $y = b$ . При этом обобщенное тождество Якоби (0.10) следует из соотношений (0.9). Таким образом, с три-тканью  $W(r, r, r)$  связано поле  $W$ -алгебр.

В терминах  $W$ -алгебр можно охарактеризовать все перечисленные выше классы тканей. Каждая из тканей  $T$ ,  $R$ ,  $B$ ,  $M$  характеризуется некоторыми дополнительными соотношениями на тензоры кручения и кривизны, т.е. некоторой специфической  $W$ -алгеброй. Так, тензор кручения  $a_{jk}^i$  три-ткани Муфанг удовлетворяет кубическим соотношениям Сейгла [117]. Соответствующая  $W$ -алгебра называется алгеброй Мальцева, так как она впервые появилась в работе А. И. Мальцева [44] (сам А. И. Мальцев называл ее муфанг-лиевой алгеброй). Л. В. Сабинин и П. О. Михеев в [56] доказали, что введенные ими левая и правая алгебры Бола являются  $W$ -алгебрами соответственно тканей  $B_l$  и  $B_r$ .

Позже были найдены многочисленные примеры три-тканей различных классов: Муфанг, Бола, шестиугольные и т. д. Их конечные уравнения находятся по заданным  $W$ -алгебрам путем интегрирования соответствующих структурных уравнений. Этот метод впервые применен М. А. Акивисом в работе [6] для нахождения конечных уравнений ткани Муфанг минимальной размерности:

$$z^1 = e^{-v^4} u^1 + e^{u^4} v^1, \quad z^2 = e^{-v^4} u^2 + e^{u^4} v^2, \quad z^3 = e^{v^4} u^3 + e^{-u^4} v^3 - (u^1 v^2 - u^2 v^1), \quad z^4 = u^4 + v^4.$$

Приведем еще некоторые примеры. Шестимерные три-ткани Бола с симметричным тензором  $a_{ij}$  классифицированы В. И. Федоровой в [72]. Одна из этих тканей (она нам понадобится в дальнейшем), задается уравнениями

$$z^1 = u^1 + v^1 - (u^2 + v^2)u^3v^3, \quad z^2 = u^2 + v^2, \quad z^3 = u^3 + v^3. \quad (0.12)$$

Шестимерные шестиугольные три-ткани с частично симметричным тензором кривизны ( $b_{jkl}^i = b_{jlk}^i$ ) исследованы в работах М. А. Шестаковой (см., например, [86, 128]). Путем интегрирования соответствующих структурных уравнений ею найдены конечные уравнения таких тканей:

$$\begin{aligned} z^1 &= u^1 + v^1 + (u^2 + v^2)(u^3v^2 - u^2v^3), \\ z^2 &= u^2 + v^2, \quad z^3 = u^3 + v^3; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} z^1 &= u^1 + v^1 + 2u^2u^3(qv^3 - pv^2) + 6v^2v^3(qu^3 - pu^2) + 4q(u^3)^2v^2 - 4p(u^2)^2v^3, \\ z^2 &= u^2 + v^2, \quad z^3 = u^3 + v^3, \quad p, q = \text{const}. \end{aligned}$$

Здесь важно отметить следующее. Практически во всех случаях, когда удается найти конечные уравнения ткани того или иного класса, эти ткани оказываются  $G$ -тканями — так в [96] названы ткани, координатные лупы которых являются  $G$ -лупами, т.е. лупами, изоморфными всем своим изотопам. Согласно [96],  $G$ -ткань можно построить следующим образом. Пусть  $G$  — локальная группа Ли размерности  $2r + \rho$  и  $H_\rho$ ,  $\rho = 1, 2, 3$ , — три ее подгруппы размерности  $r + \rho$ , пересекающиеся по общей подгруппе  $H$  размерности  $\rho$ .  $G$ -ткань образована множествами  $gH_\rho/H$  ( $gH_\rho$  — смежные классы) на однородном пространстве  $G/H$ . В частности, если группа  $G$  является прямым произведением подгрупп  $H_1$  и  $H_2$ , то подгруппа  $H_3$  будет графиком некоторого изоморфизма  $H_1 \rightarrow H_2$ , а соответствующая  $G$ -ткань — тканью  $R$  [96].  $G$ -ткани характеризуются, во-первых, тем, что допускают транзитивную группу автоморфизмов, и, во-вторых, существует адаптированный репер, в котором все структурные тензоры ткани являются постоянными [82, 96, 123].

С  $W$ -алгебрами связаны и другие результаты классической теории. Так, в [90] доказано, что локальная  $W$ -алгебра подткани  $\hat{W}$  многомерной три-ткани  $W(r, r, r)$  является подалгеброй  $W$ -алгебры этой ткани, а существование фактор-ткани  $W/\hat{W}$  влечет существование гладкого поля идеалов в расслоении касательных  $W$ -алгебр ткани. Справедливо и обратное утверждение [133]: из существования гладкого поля идеалов в касательной  $W$ -алгебре три-ткани следует существование нормальных подтканей  $\hat{W}$ . Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между идеалами касательных  $W$ -алгебр и нормальными подтканями ткани  $W(r, r, r)$ .

Перечисленные выше классы тканей описаны также с помощью понятия замкнутой  $G$ -структуры. Согласно [4],  $G$ -структура, определяемая три-тканью, называется замкнутой  $G$ -структурой класса  $p$ , если ковариантные производные тензоров кручения и кривизны порядка  $p + 2$  выражаются через ковариантные производные более низких порядков и сами эти тензоры. В соответствии с этим, как показано в [4], ткань  $T$  определяет замкнутую  $G$ -структуру класса 0, ткани  $R$  и  $M$  — класса 1, а ткани Бола — класса 2.

Шестиугольные ткани также обладают замкнутой  $G$ -структурой четвертого порядка. Этот результат был получен А. М. Шелеховым для тканей  $H$  произвольной размерности лишь в 1985 г. (см. [75]), а для четырехмерных тканей  $H$  он следует из результатов работы [24]. Отметим, что в [78] в основу классификации замкнутых  $G$ -структур был положен порядок фундаментального дифференциально-геометрического объекта ткани (см. таблицу 1).

Наиболее общие аналитические условия, приводящие к замкнутости  $G$ -структуры, указаны в [78]. Решение этой задачи связано с рассмотрением дифференциальных окрестностей высоких порядков. В [78] доказано, что значения компонент дифференциально-геометрического объекта любого порядка три-ткани  $W(r, r, r)$  (т.е. ковариантных производных любого порядка тензора кривизны) в точке  $(a, b)$  можно выразить через коэффициенты разложения в ряд Тейлора уравнений ее локальной координатной лупы  $\ell_{(a,b)}(\circ)$  и обратно: коэффициенты канонического разложения уравнений координатной лупы  $\ell_{(a,b)}(\circ)$  выражаются через компоненты дифференциально-геометрического объекта соответствующего порядка. Этот факт позволил строго доказать характеристическое свойство локальных координатных луп ткани с замкнутой  $G$ -структурой: каноническое разложение в классе таких луп вполне определяется конечным числом первых членов разложения.

Задача классификации замкнутых  $G$ -структур произвольного порядка связана в [78] с классификацией тождеств порядка  $k$  от одной переменной в локальной аналитической лупе. Такое тождество имеет вид  $S_1^n(x) = S_2^n(x)$ , где  $S^n(x)$  — произвольное слово длины  $n$  от переменной  $x$  в

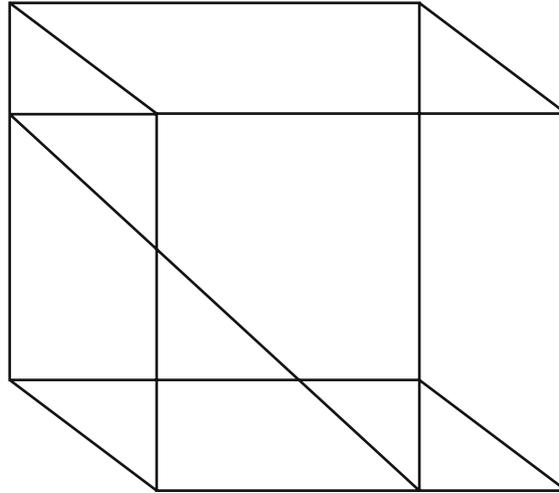


Рис. 3

локальной аналитической лупы, т.е. произведение вида  $x \cdot x \cdots x$ , в котором каким-либо образом расставлены скобки. Тожество имеет порядок  $k$ , если частичные суммы ряда Тейлора функций  $S_1^n(x)$  и  $S_2^n(x)$  совпадают до порядка  $k$  включительно. Тожество  $x^2 \cdot x = x \cdot x^2$ , которое выполняется в координатных лупах ткани  $H$ , имеет порядок 2. Тожества порядка 3 перечислены в [21]. Классификация тождеств четвертого порядка длины 10–12 была проведена с помощью ЭВМ в [21, 22].

Оказалось [78], что выполнение тождеств порядка  $k$  в координатных лупах три-ткани влечет замкнутость ее  $G$ -структуры. Так, выполнение в координатных лупах ткани одного из тождеств

$$x^2(x^2x) = x((x^2x)x), \quad x^2(xx^2) = x((xx^2)x),$$

и одного из тождеств

$$(x^2x)x^2 = (x(x^2x))x, \quad (xx^2)x^2 = (x(xx^2))x,$$

приводит к замкнутой  $G$ -структуре порядка 6.

Помимо классических тождеств  $T$ ,  $R$ ,  $H$ ,  $B$ , в [80] были рассмотрены новые тождества в координатных лупах три-тканей  $W(r, r, r)$ :

$$S_l^{k-1}(x, y, u_1 \dots u_{k-1})(u \cdot v) = S_l^{k-1}(x, y, u_1 \dots u_{k-1})(u) \cdot S_l^{k-1}(x, y, u_1 \dots u_{k-1})(v), \quad (0.13)$$

$$S_r^{k-1}(x, y, u_1 \dots u_{k-1})(u \cdot v) = S_r^{k-1}(x, y, u_1 \dots u_{k-1})(u) \cdot S_r^{k-1}(x, y, u_1 \dots u_{k-1})(v). \quad (0.14)$$

Здесь  $k \in \mathbb{N}$ , операторы  $S_l^{k-1}$  и  $S_r^{k-1}$  являются локальными автоморфизмами координатной лупы, определяемыми некоторыми рекуррентными соотношениями. В частности, при  $k = 1$  равенства (0.13) и (0.14) принимают соответственно вид

$$l_{x,y}(u \cdot v) = l_{x,y}(u) \cdot l_{x,y}(v), \quad r_{x,y}(u \cdot v) = r_{x,y}(u) \cdot r_{x,y}(v),$$

где

$$l_{x,y} = L_{x,y}^{-1} \circ L_x \circ L_y, \quad r_{x,y} = R_{x,y}^{-1} \circ R_y \circ R_x, \quad L_x(y) = x \cdot y, \quad R_x(y) = y \cdot x.$$

Лупы, в которых все операторы  $l_{x,y}$  ( $r_{x,y}$ ) являются автоморфизмами, называются левыми (правыми) специальными лупами, или  $A$ -лупами [18, 101]. Аналитические  $A$ -лупы впервые рассмотрел Киккава [108]. Три-ткани с координатными  $A$ -лупами начал изучать А. М. Шелехов [80].

Класс три-тканей, в координатных лупах которых выполняется тождество эластичности

$$x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot x,$$

впервые исследован в [84] (см. также [79, 83, 125]). Такие ткани (они названы тканями  $E$ ), характеризуются тем, что на них замыкаются конфигурации  $E$  (рис. 3).

Оказалось [79], что ткани  $E$  образуют собственный подкласс средних тканей Бола  $B_m$ , а, с другой стороны, ткани Муфанг  $M$  содержатся в классе тканей  $E$ :  $M \subset E \subset B_m$ . Четырехмерных

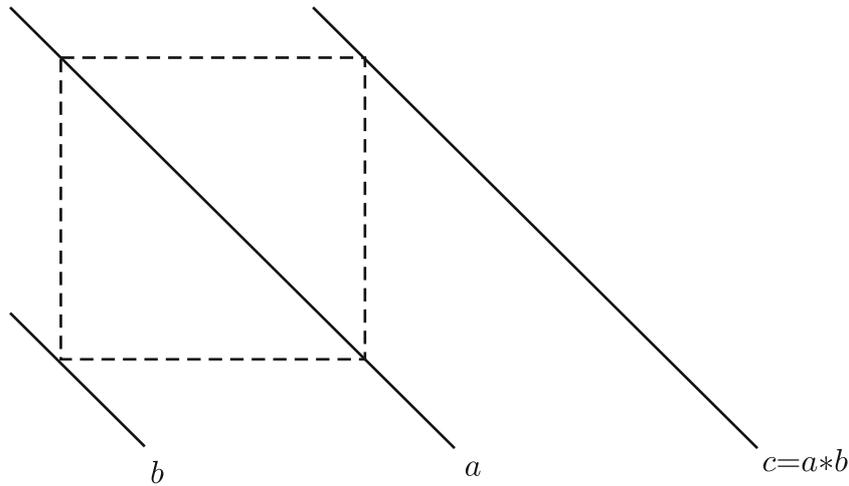


Рис. 4

тканей  $E$ , отличных от тканей  $R$ , не существует, а класс шестимерных (не муфанговых) три-тканей  $E$  состоит всего из двух (изотопически не эквивалентных) тканей, которые определяются уравнениями (0.12) и уравнениями

$$z^1 = u^1 + v^1, \quad z^2 = u^2 + v^2 e^{-2u^1} + (u^3 v^1 - u^1 v^3) e^{-2u^1}, \quad z^3 = u^3 + v^3.$$

В классической теории рассматриваются и другие классы тканей, не связанные с замыканием конфигураций: трансверсально-геодезические, изоклинные, грассмановы, алгебраические, с симметричным тензором кривизны и др. (см. [91]). Здесь приведем лишь некоторые понятия и результаты, которые могут быть обобщены для тканей  $W(p, q, r)$ . Это, прежде всего, понятие сердцевины, введенное В. Д. Белоусовым в [18]. Согласно [18], сердцевина — это бинарная операция (обозначим ее  $*$ ), определенная на третьем слое средней ткани Бола  $B_m$  так, как показано на рис. 4.

Операция  $*$  удовлетворяет тождествам идемпотентности  $a * a = a$ , левой обратимости  $a * (a * b) = b$ , левой дистрибутивности  $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$  и поэтому индуцирует на базе третьего слоя ткани  $B_m$  локально симметрическую структуру, определяемую локальными симметриями  $s_a$ :  $s_a(b) = a * b$  (см. [55]). Эта структура может быть реализована на некотором гладком подмногообразии ткани  $B_m$ . В [59] приведен пример такой реализации на диагональном трехмерном многообразии шестимерной ткани  $E$ , определяемой уравнениями (0.12).

Сердцевина ткани  $B_m$  порождает локально симметрическую связность (с нулевым кручением и ковариантно постоянной кривизной). Инвариантные формы последней и ее тензор кривизны найдены в [70]. В случае, если эта связность локально плоская,  $W$ -алгебра ткани является разрешимой с высотой разрешимости 2 (см. [61]).

Проективная интерпретация изоклинной ткани  $B_m$ , допускающей локально плоскую связность, приведена в [61]. Так как изоклинная ткань  $B_m$  грассманизуема [31], то она допускает отображение на грассманово многообразие  $G(1, r + 1)$  прямых проективного пространства  $\mathbb{P}^{r+1}$ . При этом одна из трех гиперповерхностей, порождающих эту три-ткань на  $G(1, r + 1)$ , является гиперплоскостью  $\Pi$ , а две другие принадлежат одной гиперквадрике  $\mathcal{Q}$ . Изоклинная ткань  $B_m$  допускает локально плоскую связность в том и только том случае, если гиперквадрика  $\mathcal{Q}$  является конусом, а плоскость  $\Pi$  содержит  $(r - 1)$ -мерную образующую этого конуса [61]. В классе четырехмерных тканей  $B_m$  (а все они являются изоклинными [31]) имеется лишь одна ткань, допускающая локально плоскую связность:

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^1 - y^1}.$$

Более широкий класс бинарных операций, связанных с три-тканью  $W(r, r, r)$ , образуют локальные идемпотентные квазигруппы. Изучение таких квазигрупп было начато в работе Л. А. Помаскиной [54]. Операция  $\diamond$  в этой квазигруппе определяется на гладком  $r$ -мерном подмногообразии  $V$ , находящимся в общем положении со слоями три-ткани, так, как показано на рис. 5. Здесь

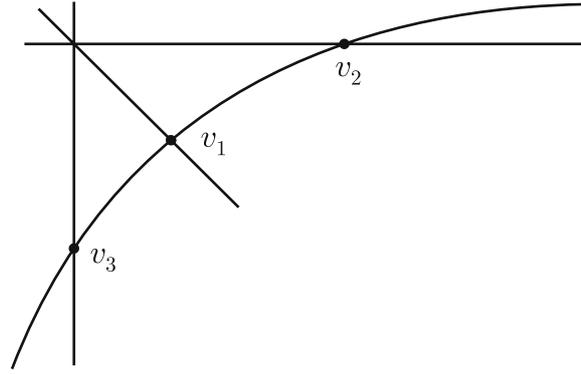


Рис. 5

$v_1, v_2, v_3 \in V$ ,  $v_3 = v_1 \diamond v_2$ ,  $v_1 = v_1 \diamond v_1$ . Такая конструкция позволила применить методы теории три-тканей для исследования свойств локальных гладких идемпотентных квазигрупп и определяемых ими правильных  $s$ -структур [55].

Одномерные подквазигруппы идемпотентной квазигруппы  $V(\diamond)$  порождаются некоторыми инвариантными направлениями (они названы в [57] главными) в касательном пространстве  $T_A(V)$  к подмногообразию  $V$  в точке  $A$ . Однако, не всякая главная линия на  $V$  является одномерной подквазигруппой квазигруппы  $V(\diamond)$  и будет таковой в том и только том случае, если она лежит на трансверсально-геодезической поверхности три-ткани  $W(r, r, r)$  [58]. Этот результат обобщается в работах [130, 131] для  $s$ -мерных подквазигрупп ( $s < r$ ).

Число одномерных подквазигрупп будет максимальным, если ткань  $W(r, r, r)$  трансверсально-геодезическая, а подмногообразиие  $V$  — изоклинное [57].

**0.2.** Общую теорию три-тканей  $W(p, q, r)$ , образованных слоениями разных размерностей, впервые начали рассматривать М. А. Акивис и В. В. Гольдберг [10, 11]. Для каждого из трех возможных случаев

$$p \leq q \leq r, \quad q \leq r \leq p, \quad r \leq p \leq q$$

они записали структурные уравнения, определили тензоры кручения и кривизны, выяснили геометрический смысл обращения в нуль тензора кручения и некоторых его подтензоров. Например, в случае  $p \leq q \leq r$  слоения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  три-ткани  $W(p, q, r)$  определяются, соответственно, уравнениями

$$\lambda_1 : \omega^{u_2} = 0, \quad \omega^\xi = 0; \quad \lambda_2 : \omega^{a_2} = 0, \quad \omega^{\xi-q} = 0; \quad \lambda_3 : \omega^\xi + \omega^{\xi-q} = 0, \quad (0.15)$$

где  $a_2 = \overline{1, r - q}$ ,  $u_2 = \overline{p + 1, r}$ ,  $\xi = \overline{r + 1, p + q}$ , а входящие сюда формы удовлетворяют структурным уравнениям

$$\begin{aligned} d\omega^{a_2} &= \omega^{b_2} \wedge \omega_{b_2}^{a_2} + \omega^{\xi-q} \wedge \omega_{\xi-q}^{a_2}, \\ d\omega^{\xi-q} &= \omega^{\eta-q} \wedge \Theta_\eta^\xi + \lambda_{a_2 u_2}^\xi \omega^{a_2} \wedge \omega^{u_2} + \mu_{a_2 \eta}^\xi \omega^{a_2} \wedge \Theta^\eta + \mu_{\eta \zeta}^\xi \omega^{\eta-q} \wedge \omega^{\zeta-q}, \\ d\omega^\xi &= \omega^\eta \wedge \Theta_\eta^\xi + \lambda_{u_2 a_2}^\xi \omega^{u_2} \wedge \omega^{a_2} + \mu_{u_2 \eta}^\xi \omega^{u_2} \wedge \Theta^\eta - \mu_{\eta \zeta}^\xi \omega^\eta \wedge \omega^\zeta, \\ d\omega^{u_2} &= \omega^{v_2} \wedge \omega_{v_2}^{u_2} + \omega^\xi \wedge \omega_\xi^{u_2}, \end{aligned} \quad (0.16)$$

где  $\Theta^\xi = \omega^\xi + \omega^{\xi-q}$ , а  $\omega_{b_2}^{a_2}, \omega_{\xi-q}^{a_2}, \Theta_\eta^\xi, \omega_{v_2}^{u_2}, \omega_\xi^{u_2}$  — некоторые дифференциальные формы второго порядка. Величины  $\{\lambda_{a_2 u_2}^\xi, \mu_{a_2 \eta}^\xi, \mu_{u_2 \eta}^\xi, \mu_{\eta \zeta}^\xi\}$  образуют первый структурный тензор три-ткани, называемый также тензором кручения, и удовлетворяют условиям

$$\mu_{\eta \zeta}^\xi = -\mu_{\zeta \eta}^\xi, \quad \lambda_{a_2 u_2}^\xi = \lambda_{u_2 a_2}^\xi.$$

В. В. Гольдберг в [28] рассмотрел некоторые специальные классы три-тканей  $W(p, q, r)$ , названные им трансверсально-геодезическими, шестиугольными и групповыми, и нашел соответствующие

тензорные характеристики для каждого из трех указанных выше соотношений между размерностями. Например, в случае  $p \leq q \leq r$  трансверсально-геодезическая ткань характеризуется наличием поля двумерных трансверсально-геодезических поверхностей  $U$ , определяемых уравнениями

$$\omega^{\xi-q} = \eta^{\xi} \tilde{\vartheta}, \quad \omega^{\xi} = \eta^{\xi} \bar{\vartheta}, \quad \omega^{a_2} = \omega^{u_2} = 0,$$

где  $\tilde{\vartheta}$  и  $\bar{\vartheta}$  — линейно независимые формы Пфаффа, определяющие перемещение произвольной точки по поверхности  $U$ . Доказано, что ткань  $W(p, q, r)$  будет трансверсально-геодезической, если

$$\omega_{\xi-q}^{a_2} \equiv 0 \pmod{\omega^{b_2}, \omega^{v_2}}, \quad \omega_{\xi}^{u_2} \equiv 0 \pmod{\omega^{b_2}, \omega^{v_2}}, \quad R_{\eta\xi\phi}^{\xi} = \delta_{\eta}^{\xi} \lambda_{\zeta\phi},$$

где  $R_{\eta\xi\phi}^{\xi}$  — компоненты второго структурного тензора ткани, а  $\lambda_{\zeta\phi}$  — некоторые функции. Слои ткани  $W(p, q, r)$  высекают на поверхности  $U$  три-ткань  $W_0(1, 1, 1)$ , определяемую уравнениями  $\bar{\vartheta} = 0$ ,  $\tilde{\vartheta} = 0$  и  $\bar{\vartheta} + \tilde{\vartheta} = 0$ . Эта ткань является шестиугольной, если ее кривизна  $\lambda$  равна нулю, а выполнение данного условия для любой трансверсально-геодезической поверхности  $U$  трансверсально-геодезической ткани  $W(p, q, r)$  характеризует, как и в классической теории, шестиугольную три-ткань  $W(p, q, r)$ .

Групповая три-ткань  $W(p, q, r)$  в случае  $p \leq q \leq r$  определяется следующим образом. Пусть  $G_n$ ,  $n = p + q$ , —  $n$ -параметрическая группа Ли с инвариантными формами  $\omega^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , удовлетворяющими структурным уравнениям Маурера—Картана:

$$d\omega^i = c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k. \quad (0.17)$$

Пусть

1) уравнения

$$\omega^u = 0, \quad u = \overline{p+1, n}, \quad \omega^a = 0, \quad a = \overline{1, p}, \quad \omega^{\xi} + \omega^{\xi-q} = 0, \quad \xi = \overline{r+1, n},$$

определяют на  $G_n$  подгруппы  $G_p$ ,  $G_q$ ,  $G_r$  соответственно;

2) уравнения

$$\omega^{a_2} = 0, \quad a_2 = \overline{1, r-q}, \quad \omega^{u_2} = 0, \quad u_2 = \overline{p+1, r},$$

определяют на  $G_n$  нормальные делители, а на последних уравнения  $\omega^{\xi-q} = 0$  и  $\omega^{\xi} = 0$  определяют, соответственно, некоторые нормальные делители;

3) уравнения

$$\omega^{\xi} = \omega^{\xi-q} = 0$$

вместе с уравнениями

$$\omega^{u_2} = 0 \quad \text{или} \quad \omega^{a_2} = 0$$

определяют на  $G_n$  абелевы подгруппы.

Тогда уравнения (0.17) принимают вид (0.16), причем

$$\omega_{b_2}^{a_2} = \omega_{\xi-q}^{a_2} = \Theta_{\eta}^{\xi} = \omega_{v_2}^{u_2} = \omega_{\xi}^{u_2} = 0.$$

Групповая три-ткань  $W(p, q, r)$  характеризуется равенством нулю ее второго структурного тензора.

Бляшке [98] и Бол [99] изучали три-ткань  $W(1, 1, 2)$  в трехмерном проективном пространстве, связав с нею некоторое однопараметрическое семейство преобразований фиксированной поверхности три-ткани на себя. Это семейство может быть транзитивным или интранзитивным, поэтому соответствующие ткани были названы также транзитивными и интранзитивными.

Исследование таких тканей было продолжено методом внешних форм Н. Х. Азизовой (Селивановой) в работах [1, 2]. Она рассматривала также три-ткани  $W(1, 1, r)$ , образованные двумя семействами кривых и одним семейством гиперповерхностей для произвольного  $r$ .

Дифференциально-геометрические структуры, связанные с три-тканью  $W(1, r-1, r-1)$ , на многообразии размерности  $r$  изучал Ю. А. Апресян [14–16]. Такие ткани можно интерпретировать как семейство локальных диффеоморфизмов  $x \rightarrow \varphi(x)$  одномерных многообразий (см. рис. 6).

Более подробно Апресяном описаны ткани  $W(1, 2, 2)$  и  $W(1, 3, 3)$ . Выделен подкласс тканей, у которых соответствующее семейство диффеоморфизмов обладает подсемейством, сопряженным с однопараметрической группой. Для тканей  $W(1, 2, 2)$  рассматриваемое семейство локально эквивалентно либо множеству аффинных отображений, либо множеству отображений одного семейства

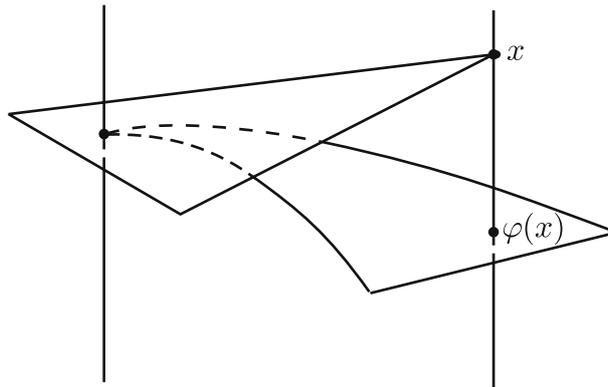


Рис. 6

прямолинейных образующих однополостного гиперболоида на другое, определяемое сечениями гиперболоида плоскостями связки, вершина которой не лежит на гиперболоиде. Для ткани  $W(1, 3, 3)$  аналогичное семейство диффеоморфизмов локально эквивалентно множеству проективных отображений.

В [8] М. А. Акивис и Ю. А. Апресян рассмотрели три-ткань  $W(r + 1, r + 1, r)$  на многообразии размерности  $2r + 1$ . Найдены структурные уравнения этих тканей и их основные тензоры. В частности, доказано, что при  $r = 2$  тензор кручения ткани равен нулю.

Три-ткань  $W(p, q, r)$  на многообразии размерности  $p + q$  при  $r < q$  рассматривал Г. С. Аракелян [17]. Эта ткань образована слоениями размерностей  $p$ ,  $q$  и  $r$ , причем  $r$ -мерные слои третьего слоения являются подмногообразиями  $q$ -мерных слоев второго слоения. Г. С. Аракелян исследовал специальные классы таких тканей, в частности, ткани максимального ранга.

Изучение обобщенного параллелизма  $r$ -мерного пространства  $M$  в работах В. Г. Иванова [32–34] связано с три-тканью  $W(1, r - 1, r)$  на  $(2r - 1)$ -мерном многообразии  $LM$  линейных элементов пространства  $M$ , причем  $(r - 1)$ -мерный слой такой ткани представляет собой совокупность всех линейных элементов в одной точке многообразия  $M$ ,  $r$ -мерный слой — совокупность параллельных между собой элементов, а одномерные слои являются интегральными кривыми дифференциальных уравнений, соответствующих каждому семейству параллельных элементов на многообразии  $M$ .

Три-ткани  $W(p, p, q)$  как геометрический аналог  $p$ -параметрического семейства локальных диффеоморфизмов на  $q$ -мерном многообразии ( $q < p$ ) впервые рассматривал Нгуен Зоан Туан [50, 51]. Им найдены структурные уравнения таких тканей и описаны некоторые специальные классы с постоянными значениями одного из тензоров, входящего в структурные уравнения и названного основным. В частности, на  $p$ -мерных слоях ткани  $W(p, p, q)$ , порожденной действием  $p$ -параметрической группы Ли, внутренним образом определяются конформные структуры. Доказано, что в случае обращения в нуль компонентов тензора конформной кривизны рассматриваемая три-ткань определяется либо группой движений и подобий аффинной плоскости, либо семейством преобразований риманова пространства без кручения и с постоянной кривизной.

В перечисленных работах изучались, в основном, дифференциально-геометрические свойства многомерных три-тканей  $W(p, q, r)$ . Однако реализовать (в полной мере) идеи Бляшке и Бола о взаимосвязи алгебраических и геометрических свойств для таких тканей долго не удавалось, поскольку из-за разной размерности слоев невозможно непосредственно обобщить как основные алгебраические понятия (коммутативность, ассоциативность и т. д.), так и понятия классической теории три-тканей (координатная квазигруппа, координатная лупа, конфигурация и т. д.). Заметим, что на это обстоятельство указывал еще В. В. Рыжков в первой части обзора [20].

Помимо этого, можно сказать, внутреннего направления исследований, развивающего теорию тканей как таковую в классическом направлении, обнаружилось различные физические приложения.

Например, в [69] Е. В. Ферапонтов описал систему трех дифференциальных уравнений гидродинамического типа, характеристики которой образуют на любом решении шестиугольную три-ткань.

В частности, он рассмотрел уравнения хроматографии и уравнения, описывающие одномерное нестационарное течение газа. Им найдены все уравнения состояния с шестиугольной три-тканью характеристик на решениях. В [70] показано, что интегрирование слабо нелинейной полугамильтоновой системы  $n$  уравнений гидродинамического типа связано с проблемой максимальности ранга  $(n + 2)$ -ткани характеристик на любом решении (см. также [71]).

В [95] А. М. Балк и Е. В. Ферапонтов привели конкретные примеры, интерпретирующие взаимосвязь инвариантов волновой системы с рангом соответствующей три-ткани. Например, в четырехмерном пространстве аддитивный закон сохранения энергии и импульса определяет, с одной стороны, инварианты волновой системы, а с другой — криволинейную 4-ткань максимального ранга на двумерном резонансном многообразии. Этот результат обобщается на многомерный случай. Два последних результата описаны также в приложении к монографии [91].

Многочисленные физические приложения многомерных три-тканей связаны с использованием различных обобщений лиевых и ассоциативных алгебр.

Начало физических приложений неассоциативных алгебр связывают с работами П. Йордана, Е. Вигнера и Дж. фон Неймана (1932–34 гг.) в области квантовой механики [106]. Операция в алгебре Йордана вводится как антикоммутатор некоторой ассоциативной алгебры. Изучением алгебр Йордана занимались А. Альберт, Н. Джекобсон, К. Мак-Криммон и другие [93, 110].

Практически в это же время в работах Я. Кирмсе, М. Цорна, Э. Артина изучаются альтернативные алгебры (см. обзор [43]). С этими алгебрами тесно связаны алгебры Мальцева, для которых найдены различные физические приложения. Например, аномалии в неабелевой киральной калибровочной теории приводят к нарушению тождества Якоби, при этом токи образуют алгебру Мальцева. Значительный вклад в теорию алгебр Мальцева внесли А. Сейгл [117], а также новосибирские математики Е. Н. Кузьмин, В. Т. Филиппов и др. (см., например, [37]).

Авторы обзора [43] различают три основных направления применения неассоциативных методов в физике — квазигрупповой, ли-допустимый и октонионный. Охарактеризуем кратко каждый из них.

Основу квазигруппового подхода составляют методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии. Это направление Л. В. Сабинин предложил называть нелинейной геометрической алгеброй [109]. Для физических приложений важен тот факт, что понятие неассоциативности является алгебраическим аналогом дифференциально-геометрического понятия кривизны. В работе А. И. Нестерова [52] проанализированы возможности применения квазигрупповых идей в различных областях теоретической физики (теория поля, общая теория относительности, динамические симметрии и т. д.). Одним из результатов в этом направлении стало обобщение теоретико-группового калибровочного метода для непрерывных квазигрупп преобразований (И. А. Баталин [97], А. И. Нестеров, В. А. Степаненко [53]).

Понятие ли-допустимой алгебры использовал в своих многочисленных работах Р. Сантилли (см., например, [118–120]). Согласно [118], алгебра называется ли-допустимой, если ее коммутаторная алгебра лиева. Класс ли-допустимых алгебр включает, в частности, ассоциативные алгебры, коммутативные алгебры Йордана, алгебры Ли. Наиболее хорошо изучены эластичные ли-допустимые алгебры. По идее Сантилли физические теории должны обобщаться так, чтобы их лиева структура сохранялась в коммутаторной алгебре. Этот подход оказался эффективным и универсальным. Он широко применяется в различных областях теоретической физики.

Октонионному подходу в физике посвящена многочисленная литература (см. [41, 115], а также обзоры [43, 129]). Алгебра октонионов, используемая в различных физических теориях (проблема кварков, супергравитация, теория суперструн), находится на стыке ассоциативно-альтернативных и лиево-мальцевских алгебр. Отметим кстати, что 7-мерная коммутаторная алгебра Мальцева октонионов является единственной простой алгеброй среди нелиевых алгебр Мальцева.

Описанная тематика активно обсуждалась в специальном периодическом издании (под руководством Сантилли) «*Hadronic Journal*», на различных конференциях и семинарах, из которых мы выделим рабочий семинар «Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике», организованный Институтом физики АН Эстонии и Институтом астрофизики и физики атмосферы АН Эстонии (Тарту—Тыравере, июнь 1989 г.), см. [35].

Теория три-тканей тесно соприкасается с этой физической тематикой по многим направлениям. Во-первых, как уже было сказано, три-ткань — это геометрический аналог квазигруппы. Но теория тканей, как мы уже отмечали, широко использует разнообразные геометрические и алгебраические методы. Кроме того, связь между тождествами в лупах и конфигурациями на ткани дает возможность глубоко проникнуть в структуру соответствующих гладких луп и дать их исчерпывающее инфинитезимальное описание [26, 30, 31, 80, 94].

Введенное М. А. Акивисом понятие касательной  $W$ -алгебры (см. выше) наиболее широко обобщает понятие алгебры Ли и является аналогом алгебры Ли для произвольной гладкой квазигруппы (лупы). Таким образом, в терминах касательной  $W$ -алгебры могут быть охарактеризованы все перечисленные выше алгебры, используемые в физических приложениях. Например, Я. Лыхмус и Л. Соргсепп, определяя тернарную алгебру седенионов [109], используют понятие  $W$ -алгебры Акивиса.

Весьма интересное приложение теории тканей связано с теорией физических структур Ю. И. Кулакова [38]. В основе этой теории лежит принцип феноменологической симметрии, согласно которому существует функциональная связь между  $(n+1)(n+2)/2$  взаимными расстояниями для любых  $n+2$  точек  $n$ -мерного пространства [27, 36, 39, 87]. В этой теории уравнение всякого физического закона рассматривается с точностью до изотопических преобразований и считается, что функция  $z = f(x, y)$  тогда и только тогда описывает некоторый физический закон, когда она удовлетворяет условию феноменологической инвариантности.

В исследованиях Ю. И. Кулакова, Ю. С. Владимирова, Г. Г. Михайличенко, В. Х. Лева, А. В. Карнаухова и других найдены условия феноменологической инвариантности для функций разного типа (с разным числом вещественных переменных и т. п.). Изложение основных результатов исследований и библиография приводятся в [40]. Наиболее существенные результаты в этом направлении получены Г. Г. Михайличенко [45–48].

В [62] мы показываем, что физическая структура в смысле Ю. И. Кулакова соответствует три-ткани специального вида, образованной поверхностями разных размерностей, а условие феноменологической инвариантности представляет собой с геометрической точки зрения обобщение одной из конфигураций, возникших в классической теории тканей еще в работах В. Бляшке 1920-х гг.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ТРИ-ТКАНЕЙ $W(p, q, p+q-1)$

**1.1.** При  $r = p + q - 1$  система (0.3) состоит из одного уравнения

$$z = f(x^i, y^\alpha) = x \cdot y, \quad i = \overline{1, q}, \quad \alpha = \overline{1, p}. \quad (1.1)$$

Оно определяет на дифференцируемом многообразии  $\mathcal{M}$  размерности  $p + q$  три-ткань  $W(p, q, p+q-1)$ , образованную слоениями размерностей  $p$ ,  $q$  и  $p+q-1$ , и ее координатный группоид.

Как и в общем случае, будем считать, что число переменных в уравнении (1.1) минимизировано (см. п. 0.1), т.е. если уравнение (1.1) имеет вид

$$z = f(x^1, \dots, x^{k_0}, \varphi^u(x^i), y^1, \dots, y^p) \quad (1.2)$$

или

$$z = f(x^1, \dots, x^q, y^1, \dots, y^{s_0}, \phi^u(y^\alpha)), \quad (1.3)$$

то должны выполняться соответствующие условия

$$\rho = \text{rank} \left( \frac{\partial \varphi^u}{\partial x^i} \right) = q - k_0, \quad (1.4)$$

$$\varrho = \text{rank} \left( \frac{\partial \phi^u}{\partial y^\alpha} \right) = p - s_0. \quad (1.5)$$

Введем для три-ткани  $W(p, q, p+q-1)$  общего вида, заданной уравнением (1.1), аналог понятия координатной лупы  $\ell_{(a,b)}(\circ)$  (см. рис. 2).

Пусть  $A$  — произвольная точка многообразия  $\mathcal{M}$ , несущего три-ткань  $W(p, q, p+q-1)$ , и  $\mathcal{N}$  — достаточно малая окрестность точки  $A$ . Зафиксируем в  $\mathcal{N}$   $p$  достаточно близких слоев первого

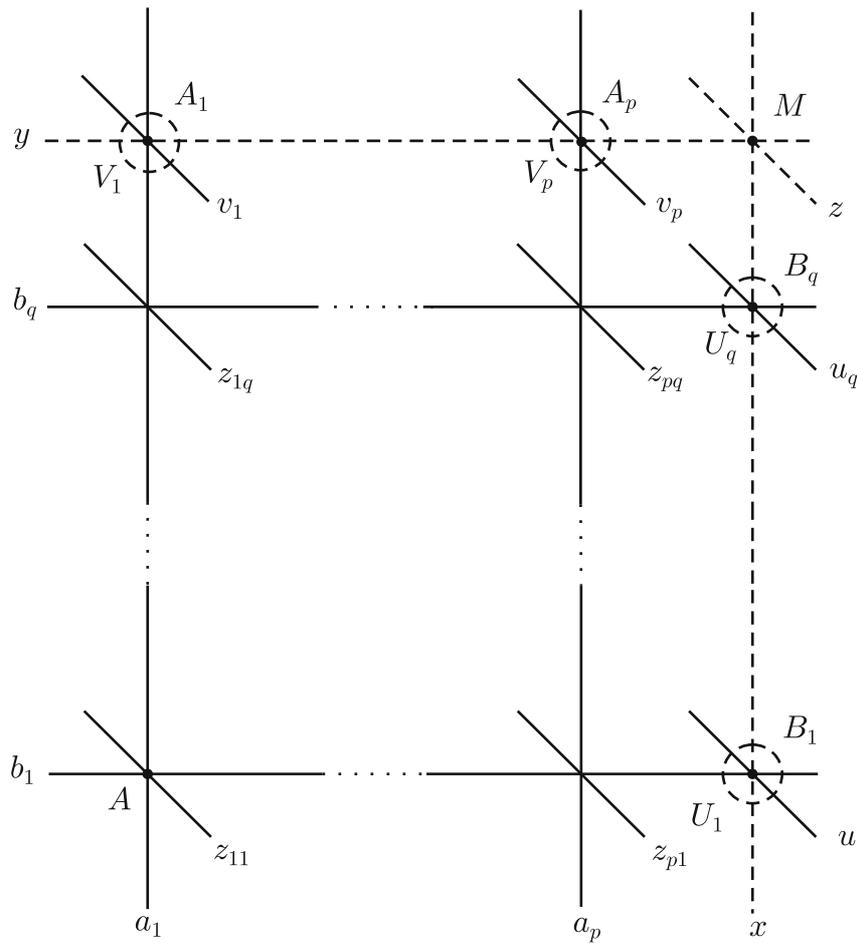


Рис. 7

слоения  $\lambda_1$ , определяемых параметрами  $a_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , и  $q$  также достаточно близких слоев второго слоения  $\lambda_2$ , определяемых параметрами  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ . Совокупность слоев  $a_\alpha$  и  $b_i$  назовем координатной решеткой. На рис. 7 и последующих слои ткани будем отмечать значениями их параметров.

Пусть  $M$  — произвольная точка окрестности  $\mathcal{N}$ , а  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно вертикальный, горизонтальный и наклонный слой, проходящие через эту точку, так что  $z = x \cdot y$ . Обозначим через  $B_i$  точку пересечения слоя  $x$  с горизонтальным слоем  $b_i$ ,  $i = \overline{1, q}$ , а через  $A_\alpha$  — точку пересечения слоя  $y$  с вертикальным слоем  $a_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ . Наклонный слой, проходящий через точку  $B_i$ , обозначим  $u_i$ ; аналогично, наклонный слой, проходящий через точку  $A_\alpha$ , обозначим  $v_\alpha$  (рис. 7).

Таким образом, в окрестности  $\mathcal{N}$  возникают два отображения, первое из которых с помощью заданного набора  $b = (b_1, b_2, \dots, b_q)$  горизонтальных слоев ставит в соответствие произвольному вертикальному слою  $x$  набор  $u = (u_1, u_2, \dots, u_q)$  из  $q$  наклонных слоев, а второе произвольному горизонтальному слою  $y$  ставит в соответствие набор  $p$  наклонных слоев  $v = (v_1, v_2, \dots, v_p)$  с помощью заданного набора  $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  вертикальных слоев. По аналогии с классической теорией обозначим эти отображения соответственно  $R_b$  и  $L_a$ :

$$R_b : \lambda_1 \rightarrow \underbrace{\lambda_3 \times \dots \times \lambda_3}_q, \quad R_b(x) = u, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_q);$$

$$L_a : \lambda_2 \rightarrow \underbrace{\lambda_3 \times \dots \times \lambda_3}_p, \quad L_a(y) = v, \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_p).$$

Найдем условия, при которых отображения  $R_b$  и  $L_a$  являются локально биективными. Пусть  $u = (u_1, u_2, \dots, u_q)$  — произвольный набор наклонных слоев в окрестности  $\mathcal{N}$ . Слой  $u_i$  пересечет

горизонтальный слой  $b_i$  с тем же номером по  $(q-1)$ -мерному подмногообразию, которое обозначим  $U_i$ . Поскольку  $\dim \mathcal{M} = p+q$ ,  $q$  подмногообразий  $U_i$  размерности  $q-1$  на  $\mathcal{M}$  допускают (локально!) трансверсальный  $p$ -мерный вертикальный слой  $x$  (на рис. 7 он изображен вертикальной пунктирной линией справа). Согласно определению координатного группоида, параметры  $x^1, x^2, \dots, x^q$  этого слоя удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} u_1 &= f(x^1, x^2, \dots, x^q, b_1^1, b_1^2, \dots, b_1^p), \\ u_2 &= f(x^1, x^2, \dots, x^q, b_2^1, b_2^2, \dots, b_2^p), \\ &\dots \\ u_q &= f(x^1, x^2, \dots, x^q, b_q^1, b_q^2, \dots, b_q^p). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Слой  $x$  будет единственным, если в рассматриваемой окрестности  $\mathcal{N}$  выполняется неравенство

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x, b_1)}{\partial x^1} & \frac{\partial f(x, b_1)}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f(x, b_1)}{\partial x^q} \\ \frac{\partial f(x, b_2)}{\partial x^1} & \frac{\partial f(x, b_2)}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f(x, b_2)}{\partial x^q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x, b_q)}{\partial x^1} & \frac{\partial f(x, b_q)}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial f(x, b_q)}{\partial x^q} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.7)$$

Тогда на базе третьего слоения определена функция  $R_b^{-1}$ ,  $x = R_b^{-1}(u)$ .

Аналогичные рассуждения проводятся для отображения  $L_a$ , а именно, в некоторой достаточно малой окрестности  $\mathcal{N}$  набору  $p$  произвольных наклонных слоев  $v_1, v_2, \dots, v_p$  можно поставить в соответствие горизонтальный слой  $y$ , который трансверсально пересекает подмногообразия  $V_\alpha = v_\alpha \cap a_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$  (эти подмногообразия изображены на рис. 7 пунктирными кружками сверху, а трансверсальный горизонтальный слой  $y$  изображен горизонтальной пунктирной линией сверху и отмечен параметром  $y$ ). При этом параметры  $y^1, y^2, \dots, y^p$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} v_1 &= f(a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^q, y^1, y^2, \dots, y^p), \\ v_2 &= f(a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^q, y^1, y^2, \dots, y^p), \\ &\dots \\ v_p &= f(a_p^1, a_p^2, \dots, a_p^q, y^1, y^2, \dots, y^p). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Слой  $y$  будет единственным, если в рассматриваемой окрестности  $\mathcal{N}$  выполняется неравенство

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(a_1, y)}{\partial y^1} & \frac{\partial f(a_1, y)}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial f(a_1, y)}{\partial y^p} \\ \frac{\partial f(a_2, y)}{\partial y^1} & \frac{\partial f(a_2, y)}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial f(a_2, y)}{\partial y^p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(a_p, y)}{\partial y^1} & \frac{\partial f(a_p, y)}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial f(a_p, y)}{\partial y^p} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.9)$$

Тогда в  $\mathcal{N}$  определена функция  $y = L_a^{-1}(v)$ .

Положим по определению

$$u \circ v = x \cdot y = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v) = z.$$

Построенное отображение

$$(\circ) : \underbrace{(\lambda_3 \times \dots \times \lambda_3)}_q \times \underbrace{(\lambda_3 \times \dots \times \lambda_3)}_p \rightarrow \lambda_3,$$

в котором наборы слоев  $a = (a_\alpha)$  и  $b = (b_i)$  являются фиксированными, а наборы слоев  $u = (u_i)$  и  $v = (v_\alpha)$  — переменными, представляет собой аналог локальной координатной лупы  $\ell_{(a,b)}$  три-ткани, образованной слоениями одинаковой размерности. Назовем его координатным моноидом три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$  и обозначим  $\mu_{(a,b)}(\circ)$ .

Теперь выясним, что будет, если условия (1.7) или (1.9) не выполняются. Пусть, например, первые две строки определителя (1.7) пропорциональны. Тогда существует  $\lambda \neq 0$  такое, что для любого  $i$ ,  $i = \overline{1, q}$ , выполняются равенства

$$\frac{\partial f(x, b_1)}{\partial x^i} = \lambda \frac{\partial f(x, b_2)}{\partial x^i}. \quad (1.10)$$

Продифференцировав каждое из равенств по  $b_1^\alpha$  и  $b_2^\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ , получим:

$$\frac{\partial^2 f(x, b_1)}{\partial x^i \partial b_1^\alpha} - \frac{\partial \lambda}{\partial b_1^\alpha} \frac{\partial f(x, b_2)}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x, b_2)}{\partial x^i \partial b_2^\alpha} + \frac{\partial \ln \lambda}{\partial b_2^\alpha} \frac{\partial f(x, b_2)}{\partial x^i} = 0. \quad (1.11)$$

Теперь продифференцируем первое из равенств (1.11) по  $b_2^\beta$ , а второе — по  $b_1^\beta$ , в результате получим два равносильных соотношения

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial b_2^\beta \partial b_1^\alpha} \frac{\partial f(x, b_2)}{\partial x^i} + \frac{\partial \lambda}{\partial b_1^\alpha} \frac{\partial^2 f(x, b_2)}{\partial x^i \partial b_2^\beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial b_1^\beta \partial b_2^\alpha} \frac{\partial f(x, b_2)}{\partial x^i} = 0. \quad (1.12)$$

Будем считать, что все переменные  $x^i$ ,  $i = \overline{1, q}$ , входящие в уравнение (1.1), существенные, т.е.  $\frac{\partial f}{\partial x^i} \neq 0$ . Тогда из второго уравнения системы (1.12) получаем

$$\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial b_1^\beta \partial b_2^\alpha} = 0.$$

Отсюда

$$\ln \lambda = \bar{\lambda}_\alpha b_1^\alpha + \tilde{\lambda}_\alpha b_2^\alpha,$$

где величины  $\bar{\lambda}_\alpha$  и  $\tilde{\lambda}_\alpha$  не зависят от параметров  $b_1^\alpha$  и  $b_2^\alpha$ . Следовательно, функция  $\lambda$  имеет вид

$$\lambda = e^{\bar{\lambda}_\alpha b_1^\alpha + \tilde{\lambda}_\alpha b_2^\alpha}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.10), получим

$$\frac{\partial f(x, b_1)}{\partial x^i} = e^{\bar{\lambda}_\alpha b_1^\alpha + \tilde{\lambda}_\alpha b_2^\alpha} \frac{\partial f(x, b_2)}{\partial x^i},$$

или

$$e^{-\bar{\lambda}_\alpha b_1^\alpha} \frac{\partial f(x, b_1)}{\partial x^i} = e^{\tilde{\lambda}_\alpha b_2^\alpha} \frac{\partial f(x, b_2)}{\partial x^i}.$$

Функция, стоящая в левой части последнего равенства, зависит от параметров  $x^i$  и  $b_1^\alpha$ , а в правой — от  $x^i$  и  $b_2^\alpha$ . Поскольку  $b_1^\alpha \neq b_2^\alpha$ , то отсюда получаем

$$\frac{\partial f(x, b_1)}{\partial x^i} = e^{\bar{\lambda}_\alpha b_1^\alpha}, \quad \frac{\partial f(x, b_2)}{\partial x^i} = e^{-\tilde{\lambda}_\alpha b_2^\alpha}.$$

Следовательно,

$$df(x, b_1) = e^{\bar{\lambda}_\alpha b_1^\alpha} (dx^1 + dx^2 + \dots + dx^q).$$

Отсюда вытекает, что  $f(x, y) = f(x^1 + x^2 + \dots + x^q, y)$ , т.е. функция  $f$  имеет вид (1.2), но не удовлетворяет условиям (1.4). Аналогично показывается, что равенство нулю определителя (1.9) приводит к функциям (1.3), для которых также нарушаются условия (1.5).

Геометрически нарушение условий (1.7) или (1.9) означает, что для многообразий  $U_i$  или  $V_\alpha$  существует бесконечно много трансверсалий, а следовательно, бесконечно много значений  $z = x \cdot y$ . Поэтому в окрестности выбранной трансверсали  $x$  или  $y$  координатный моноид  $u \circ v$  определить невозможно.

В общем случае, когда условия (1.7) и (1.9) выполняются и отображения  $R_b$  и  $L_a$  являются локальными диффеоморфизмами, они определяют изотопию  $(R_b^{-1}, L_a^{-1}, \text{id})$  координатного моноида на координатный группOID три-ткани.

Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.1.** Координатный моноид  $\mu_{(a,b)}(\circ)$  три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$  существует тогда и только тогда, когда функция  $z = f(x, y)$ , определяющая эту ткань, удовлетворяет условиям (1.7) и (1.9). Координатный моноид три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$  главноизотопен ее координатному группоиду.

Можно сказать, теорема 1.1 выясняет алгебраический смысл ограничений (1.7) и (1.9) класса гладких группоидов (1.1), рассматриваемых с точностью до изотопии.

**1.2.** Введем аналог понятия единицы для координатного моноида  $\mu_{(a,b)}(\circ)$ . Согласно его определению получаем (рис. 7):

$$\begin{aligned} (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1q}) \circ (\underline{v}_1, v_2, \dots, v_p) &= \underline{v}_1, & (\underline{u}_1, u_2, \dots, u_q) \circ (z_{11}, z_{21}, \dots, z_{p1}) &= \underline{u}_1, \\ (z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2q}) \circ (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, v_p) &= \underline{v}_2, & (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, u_q) \circ (z_{12}, z_{22}, \dots, z_{p2}) &= \underline{u}_2, \\ &\dots & &\dots \\ (z_{p1}, z_{p2}, \dots, z_{pq}) \circ (\underline{v}_1, v_2, \dots, \underline{v}_p) &= \underline{v}_p; & (\underline{u}_1, u_2, \dots, \underline{u}_q) \circ (z_{1q}, z_{2q}, \dots, z_{pq}) &= \underline{u}_q. \end{aligned}$$

Как видно из последних равенств, аналогом левой единицы можно считать набор столбцов матрицы

$$e = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} & \dots & z_{p1} \\ z_{12} & z_{22} & \dots & z_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ z_{1q} & z_{2q} & \dots & z_{pq} \end{pmatrix},$$

а набор ее строк — аналогом правой единицы. Поэтому будем называть матрицу  $e$  единичным элементом координатного моноида три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$ .

**1.3.** Для три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$  построим аналог конфигурации Рейдемейстера  $R$  (см. рис. 1(с)). Рассмотрим в окрестности  $\mathcal{N}_{p+1}$  вертикальных слоев  $x_{\bar{\alpha}}$ ,  $\bar{\alpha} = \overline{1, p+1}$ , первого слоения и  $q + 1$  горизонтальных слоев  $y_{\bar{i}}$ ,  $\bar{i} = \overline{1, q+1}$ , второго слоения этой ткани. Здесь через  $x_{\bar{\alpha}}$  и  $y_{\bar{i}}$  обозначены параметры соответствующих слоев. Через точку пересечения слоев  $x_{\bar{\alpha}}$  и  $y_{\bar{i}}$  проходит слой третьего слоения с параметром  $z_{\bar{\alpha}\bar{i}}$ . Точку пересечения слоев  $x_{p+1}$  и  $y_{q+1}$  обозначим через  $M_{p+1, q+1}$ . Построенная конфигурация изображена на рис. 8 сплошными линиями.

Рассмотрим еще  $p$  произвольных вертикальных слоев  $\bar{x}_{\alpha}$ . Эти слои, а также их пересечения  $V_{\alpha\bar{i}}$  с соответствующими наклонными слоями  $z_{\alpha\bar{i}}$  обозначены на рис. 8 пунктирными линиями. Фиксируем  $\bar{i}$  и рассмотрим  $p$  подмногообразий  $V_{\alpha\bar{i}}$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ . Тогда локально однозначно определяются трансверсальные горизонтальные слои  $\bar{y}_{\bar{i}}$ . На рис. 8 они обозначены горизонтальными пунктирными линиями.

Рассмотрим далее  $q$  первых слоев  $\bar{y}_{\bar{i}}$  (на рис. 8 — все, кроме верхнего). Каждый из них пересекает наклонный слой с соответствующим номером  $z_{p+1, i}$  по некоторому  $(q - 1)$ -мерному подмногообразию  $U_{p+1, i}$ . Эти подмногообразия изображены на рис. 8 пунктирными кружками справа.

Подмногообразия  $U_{p+1, i}$  допускают (локально!) трансверсально пересекающий их вертикальный слой  $\bar{x}_{p+1}$ . Последний пересекается с построенным выше горизонтальным слоем  $\bar{y}_{q+1}$  в точке  $M_{p+1, q+1}$ , которая, вообще говоря, не лежит на слое  $z_{p+1, q+1}$ .

Построенная конфигурация является аналогом конфигурации Рейдемейстера  $R$  для три-тканей, образованных слоениями одинаковой размерности (см. рис. 1(с)). Поэтому назовем ее обобщенной конфигурацией Рейдемейстера и обозначим  $R(p, q)$ .

Если точки  $M_{p+1, q+1}$  и  $M_{p+1, q+1}$  лежат на одном слое  $z_{p+1, q+1}$ , то будем говорить, что конфигурация  $R(p, q)$  замыкается.

Если на некоторой ткани  $W(p, q, p + q - 1)$  замыкаются все достаточно малые конфигурации  $R(p, q)$ , то будем называть ее обобщенной три-тканью Рейдемейстера и обозначать  $WR(p, q)$ .

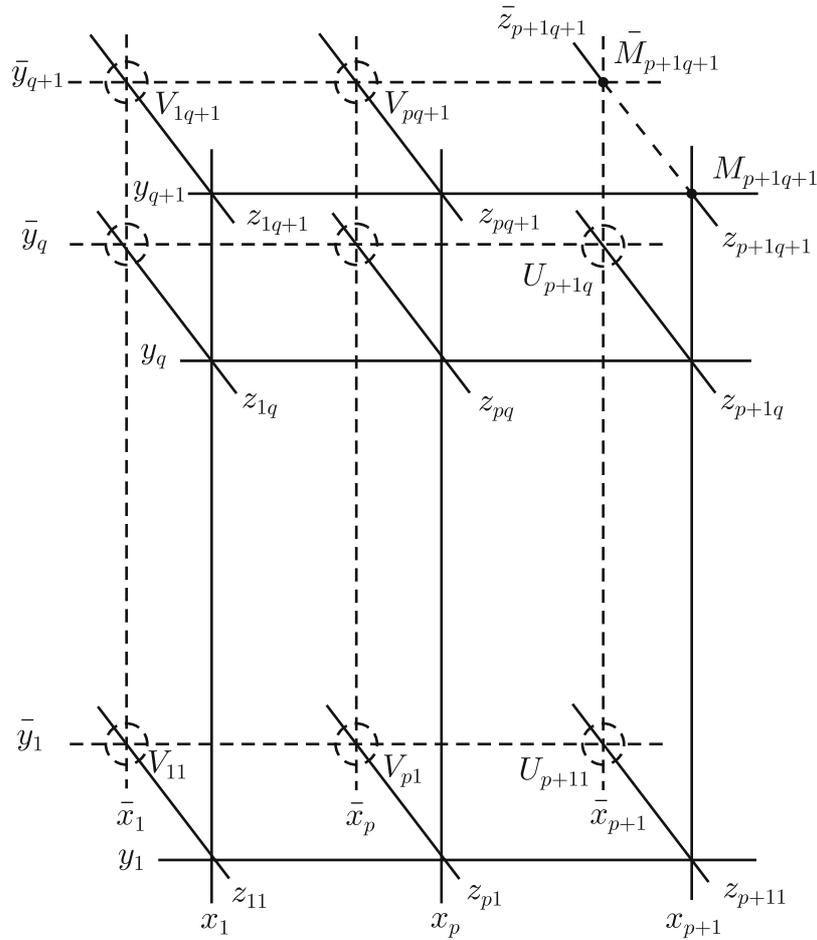


Рис. 8

**1.4.** Как уже было сказано, в теории три-тканей, образованных слоениями одинаковой размерности, определено понятие сердцевины средней три-ткани Бола  $B_m$  [18]. Ткань  $B_m$  характеризуется замыканием средних конфигураций Бола (см. рис. 9(a)). Положение слоя  $z_{22}$  не зависит от выбора вертикального слоя  $x_1$  и определяется только слоями  $z_{11}$  и  $z_{12}$ , т.е.  $z_{22} = C(z_{11}, z_{12})$ . При этом функция  $C$  определяется так (см. [18]):

$$z_{22} = z_{12} \circ (z_{11}/z_{12}),$$

где  $\circ$  — операция в какой-либо (неважно, в какой) координатной лупе рассматриваемой три-ткани, а знак  $/$  обозначает правую обратную операцию для  $\circ$ .

Обобщим понятие сердцевины для произвольной три-ткани  $R$  и для ткани  $WR(p, q)$ . Для первой сердцевины определим как тернарную операцию

$$z_{22} = z_{21} \circ (z_{11}/z_{12}),$$

где  $z_{11}$ ,  $z_{12}$ ,  $z_{21}$ ,  $z_{22}$  — наклонные слои, входящие в произвольную конфигурацию  $R$  (рис. 9(b)).

Из построения конфигурации  $R(p, q)$  на ткани  $WR(p, q)$  следует, что положение слоя  $M_{p+1, q+1} \bar{M}_{p+1, q+1}$  не зависит от выбора вертикальных слоев  $\bar{x}_\alpha$ , а определяется только выбором наклонных слоев, входящих в конфигурацию (их всего  $pq + p + q$ ). Таким образом, возникает отображение

$$C : \underbrace{\lambda_3 \times \cdots \times \lambda_3}_{pq+p+q} \rightarrow \lambda_3, \quad z_{p+1, q+1} = C(z_{\alpha, i}, z_{\alpha, q+1}, z_{p+1, i}). \quad (1.13)$$

Это отображение будем рассматривать как  $(pq + p + q)$ -арную операцию и называть по аналогии с классической теорией три-тканей сердцевиной три-ткани  $WR(p, q)$ .

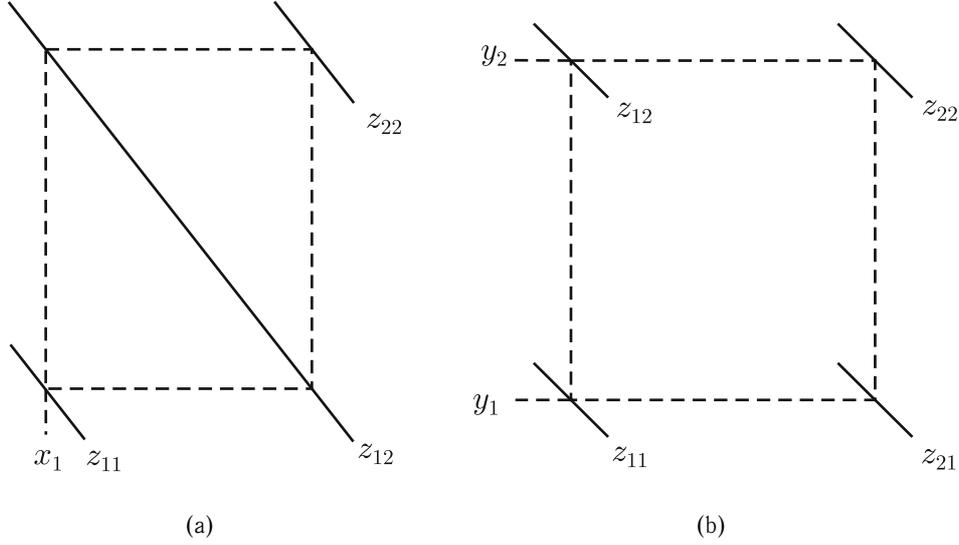


Рис. 9

**Теорема 1.2.** *Сердцевина  $\mathcal{C}$  три-ткани  $WR(p, q)$  вполне определяет координатный группоид этой ткани.*

*Доказательство.* На рис. 8 зафиксируем  $pq$  наклонных слоев, определяемых параметрами  $z_{\alpha, i}$ . Далее, выберем произвольно  $p$  вертикальных слоев  $x_\alpha = (x_\alpha^i)$ . Тогда однозначно определятся (как трансверсали)  $q$  горизонтальных слоев  $y_i = (y_i^\alpha)$ . При этом положение наклонного слоя  $z_{p+1, q+1}$  будет определяться только выбором  $p$  наклонных слоев  $z_{\alpha, q+1}$  и  $q$  наклонных слоев  $z_{p+1, i}$ . Тем самым, координатный моноид  $\mu_{(a, b)}(\circ)$  задан, а он, как было показано выше в п. 1.1, главноизотопен координатному группоиду рассматриваемой три-ткани  $WR(p, q)$ , что и доказывает теорему.  $\square$

Возникает естественный вопрос: можно ли определить понятие сердцевины для произвольной три-ткани  $W(p, q, p+q-1)$ ? Рассмотрим на ткани  $W(p, q, p+q-1)$   $p+1$  вертикальных и  $q+1$  горизонтальных слоев, а также  $(p+1)(q+1)$  наклонных слоев, проходящих через точки их пересечения. На рис. 8 эти слои изображены сплошными линиями и отмечены соответственно параметрами  $x_{\bar{\alpha}}$ ,  $y_{\bar{i}}$  и  $z_{\bar{\alpha}, \bar{i}}$ ,  $\bar{\alpha} = \overline{1, p+1}$ ,  $\bar{i} = \overline{1, q+1}$ . Пусть параметры  $z_{\bar{\alpha}, \bar{i}}$  связаны соотношением (1.13). Теперь рассмотрим другой набор  $p$  вертикальных слоев  $\bar{x}_i$ . На рис. 8 они изображены вертикальными пунктирными линиями. Тогда, как показано выше (см. рассуждения при построении конфигурации  $R(p, q)$ ), однозначно определится точка  $\bar{M}_{p+1, q+1}$ , через которую проходит наклонный слой  $\bar{z}_{p+1, q+1}$ . При этом параметр  $\bar{z}_{p+1, q+1}$  удовлетворяет тому же уравнению (1.13), поскольку наклонные слои  $z_{\alpha, i}$ ,  $z_{p+1, i}$ ,  $z_{\alpha, q+1}$  при построении точки  $\bar{M}_{p+1, q+1}$  не меняются, т.е.

$$\bar{z}_{p+1, q+1} = \mathcal{C}(z_{\alpha, i}, z_{\alpha, q+1}, z_{p+1, i}). \quad (1.14)$$

Таким образом, меняя параметры  $\bar{x}_i$ , мы будем получать, вообще говоря, различные значения  $\bar{z}_{p+1, q+1}$  при одном и том же наборе аргументов  $z_{\alpha, i}$ ,  $z_{p+1, i}$ ,  $z_{\alpha, q+1}$ . Уравнение (1.13) определяет функцию  $\mathcal{C}$  (т.е. сердцевину) в том и только том случае, если ее значения при одном и том же наборе аргументов совпадают, поэтому из (1.13) и (1.14) получаем  $\bar{z}_{p+1, q+1} = z_{p+1, q+1}$ , а это условие эквивалентно замыканию на три-ткани  $W(p, q, p+q-1)$  конфигураций  $R(p, q)$  (рис. 8). Полученный результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

**Теорема 1.3.** *Сердцевина ткани  $W(p, q, p+q-1)$  существует тогда и только тогда, когда эта ткань является тканью  $WR(p, q)$ .*

**1.5.** Покажем, как с помощью введенных понятий интерпретировать бинарные физические структуры ранга  $(p+1, q+1)$  Ю. И. Кулакова [40]. Согласно [40], дифференцируемая функция  $z = f(x, y)$  от  $p+q$  вещественных переменных  $x = (x^i)$  и  $y = (y^\alpha)$  называется физической

структурой ранга  $(p + 1, q + 1)$ , если существует гладкая функция  $\Phi$  от  $(p + 1)(q + 1)$  переменных такая, что

$$\Phi\left(\underbrace{f(x_\alpha, y_i)}_{pq}, \underbrace{f(x_\alpha, y_{q+1})}_p, \underbrace{f(x_{p+1}, y_i)}_q, f(x_{p+1}, y_{q+1})\right) = 0 \quad (1.15)$$

для любого набора переменных  $x_\alpha = (x_\alpha^i)$  и  $y_i = (y_i^\alpha)$ . Если обозначить  $z_{\alpha,i} = f(x_\alpha, y_i)$ , то последнее соотношение примет вид

$$\Phi(z_{\alpha,i}, z_{\alpha,q+1}, z_{p+1,i}, z_{p+1,q+1}) = 0. \quad (1.16)$$

В теории физических структур функция  $z = f(x, y)$  называется традиционной формой записи некоторого физического закона тогда и только тогда, когда функция  $f$  или ее изотопический эквивалент удовлетворяет приведенному выше условию (1.16) (т.е. существует такая функция  $\Phi$  от  $(p + 1)(q + 1)$  переменных, что для любого набора переменных  $x_\alpha = (x_\alpha^i)$  и  $y_i = (y_i^\alpha)$  выполняется равенство (1.15)).

Уравнение (1.16) в теории физических структур называется феноменологически инвариантной формой физического закона.

С другой стороны, уравнение  $z = f(x, y)$  определяет некоторую три-ткань  $W(p, q, p + q - 1)$ , а равенство (1.16) означает, что один из параметров слоев третьего слоения, например,  $z_{p+1,q+1}$ , зависит только от параметров слоев третьего слоения —  $z_{\alpha,i}$ ,  $z_{\alpha,q+1}$  и  $z_{p+1,i}$ , причем так, как показано на рис. 8, т.е. слои  $z_{\alpha,i}$ ,  $z_{\alpha,q+1}$ ,  $z_{p+1,i}$ ,  $z_{p+1,q+1}$  входят в конфигурацию  $R(p, q)$ . Поскольку набор параметров  $x_\alpha$  и  $y_i$  произвольный, то конфигурация  $R(p, q)$  замыкается. Следовательно, три-ткань  $W(p, q, p + q - 1)$  является тканью  $WR(p, q)$  и, в силу теоремы 1.3, допускает сердцевину, неявно задаваемую уравнением (1.16). Доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.4.** *Три-ткань, определяемая физической структурой ранга  $(p + 1, q + 1)$ , является тканью  $WR(p, q)$ , и наоборот, координатный группоид три-ткани  $WR(p, q)$  является физической структурой ранга  $(p + 1, q + 1)$ . Феноменологически инвариантная форма (1.16) физического закона неявно задает сердцевину три-ткани  $WR(p, q)$ .*

Таким образом, любая физическая структура ранга  $(p + 1, q + 1)$  определяет три-ткань  $WR(p, q)$ , и наоборот, три-ткань  $WR(p, q)$  интерпретирует некоторую физическую структуру.

## 2. $(p + 1)$ -ТКАНИ И $(q + 1)$ -ТКАНИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ТКАНЬЮ $W(p, q, p + q - 1)$

**2.1.** Покажем, что ткань  $W(p, q, p + q - 1)$  при  $p > 1$  и  $q > 1$  индуцирует на своих горизонтальных и вертикальных слоях некоторые новые ткани, образованные уже слоениями одинаковых размерностей.

В некоторой области  $\mathcal{N}$  многообразия  $\mathcal{M}$ , несущего три-ткань  $W(p, q, p + q - 1)$ , зафиксируем  $q + 1$  горизонтальных слоев  $b_1, \dots, b_{q+1}$ . Пусть  $\mathcal{F}_2^0$  — произвольный горизонтальный слой, отличный, вообще говоря, от слоев  $b_{\bar{i}}$ ,  $\bar{i} = \overline{1, q + 1}$ , и  $A$  — произвольная точка на  $\mathcal{F}_2^0$  (рис. 10). Вертикальный слой  $\mathcal{F}_1(A)$ , проходящий через точку  $A$ , пересекает слой  $b_{\bar{i}}$  в некоторой точке, через которую проходит наклонный слой  $z_{\bar{i}}$ . Последний пересекает горизонтальный слой  $b_{\bar{i}}$  (с тем же номером  $\bar{i}$ ) по  $(q - 1)$ -мерному подмногообразию  $U_{\bar{i}}$  (в рассматриваемом случае  $q - 1 > 0$ ). Обозначим через  $\pi_1$  проектирование с помощью вертикальных слоев. Проектируя подмногообразия  $U_{\bar{i}}$  на  $\mathcal{F}_2^0$ , получим подмногообразия  $\tilde{U}_{\bar{i}} = \pi_1(U_{\bar{i}})$  такой же размерности  $q - 1$ , причем через точку  $A$  проходит  $q + 1$  подмногообразий  $\tilde{U}_{\bar{i}}$ . Таким образом, в некоторой окрестности  $\mathcal{N}_2^0$  точки  $A$  получаем  $q + 1$  слоений  $\tilde{\lambda}_{\bar{i}}$   $(q - 1)$ -мерных поверхностей, т.е. на слое  $\mathcal{F}_2^0$  возникает  $(q + 1)$ -ткань в смысле В. В. Гольдберга [29]. Обозначим ее  $\tilde{W}_2(b_{\bar{i}})$ ,  $\bar{i} = \overline{1, q + 1}$ .

Найдем уравнение ткани  $\tilde{W}_2(b_{\bar{i}})$ . Обозначим координаты точки  $A \in \mathcal{F}_2^0$  через  $x^i$ ,  $i = \overline{1, q}$ , и всем точкам, лежащим на одной вертикали с точкой  $A$ , припишем одни и те же координаты  $x^i$  в слоях  $b_{\bar{i}}$ . Тогда для каждой из этих точек, согласно определению три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$ , мы можем записать уравнение (1.1):

$$z_{\bar{i}} = f(x^1, x^2, \dots, x^q, b_{\bar{i}}^1, b_{\bar{i}}^2, \dots, b_{\bar{i}}^p),$$

связывающее параметры выделенных слоев.

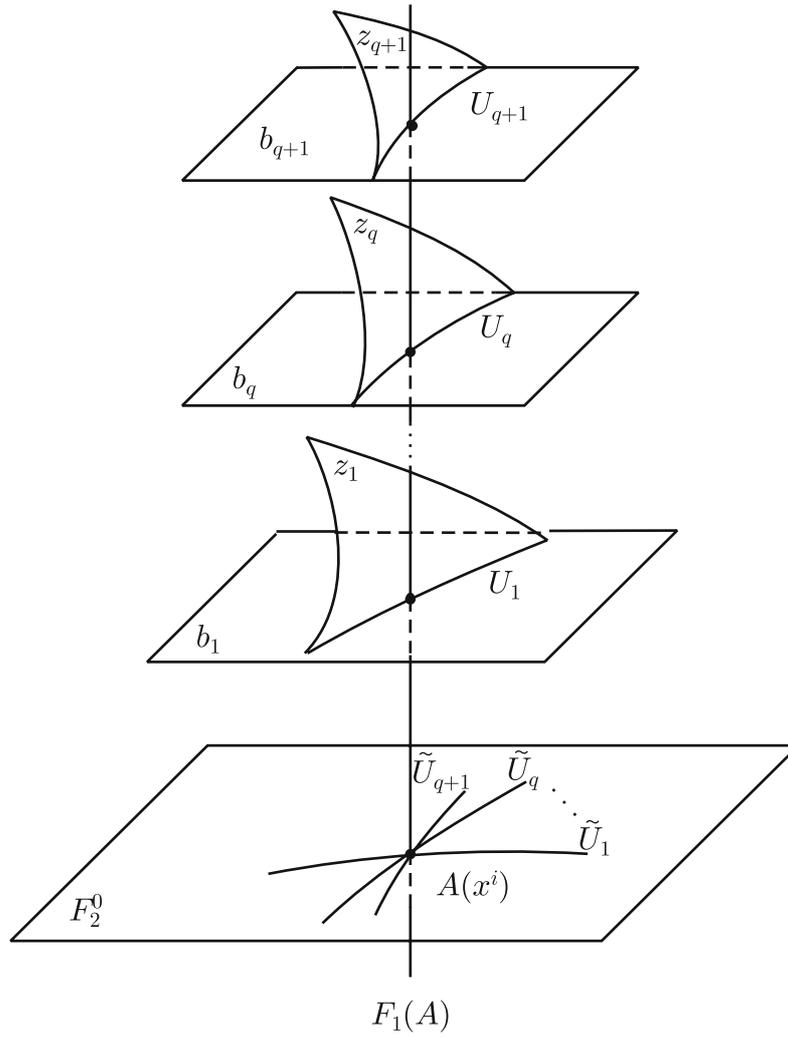


Рис. 10

С другой стороны, параметр  $z_i$  можно считать параметром слоя  $U_i$  на соответствующем горизонтальном слое, а значит, и параметром спроектированного слоя  $\tilde{U}_i$  на  $\mathcal{F}_2^0$  (в силу локальной однозначности проектирования). Поэтому уравнение ткани  $\tilde{W}_2(b_i)$  получается исключением из предыдущей системы переменных  $x^i$  — локальных координат точки  $A$ . Результат запишем в виде

$$\tilde{\Phi}_2(z_1, z_2, \dots, z_{q+1}; b_1^\alpha, \dots, b_{q+1}^\alpha) = 0, \quad \alpha = \overline{1, p}.$$

Выразив из этого уравнения, например,  $z_{q+1}$ ,

$$z_{q+1} = \tilde{f}_2(z_1, z_2, \dots, z_q; b_1^\alpha, \dots, b_{q+1}^\alpha),$$

получим, согласно [29], одну из координатных  $q$ -квазигрупп три-ткани  $\tilde{W}_2(b_i)$ .

Аналогично, фиксируя  $p+1$  слоев  $a_1, \dots, a_{p+1}$  первого слоя ткани  $W(p, q, p+q-1)$ , определим (с помощью проектирования  $\pi_2$  горизонтальными слоями) на произвольном вертикальном слое  $\mathcal{F}_1^0$   $(p+1)$ -ткань  $(p-1)$ -мерных поверхностей  $(p-1 > 0)$ . Обозначим такие ткани  $\tilde{W}_1(a_{\bar{\alpha}})$ ,  $\bar{\alpha} = \overline{1, p+1}$ . Уравнение координатной  $p$ -квазигруппы ткани  $\tilde{W}_1(a_{\bar{\alpha}})$  приводится к виду

$$z_{p+1} = \tilde{f}_1(z_1, z_2, \dots, z_p; a_1^i, \dots, a_{p+1}^i).$$

Заметим, что на классической три-ткани  $W(r, r, r)$  ткани  $\tilde{W}_2(b_i)$  и  $\tilde{W}_1(a_{\bar{\alpha}})$  не возникают, поскольку, в отличие от ткани  $W(p, q, p+q-1)$ , любой наклонный слой ткани  $W(r, r, r)$  имеет с любым горизонтальным и вертикальным слоями не более одной общей точки.

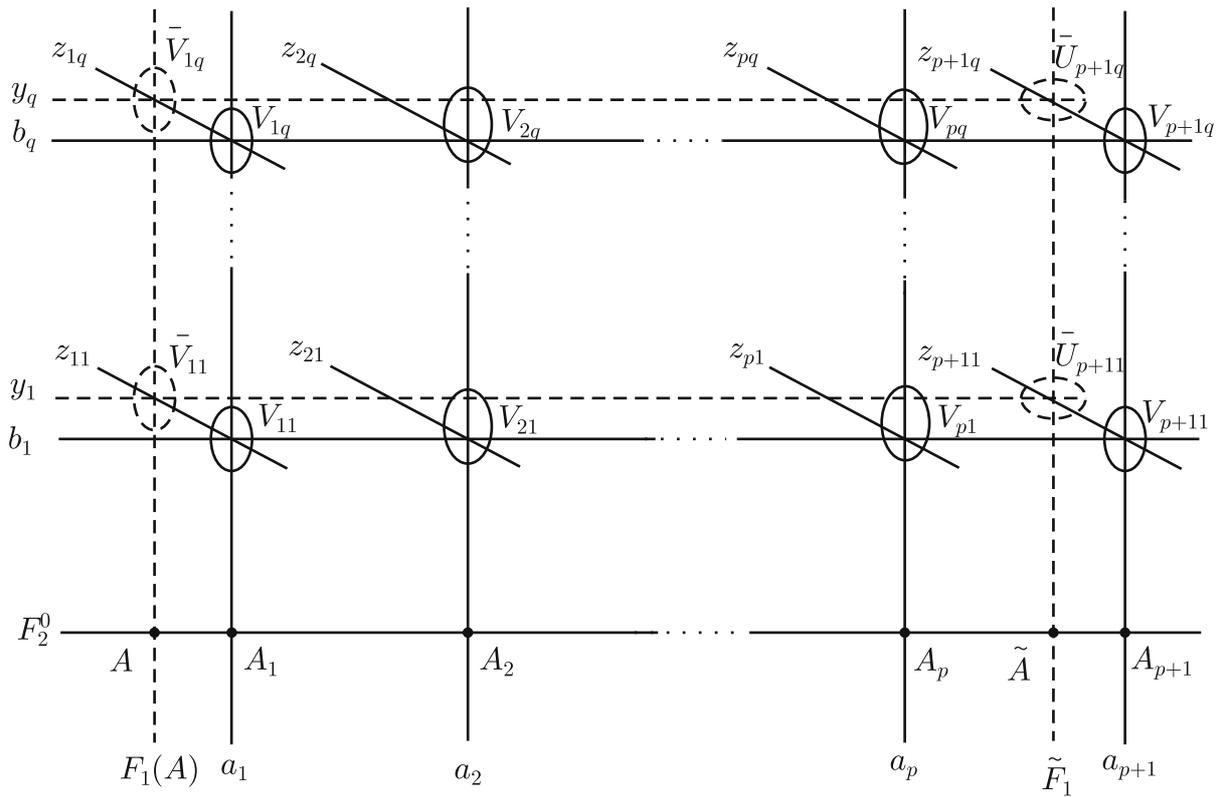


Рис. 11

**2.2.** Для произвольного горизонтального слоя  $\mathcal{F}_2^0$  ткани  $W(p, q, p + q - 1)$  построим некоторое отображение  $\tilde{\phi}_2$  этого слоя на себя.

Зафиксируем  $p + 1$  вертикальных слоев  $a_1, \dots, a_{p+1}$  и  $q$  горизонтальных слоев  $b_1, \dots, b_q$ . Через точки пересечения выбранных слоев проходят наклонные слои, их всего  $(p + 1)q$ . На рис. 11 эти слои обозначены параметрами  $z_{\bar{\alpha}i}$ , а их пересечения с вертикальными слоями  $a_{\bar{\alpha}}$  — через  $V_{\bar{\alpha}i}$ ,  $\dim V_{\bar{\alpha}i} = p - 1$ ,  $\bar{\alpha} = \overline{1, p + 1}$ ,  $i = \overline{1, q}$ .

Пусть, как и выше,  $\mathcal{F}_2^0$  — произвольный горизонтальный слой (на рис. 11 — горизонтальная линия снизу). Он пересечет каждый из вертикальных слоев  $a_{\bar{\alpha}}$  в некоторой точке  $A_{\bar{\alpha}}$ . Пусть  $A$  — точка в окрестности, например, точки  $A_1$  и  $\mathcal{F}_1(A)$  — вертикальный слой, проходящий через  $A$ . Наклонные слои  $z_{1i}$ , пересекающие вертикальный слой  $a_1$ , пересекут и  $\mathcal{F}_1(A)$  по некоторым подмногообразиям  $\bar{V}_{1i}$  размерности  $p - 1$ ,  $i = \overline{1, q}$ . Рассмотрим подмногообразия  $V_{1i}, V_{2i}, \dots, V_{pi}$  при некотором фиксированном  $i$ . Они допускают локально единственный трансверсальный горизонтальный слой  $y_i$  (на рис. 11 эти слои изображены горизонтальными пунктирными линиями). Слой  $y_i$  пересечет наклонный слой  $z_{p+1,i}$  (с тем же номером  $i$ ) по подмногообразию  $\bar{U}_{p+1,i}$  размерности  $q - 1$ . Для разных значений  $i$  получаем всего  $q$  подмногообразий  $\bar{U}_{p+1,i}$ . Они допускают единственный трансверсальный вертикальный слой  $\tilde{\mathcal{F}}_1$  (на рис. 11 — вертикальная пунктирная линия справа), который пересечет слой  $\mathcal{F}_2^0$  в некоторой точке  $\tilde{A}$ . Положим по определению  $\tilde{A} = \tilde{\phi}_2(A)$ . Построенное отображение  $\tilde{\phi}_2 : \mathcal{F}_2^0 \rightarrow \mathcal{F}_2^0$  является, очевидно, локально биективным и вполне определяется заданием  $p + 1$  вертикальных слоев  $a_1, \dots, a_{p+1}$  и  $q$  горизонтальных слоев  $b_1, \dots, b_q$ .

Отметим, что отображение  $\tilde{\phi}_2$  связано с двумя вертикальными слоями  $a_1$  и  $a_{p+1}$  из фиксированного набора  $p + 1$  вертикальных слоев, причем  $\tilde{\phi}_2(A_1) = A_{p+1}$ . Точно так же можно определить и другие отображения  $\tilde{\phi}_2$ , связанные с другой парой вертикальных слоев из набора  $a_1, \dots, a_{p+1}$  (всего их будет  $C_{p+1}^2 = p(p + 1)/2$ ). Далее мы рассматриваем только отображение  $\tilde{\phi}_2$ , связанное со слоями  $a_1$  и  $a_{p+1}$ .

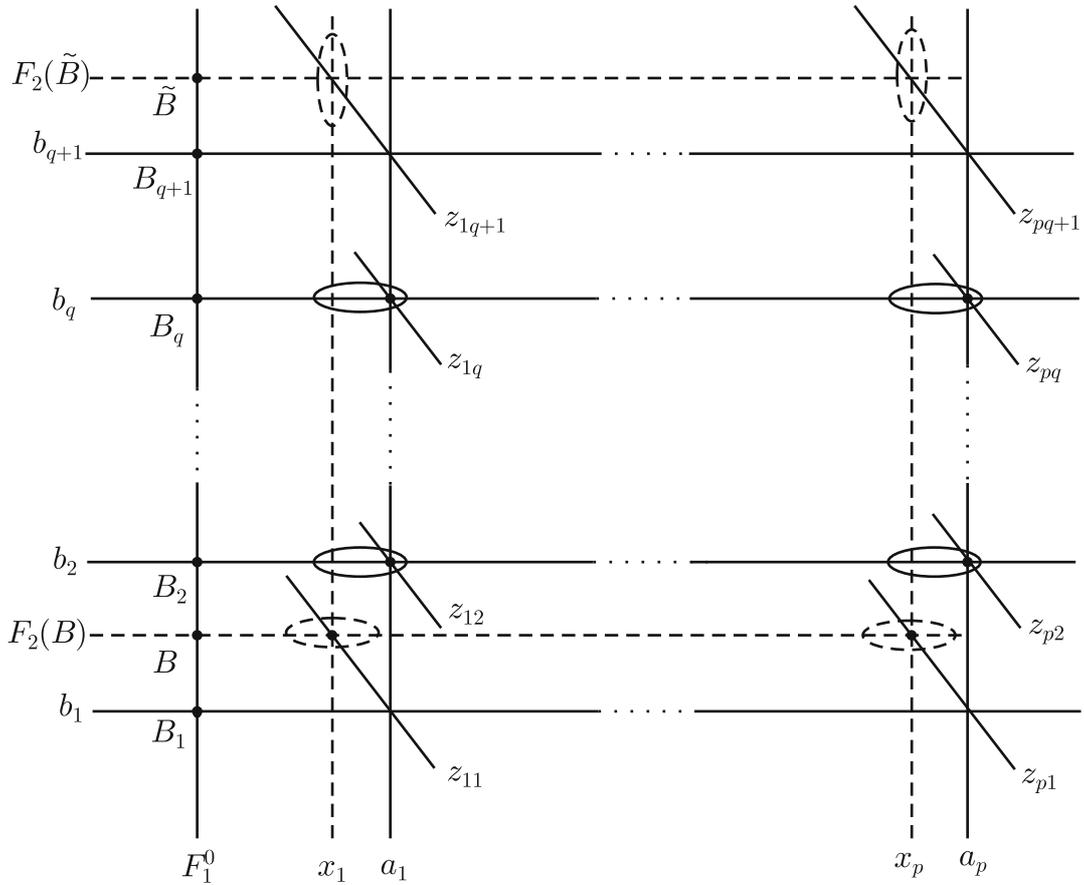


Рис. 12

Аналогично, фиксируя  $q+1$  горизонтальных слоев  $b_1, \dots, b_{q+1}$  и  $p$  вертикальных слоев  $a_1, \dots, a_p$ , можно определить на произвольном вертикальном слое  $\mathcal{F}_1^0$  ткани  $W(p, q, p+q-1)$  отображение  $\tilde{\phi}_1 : \mathcal{F}_1^0 \rightarrow \mathcal{F}_1^0$ ,  $\tilde{\phi}_1(B) = \tilde{B}$  (рис. 12). Отображений  $\tilde{\phi}_1$ , связанных с различными парами горизонтальных слоев из набора  $b_1, \dots, b_{q+1}$ , будет всего  $C_{q+1}^2 = q(q+1)/2$ , из них мы рассматриваем только отображение  $\tilde{\phi}_1$ , связанное со слоями  $b_1$  и  $b_{q+1}$  (см. рис. 12). При этом  $\tilde{\phi}_1(B_1) = B_{q+1}$ .

Отображения  $\tilde{\phi}_2$  и  $\tilde{\phi}_1$  определяются и для классической ткани  $W(r, r, r)$  соответственно на ее горизонтальных и вертикальных слоях. Так, отображение  $\tilde{\phi}_2$  на произвольном горизонтальном слое  $\mathcal{F}_2^0$  ткани  $W(r, r, r)$  порождается одним фиксированным горизонтальным слоем  $b_1$  и двумя фиксированными вертикальными слоями  $a_1$  и  $a_2$  (см. рис. 13(a)), а отображение  $\tilde{\phi}_1$  на вертикальном слое  $\mathcal{F}_1^0$  — фиксированным вертикальным слоем  $a_1$  и двумя фиксированными горизонтальными слоями  $b_1$  и  $b_2$  (см. рис. 13(b)).

**2.3.** Рассмотрим более подробно отображение  $\tilde{\phi}_2$  на произвольном горизонтальном слое  $\mathcal{F}_2^0$  ткани  $W(p, q, p+q-1)$ , порождаемое  $p+1$  вертикальными слоями  $a_1, \dots, a_{p+1}$  и  $q$  горизонтальными слоями  $b_1, \dots, b_q$ . Пусть, как и выше,  $U_{1i} —  $(q-1)$ -мерное подмногообразие, по которому пересекаются слои  $b_i$  и  $z_{1i}$ ,  $i = \overline{1, q}$ , а  $\tilde{U}_{1i} = \pi_1(U_{1i})$ . Аналогично,  $U_{p+1,i} = b_i \cap z_{p+1,i}$  и  $\tilde{U}_{p+1,i} = \pi_1(U_{p+1,i})$ . Укажем одно важное свойство отображения  $\tilde{\phi}_2$ : если точка  $A$  перемещается по подмногообразию  $\tilde{U}_{1i} = \pi_1(U_{1i})$  (см. рис. 14), то ее образ  $\tilde{A} = \tilde{\phi}_2(A)$  будет перемещаться по подмногообразию  $\tilde{U}_{p+1,i} = \pi_1(U_{p+1,i})$  (с тем же номером  $i$ ).$

Действительно, пусть точка  $A$  перемещается по подмногообразию  $\tilde{U}_{1i} = \pi_1(U_{1i})$  (при некотором  $i$ ), тогда ее прообраз перемещается в  $U_{1i}$ , следовательно,  $U_{1i}$  не меняется. Соответственно, не меняется и проходящая через  $U_{1i}$  горизонтальная трансверсаль  $y_i$ , а, значит, и подмногообразие  $U_{p+1,i}$ . Поэтому вертикальный слой  $\tilde{\mathcal{F}}_1$ , меняя свое положение при перемещении точки  $A$ , будет

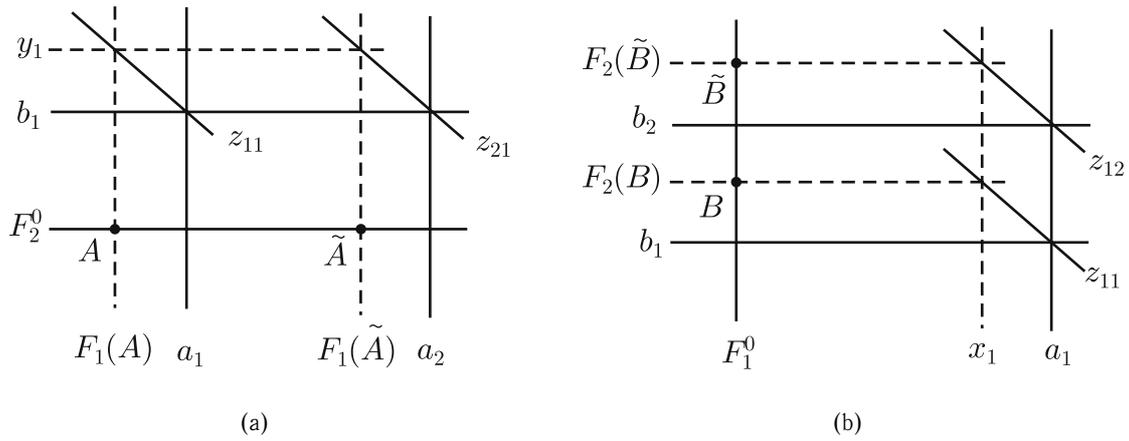


Рис. 13

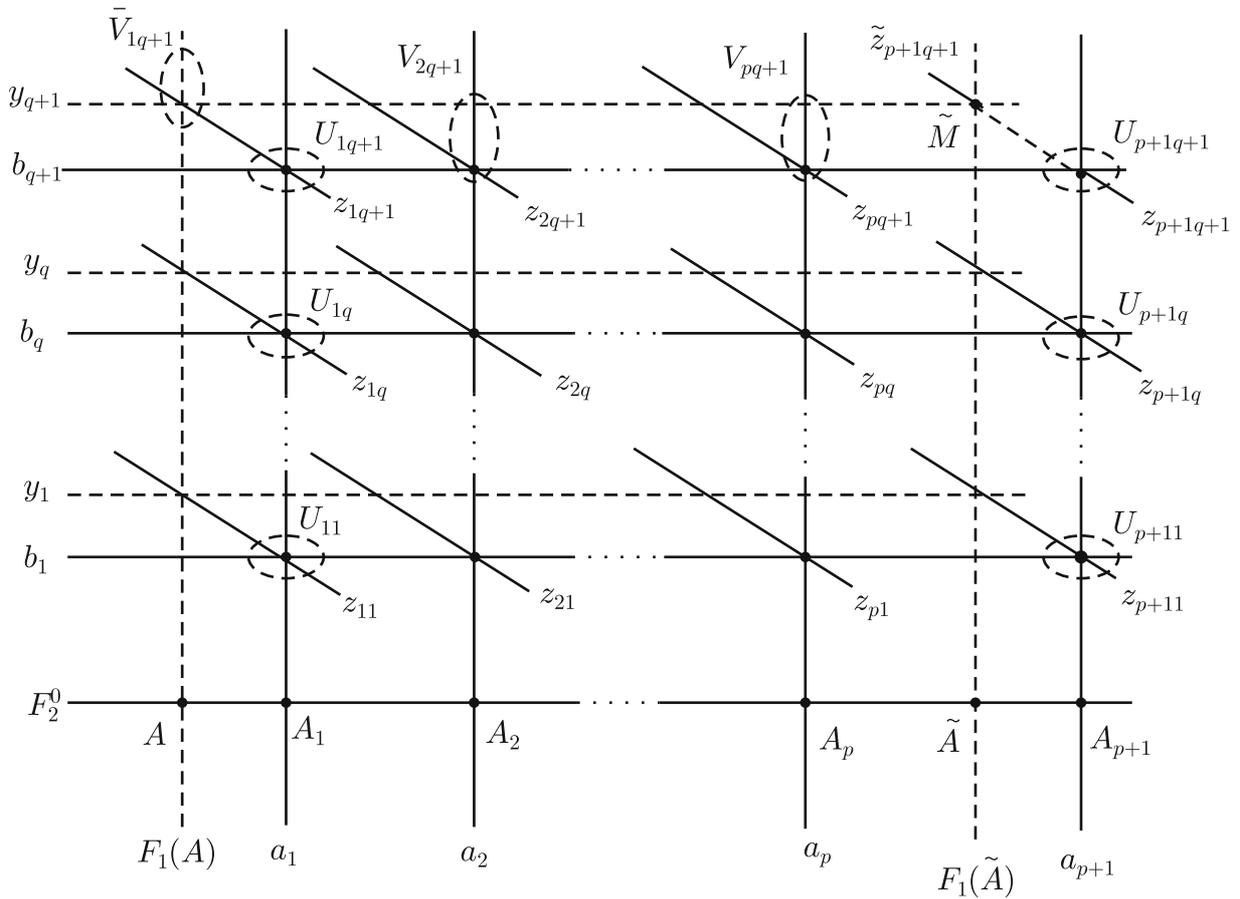


Рис. 14

при этом пересекать подмногообразие  $U_{p+1,i}$  и, естественно, его проекцию  $\tilde{U}_{p+1,i} = \pi_1(U_{p+1,i})$  на  $\mathcal{F}_2^0$ , что и доказывает утверждение.

Теперь добавим к набору  $b_1, \dots, b_q$  еще один горизонтальный слой  $b_{q+1}$ . Тогда на слое  $\mathcal{F}_2^0$  возникнет  $(q+1)$ -ткань  $\tilde{W}_2(b_i)$ , порожденная фиксированным набором  $b_1, \dots, b_{q+1}$  (см. п. 2.1 и рис. 14). Заметим, что  $q$  из  $q+1$  слоений этой ткани образованы подмногообразиями  $\tilde{U}_{1i} = \pi_1(U_{1i})$ , о которых только что говорилось, а слоение  $\tilde{\lambda}_{q+1}$ , порожденное добавленным слоем  $b_{q+1}$ ,

образовано слоями  $\tilde{U}_{1,q+1} = \pi_1(U_{1,q+1})$  ( $U_{1,q+1}$  получается пересечением горизонтального слоя  $b_{q+1}$  с наклонным слоем  $z_{1,q+1}$ , проходящим через точку пересечения слоев  $b_{q+1}$  и  $a_1$ ; см. рис. 14). Как только что доказано,  $q$  слоений  $\tilde{\lambda}_i$ ,  $i = \overline{1, q}$ , ткани  $\tilde{W}_2(b_{\bar{i}})$  сохраняются при отображении  $\tilde{\phi}_2$ . Найдем условия, при которых и последнее слоение, определяемое добавленным слоем  $b_{q+1}$ , также сохраняется при отображении  $\tilde{\phi}_2$ , т.е.  $\tilde{\phi}_2$  будет автоморфизмом ткани  $\tilde{W}_2(b_{\bar{i}})$ .

Прежде всего заметим, что конструкция, изображенная на рис. 11 и определяющая отображение  $\tilde{\phi}_2$ , представляет собой почти завершенную конфигурацию Рейдемейстера  $R(p, q)$  на три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$ , изображенную на рис. 8. Достроим конфигурацию на рис. 11 до конфигурации  $R(p, q)$ , включив в нее недостающие вертикальные слои  $\mathcal{F}_1(A)$  и  $\mathcal{F}_1(\tilde{A})$ , а также два горизонтальных слоя: слой  $b_{q+1}$  и еще один слой  $y_{q+1}$ , который получается следующим образом. Слой  $b_{q+1}$  пересекает каждый из слоев  $a_1, \dots, a_{p+1}$  в точке, через которую проходит наклонный слой (на рис. 14 эти слои обозначены  $z_{1,q+1}, \dots, z_{p+1,q+1}$ ). Пусть  $\tilde{V}_{1,q+1} = \mathcal{F}_1(A) \cap z_{1,q+1}$ ,  $V_{2,q+1} = a_2 \cap z_{2,q+1}, \dots, V_{p,q+1} = a_p \cap z_{p,q+1}$ . Подмногообразия  $\tilde{V}_{1,q+1}, V_{2,q+1}, \dots, V_{p,q+1}$  допускают единственный горизонтальный трансверсальный слой, это и будет  $y_{q+1}$ . Он пересечет вертикальный слой  $\mathcal{F}_1(\tilde{A})$  в некоторой точке  $\tilde{M}$ , через которую проходит наклонный слой  $\tilde{z}_{p+1,q+1}$ . Тем самым построение конфигурации  $R(p, q)$  завершено, причем слои  $z_{p+1,q+1}$  и  $\tilde{z}_{p+1,q+1}$ , вообще говоря, не совпадают, т.е. конфигурация  $R(p, q)$ , вообще говоря, не замкнута.

Рассмотрим слой  $\tilde{U}_{1,q+1} = \pi_1(U_{1,q+1}) \subset \tilde{\lambda}_{q+1}$ , проходящий через точку  $A$ , и пусть  $\tilde{A} = \tilde{\phi}_2(A)$  (см. рис. 14). Точка  $\tilde{A}$  будет перемещаться по слою  $\tilde{U}_{p+1,q+1} \subset \tilde{\lambda}_{q+1}$  тогда и только тогда, когда точка  $\tilde{M}$  будет перемещаться по наклонному слою  $z_{p+1,q+1}$ , а это будет в том и только том случае, если конфигурация  $R(p, q)$  замыкается. Доказана следующая теорема.

**Теорема 2.1.** *Каждое отображение  $\tilde{\phi}_2$ , определенное на горизонтальном слое ткани  $W(p, q, p + q - 1)$ , является автоморфизмом соответствующей ткани  $\tilde{W}_2(b_{\bar{i}})$ , индуцированной на этом же слое, тогда и только тогда, когда ткань  $W(p, q, p + q - 1)$  является тканью  $WR(p, q)$ .*

Ясно, что аналогичная теорема будет верна и для тканей  $\tilde{W}_1(a_{\bar{\alpha}})$ .

**2.4.** С помощью автоморфизмов  $\tilde{\phi}_2$  и  $\tilde{\phi}_1$  можно построить некоторый автоморфизм уже для всей ткани  $WR(p, q)$ .

Рассмотрим два отображения  $\phi_1 = \pi_1^{-1} \circ \tilde{\phi}_2 \circ \pi_1$  и  $\phi_2 = \pi_2^{-1} \circ \tilde{\phi}_1 \circ \pi_2$  соответственно на первом и втором слоениях такие, что

$$\begin{aligned} \phi_1 : \lambda_1 \rightarrow \lambda_1, \quad \phi_1(\mathcal{F}_1) = \tilde{\mathcal{F}}_1, \quad \mathcal{F}_1 \in \lambda_1, \quad \pi_1(\mathcal{F}_1) = A \in \mathcal{F}_2^0, \quad \tilde{\phi}_2(A) = \tilde{A}, \\ \pi_1^{-1}(\tilde{\phi}_2(\pi_1(\mathcal{F}_1))) = \pi_1^{-1}(\tilde{\phi}_2(A)) = \pi_1^{-1}(\tilde{A}) = \mathcal{F}_1(\tilde{A}) = \tilde{\mathcal{F}}_1; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \phi_2 : \lambda_2 \rightarrow \lambda_2, \quad \phi_2(\mathcal{F}_2) = \tilde{\mathcal{F}}_2, \quad \mathcal{F}_2 \in \lambda_2, \quad \pi_2(\mathcal{F}_2) = B \in \mathcal{F}_1^0, \quad \tilde{\phi}_1(B) = \tilde{B}, \\ \pi_2^{-1}(\tilde{\phi}_1(\pi_2(\mathcal{F}_2))) = \pi_2^{-1}(\tilde{\phi}_1(B)) = \pi_2^{-1}(\tilde{B}) = \mathcal{F}_2(\tilde{B}) = \tilde{\mathcal{F}}_2. \end{aligned}$$

Пусть  $P$  — произвольная точка многообразия  $\mathcal{M}$ , несущего три-ткань  $WR(p, q)$ , а  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  соответственно вертикальный и горизонтальный слои, проходящие через точку  $P$ , так что  $P = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  (на рис. 15 слои  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  отмечены параметрами  $x$  и  $y$  соответственно). Пусть, как и выше,  $\phi_1(\mathcal{F}_1) = \tilde{\mathcal{F}}_1$ ,  $\phi_2(\mathcal{F}_2) = \tilde{\mathcal{F}}_2$  и  $\tilde{P} = \tilde{\mathcal{F}}_1 \cap \tilde{\mathcal{F}}_2$  (на рис. 15  $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \tilde{x}$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}_2 = \tilde{y}$ ). Положим по определению  $(\phi_1, \phi_2)(P) = \tilde{P}$ .

Пусть  $z$  и  $\tilde{z}$  — наклонные слои, проходящие соответственно через точки  $P$  и  $\tilde{P}$ . Если точка  $P$  перемещается по слою  $z$ , то ее образ — точка  $\tilde{P}$  будет перемещаться по слою  $\tilde{z}$  в силу замыкания конфигурации  $R(p, q)$ , образованной наклонными слоями  $z'_{11} = x_1 \cdot y_1$ ,  $\tilde{z}$  и  $z_{\alpha\bar{i}}$  (кроме  $z_{11}$  и  $z_{p+1,q+1}$ ; см. рис. 15). В этом случае на третьем слоении  $\lambda_3$  возникает отображение  $\phi_3 : \lambda_3 \rightarrow \lambda_3$ ,

$$\tilde{z} = \phi_3(z) = \phi_3(x \cdot y) = \phi_1(x) \cdot \phi_2(y) = \tilde{x} \cdot \tilde{y},$$

при этом  $\phi_3(z_{11}) = z_{p+1,q+1}$ .

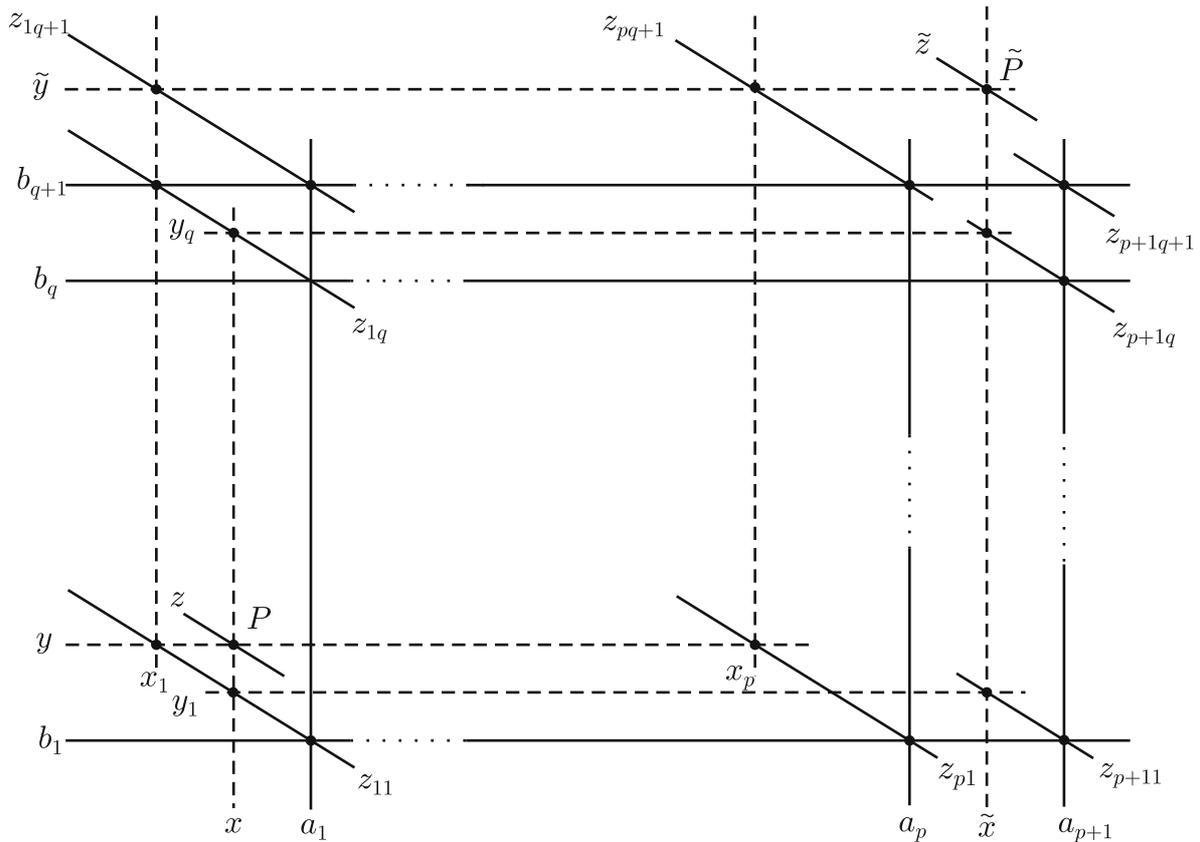


Рис. 15

Таким образом, тройка локальных биекций  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , порождаемых фиксированными  $p + 1$  вертикальными слоями  $a_1, \dots, a_{p+1}$  и  $q + 1$  горизонтальными слоями  $b_1, \dots, b_{q+1}$ , сохраняет соответствующие слоения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ткани  $WR(p, q)$ , а потому является ее автоморфизмом.

На классической три-ткани  $R$  автоморфизм  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  порождается двумя фиксированными вертикальными слоями  $a_1, a_2$  и двумя горизонтальными слоями  $b_1, b_2$  (см. рис. 16).

**2.5.** Рассмотрим произвольную ткань  $WR(p, q)$ . Пусть, как и выше, ткань  $\tilde{W}_2(b_i)$  задается на горизонтальном слое  $\mathcal{F}_2^0$  фиксированным набором  $q + 1$  горизонтальных слоев  $b_1, \dots, b_{q+1}$ , и пусть отображение  $\tilde{\phi}_2$  порождается  $q$  горизонтальными слоями  $b_1, \dots, b_q$  и некоторым набором  $p + 1$  вертикальных слоев  $a_1, \dots, a_{p+1}$ . Считая слои  $a_1, \dots, a_{p+1}$  переменными, получим семейство автоморфизмов ткани  $\tilde{W}_2(b_i)$ , зависящее от  $(p + 1)q$  параметров слоев  $a_1, \dots, a_{p+1}$ . Однако не все эти параметры являются существенными. Укажем другой набор вертикальных слоев  $a'_1, \dots, a'_{p+1}$ , при котором получается то же самое отображение  $\tilde{\phi}_2$ .

Пусть  $A$  и  $\tilde{A}$  — две соответствующие точки отображения  $\tilde{\phi}_2$ ,  $\tilde{A} = \tilde{\phi}_2(A)$ . Обозначим через  $x$  и  $\tilde{x}$  вертикальные слои, проходящие соответственно через точки  $A$  и  $\tilde{A}$ :  $x = \mathcal{F}_1(A)$ ,  $\tilde{x} = \mathcal{F}_1(\tilde{A})$ . Рассмотрим произвольный набор  $q$  горизонтальных слоев  $y'_1, \dots, y'_q$ , достаточно близких к трансверсальным слоям  $y_1, \dots, y_q$  (на рис. 17 слой  $\mathcal{F}_2^0$  и лежащие на нем точки  $A, \tilde{A}$  и т. д. мы не изображаем, чтобы не загромождать чертеж. Эти точки представлены соответствующими вертикальными слоями  $x, \tilde{x}$  и т. д.).

Пусть  $z'_{1i} = x \cdot y'_i$  и  $z'_{p+1,i} = \tilde{x} \cdot y'_i$ ,  $i = \overline{1, q}$ . Слой  $z'_{1i}$  пересекает горизонтальный слой  $b_i$  (с тем же номером  $i$ ) по подмногообразию  $U'_{1i}$ . Для разных  $i$  получаем вертикальный слой, трансверсальный подмногообразиям  $U'_{1i}$ , пусть это будет слой  $a'_1$  из искомого набора  $a'_1, \dots, a'_{p+1}$ . Аналогично определим слой  $a'_{p+1}$  как вертикальную трансверсаль подмногообразий  $U'_{p+1,i} = z'_{p+1,i} \cap b_i$ . Остальные  $p - 1$  вертикальных слоев  $a'_2, \dots, a'_p$  определим как вертикальные трансверсали соответственно

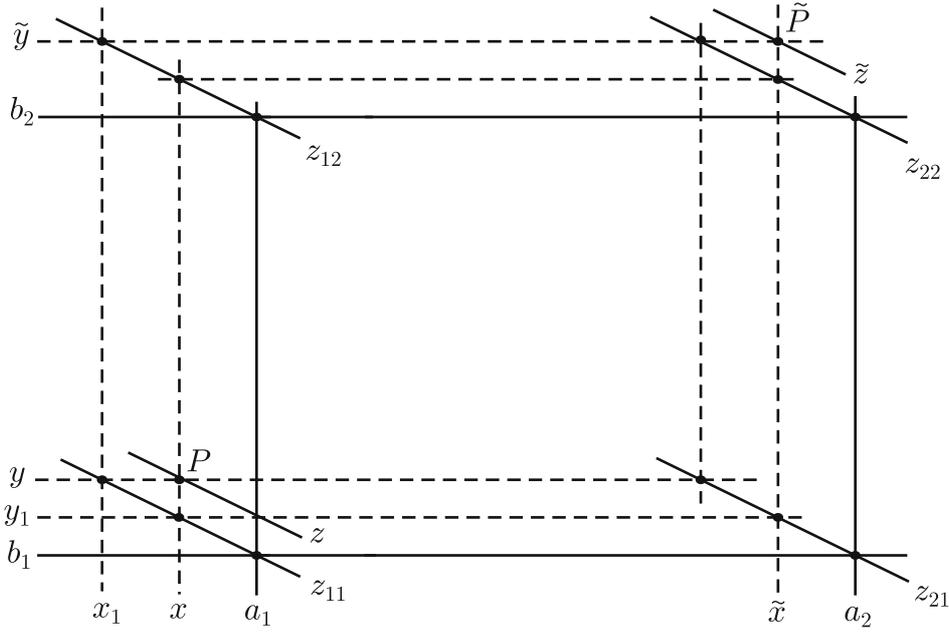


Рис. 16

подмногообразий  $U'_{2i} = z_{2i} \cap y'_i, \dots, U'_{pi} = z_{pi} \cap y'_i$ , рассматриваемых для различных  $i$ . Таким образом, при заданной паре соответствующих точек  $A$  и  $\tilde{A}$  новый набор вертикальных слоев  $a'_1, \dots, a'_{p+1}$  определен однозначно. Обозначим отображение, порождаемое этим набором,  $\tilde{\phi}'_2$ . Покажем, что  $\tilde{\phi}_2 \equiv \tilde{\phi}'_2$ .

Пусть  $\bar{A}$  — произвольная точка на слое  $\mathcal{F}_2^0$  (близкая к точке  $A$ ),  $\tilde{\bar{A}}$  — ее образ при отображении  $\tilde{\phi}_2$  (определяемом набором  $a_1, \dots, a_{p+1}$ ), а  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_q$  — горизонтальные трансверсальные слои, связанные с точками  $\bar{A}$  и  $\tilde{\bar{A}}$ , так что

$$\bar{x} \cdot \bar{y}_i = z_{1i}, \quad a_2 \cdot \bar{y}_i = z_{2i}, \quad \dots, \quad a_p \cdot \bar{y}_i = z_{pi}, \quad \tilde{\bar{x}} \cdot \bar{y}_i = z_{p+1,i},$$

где  $\bar{x} = \mathcal{F}_1(\bar{A})$ ,  $\tilde{\bar{x}} = \mathcal{F}_1(\tilde{\bar{A}})$ . Точки пересечения слоев  $\bar{y}_i$  с вертикальным слоем  $\tilde{\bar{x}}$  обозначим  $\bar{M}_i$ .

Пусть  $\tilde{A}'$  — образ точки  $\bar{A}$  при отображении  $\tilde{\phi}'_2$ , порождаемом набором  $a'_1, \dots, a'_{p+1}$ , и  $\tilde{y}'_1, \dots, \tilde{y}'_q$  — горизонтальные трансверсальные слои, определяемые точками  $\bar{A}$  и  $\tilde{A}'$ , т.е.

$$\bar{x} \cdot \tilde{y}'_i = z_{1i}, \quad a'_2 \cdot \tilde{y}'_i = z_{2i}, \quad \dots, \quad a'_p \cdot \tilde{y}'_i = z_{pi}, \quad \tilde{x}' \cdot \tilde{y}'_i = z_{p+1,i},$$

где  $\tilde{x}' = \mathcal{F}_1(\tilde{A}')$ . Рассмотрим конфигурацию  $R(p, q)$ , образованную наклонными слоями  $z_{\bar{\alpha}i}$  и  $z'_{\bar{\alpha}1}$ , двумя наборами горизонтальных слоев  $y_1, y'_1, y_2, \dots, y_q$  и  $\bar{y}_1, \bar{y}'_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_q$ , и двумя наборами вертикальных слоев  $x, a_2, \dots, a_p, \tilde{x}$  и  $\bar{x}, a_2, \dots, a_p, \tilde{\bar{x}}$ . Так как эта конфигурация замыкается (напомним, что мы рассматриваем три-ткань  $WR(p, q)$ ), то точка  $\bar{M}'_1 = \tilde{x}' \cap \bar{y}'_1$  будет лежать на слое  $\tilde{\bar{x}}$ . Отсюда получаем, что и другие точки  $\bar{M}'_i = \tilde{x}' \cap \bar{y}'_i$ ,  $i = 2, \dots, q$ , лежат на том же слое  $\tilde{\bar{x}}$ . Следовательно, слои  $\tilde{x}'$  и  $\tilde{\bar{x}}$  совпадают, поэтому  $\tilde{\phi}_2(\bar{A}) = \tilde{\phi}'_2(\bar{A})$ , а так как точка  $\bar{A}$  — произвольная, то  $\tilde{\phi}_2 \equiv \tilde{\phi}'_2$ , что и требовалось доказать.

Поскольку слои  $a'_1, \dots, a'_{p+1}$ , порождающие отображение  $\tilde{\phi}'_2 \equiv \tilde{\phi}_2$ , однозначно определяются заданием  $q$  произвольных горизонтальных слоев  $y_i$ , то число существенных параметров семейства автоморфизмов  $\tilde{\phi}_2$  ткани  $\tilde{W}_2(b_i)$ , индуцируемой тканью  $WR(p, q)$ , равно  $pq$  — числу параметров, определяющих выбор  $p$  горизонтальных слоев  $y_i$ .

Аналогично, семейство автоморфизмов ткани  $\tilde{W}_1(a_{\bar{\alpha}})$  также зависит от  $pq$  параметров.

Покажем, что семейство автоморфизмов  $\{\tilde{\phi}_2\}$  ткани  $\tilde{W}_2(b_i)$ , индуцируемой тканью  $WR(p, q)$ , является группой. Пусть  $\tilde{\phi}_2$  и  $\tilde{\phi}'_2$  — два отображения, порождаемых одним и тем же набором  $q$  горизонтальных слоев  $b_1, \dots, b_q$  и двумя различными наборами из  $p+1$  вертикальных слоев —  $a_1,$

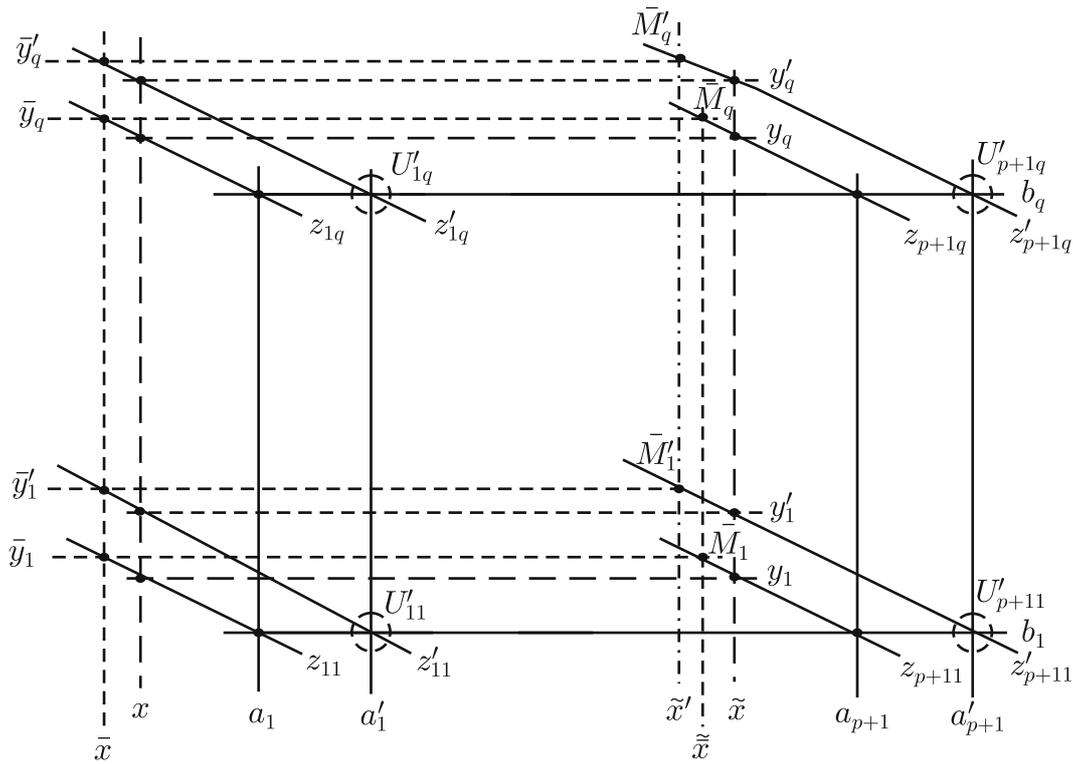


Рис. 17

$a_2, \dots, a_{p+1}$  и  $a'_1, a'_2, \dots, a'_{p+1}$  соответственно (рис. 18). Пусть  $A \in \mathcal{F}_2^0$  и  $\tilde{\phi}_2(A) = \tilde{A}$ ,  $\tilde{\phi}'_2(\tilde{A}) = \tilde{A}'$ . Покажем, что в семействе  $\{\tilde{\phi}_2\}$  найдется отображение  $\tilde{\phi}''_2$ , такое, что  $\tilde{\phi}''_2(A) = \tilde{A}'$ . Для этого достаточно указать  $p + 1$  вертикальных слоев, определяющих отображение  $\tilde{\phi}''_2$ .

Пусть, как и выше,  $y_1, \dots, y_q$  и  $y'_1, \dots, y'_q$  — горизонтальные трансверсальные слои, связанные соответственно с парами точек  $A, \tilde{A}$  и  $\tilde{A}, \tilde{A}'$ , т.е. такие, что

$$\begin{aligned} z_{1i} &= x \cdot y_i, & z_{2i} &= a_2 \cdot y_i, & \dots, & & z_{pi} &= a_p \cdot y_i, & z_{p+1,i} &= \tilde{x} \cdot y_i; \\ z'_{1i} &= \tilde{x} \cdot y'_i, & z'_{2i} &= a'_2 \cdot y'_i, & \dots, & & z'_{pi} &= a'_p \cdot y'_i, & z'_{p+1,i} &= \tilde{x}' \cdot y'_i, \end{aligned}$$

где  $x, \tilde{x}, \tilde{x}'$  — вертикальные слои, проходящие соответственно через точки  $A, \tilde{A}$  и  $\tilde{A}'$ .

Другой набор вертикальных слоев, порождающих отображение  $\tilde{\phi}_2$  и определяемых трансверсальными горизонтальными слоями  $y'_1, \dots, y'_q$ , образован, как видно из рис. 18, слоями  $a''_1, a'_2, \dots, a'_p, a'_1$ , причем параметры слоя  $a''_1$  находятся из  $q$  равенств  $x \cdot y'_i = a''_1 \cdot b_i$ . Слои  $y'_1, \dots, y'_q$  связывают также точки  $A$  и  $\tilde{A}'$ , при этом отображение  $\tilde{\phi}''_2$  порождается слоями  $a''_1, a'_2, \dots, a'_p, a'_{p+1}$ .

Покажем, что слой  $a''_1$  не зависит от горизонтальных слоев  $y'_1, \dots, y'_q$ . Рассмотрим еще один набор горизонтальных слоев  $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_q$  таких, что

$$z'_{1i} = a_{p+1} \cdot \tilde{y}_i, \quad z'_{2i} = a'_2 \cdot \tilde{y}_i, \quad \dots, \quad z'_{pi} = a'_p \cdot \tilde{y}_i. \tag{2.1}$$

Слой  $\tilde{y}_i$  пересекает наклонный слой  $z'_{p+1,i}$  (с тем же номером  $i$ ) по некоторому  $(q - 1)$ -мерному подмногообразию. Для различных  $i$  получаем  $q$  подмногообразий, допускающих трансверсальный вертикальный слой  $\tilde{x}''$ . Последний пересекает каждый из слоев  $b_i$  в некоторой  $\tilde{M}'_i$ , через которую проходит наклонный слой  $\tilde{z}_i$  (рис. 18). Вертикальный слой  $\tilde{x}''$  пересекает слои  $y_1, \dots, y_q$  соответственно в точках  $M_1, \dots, M_q$ . Для каждого  $i = \overline{1, q}$  точка  $M_i$  лежит на наклонном слое  $\tilde{z}_i$ . В самом деле, рассмотрим, например, точки  $M_1$  и  $\tilde{M}'_1$  и конфигурацию  $R(p, q)$ , образованную наклонными слоями  $z_{p+1,1}, z'_{\tilde{\alpha}1}, \dots, z'_{\tilde{\alpha}q}$ , вертикальными слоями  $a_{p+1}, a'_2, \dots, a'_p, \tilde{x}''; \tilde{x}, a'_2, \dots, a'_p, \tilde{x}'$  и горизонтальными слоями  $b_1, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_q; y_1, y'_1, \dots, y'_q$ . Поскольку эта конфигурация замкнута,

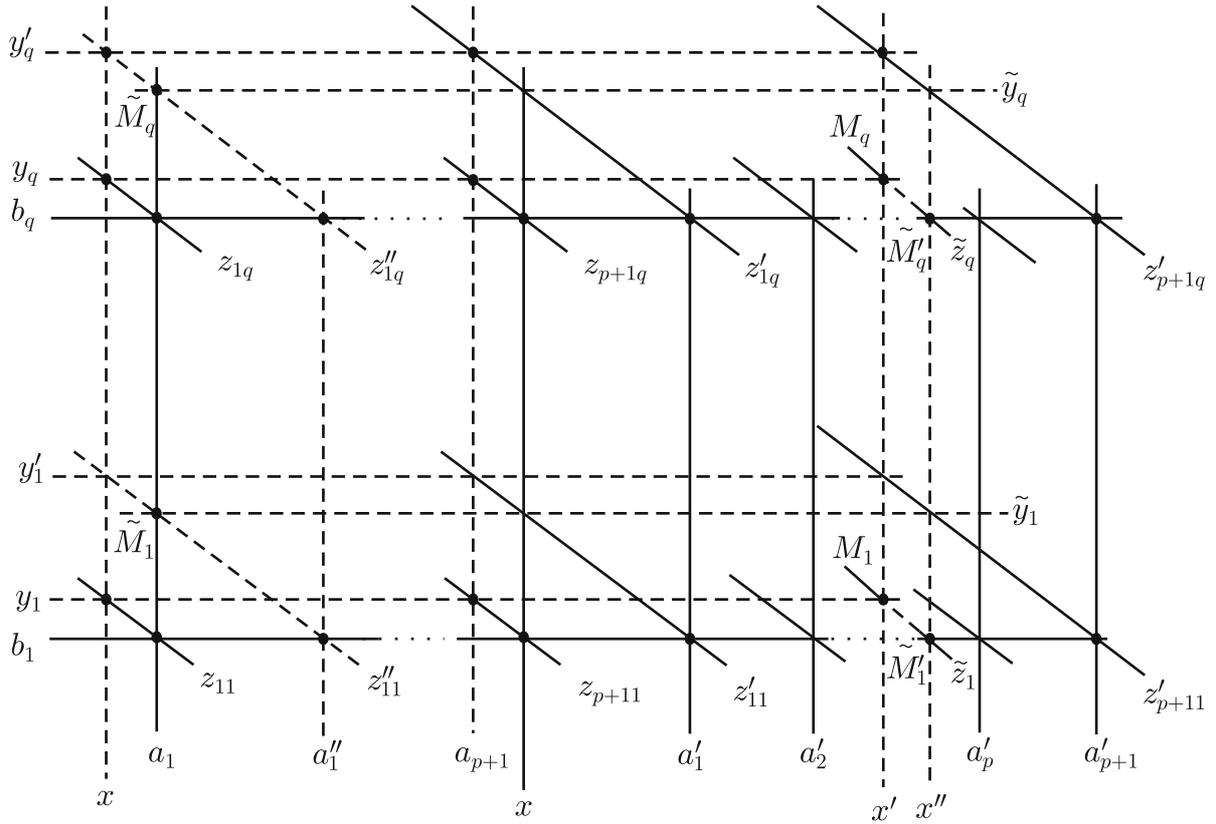


Рис. 18

точка  $M_1$  лежит на наклонном слое  $\tilde{z}_1$ . Аналогично доказывается, что и другие точки  $M_i$  лежат на соответствующих наклонных слоях  $\tilde{z}_i$ .

Далее, слой  $\tilde{y}_i$  пересекает вертикальный слой  $a_1$  в точке  $\tilde{M}_i$ , которая лежит на наклонном слое  $z''_{1i} = a''_1 \cdot b_i$  (с тем же номером  $i$ ) в силу замыкания конфигурации  $R(p, q)$ , образованной наклонными слоями  $z_{11}, \dots, z_{1q}, z''_{1i}, z_{p+1,1}, \dots, z_{p+1,q}, z'_{1i}, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_q, z'_{p+1,i}$ , вертикальными слоями  $x, \tilde{x}, a'_2, \dots, a'_{p-1}, \tilde{x}'; a_1, a_{p+1}, a'_2, \dots, a'_p$  и горизонтальными слоями  $y_1, \dots, y_q, y'_i; b_1, \dots, b_q, \tilde{y}_i$  (индекс  $i$  фиксирован). Тогда для каждого  $i$  имеем

$$z''_{1i} = a''_1 \cdot b_i = a_1 \cdot \tilde{y}_i,$$

причем параметры слоев  $\tilde{y}_i$  удовлетворяют равенствам (2.1), содержащим, помимо  $\tilde{y}_i$ , только фиксированные параметры  $z'_{\alpha i}, a_{p+1}, a'_2, \dots, a'_p$ . Поэтому параметры слоя  $a''_1$  выражаются через фиксированные параметры, а значит,  $a''_1$  не зависит от горизонтальных слоев  $y'_1, \dots, y'_q$ , связывающих точки  $A, \tilde{\phi}_2(A)$  и  $\tilde{\phi}'_2(\tilde{\phi}_2(A))$ . Это означает, что точку  $A$  можно считать произвольной, поэтому

$$\tilde{\phi}''_2(A) = \tilde{\phi}'_2(\tilde{\phi}_2(A)),$$

т.е. отображение  $\tilde{\phi}''_2$  есть композиция отображений  $\tilde{\phi}'_2$  и  $\tilde{\phi}_2$ :

$$\tilde{\phi}''_2 = \tilde{\phi}'_2 \circ \tilde{\phi}_2.$$

В семействе  $\{\tilde{\phi}_2\}$  имеется тождественное отображение, определяемое (как видно из рис. 11) набором  $p + 1$  вертикальных слоев, в котором первый и последний слой совпадают:  $a_1, a_2, \dots, a_p, a_1$ .

Таким образом, автоморфизмы  $\tilde{\phi}_2$  ткани  $\tilde{W}_2(b_i)$  образуют группу (обозначим ее  $\tilde{G}_2$ ), которая действует на  $\mathcal{F}_2^0$  транзитивно. Доказана следующая теорема.

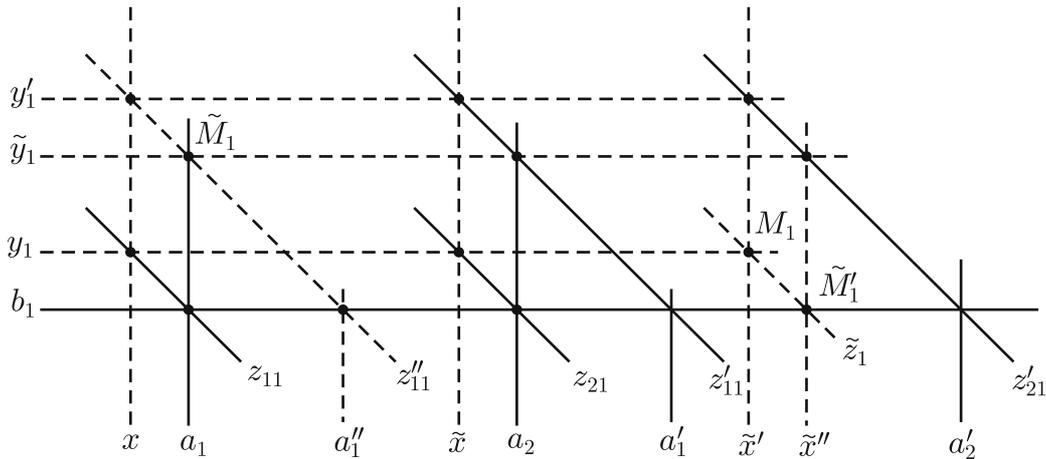


Рис. 19

**Теорема 2.2.** Автоморфизмы  $\tilde{\phi}_2$  ткани  $\tilde{W}_2(b_i)$ , индуцируемой тканью  $WR(p, q)$  на ее произвольном горизонтальном слое  $\mathcal{F}_2^0$ , образуют  $pq$ -параметрическую группу, транзитивно действующую на этом слое.

Заметим, что кроме группы  $\tilde{G}_2$  возможно существование и других групп автоморфизмов ткани  $\tilde{W}_2(b_i)$ . Во-первых, из проведенных выше рассуждений не следует непосредственно, что  $\tilde{G}_2$  является наиболее полной из возможных групп автоморфизмов рассматриваемой ткани, во-вторых, использование конфигураций  $R(p, q)$  и проектирование вертикальными слоями при построении отображений  $\tilde{\phi}_2$  позволяет предположить, что группа  $\tilde{G}_2$  есть некоторая специальная группа автоморфизмов, отражающая особенности этого построения (например, число параметров равно  $pq$ ). Это наблюдение будет подтверждено ниже (в разделе 3) для ткани  $WR(1, 2)$ .

Теорема, аналогичная последней, справедлива и для тканей  $\tilde{W}_1(a_{\bar{\alpha}})$ .

Для классических тканей  $W(r, r, r)$  картина, естественно, будет более прозрачной. В этом случае отображение  $\tilde{\phi}_2$  порождается одним фиксированным горизонтальным слоем  $b_1$ , поэтому группа автоморфизмов  $\tilde{\phi}_2$  ткани  $\tilde{W}_2(b_1)$ , индуцируемой тканью  $R$ , зависит от  $r$  параметров одного горизонтального слоя  $y_1$  (рис. 13(a)). Композиция отображений  $\tilde{\phi}_2$  и  $\tilde{\phi}'_2$ , порождаемых соответственно парами вертикальных слоев  $a_1, a_2$  и  $a'_1, a'_2$ , определяется слоями  $a''_1, a'_2$ , где  $a''_1 = (a_1 \cdot (a_2/z'_{11})) \setminus b_1$  (см. рис. 19).

Группа автоморфизмов  $\tilde{\phi}_1$  ткани  $\tilde{W}_1(a_1)$ , индуцируемой тканью  $R$ , порождается одним вертикальным слоем  $a_1$  и также зависит от  $r$  параметров одного вертикального слоя  $x_1$  (см. рис. 13(b)).

**2.6.** Поскольку размерность слоя  $\mathcal{F}_2^0$  равна  $q$ , а число параметров, от которых зависит группа  $\tilde{G}_2$  равно  $pq$ , то эта группа будет просто транзитивной тогда и только тогда, когда  $p = 1$ .

В частности, при  $q = 2$  криволинейная ткань  $\tilde{W}_2 \equiv \tilde{W}_2(b_1, b_2, b_3)$ , индуцируемая тканью  $WR(1, 2)$ , является двумерной, а ее группа автоморфизмов  $\tilde{G}_2$  — двухпараметрической. Покажем, что двумерная ткань рассматриваемого вида является параллелизуемой.

Действительно, обозначим через  $\omega^1$  и  $\omega^2$  инвариантные формы плоской три-ткани  $\tilde{W}_2$  и запишем ее структурные уравнения в следующем виде (см. [23]):

$$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega, \quad d\omega^2 = \omega^2 \wedge \omega, \quad d\omega = b\omega^1 \wedge \omega^2,$$

где  $b$  — кривизна, а  $\omega$  — форма связности ткани  $\tilde{W}_2$ . Продолжая эти уравнения, придем к уравнениям

$$\begin{aligned} db - 2b\omega &= b_1\omega^1 + b_2\omega^2, \\ db_1 - 3b_1\omega - b^2\omega^2 &= b_{11}\omega^1 + b_{12}\omega^2, \\ db_2 - 3b_2\omega + b^2\omega^1 &= b_{12}\omega^1 + b_{22}\omega^2. \end{aligned}$$

Всякий автоморфизм  $\tilde{\phi}_2$  переводит линии ткани  $\tilde{W}_2$  в линии ткани, касательные к линиям ткани — также в касательные к линиям ткани, адаптированный репер ткани — в адаптированный репер (репер называется адаптированным, если в нем структурные уравнения ткани имеют указанный выше вид). Возьмем в точке  $A \in \mathcal{F}_2^0$  какой-нибудь адаптированный репер и разнесем его автоморфизма-ми  $\tilde{\phi}_2$  по всему слою  $\mathcal{F}_2^0$ . В полученном репере относительные инварианты  $b, b_1, b_2, b_{11}, b_{12}, b_{22}$  станут постоянными и из предыдущей системы имеем:

$$\begin{aligned} b_1\omega^1 + b_2\omega^2 + 2b\omega &= 0, \\ b_{11}\omega^1 + (b_{12} + b^2)\omega^2 + 3b_1\omega &= 0, \\ (b_{12} - b^2)\omega^1 + b_{22}\omega^2 + 3b_2\omega &= 0. \end{aligned}$$

Исключая форму  $\omega$ , в силу независимости форм  $\omega^1$  и  $\omega^2$  находим

$$\begin{aligned} 3b_1^2 - 2bb_{11} &= 0, & 3b_1b_2 - 2b(b_{12} + b^2) &= 0, \\ 3b_2^2 - 2bb_{22} &= 0, & 3b_1b_2 - 2b(b_{12} - b^2) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем  $b = 0$ , что и доказывает параллелизуемость ткани  $\tilde{W}_2$ .

### 3. Три-ткани $WR(1, q)$

**3.1.** Для ткани  $W(p, q, p+q-1)$  при  $p > 1$  условия замыкания обобщенных конфигураций Рейдемейстера  $R(p, q)$  связаны со свойствами тканей  $\tilde{W}_1(a_{\bar{\alpha}})$  и  $\tilde{W}_2(b_{\bar{i}})$ , возникающих на вертикальных и горизонтальных слоях исходной три-ткани. При  $p = 1$ , т.е. на три-ткани  $W(1, q, q)$ , не существуют ткани  $\tilde{W}_1(a_{\bar{\alpha}})$ , поскольку вертикальные слои одномерные. Поэтому необходимо случай  $p = 1$  рассмотреть отдельно и уточнить алгебраические и геометрические условия замыкания обобщенных конфигураций Рейдемейстера.

На ткани  $W(1, q, q)$  не имеют смысла утверждения, аналогичные теоремам 2.1 и 2.2, в которых фигурируют ткани  $\tilde{W}_1(a_{\bar{\alpha}})$ , и отображение  $\tilde{\phi}_1$  на произвольном вертикальном слое  $\mathcal{F}_1^0$  ткани  $W(1, q, q)$ , порождаемое  $q + 1$  горизонтальными слоями  $b_1, \dots, b_{q+1}$  и одним вертикальным слоем  $a_1$ , невозможно интерпретировать как автоморфизм некоторой ткани  $\tilde{W}_1(a_{\bar{\alpha}})$ . Тем не менее, можно доказать (проводя такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 2.2), что отображения  $\tilde{\phi}_1$  образуют группу в том и только том случае, если ткань  $W(1, q, q)$  является тканью  $WR(1, q)$ . Обозначим эту группу также  $\tilde{G}_1$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.1.** *Отображения  $\tilde{\phi}_1$  на произвольном вертикальном слое ткани  $WR(1, q)$  (и только такой ткани) образуют  $q$ -параметрическую группу, транзитивно действующую на этом слое.*

**3.2.** Покажем, что отображение  $\tilde{\phi}_1$  на произвольном вертикальном слое  $\mathcal{F}_1^0$  ткани  $WR(1, q)$  определяется сердцевинной этой ткани или ее координатным группоидом.

Рассмотрим сначала классическую криволинейную три-ткань Рейдемейстера  $W_0 \equiv WR(1, 1)$ . Зададим, как и выше, отображение  $\tilde{\phi}_1$  на слое  $\mathcal{F}_1^0 \equiv a_1^0$  двумя горизонтальными слоями  $b_1, b_2$  и одним вертикальным слоем  $a_1$  (рис. 20). Найдем другую пару горизонтальных слоев  $b'_1, b'_2$ , порождающих то же самое отображение  $\tilde{\phi}_1$ .

Пусть  $B_1 = a_1^0 \cap b_1, B_2 = a_1^0 \cap b_2, z_{11} = a_1 \cdot b_1, z_{12} = a_1 \cdot b_2$ . Произвольная точка  $B$  на слое  $a_1^0$  и ее образ  $\tilde{B}$  при отображении  $\tilde{\phi}_1$  связаны некоторым вертикальным слоем  $x_1$ , таким, что  $x_1 \cdot y = z_{11}, x_1 \cdot \tilde{y} = z_{12}$ , где  $y$  и  $\tilde{y}$  — горизонтальные слои, проходящие соответственно через точки  $B$  и  $\tilde{B}$  (см. рис. 20). Наклонный слой  $z_{12}^0 = a_1^0 \cdot b_2$  пересекает горизонтальный слой  $b_1$  в некоторой точке  $M'_1$ , через которую проходит вертикальный слой  $a'_1$ . Последний пересекает горизонтальный слой  $b_2$  в точке  $M'_2$ . Наклонные слои  $z'_{11} \equiv z_{12}^0$  и  $z'_{12} = a'_1 \cdot b_2$  пересекают вертикальный слой  $a_1$  в некоторых точках, через которые проходят горизонтальные слои, это и есть искомые слои  $b'_1, b'_2$ , порождающие отображение  $\tilde{\phi}_1$ . В самом деле, как видно из рис. 20, при  $\tilde{\phi}_1$ , определяемом слоями  $b'_1$  и  $b'_2$ , точка  $B_1$  отображается в точку  $B_2$  (они связаны вертикальным слоем  $a'_1$ ). Далее, в силу замыкания конфигурации  $R$ , образованной наклонными слоями  $z_{11}, z_{12}, z'_{11}, z'_{12}$ , горизонтальными

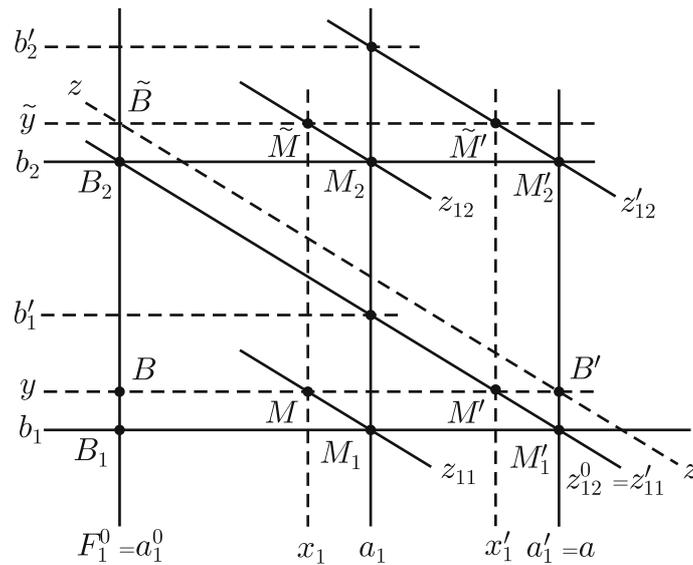


Рис. 20

слоями  $b_1, b_2, y, \tilde{y}$  и вертикальными слоями  $x_1, a_1, a'_1$ , точки  $M' = z'_{11} \cap y$  и  $\tilde{M}' = z'_{12} \cap \tilde{y}$  лежат на одном вертикальном слое  $x'_1$ , поэтому  $\tilde{\phi}_1(B) = \tilde{B}$ . Таким образом, отображение  $\tilde{\phi}_1$  задается и слоями  $b'_1$  и  $b'_2$ , что и требовалось доказать.

С другой стороны, отображение  $\tilde{\phi}_1$  можно определить только с помощью вертикального слоя  $a'_1 \equiv a$ , не используя слои  $b'_1$  и  $b'_2$ . Как видно из рис. 20, точка  $B_2$  (образ точки  $B_1$ ) может быть найдена так: построим горизонтальный слой, проходящий через точку  $B_1$  (это слой  $b_1$ ), он пересекает вертикальный слой  $a$  в некоторой точке (на рис. 20 —  $M'_1$ ), проведем через нее наклонный слой (на рис. 20 — слой  $z'_{11}$ ), который пересекает вертикальный слой  $a^0_1$  в точке  $B_2$ . Покажем, что и точку  $\tilde{B}$  (образ произвольной точки  $B$ ) можно построить аналогично. В самом деле, горизонтальный слой  $y$ , проходящий через  $B$ , пересекает вертикальный слой  $a$  в некоторой точке  $B'$ , через которую проходит наклонный слой  $z$ . Последний пересекает вертикальный слой  $a^0_1$  в точке  $\tilde{B}$ , поскольку конфигурация, образованная наклонными слоями  $z'_{11}, z'_{12}$ , горизонтальными слоями  $y, b_2, \tilde{y}$  и вертикальными слоями  $a^0_1, x'_1, a'_1$  (см. рис. 20), является конфигурацией Томсена ( $T$ ) (см. рис. 1(b)), а она замыкается (т.е. точки  $B'$  и  $\tilde{B}$  лежат на одном наклонном слое  $z$ ), так как на криволинейной ткани замыкание конфигураций какого-либо одного типа (в нашем случае —  $R$ ) влечет замыкание конфигураций любого другого типа, в том числе, и конфигураций  $T$  (см. [23]).

Таким образом, каждое отображение  $\tilde{\phi}_1$  на слое  $a^0_1$  порождается некоторым вертикальным слоем  $a$ . В частности, при отображении, определяемом слоем  $a^0_1$ , образом произвольной точки  $B$  является эта же точка, поэтому  $a^0_1$  порождает тождественное отображение в группе  $\tilde{G}_1$ . Параметры  $a, y$  и  $z$  соответственно вертикального, горизонтального и наклонного слоев, связывающих точки  $B$  и  $\tilde{B}$  при отображении  $\tilde{\phi}_1$ , проходят через точку  $M'$ , а потому удовлетворяют уравнению ткани  $R$ :  $z = a \cdot y$ . Тем самым доказано, что действие группы  $\tilde{G}_1$  на произвольном вертикальном слое криволинейной ткани  $R$  определяется уравнением этой ткани.

Теперь рассмотрим три-ткань  $WR(1, q)$  при  $q > 1$ . Покажем, что действие группы  $\tilde{G}_1$  на ее произвольном вертикальном (одномерном) слое определяется (как и в случае криволинейной ткани  $R$ ) уравнением этой ткани.

Зададим отображение  $\tilde{\phi}_1$  на слое  $a^0_1$  горизонтальными слоями  $b_1, \dots, b_{q+1}$  и одним вертикальным слоем  $a_1$ . На рис. 21  $B_{\bar{i}} = a^0_1 \cap b_{\bar{i}}, \bar{i} = \overline{1, q+1}, z_{1\bar{i}} = a_1 \cdot b_{\bar{i}}, U_{\bar{i}} = b_{\bar{i}} \cap z_{1\bar{i}}, \dim U_{\bar{i}} = q - 1$ .

Пусть  $B$  — произвольная точка на слое  $a^0_1, y$  — горизонтальный слой, проходящий через точку  $B, U_B = z_{11} \cap y, \dim U_B = q - 1$ . Вертикальный слой  $x_1$ , трансверсальный подмножествам  $U_B, U_2, \dots, U_q$ , пересекает слой  $z_{1, q+1}$  в некоторой точке  $\tilde{M}$ , через которую проходит горизонтальный слой  $\tilde{y}$ , пересекающий вертикальный слой  $a^0_1$  в точке  $\tilde{B}, \tilde{B} = \tilde{\phi}_1(B)$ .

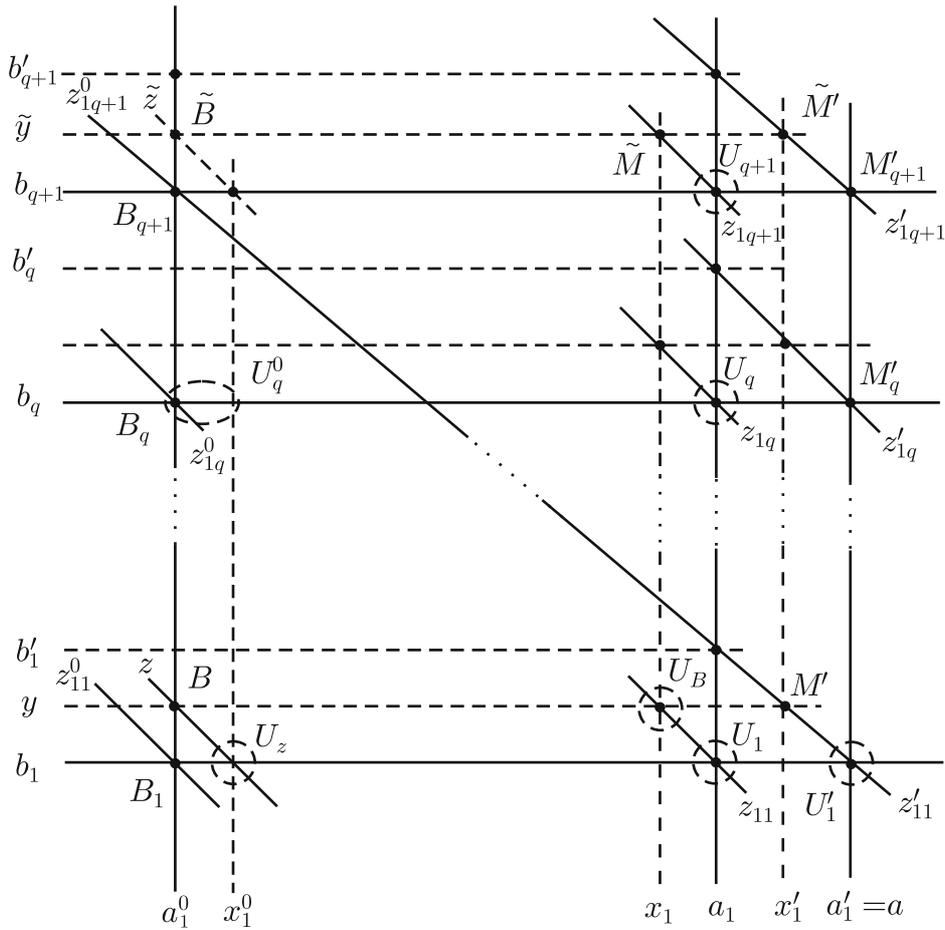


Рис. 21

Найдем другой набор горизонтальных слоев  $b'_1, \dots, b'_{q+1}$ , порождающий то же самое отображение  $\tilde{\phi}_1$ . Пусть  $z^0_{1,q+1} = a^0_1 \cdot b_{q+1}$ ,  $U'_1 = b_1 \cap z^0_{1,q+1}$  и  $a'_1$  — вертикальный слой, трансверсальный подмногообразиям  $U'_1, U_2, \dots, U_q$  (см. рис. 21). Обозначим  $M'_i = a'_1 \cap b'_i$  и пусть  $z'_{1\bar{i}}$  — наклонный слой, проходящий через точку  $M'_i$ ,  $z'_{11} = z^0_{1,q+1}$ . Для каждого индекса  $\bar{i}$  слой  $z'_{1\bar{i}}$  пересекает вертикальный слой  $a_1$  в точке, через которую проходит горизонтальный слой  $b'_i$ . Слои  $b'_1, \dots, b'_{q+1}$  порождают то же самое отображение  $\tilde{\phi}_1$ , поскольку точка  $B_1$  отображается в точку  $B_{q+1}$  (они связаны вертикальным слоем  $a'_1$ ), и, в силу замыкания конфигурации  $R(1, q)$ , образованной наклонными слоями  $z_{11}, \dots, z_{1,q+1}, z'_{11}, \dots, z'_{1,q+1}$ , горизонтальными слоями  $b_1, \dots, b_{q+1}, y, b_2, \dots, b_q, \tilde{y}$  и вертикальными слоями  $x_1, a_1, a'_1$ , существует единственный вертикальный слой  $x'_1$ , трансверсальный подмногообразиям  $z'_{11} \cap y, z'_{12} \cap b_2, \dots, z'_{1q} \cap b_q, z'_{1,q+1} \cap \tilde{y}$ . Этот слой и связывает точки  $B$  и  $\tilde{B} = \tilde{\phi}_1(B)$ , следовательно, отображение  $\tilde{\phi}_1$  задается и слоями  $b'_1, \dots, b'_{q+1}$ , что и требовалось доказать.

Теперь покажем, что действие группы  $\tilde{G}_1$  определяется координатным группоидом три-ткани  $WR(1, q)$ . Пусть  $z$  и  $\tilde{z}$  — наклонные слои, проходящие через соответствующие в отображении  $\tilde{\phi}_1$  точки  $B$  и  $\tilde{B} = \tilde{\phi}_1(B)$ . Дополним геометрическую конструкцию, определяющую отображение  $\tilde{\phi}_1$ , до конфигурации  $R(1, q)$ , включив в нее наклонные слои  $z, z^0_{12}, \dots, z^0_{1q}$  и  $\tilde{z}$  (здесь  $z^0_{12} = a^0_1 \cdot b_2, \dots, z^0_{1q} = a^0_1 \cdot b_q$ ). Пусть  $U_z = z \cap b_1, U^0_2 = z^0_{12} \cap b_2, \dots, U^0_q = z^0_{1q} \cap b_q$  (рис. 21). Вертикальный слой  $x^0_1$ , трансверсальный подмногообразиям  $U_z, U^0_2, \dots, U^0_q$ , пересекает горизонтальный слой  $b_{q+1}$  в некоторой точке, которая, в силу замыкания конфигурации  $R(1, q)$ , образованной наклонными слоями  $z, z^0_{12}, \dots, z^0_{1q}, \tilde{z}; z'_{11}, z'_{12}, \dots, z'_{1q}, z'_{1,q+1}$ , горизонтальными слоями  $b_1, \dots, b_{q+1}; y, \tilde{y}$  и вертикальными слоями  $a^0_1, x^0_1, a'_1$ , лежит на наклонном слое  $\tilde{z}$ . Согласно п. 1.1 параметры наклонных

слоев, входящих в эту конфигурацию, удовлетворяют уравнению сердцевинки три-ткани

$$\tilde{C}(z, z_{12}^0, \dots, z_{1q}^0, \tilde{z}; z'_{11}, z'_{12}, \dots, z'_{1q}, z'_{1q+1}) = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно переменной  $\tilde{z}$ , получим уравнение отображения  $\tilde{\phi}_1$  в явном виде:

$$\tilde{z} = \tilde{\phi}_1(z) = \mathcal{C}(z; z_{12}^0, \dots, z_{1q}^0; z'_{11}, z'_{12}, \dots, z'_{1q}, z'_{1q+1}).$$

С другой стороны, в силу теоремы 1.2, последнее уравнение определяет координатный моноид рассматриваемой ткани, единичным элементом которого является набор  $q$  параметров  $(z_{12}^0, \dots, z_{1q}^0, z'_{11})$  или  $(z_{12}^0, \dots, z_{1q}^0, z'_{1q+1})$ , поскольку  $z'_{11} = z'_{1q+1}$ . Далее, в уравнении сердцевинки  $q$  параметров  $(z'_{12}, \dots, z'_{1q}, z'_{1q+1})$ , задающих отображение  $\phi_1$ , однозначно определяют вертикальный слой  $a \equiv a'_1$  (его параметры находятся из равенств  $a \cdot b_2 = z'_{12}, \dots, a \cdot b_{q+1} = z'_{1q+1}$ , которые также можно записать в виде  $(z'_{12}, \dots, z'_{1q}, z'_{1q+1}) = R_b(a)$ , см. п. 1.1). Поэтому уравнение отображения  $\tilde{\phi}_1$  можно кратко записать в виде  $\tilde{z} = \mathcal{C}(z, e, R_b(a))$ , где  $e = (z_{12}^0, \dots, z_{1q}^0, z'_{1q+1})$ . Последнее уравнение и определяет, с одной стороны, действие группы  $\tilde{G}_1$ , а с другой, координатный моноид три-ткани  $WR(1, q)$ . Согласно теореме 1.1, координатный моноид ткани главноизотопен ее координатному группоиду (1.1)  $z = x \cdot y$ . Таким образом, действие группы  $\tilde{G}_1$  на произвольном вертикальном слое  $a'_1$  ткани  $WR(1, q)$  определяется координатным группоидом этой ткани. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.2.** *На произвольном вертикальном одномерном слое ткани  $WR(1, q)$  действие  $q$ -параметрической группы  $\tilde{G}_1$ , порождаемой вертикальным слоем  $a$ , определяется (с точностью до изотопии) координатным группоидом этой ткани  $z = a \cdot y$ .*

**3.3.** Известно [25], что максимальная одномерная группа Ли преобразований является трехпараметрической. Следовательно, ткани  $WR(1, q)$ , порождаемые действием группы  $G_1$ , существуют только при  $q = 1, 2, 3$ . Следуя [25], запишем преобразования рассматриваемой группы в каждом из этих случаев:

$$\begin{aligned} (1) \quad q = 1, \quad y' &= y + a; \\ (2) \quad q = 2, \quad y' &= ay + b; \\ (3) \quad q = 3, \quad y' &= \frac{ay + b}{y + c}, \end{aligned}$$

где  $a, b, c$  — параметры. Меняя обозначения, запишем уравнения соответствующих тканей в следующем виде (1.1):

$$\begin{aligned} (1) \quad WR(1, 1) : \quad z &= x + y; \\ (2) \quad WR(1, 2) : \quad z &= x^1 y^1 + x^2; \\ (3) \quad WR(1, 3) : \quad z &= \frac{x^1 y^1 + x^2}{y^1 + x^3}. \end{aligned}$$

Для каждой из этих тканей найдем уравнение отображения  $\tilde{\phi}_1$  на произвольном вертикальном одномерном слое, исходя из уравнения сердцевинки ткани.

(1) Три-ткань  $WR(1, 1)$ , определяемая уравнением  $z = x + y$ , является параллелизуемой [23]. Ее сердцевина, как показано в [62], имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & z_{11} & z_{21} \\ 1 & z_{12} & z_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.1)$$

или  $z_{12} - z_{11} = z_{22} - z_{21}$ . В соответствии с п. 3.2 положим  $z_{11} = z$ ,  $z_{12} = \tilde{z}$ ,  $a = z_{22} - z_{21}$ ; тогда уравнение отображения  $\tilde{\phi}_1$  запишется в виде

$$\tilde{z} = \tilde{\phi}_1(z) = z + a.$$

Последнее уравнение определяет, с одной стороны, действие абелевой группы на прямой, а с другой, криволинейную три-ткань  $W_0 \equiv WR(1, 1)$ .

(2) Сердцевина три-ткани  $WR(1, 2)$  задается уравнением

$$\begin{vmatrix} 1 & z_{11} & z_{21} \\ 1 & z_{12} & z_{22} \\ 1 & z_{13} & z_{23} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.2)$$

которое определяет отображение  $\tilde{\phi}_1$  (действие аффинной группы на прямой), если положить

$$z_{11} = z, \quad z_{13} = \tilde{z}, \quad a = \frac{z_{22} - z_{23}}{z_{22} - z_{21}}, \quad b = \frac{z_{12}(z_{23} - z_{21})}{z_{22} - z_{21}}.$$

Тогда  $\tilde{z} = \tilde{\phi}_1(z) = az + b$ .

Далее, на любом горизонтальном двумерном слое  $\mathcal{F}_2^0$  ткани  $WR(1, 2)$  возникает три-ткань  $\tilde{W}_2 = \tilde{W}_2(b_1, b_2, b_3)$ , порождаемая тремя фиксированными горизонтальными слоями  $b_1, b_2, b_3$  (см. п. 2.1). Эта ткань образована на  $\mathcal{F}_2^0$  тремя семействами линий, получаемых следующим образом. Пусть  $A(x^1, x^2)$  — произвольная точка на  $\mathcal{F}_2^0$  и  $\mathcal{F}_1(A)$  — вертикальный слой, проходящий через  $A$ . Он пересекает каждый из слоев  $b_1, b_2, b_3$  в некоторой точке, через которую проходит наклонный двумерный слой (обозначим эти слои соответственно  $z_1, z_2, z_3$ ). Слой  $z_i, i = 1, 2, 3$ , пересекает соответствующий горизонтальный слой  $b_i$  (с тем же номером  $i$ ) по некоторой линии  $l_i, l_1 = z_1 \cap b_1, l_2 = z_2 \cap b_2, l_3 = z_3 \cap b_3$ . Проектируя с помощью вертикальных слоев эти линии на  $\mathcal{F}_2^0$ , получим линии  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3$  ткани  $\tilde{W}_2$ , проходящие через точку  $A$ . Меняя  $A$ , получим три семейства линий  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3$ , образующих три-ткань  $\tilde{W}_2$ .

Найдем уравнение ткани  $\tilde{W}_2$ . Согласно п. 2.1 параметры  $z_1, z_2, z_3$  являются также параметрами линий  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3$  соответственно и находятся из равенств

$$z_1 = x^1 b_1 + x^2, \quad z_2 = x^1 b_2 + x^2, \quad z_3 = x^1 b_3 + x^2.$$

Исключая из последних координаты  $(x^1, x^2)$  точки  $A$ , получим уравнение ткани  $\tilde{W}_2$  в виде

$$z_3 = \frac{b_3 - b_1}{b_1 - b_2}(z_1 - z_2) + z_1.$$

Изотопическим преобразованием

$$\bar{z}_1 = \frac{b_3 - b_1}{b_1 - b_2} + 1, \quad \bar{z}_2 = -\frac{b_3 - b_1}{b_1 - b_2}, \quad \bar{z}_3 = z_3$$

найденное уравнение ткани  $\tilde{W}_2$  приводится к виду  $\bar{z}_3 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ , который показывает, что эта ткань является параллелизуемой. Отметим, что параллелизуемость ткани  $\tilde{W}_2$  доказана в п. 2.6 другим способом.

Теперь найдем уравнения автоморфизма  $\tilde{\phi}_2$  ткани  $\tilde{W}_2$ . В соответствии с п. 2.2 зададим отображение  $\tilde{\phi}_2$  двумя горизонтальными слоями  $b_1, b_2$  и двумя вертикальными слоями  $a_1, a_2$  (см. рис. 22).

Пусть  $A(x^1, x^2)$  — произвольная точка на  $\mathcal{F}_2^0$ ,  $\tilde{A}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$  — ее образ при отображении  $\tilde{\phi}_2$ ,  $\tilde{A} = \tilde{\phi}_2(A)$ , и  $y_1, y_2$  — параметры горизонтальных слоев, связывающих точки  $A$  и  $\tilde{A}$  (см. рис. 22). Согласно п. 2.2 параметры выделенных слоев связаны соотношениями

$$a_1 \cdot b_1 = x \cdot y_1, \quad a_1 \cdot b_2 = x \cdot y_2, \quad a_2 \cdot b_1 = \tilde{x} \cdot y_1, \quad a_2 \cdot b_2 = \tilde{x} \cdot y_2,$$

где  $\cdot$  — операция в координатном группоиде ткани  $WR(1, 2)$ , поэтому последние уравнения примут вид

$$\begin{aligned} a_1^1 b_1 + a_1^2 &= x^1 y_1 + x^2, & a_1^1 b_2 + a_1^2 &= x^1 y_1 + x^2, \\ a_2^1 b_1 + a_2^2 &= \tilde{x}^1 y_1 + \tilde{x}^2, & a_2^1 b_2 + a_2^2 &= \tilde{x}^1 y_2 + \tilde{x}^2. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений параметры  $y_1, y_2, b_1$  и  $b_2$ , получим уравнения отображения  $\tilde{\phi}_2$  в виде

$$\tilde{x}^1 = \tilde{a}^1 x^1, \quad \tilde{x}^2 = \tilde{a}^1 x^2 + \tilde{a}^2,$$

где

$$\tilde{a}^1 = \frac{a_2^1}{a_1^1}, \quad \tilde{a}^2 = \frac{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2}{a_1^1}.$$

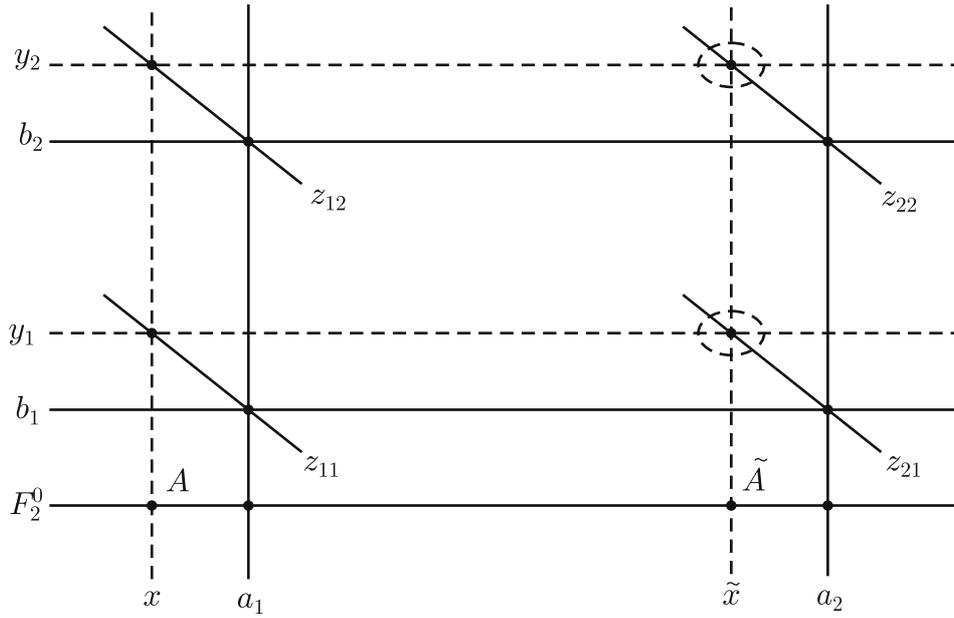


Рис. 22

Напомним, что автоморфизмы  $\tilde{\phi}_2$  ткани  $\tilde{W}_2(b_i)$ , индуцированной тканью  $WR(1, q)$ , образуют  $q$ -параметрическую группу  $G_2$ . Как уже отмечалось в п. 2.5, кроме группы  $\tilde{G}_2$  возможно существование и других групп автоморфизмов ткани  $\tilde{W}_2(b_i)$ . Например, для рассматриваемой ткани  $\tilde{W}_2$ , индуцируемой тканью  $WR(1, 2)$ , преобразование

$$z'_1 = a'\bar{z}_1 + b', \quad z'_2 = a'\bar{z}_2 + c', \quad z'_3 = a'\bar{z}_3 + b' + c'$$

сохраняет вид уравнения ткани ( $z'_3 = z'_1 + z'_2$ ), а, значит, является ее автоморфизмом. Группа таких автоморфизмов является, в отличие от двухпараметрической группы  $G_2$ , трехпараметрической.

(3) Рассмотрим три-ткань  $WR(1, 3)$ , порождаемую действием проективной группы на прямой. Найдем ее сердцевину, для чего, согласно п. 1.4 запишем систему

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{x_1^1 y_1^1 + x_1^2}{y_1^1 + x_1^3}, & z_{21} &= \frac{x_2^1 y_1^1 + x_2^2}{y_1^1 + x_2^3}, & z_{12} &= \frac{x_1^1 y_2^1 + x_1^2}{y_2^1 + x_1^3}, & z_{22} &= \frac{x_2^1 y_2^1 + x_2^2}{y_2^1 + x_2^3}, \\ z_{13} &= \frac{x_1^1 y_3^1 + x_1^2}{y_3^1 + x_1^3}, & z_{23} &= \frac{x_2^1 y_3^1 + x_2^2}{y_3^1 + x_2^3}, & z_{14} &= \frac{x_1^1 y_4^1 + x_1^2}{y_4^1 + x_1^3}, & z_{24} &= \frac{x_2^1 y_4^1 + x_2^2}{y_4^1 + x_2^3}. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений переменные  $x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_2^1, x_2^2, x_2^3$ , получим равенства

$$\begin{vmatrix} 1 & z_{11} & y_1^1 & z_{11}y_1^1 \\ 1 & z_{12} & y_2^1 & z_{12}y_2^1 \\ 1 & z_{13} & y_3^1 & z_{13}y_3^1 \\ 1 & z_{14} & y_4^1 & z_{14}y_4^1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & z_{21} & y_1^1 & z_{21}y_1^1 \\ 1 & z_{22} & y_2^1 & z_{22}y_2^1 \\ 1 & z_{23} & y_3^1 & z_{23}y_3^1 \\ 1 & z_{24} & y_4^1 & z_{24}y_4^1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3)$$

Исключая из последней системы переменные  $y_i^1, \bar{i} = \overline{1, 4}$ , придем к следующему уравнению сердцевины ткани  $WR(1, 3)$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & z_{11} & z_{21} & z_{11}z_{21} \\ 1 & z_{12} & z_{22} & z_{12}z_{22} \\ 1 & z_{13} & z_{23} & z_{13}z_{23} \\ 1 & z_{14} & z_{24} & z_{14}z_{24} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Это уравнение определяет на произвольном вертикальном одномерном слое ткани  $WR(1, 3)$  отображение  $\tilde{\phi}_1$  (проективное преобразование), если положить  $z_{11} = z$ ,  $z_{13} = \tilde{z}$  и

$$\begin{aligned} a &= \frac{z_{13}(z_{21} - z_{23})(z_{24} - z_{22}) - z_{12}(z_{21} - z_{22})(z_{24} - z_{23})}{(z_{21} - z_{23})(z_{24} - z_{22}) - (z_{21} - z_{22})(z_{24} - z_{23})}, \\ b &= -z_{12}z_{13}, \\ c &= \frac{z_{13}(z_{21} - z_{22})(z_{24} - z_{23}) - z_{12}(z_{21} - z_{23})(z_{24} - z_{22})}{(z_{21} - z_{23})(z_{24} - z_{22}) - (z_{21} - z_{22})(z_{24} - z_{23})}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\tilde{z} = \tilde{\phi}_1(z) = \frac{az + b}{z + c}.$$

**3.4.** В теории физических структур (см. [40]) уравнение (3.1) трактуется как феноменологически инвариантная аддитивная форма второго закона механики Ньютона. Если уравнение  $z = x + y$  записать в мультипликативной форме, то получается другая феноменологически инвариантная форма той же физической структуры:

$$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично, уравнение (3.2) определяет феноменологически инвариантную форму закона Ома для электрической цепи, а уравнение (3.4) — феноменологически инвариантную форму бинарной физической структуры ранга (2, 4). Физические структуры рангов (2, 2), (2, 3) и (2, 4) и их феноменологически инвариантные формы были найдены Г. Г. Михайличенко в [45, 46].

#### 4. 4-ТКАНЬ $\tilde{W}_2$ , ИНДУЦИРОВАННАЯ ТРИ-ТКАНЬЮ $WR(1, 3)$

**4.1.** Покажем, что 4-ткань  $\tilde{W}_2 = \tilde{W}_2(b_1, b_2, b_3, b_4)$ , индуцированная три-тканью  $WR(1, 3)$  на произвольном горизонтальном трехмерном слое, является шестиугольной пространственной 4-тканью, описанной В. Бляшке в [23].

Найдем уравнение 4-ткани  $\tilde{W}_2$ . Согласно определению (см. п. 2.1), оно получается при фиксации параметров  $y_i^1$ ,  $\bar{i} = \overline{1, 4}$ , в уравнениях (3.3). Рассмотрим, например, первое из этих уравнений. При  $y_i^1 = b_i$  и  $z_i = z_{1\bar{i}}$  оно принимает следующий вид:

$$(b_1 - b_2)(b_4 - b_3)(z_1 z_2 + z_3 z_4) + (b_1 - b_3)(b_2 - b_4)(z_1 z_3 + z_4 z_2) + (b_1 - b_4)(b_3 - b_2)(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0,$$

где  $z_1, z_2, z_3, z_4$  — параметры двумерных поверхностей, образующих 4-ткань  $\tilde{W}_2$ .

Полагая

$$h_1 = (b_1 - b_2)(b_4 - b_3), \quad h_2 = (b_1 - b_3)(b_2 - b_4), \quad h_3 = (b_1 - b_4)(b_3 - b_2),$$

запишем его в том виде, который приводится В. Бляшке в [23], как пример уравнения шестиугольной пространственной 4-ткани:

$$h_1(z_1 z_2 + z_3 z_4) + h_2(z_1 z_3 + z_4 z_2) + h_3(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0. \quad (4.1)$$

Напомним [23], что пространственная 4-ткань называется шестиугольной, если на каждой поверхности ткани поверхности трех других семейств высекают параллелизуемую три-ткань. Действительно, зафиксируем, например, некоторую поверхность четвертого слоения 4-ткани  $\tilde{W}_2$ :  $z_4 = C$ ,  $C = \text{const}$ . Тогда три-ткань, высекаемая на ней поверхностями трех других семейств, будет определяться полилинейной функцией

$$h_1 z_1 z_2 + h_2 z_1 z_3 + h_3 z_2 z_3 + C(h_1 z_3 + h_2 z_2 + h_3 z_1) = 0,$$

и, значит, является параллелизуемой [23]. Очевидно, что на поверхностях других слоений также высекаются параллелизуемые три-ткани. Следовательно, 4-ткань  $\tilde{W}_2$  является шестиугольной.

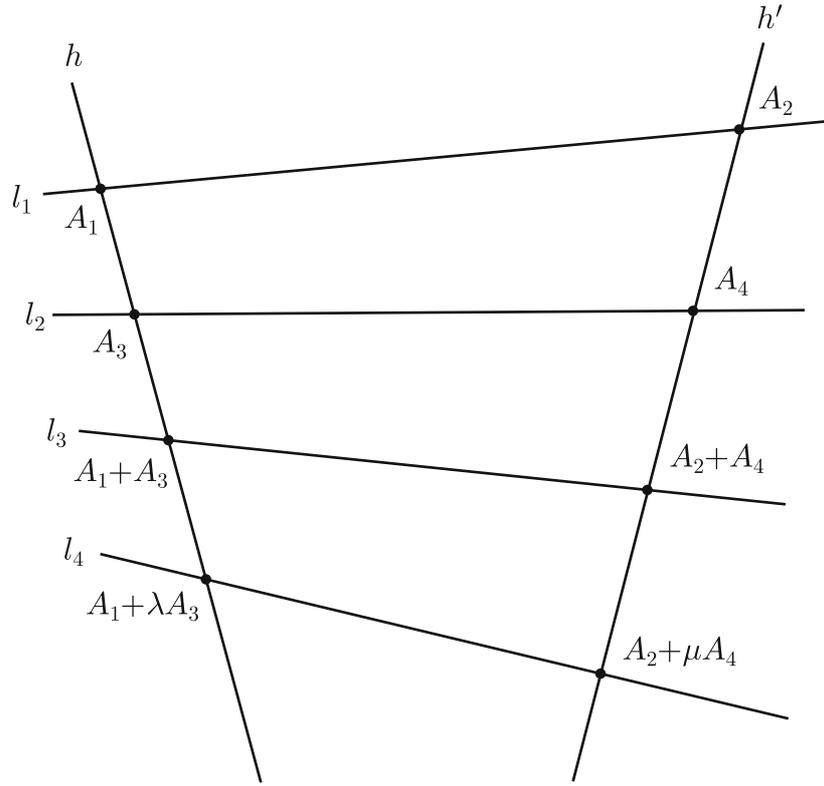


Рис. 23

**4.2.** В уравнении (4.1) ткани  $\tilde{W}_2$  величины  $h_1, h_2, h_3$  связаны соотношением

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0. \quad (4.2)$$

Выясним его геометрический смысл.

Прежде всего отметим, что в том же уравнении (4.1), приведенном В. Бляшке, никаких дополнительных условий на величины  $h_1, h_2, h_3$  не накладывается. При этом в [23] утверждается, что 4-ткань, определяемая уравнением (4.1), порождается четырьмя пучками плоскостей, оси которых попарно скрещиваются. Докажем это утверждение.

Рассмотрим интерпретацию 4-ткани  $\tilde{W}_2$  в трехмерном проективном пространстве  $P^3$ . Обозначим через  $l_1, l_2, l_3, l_4$  оси пучков плоскостей, порождающих рассматриваемую 4-ткань. Известно [74], что в  $P^3$  всегда найдутся две прямые (обозначим их  $h$  и  $h'$ ), пересекающие оси  $l_1, l_2, l_3, l_4$  (рис. 23). В  $P^3$  введем проективный репер  $A_1, A_2, A_3, A_4$  так, как показано на рис. 23 (здесь  $\lambda$  и  $\mu$  не равны нулю и единице). Тогда уравнения пучков плоскостей с осями  $l_1, l_2, l_3, l_4$  примут соответственно вид

$$x^3 = u_1 x^4, \quad x^1 = u_2 x^2, \quad x^1 - x^3 = u_3(x^2 - x^4), \quad x^3 - \lambda x^1 = u_4(x^4 - \mu x^2),$$

где  $x^1, x^2, x^3, x^4$  — проективные координаты в  $P^3$ , а  $u_1, u_2, u_3, u_4$  — параметры слоений 4-ткани  $\tilde{W}_2$ . Исключая из последних уравнений координаты  $x^1, x^2, x^3, x^4$ , найдем уравнение 4-ткани в виде

$$(1 - \lambda)u_1 u_2 + (1 - \mu)u_3 u_4 - (u_1 u_3 + u_4 u_2) + \lambda u_2 u_3 + \mu u_1 u_4 = 0. \quad (4.3)$$

Положим

$$z_1 = \sqrt{\mu} u_1, \quad z_2 = \sqrt{\lambda} u_2, \quad z_3 = \sqrt{\lambda \frac{1-\mu}{1-\lambda}} u_3, \quad z_4 = \sqrt{\mu \frac{1-\mu}{1-\lambda}} u_4; \quad (4.4)$$

$$h_1 = 1 - \lambda, \quad h_2 = -\sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\mu}}, \quad h_3 = \sqrt{\lambda \mu \frac{1-\lambda}{1-\mu}}.$$

Тогда уравнение (4.3) перейдет в уравнение (4.1).

Найдем условия, при которых прямые  $l_1, l_2, l_3, l_4$  лежат на одной квадрике. Заметим, что это будет в том и только том случае, если прямых  $h$ , пересекающих четверку данных осей, будет бесконечно много. Согласно [74], прямая  $h$  пересекает прямую  $l_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ , в том и только том случае, если выполняется соотношение

$$p_\alpha^{12}h^{34} + p_\alpha^{13}h^{42} + p_\alpha^{14}h^{23} + p_\alpha^{23}h^{14} + p_\alpha^{42}h^{13} + p_\alpha^{34}h^{12} = 0, \quad (4.5)$$

где  $h^{ij}$  — пюккерovy координаты прямой  $h$ , а  $p_\alpha^{ij}$  — пюккерovy координаты прямой  $l_\alpha$ ,  $i, j, \alpha = 1, 2, 3, 4$ . Однородная система (4.5) состоит из четырех уравнений и имеет шесть переменных  $h^{ij}$ . Найдем ранг матрицы  $(p_\alpha^{ij})$ . Для этого найдем пюккерovy координаты прямых  $l_1, l_2, l_3, l_4$ .

Пюккерovy координаты прямой  $l_1 = [A_1 A_2]$  являются определителями матрицы, составленной из координат точек  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем  $p_1^{12} = 1$ , а остальные компоненты равны нулю.

Аналогично найдем пюккерovy координаты прямых  $l_2, l_3, l_4$ . Для прямой  $l_2 = [A_3 A_4]$  имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

поэтому  $p_2^{34} = 1$ , а остальные координаты — нули.

Для  $l_3 = [A_1 + A_3 \ A_2 + A_4]$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p_3^{12} = p_3^{34} = p_3^{14} = 1, \quad p_3^{23} = -1, \quad p_3^{13} = p_3^{42} = 0.$$

Для  $l_4 = [A_1 + \lambda A_3 \ A_2 + \mu A_4]$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

$$p_4^{12} = 1, \quad p_4^{34} = \lambda\mu, \quad p_4^{14} = \mu, \quad p_4^{23} = -\lambda, \quad p_4^{13} = p_4^{42} = 0.$$

Теперь составим матрицу коэффициентов системы (4.5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \mu & -\lambda & 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $r$  ранг этой матрицы. Очевидно,  $2 \leq r \leq 4$ . Система (4.5) будет иметь бесконечно много решений, если  $r \leq 3$ , т.е. если единственный, вообще говоря, ненулевой минор четвертого порядка, получаемый из последней матрицы вычеркиванием двух нулевых столбцов, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & \mu & -\lambda & \lambda\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем  $\lambda = \mu$ . Тогда, в силу (4.4), величины  $h_1, h_2, h_3$  будут следующими:

$$h_1 = 1 - \lambda, \quad h_2 = -1, \quad h_3 = \lambda$$

и, очевидно, связаны соотношением (4.2).

Обратно, пусть выполняется равенство (4.2). В силу (4.4) оно эквивалентно следующему:

$$1 - \lambda - \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\mu}} + \sqrt{\lambda\mu \frac{1-\lambda}{1-\mu}} = 0.$$

Отсюда получаем  $\lambda = \mu$ . Доказана следующая теорема.

**Теорема 4.1.** *Оси четырех пучков плоскостей, порождающих шестиугольную 4-ткань в трехмерном проективном пространстве, принадлежат одной квадрике тогда и только тогда, когда величины  $h_1, h_2, h_3$  в уравнении (4.1) ткани связаны соотношением (4.2).*

**4.3.** В классе шестиугольных пространственных 4-тканей наиболее простой подкласс образуют октаэдрические 4-ткани. Эти ткани являются пространственными аналогами параллелизуемых три-тканей на плоскости. Простейшая октаэдрическая ткань образована четырьмя семействами плоскостей, которые можно считать параллельными четырем различным граням правильного тетраэдра. Октаэдрические 4-ткани характеризуются тем, что их кривизны (в [23] они обозначены  $a_1, a_2, a_3$ ) равны нулю.

Выясним, является ли рассматриваемая нами 4-ткань  $\tilde{W}_2$  октаэдрической. Для этого найдем ее кривизны. Они вычисляются по формулам [23]:

$$\begin{aligned} a_1 &= (V_{13} + V_{42}) - (V_{14} + V_{23}), \\ a_2 &= (V_{14} + V_{23}) - (V_{12} + V_{34}), \\ a_3 &= (V_{12} + V_{34}) - (V_{13} + V_{42}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$V_{jk} = V_{kj} = \frac{W_{jk}}{W_j W_k},$$

$W(z_1, z_2, z_3, z_4)$  — неявная функция 4-ткани,

$$W_j = \frac{\partial W}{\partial z_j}, \quad W_{jk} = \frac{\partial W_j}{\partial z_k}, \quad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Найдем  $a_1$ . Для упрощения дальнейших выкладок запишем уравнение (4.1) 4-ткани  $\tilde{W}_2$  в виде

$$(z_2 - z_3)(z_1 - z_4) + t(z_2 - z_4)(z_1 - z_3) = 0,$$

где

$$t = \frac{(b_2 - b_3)(b_1 - b_4)}{(b_2 - b_4)(b_3 - b_1)},$$

причем  $t \neq 0, -1$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} W_1 &= z_2 - z_3 + t(z_2 - z_4), & W_2 &= z_1 - z_4 + t(z_1 - z_3), \\ W_3 &= z_4 - z_1 + t(z_4 - z_2), & W_4 &= z_3 - z_2 + t(z_3 - z_1); \\ W_{12} &= W_{34} = 1 + t, & W_{13} &= W_{24} = -1, & W_{14} &= W_{23} = -t; \\ V_{12} &= \frac{1+t}{W_1 W_2}, & V_{13} &= \frac{-1}{W_1 W_3}, & V_{14} &= \frac{-t}{W_1 W_4}, \\ V_{23} &= \frac{-t}{W_2 W_3}, & V_{24} &= \frac{-1}{W_2 W_4}, & V_{34} &= \frac{1+t}{W_3 W_4}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в первое уравнение системы (4.6), получим

$$a_1 = -2t(t+1)(z_2 - z_3)(z_1 - z_4).$$

Поскольку  $t \neq 0, -1$ , то кривизна  $a_1 \neq 0$ . Следовательно, рассматриваемая 4-ткань  $\tilde{W}_2$  не является октаэдрической.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 4.2.** *4-ткань  $\tilde{W}_2$ , индуцированная тканью  $WR(1,3)$ , является шестиугольной не октаэдрической 4-тканью, порождаемой четырьмя пучками плоскостей, оси которых являются попарно скрещивающимися и принадлежат одной кольцевидной квадрике.*

5. СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРИ-ТКАНИ  $W(p, q, p + q - 1)$ 

**5.1.** Найдем структурные уравнения три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$ . Для этого рассмотрим три-ткань  $W(p, q, r)$  общего вида. Следуя [11], слоения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  этой ткани зададим соответственно вполне интегрируемыми системами форм Пфаффа

$$\omega^{u_1}, \quad \omega^{a_1}, \quad \Theta^\xi = \lambda_{a_1}^\xi \omega^{a_1} + \lambda_{u_1}^\xi \omega^{u_1},$$

$$a_1, b_1, = \overline{1, p}, \quad u_1, v_1, = \overline{p+1, n}, \quad \xi, \eta, = \overline{r+1, n}, \quad n = p + q,$$

а ранги матриц  $\lambda_{a_1}^\xi$  и  $\lambda_{u_1}^\xi$  максимальны. Формы  $\omega^{u_1}$  и  $\omega^{a_1}$  образуют базис на многообразии  $\mathcal{M}$ . Для размерностей  $p$ ,  $q$  и  $r$  возможны три существенно различных соотношения (см. [11]):

$$(1) \quad r \leq p \leq q, \quad (2) \quad p \leq r \leq q, \quad (3) \quad p \leq q \leq r.$$

Пусть  $p \leq q \leq r$ . В этом случае слой  $\mathcal{F}_3 \subset \lambda_3$  пересекается с каждым из слоев  $\mathcal{F}_1 \subset \lambda_1$  по многообразиям размерности  $r - q$ , а с каждым из слоев  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$  — по многообразиям размерности  $r - p$ . Следуя [11], введем в базис формы

$$\omega^\xi = \lambda_{u_1}^\xi \omega^{u_1}, \quad \omega^{\xi-q} = \lambda_{a_1}^\xi \omega^{a_1}$$

и положим  $a_1 = \{a_2, \xi - q\}$ ,  $u_1 = \{u_2, \xi\}$ , где  $a_2 = \overline{1, r - q}$ ,  $u_2 = \overline{p+1, r}$ . Тогда слои  $\mathcal{F}_3 \subset \lambda_3$  будут определяться уравнениями

$$\Theta^\xi = \omega^{\xi-q} + \omega^\xi = 0, \tag{5.1}$$

а структурные уравнения три-ткани  $W(p, q, r)$ , как показано в [11], могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} d\omega^{a_2} &= \omega^{b_2} \wedge \omega_{b_2}^{a_2} + \omega^{\xi-q} \wedge \omega_{\xi-q}^{a_2}, \\ d\omega^{\xi-q} &= \omega^{\eta-q} \wedge \Theta_\eta^\xi + \lambda_{a_2 u_2}^\xi \omega^{a_2} \wedge \omega^{u_2} + \mu_{a_2 \eta}^\xi \omega^{a_2} \wedge \Theta^\eta + \mu_{\eta \zeta}^\xi \omega^{\eta-q} \wedge \omega^{\zeta-q}, \\ d\omega^\xi &= \omega^\eta \wedge \Theta_\eta^\xi + \lambda_{u_2 a_2}^\xi \omega^{u_2} \wedge \omega^{a_2} + \mu_{u_2 \eta}^\xi \omega^{u_2} \wedge \Theta^\eta - \mu_{\eta \zeta}^\xi \omega^\eta \wedge \omega^\zeta, \\ d\omega^{u_2} &= \omega^{v_2} \wedge \omega_{v_2}^{u_2} + \omega^\xi \wedge \omega_\xi^{u_2}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где величины  $\{\lambda_{a_2 u_2}^\xi, \mu_{a_2 \eta}^\xi, \mu_{u_2 \eta}^\xi, \mu_{\eta \zeta}^\xi\}$  образуют первый структурный тензор три-ткани, называемый также тензором кручения, и удовлетворяют условиям

$$\mu_{\eta \zeta}^\xi = -\mu_{\zeta \eta}^\xi, \quad \lambda_{a_2 u_2}^\xi = \lambda_{u_2 a_2}^\xi.$$

При  $r = p + q - 1$  слои  $\mathcal{F}_3 \subset \lambda_3$ , в силу (5.1), задаются одним уравнением

$$\Theta^{p+q} \equiv \omega^p + \omega^{p+q} = 0,$$

а структурные уравнения (5.2) принимают вид

$$\begin{aligned} d\omega^{a_2} &= \omega^{b_2} \wedge \omega_{b_2}^{a_2} + \omega^p \wedge \omega_p^{a_2}, \\ d\omega^p &= \omega^p \wedge \Theta_{p+q}^{p+q} + \lambda_{a_2 u_2}^{p+q} \omega^{a_2} \wedge \omega^{u_2} + \mu_{a_2 p+q}^{p+q} \omega^{a_2} \wedge \Theta^{p+q}, \\ d\omega^{p+q} &= \omega^{p+q} \wedge \Theta_{p+q}^{p+q} + \lambda_{u_2 a_2}^{p+q} \omega^{u_2} \wedge \omega^{a_2} + \mu_{u_2 p+q}^{p+q} \omega^{u_2} \wedge \Theta^{p+q}, \\ d\omega^{u_2} &= \omega^{v_2} \wedge \omega_{v_2}^{u_2} + \omega^{p+q} \wedge \omega_{p+q}^{u_2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Введя обозначения

$$a = a_2 = \overline{1, p-1}, \quad u = u_2 = \overline{p+1, p+q-1},$$

$$\lambda_{a_2 u_2}^{p+q} = \lambda_{au}, \quad \lambda_{u_2 a_2}^{p+q} = \lambda_{ua}, \quad \mu_{a_2 p+q}^{p+q} = \mu_a, \quad \mu_{u_2 p+q}^{p+q} = \mu_u,$$

запишем уравнения (5.3) ткани  $W(p, q, p + q - 1)$  в виде

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^b \wedge \omega_b^a + \omega^p \wedge \omega_p^a, \\ d\omega^p &= \omega^p \wedge \Theta_{p+q}^{p+q} + \lambda_{au} \omega^a \wedge \omega^u + \mu_a \omega^a \wedge \Theta^{p+q}, \\ d\omega^{p+q} &= \omega^{p+q} \wedge \Theta_{p+q}^{p+q} + \lambda_{ua} \omega^u \wedge \omega^a + \mu_u \omega^u \wedge \Theta^{p+q}, \\ d\omega^u &= \omega^v \wedge \omega_v^u + \omega^{p+q} \wedge \omega_{p+q}^u. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Слоения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  этой ткани задаются соответственно уравнениями

$$\omega^u = 0, \quad \omega^{p+q} = 0; \quad \omega^a = 0, \quad \omega^p = 0; \quad \Theta^{p+q} \equiv \omega^p + \omega^{p+q} = 0. \quad (5.5)$$

**5.2.** Следуя [11], выясним геометрический смысл форм  $\omega_b^a$ ,  $\omega_p^a$ ,  $\Theta_{p+q}^{p+q}$ ,  $\omega_v^u$ ,  $\omega_{p+q}^u$ . Пусть  $T_A(\mathcal{M})$  — касательное пространство  $T_A(\mathcal{M})$  к многообразию  $\mathcal{M}$  в точке  $A \in \mathcal{M}$ . Обозначим через  $\{e_a, e_p\}$  и  $\{e_u, e_{p+q}\}$  векторы, касающиеся соответственно слоев  $\mathcal{F}_1 \subset \lambda_1$  и  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$ , проходящих через точку  $A$ . Тогда произвольный вектор  $\xi \in T_A(\mathcal{M})$  запишется в виде

$$\xi = \omega^a(\xi)e_a + \omega^p(\xi)e_p + \omega^u(\xi)e_u + \omega^{p+q}(\xi)e_{p+q}.$$

Продифференцируем это равенство внешним образом и зафиксируем точку  $A$  (закрепим главные параметры). Получим

$$\begin{aligned} \delta e_a &= \pi_a^b e_b, & \delta e_p &= \pi_p^a e_a + \pi_{p+q}^{p+q} e_{p+q}, \\ \delta e_u &= \pi_u^v e_v, & \delta e_{p+q} &= \pi_{p+q}^u e_u + \pi_{p+q}^{p+q} e_{p+q}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где через  $\delta$  обозначено значение дифференциала  $d$  при фиксированных главных параметрах,  $\pi_a^b = \omega_a^b(\delta)$ ,  $\pi_u^v = \omega_u^v(\delta)$  и т. д. Уравнения (5.6) представляют собой уравнения перемещения репера структурной группы  $G$ -структуры, индуцируемой три-тканью  $W(p, q, p+q-1)$  [11]. При этом форма  $\pi_{p+q}^{p+q} = \Theta_{p+q}^{p+q}(\delta)$  определяет согласованные перемещения двух связок  $p$ - и  $q$ -плоскостей, базисные плоскости которых натянуты соответственно на векторы  $\{e_a, e_p\}$  и  $\{e_u, e_{p+q}\}$ , а плоскости, определяемые векторами  $\{e_a, e_u, e_{p+q}\}$ ,  $\{e_a, e_u, e_p\}$  и  $\{e_a, e_u\}$ , инвариантны при преобразованиях группы  $G$ .

**5.3.** Внешнее дифференцирование уравнений (5.4) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} & \left( \Omega_b^a + \omega_p^a \wedge (\lambda_{bu}\omega^u + \mu_b\Theta^{p+q}) \right) \wedge \omega^b + \Omega_p^a \wedge \omega^p = 0, \\ \Omega_{p+q}^{p+q} \wedge \omega^p + & \left( \nabla \lambda_{au} \wedge \omega^u + \nabla \mu_a \wedge \Theta^{p+q} \right) \wedge \omega^a + \left( \lambda_{au}\omega^u + \mu_a\Theta^{p+q} \right) \wedge \omega_p^a \wedge \omega^p + \\ & + \lambda_{au}\omega_{p+q}^u \wedge \omega^a \wedge (\Theta^{p+q} - \omega^p) + \mu_a\mu_v\omega^a \wedge \omega^v \wedge \Theta^{p+q} = 0, \\ & \left( \Omega_{p+q}^{p+q} - \nabla \mu_a \wedge \omega^a - \nabla \mu_u \wedge \omega^u + (\mu_a\omega_p^a - \mu_u\omega_{p+q}^u) \wedge \omega^p \right) \wedge \omega^{p+q} = 0, \\ & \left( \Omega_v^u + \omega_{p+q}^u \wedge (\lambda_{av}\omega^a + \mu_v\Theta^{p+q}) \right) \wedge \omega^v + \Omega_{p+q}^u \wedge (\Theta^{p+q} - \omega^p) = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Omega_b^a &= d\omega_b^a - \omega_b^c \wedge \omega_c^a, & \Omega_p^a &= d\omega_p^a - \omega_p^b \wedge \omega_b^a + \omega_p^a \wedge \Theta_{p+q}^{p+q}, & \Omega_{p+q}^{p+q} &= d\Theta_{p+q}^{p+q}, \\ \Omega_v^u &= d\omega_v^u - \omega_v^w \wedge \omega_w^u, & \Omega_{p+q}^u &= d\omega_{p+q}^u - \omega_{p+q}^v \wedge \omega_v^u + \omega_{p+q}^u \wedge \Theta_{p+q}^{p+q}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_{au} &= d\lambda_{au} - \lambda_{bu}\omega_a^b - \lambda_{av}\omega_u^v + \lambda_{au}\Theta_{p+q}^{p+q}, \\ \nabla \mu_a &= d\mu_a - \mu_b\omega_a^b, & \nabla \mu_u &= d\mu_u - \mu_v\omega_u^v. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Формы  $\Omega_b^a$ ,  $\Omega_p^a$ ,  $\Omega_v^u$ ,  $\Omega_{p+q}^u$ ,  $\Omega_{p+q}^{p+q}$  называются формами кривизны три-ткани  $W(p, q, p+q-1)$  [11]. Из уравнений (5.4) и (5.7) следует, что если формы  $\omega_p^a$  и  $\omega_{p+q}^u$  являются главными (выражаются через базисные), то на многообразии  $\mathcal{M}$  возникает аффинная связность  $\Gamma$  (см. [11]). Эта связность определяется формами  $\omega^i = (\omega^a, \omega^p, \omega^u, \omega^{p+q})$  и

$$\omega_j^i = \begin{pmatrix} \omega_b^a & \omega_p^a & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{p+q}^{p+q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_v^u & \omega_{p+q}^u \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_{p+q}^{p+q} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющими уравнениям

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i + R_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \\ d\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \end{aligned}$$

где  $R_{jk}^i$  и  $R_{jkl}^i$  — соответственно тензоры кручения и кривизны связности  $\Gamma$ ,  $i, j, k, l = \overline{1, p+q}$ . Поскольку в рассматриваемом случае

$$\pi_p^a = \omega_p^a(\delta) = 0, \quad \pi_{p+q}^u = \omega_{p+q}^u(\delta) = 0,$$

то уравнения (5.6) принимают вид

$$\delta e_a = \pi_a^b e_b, \quad \delta e_p = \pi_{p+q}^{p+q} e_p, \quad \delta e_u = \pi_u^v e_v, \quad \delta e_{p+q} = \pi_{p+q}^{p+q} e_{p+q}.$$

Отсюда следует, что подпространства касательного пространства  $T_A(\mathcal{M})$ , определяемые векторами  $\{e_a\}$ ,  $\{e_p\}$ ,  $\{e_u\}$ ,  $\{e_{p+q}\}$ , являются инвариантными при преобразованиях группы  $G$ .

## 6. ПРИМЕРЫ ТРИ-ТКАНЕЙ $WR(p, q)$

**6.1.** В классической теории три-тканей известно характеристическое свойство тканей Рейдемейстера  $R$ , а именно: формы кривизны три-ткани  $R$  могут быть приведены к нулю на всем многообразии  $\mathcal{M}$  и, наоборот, если формы кривизны три-ткани  $W(r, r, r)$  приводятся к нулю, то такая ткань является тканью  $R$  (см. [3]). Поскольку ткани  $WR(p, q)$  являются в определенном смысле обобщением тканей  $R$ , то, следуя классической теории, рассмотрим три-ткань  $W(p, q, p+q-1)$ , формы кривизны которой равны нулю:

$$\Omega_b^a = \Omega_p^a = \Omega_v^u = \Omega_{p+q}^u = \Omega_{p+q}^{p+q} = 0. \quad (6.1)$$

Обозначим такую ткань  $W^0(p, q, p+q-1)$  и найдем ее структурные уравнения.

Из уравнений (5.7), (5.8) и (5.9) следует, что при условии (6.1) формы  $\omega_b^a$ ,  $\omega_p^a$ ,  $\Theta_{p+q}^{p+q}$ ,  $\omega_v^u$ ,  $\omega_{p+q}^u$  за счет допустимого преобразования базисных форм могут быть одновременно приведены к нулю на всем многообразии  $\mathcal{M}$  (см. [11, 28]). Тогда структурные уравнения (5.4) примут вид

$$\begin{aligned} d\omega^a &= 0, & d\omega^p &= \lambda_{au}\omega^a \wedge \omega^u + \mu_a\omega^a \wedge \Theta^{p+q}, \\ d\omega^u &= 0, & d\omega^{p+q} &= \lambda_{ua}\omega^u \wedge \omega^a + \mu_u\omega^u \wedge \Theta^{p+q}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

а их дифференциальные продолжения (5.7) будут следующими:

$$\begin{aligned} (d\lambda_{au} \wedge \omega^u + d\mu_a \wedge \Theta^{p+q}) \wedge \omega^a + \mu_a\mu_u\omega^a \wedge \omega^u \wedge \Theta^{p+q} &= 0, \\ (d\mu_a \wedge \omega^a + d\mu_u \wedge \omega^u) \wedge \Theta^{p+q} &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

**6.2.** Сначала рассмотрим три-ткань  $W^0(p, q, p+q-1)$ , у которой величины  $\mu_a$  и  $\mu_u$  являются постоянными на многообразии  $\mathcal{M}$ :

$$d\mu_a = d\mu_u = 0.$$

В этом случае система (6.3) сводится к одному уравнению

$$(d\lambda_{au} - \mu_a\mu_u\Theta^{p+q}) \wedge \omega^a \wedge \omega^u = 0, \quad (6.4)$$

из которого видно, что величины  $\lambda_{au}$  не являются, вообще говоря, постоянными на  $\mathcal{M}$ . Обозначим такую ткань  $W_\lambda^0(p, q, p+q-1)$ .

Покажем, что на слоях первого и второго слоений ткани  $W_\lambda^0(p, q, p+q-1)$  индуцируется групповая структура. Действительно, пусть  $\mathcal{F}_1$  — произвольный слой первого слоения. Так как он определяется уравнениями  $\omega^u = \omega^{p+q} = 0$ , то на нем система (6.2) принимает вид

$$d\omega^a = 0, \quad d\omega^p = \mu_a\omega^a \wedge \omega^p.$$

Эти уравнения являются структурными уравнениями некоторой группы Ли с инвариантными формами  $\omega^a$ ,  $\omega^p$ ; обозначим ее  $G_1$ . Если все компоненты  $\mu_a = 0$ , то группа  $G_1$  абелева. Пусть ковектор  $\mu_a \neq 0$ . Тогда репер можно канонизировать так, что  $\mu_1 = 1$ , а остальные  $\mu_a = 0$ , и уравнения группы  $G_1$  в этом репере преобразуются к виду

$$d\omega^a = 0, \quad d\omega^p = \omega^1 \wedge \omega^p.$$

Последние уравнения показывают, что группа  $G_1$  распадается в прямое произведение  $(p-2)$ -параметрической абелевой группы с инвариантными формами  $\omega^2, \dots, \omega^{p-1}$  и двухпараметрической аффинной группы на прямой с инвариантными формами  $\omega^1, \omega^p$ .

Аналогично, на слоях  $\mathcal{F}_2$  второго слоения три-ткани  $W_\lambda^0(p, q, p + q - 1)$  также индуцируется группа Ли (обозначим ее  $G_2$ ), которая либо абелева, либо распадается в прямое произведение двух групп.

На слоях третьего слоения, в отличие от  $\mathcal{F}_1 \subset \lambda_1$  и  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$ , групповая структура, вообще говоря, не индуцируется, поскольку на  $\mathcal{F}_3$ , определяемых уравнением  $\Theta^{p+q} = 0$ , уравнения (6.2) принимают вид

$$d\omega^a = 0, \quad d\omega^p = \lambda_{au}\omega^a \wedge \omega^u, \quad d\omega^u = 0, \quad (6.5)$$

где величины  $\lambda_{au}$  не являются, вообще говоря, постоянными.

Найдем конечное уравнение некоторой ткани  $W_\lambda^0(p, q, p + q - 1)$  путем интегрирования структурных уравнений (6.2). Интегрируя первые и третьи уравнения системы (6.2), а также сумму второго и четвертого уравнений, получим

$$\omega^a = du^a, \quad \omega^u = dv^u, \quad \Theta^{p+q} = e^{\mu_a u^a + \mu_u v^u} dw. \quad (6.6)$$

Теперь найдем величины  $\lambda_{au}$  из уравнения (6.4), которое, с учетом (6.6), имеет вид

$$d(\lambda_{au} - \mu_a \mu_u w e^{\mu_b u^b + \mu_s v^s}) \wedge du^a \wedge dv^u = 0.$$

Рассмотрим одно из решений последнего уравнения:

$$\lambda_{au} = \mu_a \mu_u w e^{\mu_b u^b + \mu_s v^s} + C_{au},$$

где  $C_{au} = \text{const}$ , а величины  $\mu_a$  и  $\mu_u$  не могут быть все равными нулю. Учитывая это, канонизируем репер так, что  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_{p+1} = 1$ , а остальные  $\mu_a$  и  $\mu_u$  равны нулю. Тогда в полученном репере

$$\lambda_{1p+1} = w e^{u^1 + v^{p+1}} + C_{1p+1}, \quad \lambda_{1\bar{u}} = C_{1\bar{u}}, \quad \lambda_{\bar{a}1} = C_{\bar{a}1}, \quad \lambda_{\bar{a}\bar{u}} = C_{\bar{a}\bar{u}},$$

$\bar{a} = \overline{2, p-1}$ ,  $\bar{u} = \overline{p+2, p+q-1}$ , а из (6.6) имеем  $\Theta^{p+q} = e^{u^1 + v^{p+1}} dw$ . Интегрируя второе уравнение системы (6.2) с учетом последних соотношений, найдем форму  $\omega^p$ :

$$\begin{aligned} \omega^p = & \frac{1}{2} \left( u^1 e^{u^1 + v^{p+1}} dw + u^1 w e^{u^1 + v^{p+1}} (du^1 + dv^{p+1}) - w e^{u^1 + v^{p+1}} du^1 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{a,u} C_{au} (u^a dv^u - v^u du^a) + \frac{1}{2} C_{1p+1} (u^1 dv^{p+1} - v^{p+1} du^1) + du^p, \quad (6.7) \end{aligned}$$

причем в сумме

$$\sum_{a,u} C_{au} (u^a dv^u - v^u du^a)$$

индексы  $a$  и  $u$  не принимают одновременно значений  $a = 1$ ,  $u = p + 1$ .

Найдем уравнения слоев рассматриваемой ткани  $W_\lambda^0(p, q, p + q - 1)$ . Слои  $\mathcal{F}_1 \subset \lambda_1$  определяются, в силу (5.5), (6.6) и (6.7), уравнениями  $dv^u = 0$  и

$$\left(1 - \frac{1}{2}u^1\right) e^{u^1 + v^{p+1}} dw + \frac{1}{2}w(1 - u^1)e^{u^1 + v^{p+1}} du^1 + \frac{1}{2} \sum_{a,u} C_{au} v^u du^a + \frac{1}{2} C_{1p+1} v^{p+1} du^1 - du^p = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, найдем

$$\begin{aligned} v^u = x^u, \\ \left(1 - \frac{1}{2}u^1\right) w e^{u^1 + x^{p+1}} + \frac{1}{2} \sum_{a,u} C_{au} x^u u^a + \frac{1}{2} C_{1p+1} x^{p+1} u^1 - u^p = x^{p+q}, \quad (6.8) \end{aligned}$$

где  $x^u$  и  $x^{p+q}$  — постоянные интегрирования.

Слои  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$  определяются уравнениями

$$du^a = 0, \quad \frac{1}{2} \left( u^1 e^{u^1 + v^{p+1}} dw + u^1 w e^{u^1 + v^{p+1}} dv^{p+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{a,u} C_{au} u^a dv^u + \frac{1}{2} C_{1p+1} u^1 dv^{p+1} + du^p = 0,$$

интегрирование которых приводит к уравнениям

$$u^a = y^a, \quad \frac{1}{2} y^1 w e^{y^1 + v^{p+1}} + \frac{1}{2} \sum_{a,u} C_{au} y^a v^u + C_{1p+1} y^1 v^{p+1} + u^p = y^p, \quad (6.9)$$

$y^a$  и  $y^p$  — постоянные интегрирования.

Слои  $\mathcal{F}_3 \subset \lambda_3$  задаются уравнением  $dw = 0$ , откуда

$$w = z, \quad z = \text{const}. \quad (6.10)$$

Исключая из уравнений (6.8), (6.9) и (6.10) локальные координаты  $u^a, u^p, v^u, v^{p+q}$  и  $w$ , найдем конечное уравнение три-ткани  $W_\lambda^0(p, q, p+q-1)$ :

$$z = e^{-(y^1+x^{p+1})} \left( x^{p+q} + y^p - C_{1p+1} x^{p+1} y^1 - \sum_{a,u} C_{au} x^u y^a \right). \quad (6.11)$$

Выясним, является ли эта три-ткань тканью  $WR(p, q)$ . Согласно п. 1.4, запишем для группоида (6.11) систему

$$z_{\bar{\alpha}\bar{i}} = f(x_{\bar{\alpha}}, y_{\bar{i}}), \quad (6.12)$$

где  $x_{\bar{\alpha}} = (x_{\bar{\alpha}}^i)$ ,  $y_{\bar{i}} = (y_{\bar{i}}^\alpha)$ ,  $\bar{i} = \overline{1, q+1}$ ,  $\bar{\alpha} = \overline{1, p+1}$ ,  $i = \overline{1, q}$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ . Непосредственные вычисления показывают, что параметры  $x_{\bar{\alpha}}^i$  и  $y_{\bar{i}}^\alpha$  невозможно исключить из полученной системы, следовательно, рассматриваемая ткань не обладает сердцевиной, и, в силу теоремы 1.3, не является тканью  $WR(p, q)$ .

Пусть  $C_{1p+1} = C_{\bar{\alpha}1} = C_{1\bar{u}} = 0$ . Полагая

$$e^{-x^{p+1}} x^{p+q} = \tilde{x}^1, \quad e^{-x^{p+1}} C_{\bar{a}\bar{u}} x^{\bar{u}} = \tilde{x}^{\bar{a}}; \quad e^{-y^1} = \tilde{y}^1, \quad e^{-y^1} y^{\bar{a}} = \tilde{y}^{\bar{a}}, \quad e^{-y^1} y^p = \tilde{y}^p,$$

приведем уравнение (6.11) к виду

$$z = \sum_{a=1}^p \tilde{x}^a \tilde{y}^a. \quad (6.13)$$

На этой ткани конфигурации  $R(p, q)$  замыкаются, поскольку из системы (6.12), записанной для группоида (6.13), параметры  $x_{\bar{\alpha}}^i$  и  $y_{\bar{i}}^\alpha$  исключаются, при этом уравнение сердцевины приводится к виду

$$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1p+1} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{p+11} & z_{p+12} & \dots & z_{p+1p+1} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.14)$$

Следовательно, три-ткань, определяемая уравнением (6.13), является тканью  $WR(p, p)$ . С другой стороны, эта ткань, согласно теореме 1.4, определяет бинарную физическую структуру ранга  $(p+1, p+1)$  с феноменологически инвариантной формой (6.14) (см. [40]).

**6.3.** Теперь рассмотрим три-ткань  $W_\lambda^0(p, q, p+q-1)$ , величины  $\lambda_{au}$  которой являются постоянными на  $\mathcal{M}$ :  $d\lambda_{au} = 0$ . Обозначим такую ткань  $W_c^0(p, q, p+q-1)$ . Ее структурные уравнения (6.2) имеют вид уравнений Маурера—Картана некоторой группы Ли  $G$  с инвариантными формами  $\omega^a, \omega^p, \omega^{p+q}, \omega^u$ . Группа  $G$  индуцирует на слоях  $\mathcal{F}_1 \subset \lambda_1$  и  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$  соответственно группы  $G_1$  и  $G_2$  (см. п. 6.2), а на слоях  $\mathcal{F}_3 \subset \lambda_3$  — группу  $G_3$  с инвариантными формами  $\omega^a, \omega^p, \omega^u$ , удовлетворяющими уравнениям (6.5).

На ткани  $W_c^0(p, q, p+q-1)$ , как следует из уравнений (6.4), выполняются соотношения  $\mu_a \mu_u = 0$ . Отсюда получаем три возможных случая:

$$(1) \quad \mu_a = \mu_u = 0; \quad (2) \quad \mu_a = 0, \quad \mu_u \neq 0; \quad (3) \quad \mu_a \neq 0, \quad \mu_u = 0.$$

В каждом из этих случаев найдем конечное уравнение ткани путем интегрирования ее структурных уравнений.

(1) Пусть  $\mu_a = \mu_u = 0$ . Тогда структурные уравнения (6.2) принимают вид

$$\begin{aligned} d\omega^a &= 0, & d\omega^p &= \lambda_{au} \omega^a \wedge \omega^u, \\ d\omega^u &= 0, & d\omega^{p+q} &= \lambda_{ua} \omega^u \wedge \omega^a. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\begin{aligned}\omega^a &= du^a, & \omega^p &= \frac{1}{2}\lambda_{au}(u^a dv^u - v^u du^a) + du^p, \\ \omega^u &= dv^u, & \omega^{p+q} &= \frac{1}{2}\lambda_{ua}(v^u du^a - u^a dv^u) + dv^{p+q}.\end{aligned}\quad (6.15)$$

Найдем уравнения слоев три-ткани. Слои  $\mathcal{F}_1 \subset \lambda_1$  определяются, с учетом (5.5) и (6.15), уравнениями

$$dv^u = 0, \quad \frac{1}{2}\lambda_{ua}(v^u du^a - u^a dv^u) + dv^{p+q} = 0,$$

интегрируя которые, получим

$$v^u = x^u, \quad v^{p+q} = x^{p+q} - \frac{1}{2}\lambda_{ua}x^u u^a. \quad (6.16)$$

Здесь, как и выше,  $x^u$  и  $x^{p+q}$  — постоянные интегрирования.

Аналогично найдем уравнения слоев  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$ :

$$u^a = y^a, \quad u^p = y^p - \frac{1}{2}\lambda_{au}y^a v^u, \quad (6.17)$$

где  $y^a$  и  $y^p$  — постоянные.

Уравнения слоев  $\mathcal{F}_3 \subset \lambda_3$  находим, интегрируя уравнение  $\Theta^{p+q} = 0$  с учетом (6.15):

$$u^p + v^{p+q} = z, \quad z = \text{const}. \quad (6.18)$$

Исключая из уравнений (6.16), (6.17) и (6.18) локальные координаты  $u^a$ ,  $u^p$ ,  $v^u$ ,  $v^{p+q}$ , найдем конечное уравнение ткани в следующем виде:

$$z = y^p + x^{p+q} - \lambda_{au}y^a x^u. \quad (6.19)$$

Обозначим через  $\rho$  ранг матрицы  $(\lambda_{au})$ . Если  $\rho = p - 1$ , то изотопическим преобразованием  $\tilde{x}^a = -\lambda_{au}x^u$ ,  $\tilde{x}^p = x^{p+q}$  последнее уравнение приводится к виду

$$z = \sum_{a=1}^{p-1} \tilde{x}^a y^a + \tilde{x}^p + y^p. \quad (6.20)$$

Непосредственно доказываем, что сердцевина рассматриваемой три-ткани существует и задается (неявно) уравнением

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z_{11} & z_{21} & \dots & z_{p+11} \\ 1 & z_{12} & z_{22} & \dots & z_{p+12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{1p+1} & z_{2p+1} & \dots & z_{p+1p+1} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.21)$$

Следовательно, эта три-ткань является тканью  $WR(p, p)$  и, согласно теореме 1.4, определяет бинарную физическую структуру ранга  $(p + 1, p + 1)$  с феноменологически инвариантной формой (6.21) (см. [40]).

Если  $\rho < p - 1$ , то уравнение (6.20) можно привести к аналогичному виду

$$z = \sum_{a=1}^{\rho} \tilde{x}^a y^a + \tilde{x}^{\rho+1} + y^{\rho+1}.$$

(2) Пусть  $\mu_a = 0$ ,  $\mu_u \neq 0$ . Структурные уравнения (6.2) три-ткани  $W_c^0(p, q, p + q - 1)$  в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned}d\omega^a &= 0, & d\omega^p &= \lambda_{au}\omega^a \wedge \omega^u, \\ d\omega^u &= 0, & d\Theta^{p+q} &= \mu_u \omega^u \wedge \Theta^{p+q}.\end{aligned}$$

Интегрируя последние уравнения, найдем выражения для форм Пфаффа:

$$\begin{aligned}\omega^a &= du^a, & \omega^p &= \frac{1}{2}\lambda_{ua}(u^a dv^u - v^u du^a) + du^p, \\ \omega^u &= dv^u, & \Theta^{p+q} &= e^{\mu_u v^u} dw.\end{aligned}\quad (6.22)$$

Найдем уравнения слоев  $\mathcal{F}_\alpha \subset \lambda_\alpha$  рассматриваемой три-ткани. Слои  $\mathcal{F}_1 \subset \lambda_1$  определяются уравнениями

$$\omega^u = 0, \quad \omega^{p+q} = \Theta^{p+q} - \omega^p = 0,$$

или, в силу (6.22),

$$dv^u = 0, \quad e^{\mu_u v^u} dw - \frac{1}{2}\lambda_{ua}(u^a dv^u - v^u du^a) - du^p = 0.$$

Интегрируя их, получим

$$v^u = x^u, \quad w = e^{-\mu_u x^u}(u^p + x^{p+q} - \frac{1}{2}\lambda_{ua}x^u u^a), \quad (6.23)$$

$x^u$  и  $x^{p+q}$  — постоянные.

Аналогично найдем уравнения слоев  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$ :

$$u^a = y^a, \quad u^p = y^p - \frac{1}{2}\lambda_{ua}y^a v^u, \quad (6.24)$$

и слоев  $\mathcal{F}_3 \subset \lambda_3$ :

$$w = z. \quad (6.25)$$

Здесь  $y^a$ ,  $y^p$  и  $z$  — постоянные интегрирования.

Исключая из уравнений (6.23), (6.24) и (6.25) локальные координаты  $u^a$ ,  $u^p$ ,  $v^u$ ,  $w$ , найдем конечное уравнение рассматриваемой три-ткани в следующем виде:

$$z = e^{-\mu_v x^v}(y^p + x^{p+q} - \lambda_{ua}x^u y^a). \quad (6.26)$$

Если  $\text{rank}(\lambda_{au})$  максимален, т.е. равен  $p-1$ , то с помощью изотопического преобразования

$$\tilde{x}^a = -\lambda_{au}x^u e^{-\mu_v x^v}, \quad \tilde{x}^p = e^{-\mu_v x^v}, \quad \tilde{x}^{p+1} = x^{p+q} e^{-\mu_v x^v}$$

приведем уравнение (6.26) к виду

$$z = \sum_{a=1}^{p-1} \tilde{x}^a y^a + \tilde{x}^p y^p + \tilde{x}^{p+1}. \quad (6.27)$$

Сердцевина этой три-ткани существует и задается уравнением

$$\begin{vmatrix} 1 & z_{11} & z_{21} & \dots & z_{p+11} \\ 1 & z_{12} & z_{22} & \dots & z_{p+12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{1p+1} & z_{2p+1} & \dots & z_{p+1p+1} \\ 1 & z_{1p+2} & z_{2p+2} & \dots & z_{p+1p+2} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.28)$$

Поэтому рассматриваемая ткань будет тканью  $WR(p, p+1)$  и определяет бинарную физическую структуру ранга  $(p+1, p+2)$  с феноменологически инвариантной формой (6.28) (см. [40]).

Если  $\rho < p-1$ , то уравнение (6.26) можно привести к аналогичному виду

$$z = \sum_{a=1}^{\rho} \tilde{x}^a y^a + \tilde{x}^{\rho+1} y^{\rho+1} + \tilde{x}^{\rho+2}.$$

(3) Пусть  $\mu_a \neq 0$ ,  $\mu_u = 0$ . В этом случае структурные уравнения (6.2) три-ткани  $W_c^0(p, q, p+q-1)$  принимают вид

$$\begin{aligned}d\omega^a &= 0, & d\omega^p &= \lambda_{au}\omega^a \wedge \omega^u + \mu_a \omega^a \wedge \Theta^{p+q}, \\ d\omega^u &= 0, & d\omega^{p+q} &= \lambda_{ua}\omega^u \wedge \omega^a.\end{aligned}$$

Проводя вычисления, аналогичные предыдущим, найдем конечное уравнение рассматриваемой три-ткани:

$$z = e^{-\mu_b y^b} (y^p + x^{p+q} + \lambda_{ua} x^u y^a). \quad (6.29)$$

Если  $\rho = p - 1$ , то можно положить  $\tilde{x}^a = \lambda_{ua} x^u$ ,  $\tilde{x}^p = x^{p+q}$  и уравнение (6.29) приводится к виду

$$z = e^{-\mu_b y^b} \left( \sum_{a=1}^{p-1} \tilde{x}^a y^a + \tilde{x}^p + y^p \right). \quad (6.30)$$

Непосредственная проверка показывает, что эта три-ткань не является тканью  $WR(p, p)$ .

Если  $\rho < p - 1$ , то уравнение (6.29) изотопическим преобразованием

$$\tilde{x}^a = \lambda_{ua} x^u, \quad \tilde{x}^{\rho+1} = x^{p+q}, \quad \tilde{y}^a = y^a e^{-\mu_b y^b}, \quad y^{\rho+1} = e^{-\mu_b y^b}, \quad \tilde{y}^{\rho+2} = y^p y^{\rho+1}$$

приводится к виду (6.27).

Итак, имеет место следующая теорема.

**Теорема 6.1.** *На три-тканях  $W(p, q, p + q - 1)$ , определяемых уравнениями (6.13), (6.20) и (6.27), замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера. Сердцевины этих тканей задаются соответственно уравнениями (6.14), (6.21) и (6.28). Ткани  $W(p, q, p + q - 1)$  вида (6.11) и (6.30) с нулевыми формами кривизны не являются тканями  $WR(p, q)$ .*

## 7. ТОЖДЕСТВО ОБОБЩЕННОЙ АССОЦИАТИВНОСТИ

**7.1.** Как уже отмечалось, в координатных лупах классической три-ткани Рейдемейстера выполняется тождество ассоциативности

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w).$$

Найдем тождество в координатных моноидах три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$ , соответствующее замыканию на этой ткани обобщенных конфигураций Рейдемейстера  $R(p, q)$ .

В области  $\mathcal{N}$  многообразия  $\mathcal{M}$ , несущего три-ткань  $W(p, q, p + q - 1)$ , зафиксируем  $p$  вертикальных слоев  $a_\alpha$  и  $q$  горизонтальных слоев  $b_i$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$  (см. рис. 24). Согласно п. 1.1 слои  $a_\alpha$  и  $b_i$  образуют координатную решетку ткани. Далее, рассмотрим  $q$  наклонных слоев с параметрами  $u_1, u_2, \dots, u_q$ ;  $p$  наклонных слоев с параметрами  $w_1, w_2, \dots, w_p$  и  $pq$  наклонных слоев с параметрами  $v_{11}, v_{21}, \dots, v_{p1}; v_{12}, v_{22}, \dots, v_{p2}; \dots; v_{1q}, v_{2q}, \dots, v_{pq}$ . Для каждого индекса  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  слои  $v_{\alpha 1}, v_{\alpha 2}, \dots, v_{\alpha q}$  пересекают соответствующие горизонтальные слои  $b_1, b_2, \dots, b_q$  (с тем же номером) по подмногообразиям  $U_{\alpha 1}, U_{\alpha 2}, \dots, U_{\alpha q}$ . Пусть  $x_\alpha$  — вертикальный слой, трансверсальный этим подмногообразиям.

Слой  $w_\alpha$  пересекает вертикальный слой  $a_\alpha$  по подмногообразию  $V_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ . Подмногообразия  $V_1, V_2, \dots, V_p$  допускают трансверсальный горизонтальный слой  $b_{q+1}$ . Пусть  $\bar{w}_\alpha$  — наклонный слой, проходящий через точку пересечения слоев  $x_\alpha$  и  $b_{q+1}$ ; тогда, как видно из рис. 24,

$$\begin{aligned} (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1q}) \circ (w_1, w_2, \dots, w_p) &= x_1 \cdot b_{q+1} = \bar{w}_1, \\ (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2q}) \circ (w_1, w_2, \dots, w_p) &= x_2 \cdot b_{q+1} = \bar{w}_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ (v_{p1}, v_{p2}, \dots, v_{pq}) \circ (w_1, w_2, \dots, w_p) &= x_p \cdot b_{q+1} = \bar{w}_p. \end{aligned}$$

Далее, слой  $u_i$  пересекает горизонтальный слой  $b_i$  (с тем же номером  $i$ ) по подмногообразию  $U_i$ ,  $i = \overline{1, q}$ .  $q$  подмногообразий  $U_1, U_2, \dots, U_q$  допускают трансверсальный вертикальный слой  $a_{p+1}$ , такой, что

$$(u_1, u_2, \dots, u_q) \circ (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_p) = a_{p+1} \cdot y_{q+1} = \bar{z}.$$

Для каждого индекса  $i = 1, 2, \dots, q$  слои  $v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{pi}$  пересекают соответствующие вертикальные слои  $a_1, a_2, \dots, a_p$  (с тем же номером) по подмногообразиям  $V_{1i}, V_{2i}, \dots, V_{pi}$ . Эти

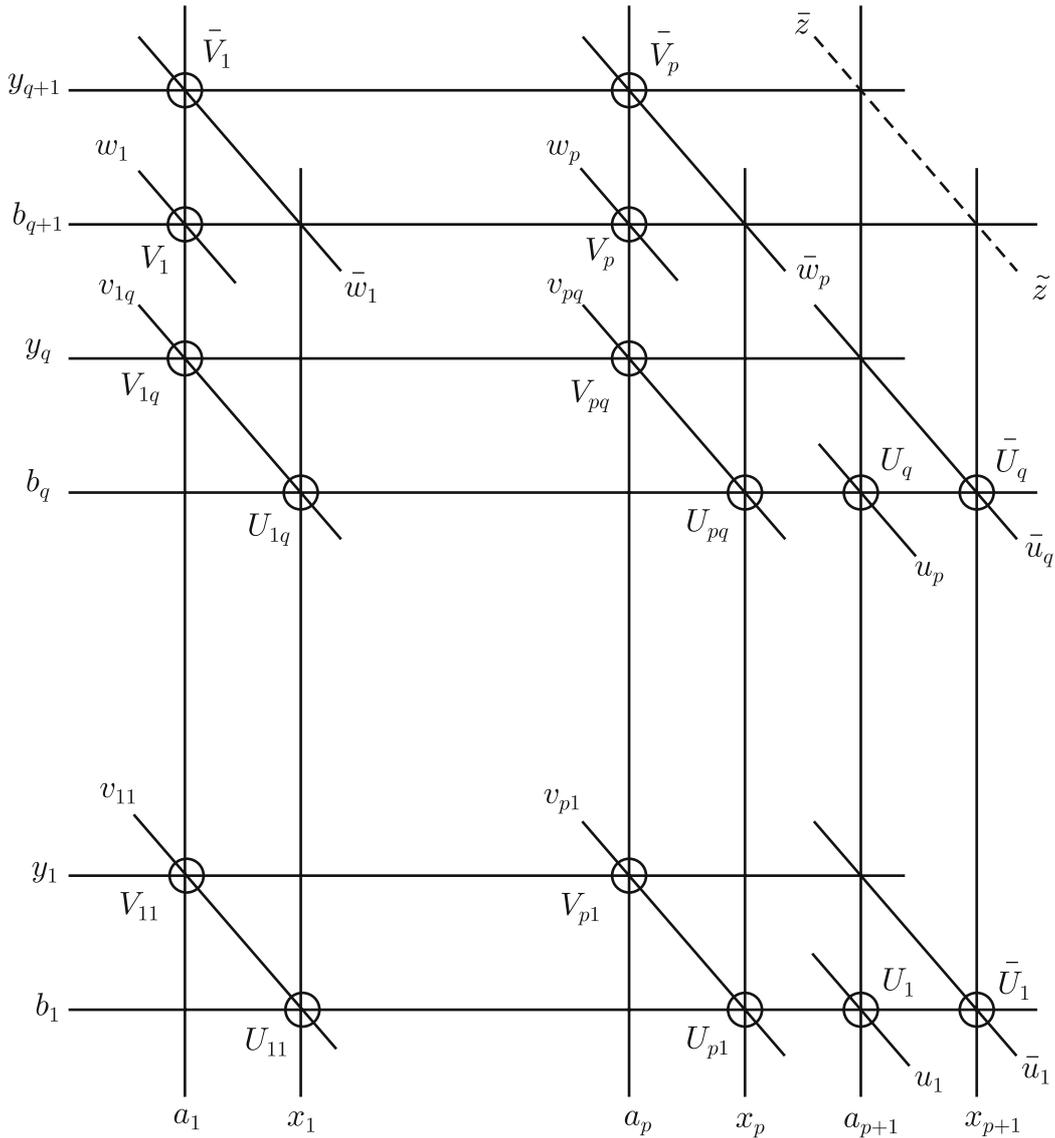


Рис. 24

подмногообразия допускают трансверсальный горизонтальный слой  $y_i$ . Каждый из этих слоев пересекает вертикальный слой  $a_{p+1}$  в некоторой точке, через которую проходит наклонный слой  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{u}_i = a_{p+1} \cdot y_i$ , при этом

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, \dots, u_q) \circ (v_{11}, v_{21}, \dots, v_{p1}) &= a_{p+1} \cdot y_1 = \bar{u}_1, \\ (u_1, u_2, \dots, u_q) \circ (v_{12}, v_{22}, \dots, v_{p2}) &= a_{p+1} \cdot y_2 = \bar{u}_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ (u_1, u_2, \dots, u_q) \circ (v_{1q}, v_{2q}, \dots, v_{pq}) &= a_{p+1} \cdot y_q = \bar{u}_q. \end{aligned}$$

Слой  $\bar{w}_\alpha$  пересекает соответствующий вертикальный слой  $a_\alpha$  (с тем же номером  $\alpha$ ) по подмногообразию  $\bar{V}_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ .  $p$  подмногообразий  $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_p$  допускают трансверсальный горизонтальный слой  $y_{q+1}$ . Далее, слой  $\bar{u}_i$  пересекает горизонтальный слой  $b_i$  по подмногообразию  $\bar{U}_i$ ,  $i = \overline{1, q}$ . Пусть  $x_{p+1}$  — вертикальный слой, трансверсальный подмногообразиям  $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_q$ , тогда

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_q) \circ (w_1, w_2, \dots, w_p) = x_{p+1} \cdot b_{q+1} = \tilde{z}.$$

Построенные слои  $\bar{z}$  и  $\tilde{z}$  на произвольной три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$ , вообще говоря, не совпадают. Если  $\bar{z} = \tilde{z}$ , то замыкается обобщенная конфигурация Рейдемейстера, изображенная на рис. 24, поэтому ткань является тканью  $WR(p, q)$ . Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 7.1.** Пусть  $u = (u_1, u_2, \dots, u_q)$  и  $w = (w_1, w_2, \dots, w_p)$  — два произвольных набора наклонных слоев три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$  и  $v_{\alpha i}$  — еще один набор  $pq$  наклонных слоев,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ . Обозначим столбцы и строки матрицы  $v_{\alpha i}$  следующим образом:

$$v_i^{(p)} = (v_{1i}, \dots, v_{pi}), \quad v_{\alpha}^{(q)} = (v_{\alpha 1}, \dots, v_{\alpha q}).$$

Три-ткань  $W(p, q, p + q - 1)$  будет тканью  $WR(p, q)$  тогда и только тогда, когда в каждом ее координатном моноиде  $\mu_{(a,b)}(\circ)$  выполняется тождество

$$u \circ (v_1^{(q)} \circ w, \dots, v_p^{(q)} \circ w) = (u \circ v_1^{(p)}, \dots, u \circ v_q^{(p)}) \circ w. \quad (7.1)$$

При  $p = q = 1$  тождество (7.1) обращается в обычное тождество ассоциативности, поэтому назовем его тождеством обобщенной ассоциативности.

Координатный моноид  $\mu_{(a,b)}(\circ)$  три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$ , в котором выполняется тождество (7.1), будем также называть ассоциативным.

**7.2.** Согласно теореме 1.4 ткань  $WR(p, q)$  (и только такая ткань) определяет бинарную физическую структуру ранга  $(p + 1, q + 1)$ . При этом уравнение  $z = f(x, y)$  координатного группоида ткани  $WR(p, q)$  является традиционной формой записи некоторого физического закона в теории физических структур. Из теоремы 7.1 следует, что уравнение  $z = f(x, y)$  является традиционной формой записи некоторого физического закона тогда и только тогда, когда функция  $f$  изотопна некоторому ассоциативному моноиду.

В частности, при  $p = q = 1$  ткань  $WR(p, q)$  является параллелизуемой три-тканью на плоскости. Известно, что ее координатная квазигруппа изотопна абелевой группе [3, 23]. Этот результат можно сформулировать в терминах теории физических структур следующим образом: гладкая вещественная функция двух вещественных аргументов  $z = f(x, y)$  будет традиционной формой записи некоторого физического закона в теории физических структур тогда и только тогда, когда квазигруппа  $f$  изотопна абелевой группе  $z = x + y$ .

**7.3.** Приведем примеры ассоциативных моноидов. Выше (см. разделы 3 и 6) найдены примеры три-тканей  $WR(p, q)$ . Следовательно, их координатные группоиды изотопны ассоциативным моноидам. Например, координатный группоид три-ткани  $WR(1, 2)$  изотопическим преобразованием

$$x^1 = u^1 - u^2, \quad x^2 = u^2, \quad y^1 = v^1$$

приводится к виду

$$z = (u^1, u^2) \circ v^1 = (u^1 - u^2)v^1 + u^2.$$

Это уравнение определяет координатный моноид ткани с единичным элементом  $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Уравнение  $z = x^1 + y^1 + x^2 y^2$  определяет координатный группоид три-ткани  $WR(2, 2)$ . Полагая

$$x^1 = u^1 - 1, \quad x^2 = u^2 - u^1 + 1, \quad y^1 = v^1, \quad y^2 = \frac{1}{2}(v^2 - v^1 + 1),$$

получим уравнение координатного моноида

$$z = (u^1, u^2) \circ (v^1, v^2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u^1 + u^2) + \frac{1}{2}(v^1 + v^2) + \frac{1}{2}(u^1 - u^2)(v^1 - v^2)$$

с единичным элементом  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

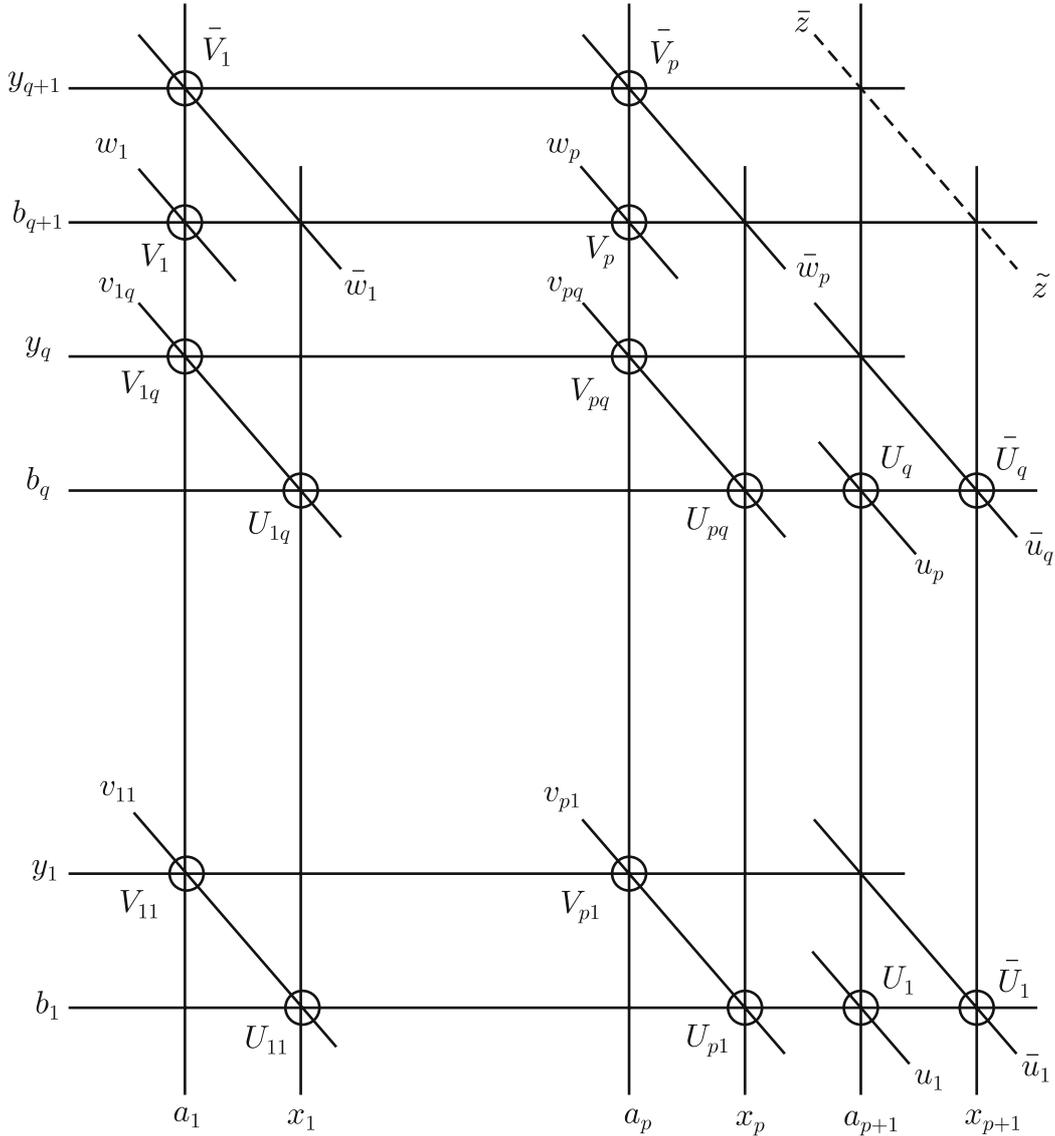


Рис. 25

8. ОБ АССОЦИАТИВНЫХ КООРДИНАТНЫХ МОНОИДАХ ТРИ-ТКАНИ  $W(p, q, r)$ 

**8.1.** Рассмотрим три-ткань  $W(p, q, r)$ , определяемую группоидом  $z = f(x, y)$  (см. (0.1)). Здесь  $x = (x^1, \dots, x^q)$ ,  $y = (y^1, \dots, y^p)$ ,  $z = (z^1, \dots, z^{p+q-r})$ ,  $p \leq q \leq r$ . По аналогии с определением операции  $\mu_{(a,b)}(\circ)$  для ткани  $W(p, q, p+q-1)$  (см. п. 1.1) определим некоторую новую алгебраическую операцию, изотопную группоиду (0.1).

В области  $\mathcal{N}$  многообразия  $\mathcal{M}$ , несущего три-ткань  $W(p, q, r)$ , зафиксируем  $l$  достаточно близких вертикальных слоев  $a_1, a_2, \dots, a_l$  и  $m$  горизонтальных слоев  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Будем говорить, что такой набор слоев образует координатную решетку. Далее, выберем произвольно  $m$  наклонных слоев  $u_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, m$ , и еще  $l$  наклонных слоев  $v_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, l$  (см. рис. 25).

Наклонный слой  $u_t$  пересекает горизонтальный слой  $b_t$  координатной решетки по некоторому подмногообразию  $U_t$  размерности  $r-p$ . Эти подмногообразия изображены на рис. 25 пунктирными кружками справа. Подмногообразия  $U_1, \dots, U_m$  допускают единственный трансверсально пересекающий их вертикальный слой  $x$  ткани  $W(p, q, r)$  тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$m((r-p)+p) - (m-1)(p+q) = p.$$

Отсюда находим число  $m$  горизонтальных слоев координатной решетки три-ткани  $W(p, q, r)$ :

$$m = \frac{q}{p + q - r}. \tag{8.1}$$

Аналогично, наклонный слой  $v_s$  пересекает вертикальный слой  $a_s$  по некоторому подмногообразию  $V_s$  размерности  $r - q$ . Эти подмногообразия изображены на рис. 25 пунктирными кружками сверху. Подмногообразия  $V_1, \dots, V_l$  допускают единственный трансверсальный горизонтальный слой  $y$  ткани  $W(p, q, r)$  тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$l((r - q) + q) - (l - 1)(p + q) = q.$$

Отсюда

$$l = \frac{p}{p + q - r}. \tag{8.2}$$

Система уравнений (8.1) и (8.2) эквивалентна следующей:

$$p + q - r = \frac{q}{m}, \quad mp = lq.$$

Из первого равенства следует, что  $q$  кратно  $m$ . Значит, существует натуральное число  $\lambda$  такое, что  $q = \lambda m$ , тогда  $p = \lambda l$  и  $r = \lambda(l + m - 1)$ . Таким образом, вертикальный слой  $x$ , трансверсальный многообразиям  $U_1, U_2, \dots, U_m$ , и горизонтальный слой  $y$ , трансверсальный многообразиям  $V_1, V_2, \dots, V_l$ , существуют и единственны только для три-тканей вида  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ .

Пусть  $z$  — наклонный слой ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ , проходящий через точку пересечения слоев  $x$  и  $y$ ,  $z = x \cdot y$ . Возникает отображение, которое обозначим, как и выше,  $\circ$ :

$$\circ : \underbrace{(\lambda_3 \times \dots \times \lambda_3)}_m \times \underbrace{(\lambda_3 \times \dots \times \lambda_3)}_l \rightarrow \lambda_3.$$

При  $\lambda = 1$  получаем три-ткань  $W(l, m, l + m - 1)$  (или, в привычных обозначениях,  $W(p, q, p + q - 1)$ ), для которой построенное отображение  $\circ$  является координатным моноидом (см. п. 1.1), поэтому операция  $\circ$  для ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$  является обобщением понятия координатного моноида три-ткани  $W(p, q, p + q - 1)$ . Назовем отображение  $\circ$  координатным моноидом ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$  и будем записывать его также  $\mu_{(a,b)}$ , так что

$$z = \mu_{(a,b)}(u, v),$$

где введены обозначения  $a = (a_s)$ ,  $b = (b_t)$ ,  $u = (u_t)$ ,  $v = (v_s)$ .

Так как набор  $u$  определяет вертикальный слой  $x$ , а набор  $v$  — горизонтальный слой  $y$ , то функция  $z = u \circ v$ , рассматриваемая как бинарная операция, является изотопом исходного координатного группоида (0.1). (Изотопия  $(\alpha, \beta, \gamma)$  имеет вид  $u = \alpha(x) = x \cdot b$ ,  $v = \beta(y) = a \cdot y$ ,  $\gamma = \text{id}$ .) Доказана следующая теорема.

**Теорема 8.1.** Координатный моноид  $\mu_{(a,b)}(\circ)$  три-ткани  $W(p, q, r)$  существует только для тканей вида  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ . Координатный моноид три-ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$  главноизотопен ее координатному группоиду.

**Следствие 1.** Для ткани  $W(r, r, r)$  координатная решетка образована одним вертикальным и одним горизонтальным слоями.

**Следствие 2.** Координатная решетка три-ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$  не зависит от  $\lambda$ .

**8.2.** Введем аналог понятия единицы для координатного моноида  $\mu_{(a,b)}(\circ)$  три-ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ . Согласно его определению получаем (см. рис. 25):

$$\begin{aligned} (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}) \circ (\underline{v}_1, v_2, \dots, v_l) &= \underline{v}_1, & (\underline{u}_1, u_2, \dots, u_m) \circ (z_{11}, z_{21}, \dots, z_{l1}) &= \underline{u}_1, \\ (z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2m}) \circ (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, v_l) &= \underline{v}_2, & (u_1, \underline{u}_2, \dots, u_m) \circ (z_{12}, z_{22}, \dots, z_{l2}) &= \underline{u}_2, \\ & \dots & & \dots \\ (z_{l1}, z_{l2}, \dots, z_{lm}) \circ (\underline{v}_1, v_2, \dots, \underline{v}_l) &= \underline{v}_l; & (u_1, u_2, \dots, \underline{u}_m) \circ (z_{1m}, z_{2m}, \dots, z_{lm}) &= \underline{u}_m. \end{aligned}$$

Как видно из последних равенств, аналогом левой единицы координатного моноида  $\mu_{(a,b)}(\circ)$  три-ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$  можно считать набор столбцов матрицы

$$e = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} & \dots & z_{l1} \\ z_{12} & z_{22} & \dots & z_{l2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1m} & z_{2l} & \dots & z_{lm} \end{pmatrix},$$

а набор ее строк — аналогом правой единицы. Поэтому будем называть матрицу  $e$  единичным элементом координатного моноида три-ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ .

**8.3.** Для ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$  обобщается понятие конфигурации Рейдемейстера  $R(p, q)$ , введенное выше в п. 3.3 для три-ткани  $W(p, q, p+q-1)$ . Построение точек  $M$  и  $M'$  на рис. 25 проводится так же, как и построение точек  $M_{p+1, q+1}$  и  $\bar{M}_{p+1, q+1}$  на рис. 8. Конфигурацию, изображенную на рис. 25, назовем также обобщенной конфигурацией Рейдемейстера и обозначим  $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ .

Если точки  $M$  и  $M'$  лежат на одном наклонном слое, то будем говорить, что конфигурация Рейдемейстера  $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$  замыкается. Если на некоторой три-ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$  замыкаются все достаточно малые конфигурации  $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ , то будем называть такую ткань обобщенной три-тканью Рейдемейстера и обозначать  $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ .

Замыкание конфигураций  $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$  означает, что наклонные слои  $z_{st}, z_{s, m+1}, z_{l+1, t}, z_{l+1, m+1}$ , образующие эту конфигурацию, связаны некоторой функциональной зависимостью:

$$\Phi^\xi(z_{11}, z_{21}, \dots, z_{l+1, 1}, \dots, z_{1, m+1}, z_{2, m+1}, \dots, z_{l+1, m+1}) = 0,$$

где  $\xi = 1, 2, \dots, \lambda$ ,  $z_{st} = f(x_s, y_t)$ . Иными словами, конфигурация  $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$  вполне определяется заданием  $(l+1)(m+1) - 1$  входящих в нее наклонных слоев, т.е. один из слоев, например,  $z_{l+1, m+1}$ , является функцией других:

$$z_{l+1, m+1}^\xi = \mathcal{C}^\xi(z_{st}, z_{s, m+1}, z_{l+1, t}), \quad s = 1, 2, \dots, l, \quad t = 1, 2, \dots, m.$$

Функция  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^\xi)$  является обобщением понятия сердцевины три-ткани  $WR(p, q)$ , поэтому назовем ее также сердцевиной три-ткани  $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ .

Из определения ткани  $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$  вытекают следующие утверждения.

**Теорема 8.2.** *Сердцевина ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$  существует тогда и только тогда, когда эта ткань является тканью  $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ .*

**Теорема 8.3.** *Сердцевина три-ткани  $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$  вполне определяет координатный группоид этой ткани.*

Следующая теорема обобщает понятие ассоциативности для координатного моноида  $\mu_{(a,b)}(\circ)$  три-ткани  $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ . Ее доказательство аналогично доказательству теоремы 7.1, поэтому приведем только ее формулировку.

**Теорема 8.4.** *Пусть  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  и  $w = (w_1, w_2, \dots, w_l)$  — два произвольных набора наклонных слоев ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$  и пусть  $v_{st}$  — еще один набор  $lm$  наклонных слоев,  $s = 1, 2, \dots, l$ ,  $t = 1, 2, \dots, m$ . Обозначим столбцы и строки матрицы  $v_{st}$  следующим образом:*

$$v_t^{(l)} = (v_{1t}, v_{2t}, \dots, v_{lt}), \quad v_s^{(m)} = (v_{s1}, v_{s2}, \dots, v_{sm}).$$

*Три-ткань  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$  будет тканью  $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+lm-1))$  тогда и только тогда, когда в каждом ее координатном моноиде выполняется следующее тождество:*

$$u \circ (v_1^{(m)} \circ w, v_2^{(m)} \circ w, \dots, v_l^{(m)} \circ w) = (u \circ v_1^{(l)}, u \circ v_2^{(l)}, \dots, u \circ v_m^{(l)}) \circ w. \quad (8.3)$$

При  $m = q$  и  $l = p$  тождество (8.3) совпадает с тождеством (7.1), названным тождеством обобщенной ассоциативности ткани  $W(p, q, p + q - 1)$ , поэтому также назовем (8.3) тождеством обобщенной ассоциативности ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ .

Координатный моноид три-ткани  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ , в котором выполняется тождество (8.3), назовем также ассоциативным.

## 9. ТРИ-ТКАНИ $GW(p, q, q)$ , ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ГРУППАМИ ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

**9.1.** Известно [3], что три-ткань Рейдемейстера, образованная слоениями одинаковой размерности  $r$ , порождается определенным образом  $r$ -мерной группой Ли, причем в адаптированном репере тензор кручения такой ткани совпадает со структурным тензором группы, а тензор кривизны равен нулю. Последнее условие является характеристическим для таких тканей, названных групповыми.

В работе [28] В. В. Гольдберг описал класс тканей  $W(p, q, r)$ , порождаемых тремя группами Ли  $G_p, G_q, G_r$  размерности соответственно  $p, q, r$  на прямом произведении  $G_n = G_p \times G_q$ . Согласно [28], первое слоение ткани образовано смежными классами группы  $G_n$  по подгруппе  $(G_p, e)$ , второе слоение — смежными классами группы  $G_n$  по подгруппе  $(e, G_q)$ , а третье слоение — смежными классами группы  $G_n$  по подгруппе  $G_r \times G_r^{-1}$ , где  $(e, e)$  — единичный элемент группы  $G_n$  и  $G_r^{-1} = \varphi(G_r)$ ,  $\varphi$  — антиавтоморфизм группы  $G_r$ . Такие ткани он назвал групповыми.

**9.2.** В работе [64] описана три-ткань, порождаемая группой Ли преобразований. Она определяется следующим образом.

Пусть группа Ли  $G$  размерности  $q$  действует на гладком  $p$ -мерном многообразии  $Y$ , т.е. задана гладкая функция вида

$$f : G \times Y \rightarrow Y, \quad z = f(a, y), \quad (9.1)$$

удовлетворяющая условиям:

$$f(e, y) = y, \quad (9.2)$$

$$f(a, f(b, y)) = f(\phi(a, b), y), \quad (9.3)$$

где  $e$  — единица группы  $G$ ,  $\phi(a, b)$  — операция в группе  $G$ , называемой параметрической. Уравнения (9.1) определяют три-ткань, образованную слоениями

$$\lambda_1 : a = \text{const}, \quad \lambda_2 : y = \text{const}, \quad \lambda_3 : z = f(a, y) = \text{const}$$

размерностей соответственно  $p, q$  и  $q$  на прямом произведении  $M = G \times Y$ . Эта ткань обозначена  $GW(p, q, q)$ .

Как уже отмечено во Введении, такие ткани впервые изучал Нгуен Зоан Туан [50, 51]. Мы рассматриваем здесь два новых аспекта: во-первых, конфигурации, замыкание которых характеризует три-ткань  $GW(p, q, q)$ , во-вторых, взаимосвязь ткани  $GW(p, q, q)$  и групповой три-ткани  $W(q, q, q)$ , порождаемой группой  $G$ .

Выясним геометрический смысл условий (9.2) и (9.3). Для этого рассмотрим вертикальный слой первого слоения ткани  $GW(p, q, q)$ , определяемый параметром  $e$ , и горизонтальный слой второго слоения с параметром  $y$ . Через точку их пересечения  $O$  проходит наклонный слой третьего слоения, определяемый, в силу (9.2), также параметром  $y$  (см. рис. 26).

Рассмотрим еще два произвольных вертикальных слоя с параметрами  $a$  и  $b$ . Они определяют третий вертикальный слой с параметром  $c = \phi(a, b)$ . Пусть наклонный слой  $y$  пересекает вертикальный слой  $a$  в некоторой точке  $A$ . Через  $A$  проходит единственный горизонтальный слой  $y'$  (при этом  $y = f(a, y')$ ), который пересечет вертикальный слой  $e$  в некоторой точке  $P$ . Наклонный слой, проходящий через точку  $P$ , будет определяться также параметром  $y'$ . Этот слой пересечет вертикальный слой  $b$  в некоторой точке  $B$ . Через  $B$  проходит единственный горизонтальный слой  $y''$ , при этом  $y' = f(b, y'')$ . Слой  $y''$  пересечет вертикальный слой  $c$  в точке  $C$ . Наклонный слой, проходящий через  $C$ , определяется параметром  $f(c, y'')$ , который, в силу свойства (9.3), также равен  $y$ :  $y = f(a, (b, y'')) = f(c, y'')$ . Это означает, что точки  $A$  и  $C$  лежат на одном наклонном слое.

Далее, если мы проведем аналогичное построение, начав с другого горизонтального слоя  $\bar{y}$ , то получим новые точки  $\bar{A}$  и  $\bar{C}$ , которые также будут лежать на одном наклонном слое. Конфигурация

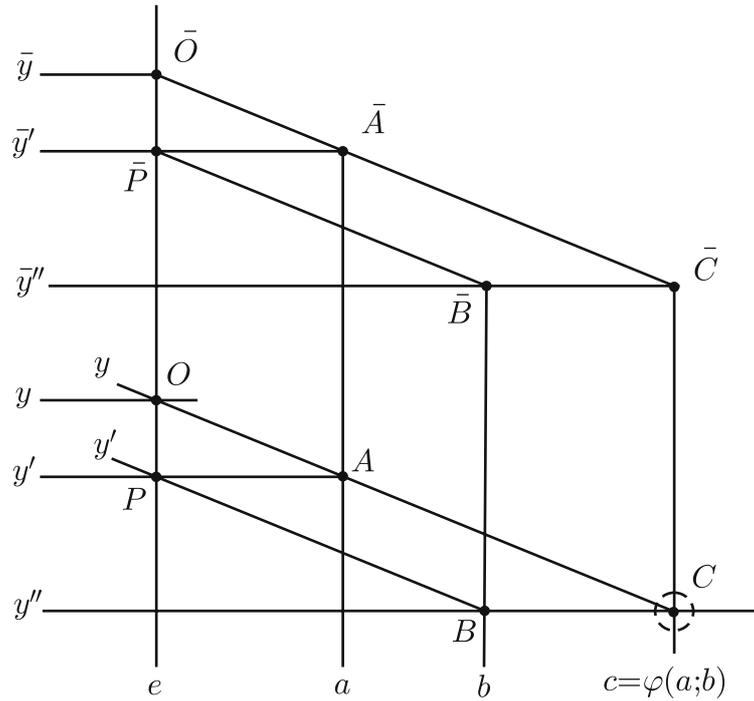


Рис. 26

$APBC\bar{A}\bar{P}\bar{B}\bar{C}$  на ткани  $GW(p, q, q)$  аналогична известной конфигурации  $R$  (Рейдемейстера) для классической три-ткани  $W(r, r, r)$ , образованной слоениями одинаковой размерности  $r$ . Поэтому, следуя работе [62], обозначим ее через  $R_e(1, 1)$ . Доказана следующая теорема.

**Теорема 9.1.** *На три-ткани  $GW(p, q, q)$  замыкаются все (т.е. для любых  $a, b, y, \bar{y}$ ) конфигурации  $R_e(1, 1)$ , построенные на вертикальном слое с параметром  $e$ .*

Обозначим через  $R_{x_0}(1, 1)$  аналогичную конфигурацию, построенную на произвольном вертикальном слое с параметром  $x_0$ . Используя геометрический метод доказательства, примененный в работе [84], получим следующее утверждение.

**Теорема 9.2.** *На три-ткани  $GW(p, q, q)$  замыкаются все конфигурации  $R_{x_0}(1, 1)$ .*

Рассмотрим уравнение (9.1) в предположении, что  $G$  — произвольное многообразие, не являющееся, вообще говоря, группой Ли. Тогда уравнение (9.1) при условии, что функция  $f$  является гладкой и почти всюду регулярной по каждому из аргументов, задает произвольную три-ткань  $W(p, q, q)$ , на которой фигуры  $R_{x_0}(1, 1)$ , вообще говоря, не замыкаются, т.е. точки  $C$  и  $\bar{C}$  лежат на разных вертикальных слоях.

Обозначим через  $V(z, y)$   $(q - p)$ -мерное многообразие, образованное пересечением наклонного слоя с параметром  $z$  и горизонтального слоя с параметром  $y$ . Пусть  $x_0$  — фиксированный вертикальный слой произвольной три-ткани  $W(p, q, q)$ ,  $a$  и  $b$  — еще два ее вертикальных слоя. Тогда для любого наклонного слоя с параметром  $y$  возникает многообразие  $V(y, y'')$  (см. рис. 26). Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 9.3.** *Если при любых фиксированных  $a$  и  $b$  все многообразия  $V(y, y'')$  (т.е. при любом  $y$ ) допускают общий трансверсальный вертикальный слой, то на многообразии  $G$  возникает структура группы Ли, ткань  $W(p, q, q)$  является тканью  $GW(p, q, q)$ , а параметр  $x_0$  является единицей группы  $G$ .*

Последнее утверждение можно усилить. Пусть, как и выше,  $x_0, a$  и  $b$  — произвольные вертикальные слои три-ткани  $W(p, q, q)$ . Рассмотрим  $m = [q/p]$  наклонных слоев этой ткани с параметрами  $y_t, t = 1, 2, \dots, m$ . Тогда многообразия  $V(y_t, y_t'')$  допускают хотя бы один трансверсальный вертикальный слой ткани  $W(p, q, q)$ . Но  $m + 1$  многообразий такого вида уже не имеют, вообще говоря,

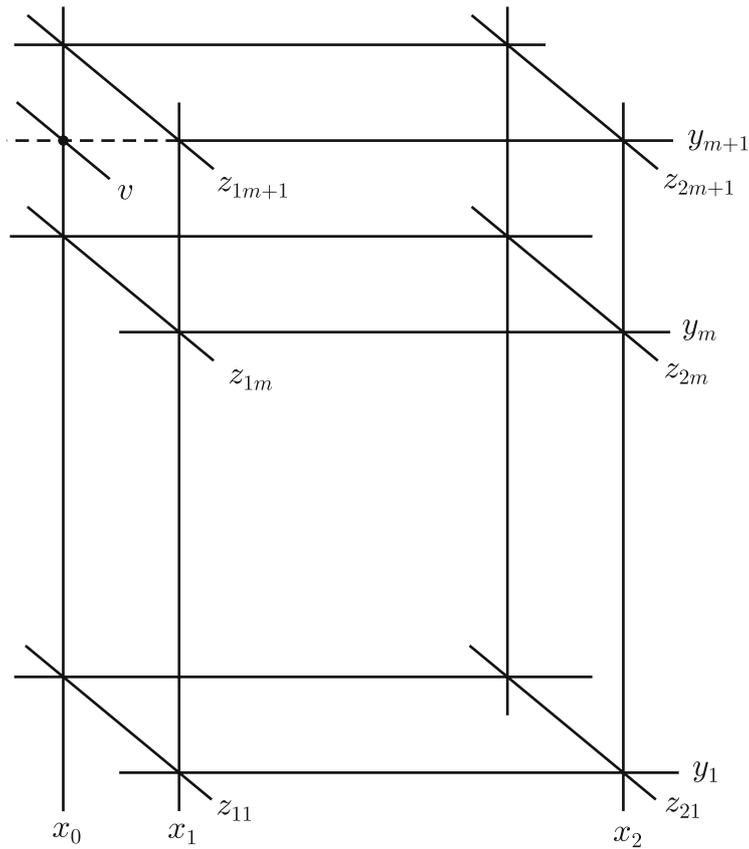


Рис. 27

общей трансверсали. Если же такая трансверсаль существует, то будем говорить, что на три-ткани  $W(p, q, q)$  замыкаются конфигурации  $R_{x_0}(1, m)$ .

**Теорема 9.4.** *Если на три-ткани  $W(p, q, q)$  замыкаются все конфигурации  $R_{x_0}(1, m)$ , связанные с некоторым вертикальным слоем  $x_0$ , то на ней замыкаются все конфигурации такого вида (т.е. при любых  $x_0$ ) и такая ткань является тканью  $GW(p, q, q)$ .*

**9.3.** По аналогии с введенным в разделе 1 понятием сердцевинной ткани  $WR(p, q, p + q - 1)$  определим понятие сердцевинной ткани  $GW(p, q, q)$ .

Произвольная конфигурация  $R_{x_0}(1, m)$  содержит  $2(m + 1)$  наклонных слоев, параметры которых обозначим  $z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1,m+1}; z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2,m+1}$  (см. рис. 27). Если конфигурация замыкается, то эти параметры связаны некоторыми соотношениями

$$\Phi^\rho(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1,m+1}; z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2,m+1}) = 0, \tag{9.4}$$

существенное число которых мы установим ниже. Из соотношений (9.4) видно, что часть из параметров  $z$  является функцией остальных параметров. Эту функцию назовем сердцевинной тканью  $GW(p, q, q)$ . Систему (9.4), неявно задающую сердцевину, для краткости будем также называть сердцевинной тканью  $GW(p, q, q)$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 9.5.** *Сердцевина (9.4) ткани  $GW(p, q, q)$  может быть записана в виде*

$$\varphi^\rho(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}, z_{1,m+1}) = \varphi^\rho(z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2m}, z_{2,m+1}),$$

где  $\varphi^\rho$  — инварианты группы преобразований,  $\rho = \overline{1, (m + 1)p - q}$ ,  $m = [q/p]$ .

*Доказательство.* Отметим, во-первых, что поскольку  $p \leq q$ , то  $q = mp + p_1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p_1 \in \mathbb{Z}_0$ ,  $p_1 < p$ . Далее, из рис. 27 следует, что параметры

$$z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1,m+1}; z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2,m+1}$$

связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} z_{11} &= f(x_1, y_1), & z_{21} &= f(x_2, y_1), \\ z_{12} &= f(x_1, y_2), & z_{22} &= f(x_2, y_2), \\ &\dots & &\dots \\ z_{1m} &= f(x_1, y_m), & z_{2m} &= f(x_2, y_m), \\ z_{1m+1} &= f(x_1, y_{m+1}), & z_{2m+1} &= f(x_2, y_{m+1}). \end{aligned}$$

Исключая из этой системы переменные  $x_1$  и  $x_2$ , получим две серии  $(m+1)p - q = p - p_1$  уравнений

$$\begin{cases} z_{1m+1}^{p_1+1} = f^{p_1+1}(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}, z_{1m+1}^1, \dots, z_{1m+1}^{p_1}, y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}), \\ z_{1m+1}^{p_1+2} = f^{p_1+2}(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}, z_{1m+1}^1, \dots, z_{1m+1}^{p_1}, y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}), \\ \dots \\ z_{1m+1}^p = f^p(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}, z_{1m+1}^1, \dots, z_{1m+1}^{p_1}, y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}); \\ z_{2m+1}^{p_1+1} = f^{p_1+1}(z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2m}, z_{2m+1}^1, \dots, z_{2m+1}^{p_1}, y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}), \\ z_{2m+1}^{p_1+2} = f^{p_1+2}(z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2m}, z_{2m+1}^1, \dots, z_{2m+1}^{p_1}, y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}), \\ \dots \\ z_{2m+1}^p = f^p(z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2m}, z_{2m+1}^1, \dots, z_{2m+1}^{p_1}, y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}). \end{cases}$$

Выражая из каждой системы переменные  $y_{m+1}^{p_1+1}, y_{m+1}^{p_1+2}, \dots, y_{m+1}^p$ , имеем

$$\begin{aligned} y_{m+1}^\rho &= \varphi^\rho(y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}^1, \dots, y_{m+1}^{p_1}, z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}, z_{1m+1}), \\ y_{m+1}^\rho &= \varphi^\rho(y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}^1, \dots, y_{m+1}^{p_1}, z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2m}, z_{2m+1}), \end{aligned}$$

где  $\rho = \overline{p_1 + 1, p}$ .

Исключая из последних уравнений переменные  $y_{m+1}^\rho$ , получим равенства

$$\begin{aligned} \varphi^\rho(y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}^1, \dots, y_{m+1}^{p_1}, z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}, z_{1m+1}) &= \\ &= \varphi^\rho(y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}^1, \dots, y_{m+1}^{p_1}, z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2m}, z_{2m+1}). \end{aligned}$$

В силу замыкания конфигурации, изображенной на рис. 27, эти равенства являются тождествами относительно переменных  $y_1, y_2, \dots, y_{m+1}$  и содержат только переменные  $z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1,m+1}, z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2,m+1}$ , т.е. определяют сердцевину три-ткани  $GW(p, q, q)$ .

С другой стороны, функции  $\varphi^\rho$  являются инвариантами рассматриваемой группы преобразований. Действительно, согласно определению [25], инвариантом группы преобразований называется функция от переменных, преобразуемых группой, которая сохраняется при всех ее преобразованиях. Функции  $\varphi^\rho$  связывают, с одной стороны, переменные  $z_{2\bar{t}}$ , а с другой — их образы  $z_{1\bar{t}}$ , получаемые следующим преобразованием группы  $G$ :  $z_{1\bar{t}} = f(x_1, (f^{-1}(x_2, z_{2\bar{t}})))$ ,  $\bar{t} = \overline{1, m+1}$  (см. рис. 27). Теорема доказана.  $\square$

**9.4.** Рассмотрим три-ткань  $GW(p, q, q)$ , для которой число  $q$  кратно  $p$ , т.е.  $q = mp$ . Для такой (и только такой) ткани существует координатный моноид  $\mu_{(a,b)}(\circ)$ . Действительно, согласно теореме 8.1, координатный моноид существует только для три-тканей вида  $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ . Поскольку мы рассматриваем ткань  $W(p, q, q)$ , то  $\lambda m = \lambda(l+m-1)$ , т.е.  $l = 1$ ,  $\lambda = p$ ,  $q = mp$ . В этом случае координатная решетка образована одним вертикальным слоем  $a$  и  $m$  горизонтальными слоями  $b_1, b_2, \dots, b_m$  (см. рис. 7).

Определим координатный моноид  $\mu_{(a,b)}(\circ)$  ткани  $W(p, q, q)$ . В соответствии с п. 8.1 рассмотрим  $m$  наклонных слоев ткани с параметрами  $u_1, u_2, \dots, u_m$ . Эти слои пересекают соответствующие горизонтальные слои  $b_1, b_2, \dots, b_m$  по подмногообразиям  $U_1, U_2, \dots, U_m$ . Подмногообразия  $U_1, U_2, \dots, U_m$  допускают (локально!) трансверсальный вертикальный слой с параметром  $x$ . Пусть  $v$  еще один наклонный слой. Он пересекает вертикальный слой  $a$  в некоторой точке  $A$ . Через последнюю проходит горизонтальный слой ткани, который обозначим  $y$ . Пусть  $z$  — наклонный

слой, проходящий через точку пересечения слоев  $x$  и  $y$ . Согласно п. 8.1, координатный моноид  $\mu_{(a,b)}(\circ)$  ткани  $W(p, q, q)$  определяется как бинарная операция  $z = (u_1, u_2, \dots, u_m) \circ v$ .

Найдем сердцевину три-ткани  $GW(p, mp, mp)$ . Из рис. 27 имеем

$$(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}) \circ v = z_{1,m+1}, \quad (z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2m}) \circ v = z_{2,m+1}.$$

Исключая из этих равенств параметр  $v$ , получим уравнение сердцевины рассматриваемой три-ткани в виде

$$(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}) / z_{1,m+1} = (z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2m}) / z_{2,m+1},$$

где  $/$  — правая обратная операция для  $\circ$ . Число инвариантов вида  $(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}) / z_{1,m+1}$  (и уравнений сердцевины) равно  $p$ .

В частности, при  $m = 1$  получаем классическую групповую три-ткань, порождаемую  $p$ -мерной группой  $G$  (см. Введение). Сердцевина такой ткани определяется  $p$  уравнениями

$$z_{11} / z_{12} = z_{21} / z_{22}.$$

Заметим, что последнее равенство непосредственно следует из замыкания фигур  $R$  (см. рис. 9(b)).

**9.5.** В разделе 3 найдены уравнения сердцевины три-тканей  $WR(1, 1)$ ,  $WR(1, 2)$  и  $WR(1, 3)$ , порождаемых группами преобразований на прямой. Запишем эти уравнения в виде равенства инвариантов соответствующей группы преобразований.

1. Ткань  $WR(1, 1)$  определяется уравнением  $z = a + y$ . Уравнение ее сердцевины (2.1) легко приводится к виду

$$z_{12} - z_{11} = z_{22} - z_{21},$$

где инвариант — величина отрезка.

2. Ткань  $WR(1, 2)$  определяется уравнением  $z = a^1 y + a^2$ . Уравнение ее сердцевины (3.1) эквивалентно следующему:

$$\frac{z_{12} - z_{11}}{z_{13} - z_{11}} = \frac{z_{22} - z_{21}}{z_{23} - z_{21}}.$$

Здесь инвариант — простое отношение трех точек.

3. Сердцевина ткани  $WR(1, 3)$ , определяемой уравнением  $z = \frac{a^1 y + a^2}{y + a^3}$ , приводится к виду

$$\frac{(z_{11} - z_{12})(z_{13} - z_{14})}{(z_{11} - z_{13})(z_{12} - z_{14})} = \frac{(z_{21} - z_{22})(z_{23} - z_{24})}{(z_{21} - z_{23})(z_{22} - z_{24})},$$

а инвариантом является сложное отношение четырех точек.

В рассмотренных примерах  $p = 1$ , поэтому число  $q/p$  целое и число инвариантов (уравнений сердцевины) также равно 1 (т.е.  $p$ ). Приведем пример три-ткани в случае, когда  $q$  не кратно  $p$ . Для три-ткани  $GW(2, 3, 3)$ , определяемой группой движений

$$z^1 = y^1 \sin a^3 + y^2 \cos a^3 + a^1, \quad z^2 = -y^1 \cos a^3 + y^2 \sin a^3 + a^2,$$

имеем  $m = [3/2] = 1$ , поэтому число инвариантов и, соответственно, уравнений сердцевины равно  $(m + 1)p - q = 1$ , т.е. меньше  $p = 2$ . Уравнение сердцевины три-ткани  $GW(2, 3, 3)$  приводится к виду

$$(z_{11}^1 - z_{12}^1)^2 + (z_{11}^2 - z_{12}^2)^2 = (z_{21}^1 - z_{22}^1)^2 + (z_{21}^2 - z_{22}^2)^2.$$

Здесь инвариант — длина отрезка.

**9.6.** В [64, 66] описаны три-ткани, порождаемые аффинной и проективной группами на плоскости и в пространстве. Для каждой из этих тканей найдена сердцевина в виде равенства инвариантов соответствующей группы преобразований. Рассмотрим сначала три-ткань  $GW(2, 6, 6)$ , определяемую аффинной группой  $G$  на плоскости:

$$z^1 = a^1 y^1 + a^2 y^2 + a^3, \quad z^2 = a^4 y^1 + a^5 y^2 + a^6. \quad (9.5)$$

**Теорема 9.6.** *Аффинная группа на плоскости обладает двумя четырехточечными инвариантами.*

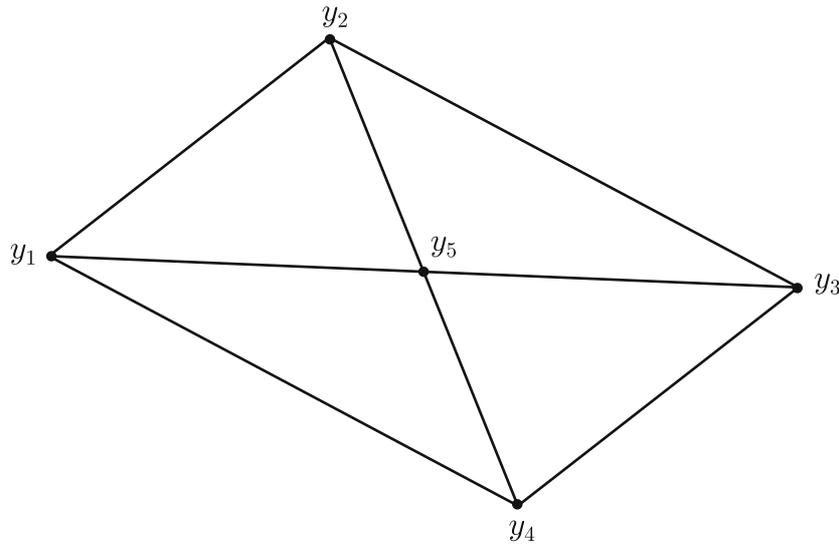


Рис. 28

*Доказательство.* Действительно, система (9.5) содержит 6 параметров  $a^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Чтобы их исключить, зафиксируем на плоскости 4 произвольные точки  $y_{\bar{t}}(y_{\bar{t}}^1, y_{\bar{t}}^2)$ ,  $\bar{t} = 1, 2, 3, 4$ , и найдем их образы  $z_{\bar{t}}(z_{\bar{t}}^1, z_{\bar{t}}^2)$ :

$$z_{\bar{t}}^1 = a^1 y_{\bar{t}}^1 + a^2 y_{\bar{t}}^2 + a^3, \quad z_{\bar{t}}^2 = a^4 y_{\bar{t}}^1 + a^5 y_{\bar{t}}^2 + a^6. \quad (9.6)$$

Исключая из последней системы параметры  $a^i$ , получим уравнения

$$\begin{vmatrix} z_1^1 & y_1^1 & y_1^2 & 1 \\ z_2^1 & y_2^1 & y_2^2 & 1 \\ z_3^1 & y_3^1 & y_3^2 & 1 \\ z_4^1 & y_4^1 & y_4^2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z_1^2 & y_1^1 & y_1^2 & 1 \\ z_2^2 & y_2^1 & y_2^2 & 1 \\ z_3^2 & y_3^1 & y_3^2 & 1 \\ z_4^2 & y_4^1 & y_4^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

которые можно записать в следующем виде:

$$\frac{S(y_1, y_2, y_3)}{S(y_1, y_2, y_4)} = \frac{S(z_1, z_2, z_3)}{S(z_1, z_2, z_4)}, \quad \frac{S(y_1, y_3, y_4)}{S(y_2, y_3, y_4)} = \frac{S(z_1, z_3, z_4)}{S(z_2, z_3, z_4)}. \quad (9.7)$$

Здесь  $S(y_1, y_2, y_3)$  — площадь треугольника с вершинами  $y_1, y_2, y_3$  и т. д.

Равенства (9.7) означают, что входящие в них отношения площадей треугольников являются инвариантами рассматриваемой аффинной группы, что и доказывает теорему.  $\square$

Последнюю теорему можно доказать геометрически. Приведем это доказательство.

С тремя точками плоскости, не лежащими на одной прямой, невозможно связать никакого аффинного инварианта. Зафиксируем на плоскости четыре точки  $y_1, y_2, y_3$  и  $y_4$ , и пусть  $y_5$  — точка пересечения диагоналей  $y_1y_3$  и  $y_2y_4$  четырехугольника  $(y_1y_2y_3y_4)$  (см. рис. 28).

Обозначим через  $S_{123}$  площадь треугольника с вершинами  $y_1, y_2, y_3$ , через  $S_{124}$  — площадь треугольника с вершинами  $y_1, y_2, y_4$  и т. д. Отношение площадей  $S_{125}$  и  $S_{123}$  этих треугольников является аффинным инвариантом, так как оно равно отношению их оснований:

$$\frac{S_{125}}{S_{123}} = \frac{y_1y_5}{y_1y_3}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, найдем еще три аффинных инварианта:

$$\frac{S_{125}}{S_{124}}, \quad \frac{S_{345}}{S_{234}}, \quad \frac{S_{345}}{S_{134}}.$$

Исключая из этих выражений величины  $S_{125}$  и  $S_{345}$ , получим два следующих инварианта:

$$\frac{S_{123}}{S_{124}}, \quad \frac{S_{134}}{S_{234}}.$$

Таким образом, аффинная группа на плоскости имеет два четырехточечных инварианта.

Найдем сердцевину три-ткани  $GW(2, 6, 6)$ . Пусть, как и выше,  $z_{\bar{t}}(z_{\bar{t}}^1, z_{\bar{t}}^2)$  — образы точек  $y_{\bar{t}}$  при некотором наборе параметров  $a^1, \dots, a^6$ , а  $\bar{z}_{\bar{t}}(\bar{z}_{\bar{t}}^1, \bar{z}_{\bar{t}}^2)$  — образы тех же точек  $y_{\bar{t}}$  при другом наборе параметров. Тогда получим равенства

$$\frac{S(y_1, y_2, y_3)}{S(y_1, y_2, y_4)} = \frac{S(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)}{S(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_4)}, \quad \frac{S(y_1, y_3, y_4)}{S(y_2, y_3, y_4)} = \frac{S(\bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{z}_4)}{S(\bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)}. \quad (9.8)$$

Исключая из уравнений (9.7) и (9.8) переменные  $y_{\bar{t}}$ , найдем сердцевину три-ткани  $GW(2, 6, 6)$  в виде

$$\frac{S(z_1, z_2, z_3)}{S(z_1, z_2, z_4)} = \frac{S(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)}{S(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_4)}, \quad \frac{S(z_1, z_3, z_4)}{S(z_2, z_3, z_4)} = \frac{S(\bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{z}_4)}{S(\bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)}. \quad (9.9)$$

Полученные результаты можно обобщить на многомерный случай. Рассмотрим  $p(p+1)$ -параметрическую группу аффинных преобразований на  $p$ -мерной плоскости:

$$z^\alpha = a_\beta^\alpha y^\beta + a^\alpha,$$

где  $\alpha = \overline{1, p}$ . Найдем инварианты этой группы. Для этого зафиксируем на  $p$ -мерной плоскости  $p+2$  точки  $y_{\bar{t}}(y_{\bar{t}}^1, y_{\bar{t}}^2, \dots, y_{\bar{t}}^p)$ ,  $\bar{t} = 1, 2, \dots, p+2$ , и найдем их образы  $z_{\bar{t}}(z_{\bar{t}}^1, z_{\bar{t}}^2, \dots, z_{\bar{t}}^p)$ :

$$z_{\bar{t}}^\alpha = a_\beta^\alpha y_{\bar{t}}^\beta + a_{p+1}^\alpha. \quad (9.10)$$

(Здесь обозначено  $a_{p+1}^\alpha \equiv a^\alpha$ .) Исключая из этой системы параметры  $a_\beta^\alpha$  и  $a_{p+1}^\alpha$ , получим  $p$  уравнений

$$\begin{vmatrix} z_1^\alpha & y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^p & 1 \\ z_2^\alpha & y_2^1 & y_2^2 & \dots & y_2^p & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_p^\alpha & y_p^1 & y_p^2 & \dots & y_p^p & 1 \\ z_{p+1}^\alpha & y_{p+1}^1 & y_{p+1}^2 & \dots & y_{p+1}^p & 1 \\ z_{p+2}^\alpha & y_{p+2}^1 & y_{p+2}^2 & \dots & y_{p+2}^p & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (9.11)$$

$\alpha = \overline{1, p}$ .

Для упрощения дальнейших выкладок добавим к этой системе тождество:

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^p & 1 \\ 1 & y_2^1 & y_2^2 & \dots & y_2^p & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_p^1 & y_p^2 & \dots & y_p^p & 1 \\ 1 & y_{p+1}^1 & y_{p+1}^2 & \dots & y_{p+1}^p & 1 \\ 1 & y_{p+2}^1 & y_{p+2}^2 & \dots & y_{p+2}^p & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (9.12)$$

Обозначим через  $V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})$  объем полиэдра с вершинами в точках  $y_1, y_2, \dots, y_{p+1}$ ,  $V(y_1, y_2, \dots, y_p, y_{p+2})$  — объем полиэдра с вершинами в точках  $y_1, y_2, \dots, y_p, y_{p+2}$  и т.д. Тогда систему (9.11), (9.12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} z_1^\alpha V(y_2, y_3, \dots, y_{p+2}) - z_2^\alpha V(y_1, y_3, \dots, y_{p+2}) + \dots + (-1)^{p+1} z_{p+2}^\alpha V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1}) &= 0, \\ V(y_2, y_3, \dots, y_{p+2}) - V(y_1, y_3, \dots, y_{p+2}) + \dots + (-1)^{p+1} V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1}) &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим далее аналогично через  $V(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})$  объем полиэдра с вершинами в точках  $z_1, z_2, \dots, z_{p+1}$ ,  $V(z_1, z_2, \dots, z_p, z_{p+2})$  — объем полиэдра с вершинами в точках  $z_1, z_2, \dots, z_p, z_{p+2}$

и т.д. Тогда последние соотношения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+2})}{V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})} &= \frac{V(z_2, z_3, \dots, z_{p+2})}{V(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})}, \\ \frac{V(y_1, y_3, \dots, y_{p+2})}{V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})} &= \frac{V(z_1, z_3, \dots, z_{p+2})}{V(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{V(y_1, y_2, \dots, y_p, y_{p+2})}{V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})} &= \frac{V(z_1, z_2, \dots, z_p, z_{p+2})}{V(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})}. \end{aligned}$$

Эта система содержит  $p$  независимых уравнений и эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} \frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})}{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})} &= \frac{V(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})}{V(z_2, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})}, \\ \frac{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})} &= \frac{V(z_2, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})}{V(z_1, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-2}, y_p, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_{p+2})} &= \frac{V(z_1, z_2, \dots, z_{p-2}, z_p, z_{p+1}, z_{p+2})}{V(z_1, z_2, \dots, z_{p-1}, z_{p+1}, z_{p+2})}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Равенства (9.13) означают, что входящие в них отношения объемов  $(p+1)$ -эдров являются инвариантами рассматриваемой аффинной группы. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 9.7.**  $p(p+1)$ -параметрическая аффинная группа на  $p$ -мерной плоскости имеет  $p$  независимых  $(p+2)$ -точечных инвариантов

$$\frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})}{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})}, \quad \frac{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})}, \quad \dots, \quad \frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-2}, y_p, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_{p+2})},$$

где  $V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})$  — объем полиэдра с вершинами  $y_1, y_2, \dots, y_{p+1}$  и т. д.

В частности, при  $p=2$  получаем теорему 9.6.

Рассмотрим три-ткань, определяемую аффинной группой преобразований  $A_p$  на многообразии  $\mathcal{M} = A_p \times Y$  размерности  $p(p+2)$ . Обозначим такую ткань через  $A_p W$ . Она образована тремя слоениями  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$  размерностей  $p, p(p+1)$  и  $p(p+1)$  соответственно. Найдём сердцевину этой ткани.

Пусть  $z_{\bar{t}}$  — образы точек  $y_{\bar{t}}$ ,  $\bar{t} = \overline{1, p+2}$ , при аффинном преобразовании с некоторым набором параметров. Уравнения, связывающие координаты указанных точек, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})}{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})} &= \frac{V(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})}{V(z_2, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})}, \\ \frac{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})} &= \frac{V(z_2, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})}{V(z_1, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-2}, y_p, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_{p+2})} &= \frac{V(z_1, z_2, \dots, z_{p-2}, z_p, z_{p+1}, z_{p+2})}{V(z_1, z_2, \dots, z_{p-1}, z_{p+1}, z_{p+2})}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Далее, пусть  $\bar{z}_{\bar{t}}$  — образы точек  $y_{\bar{t}}$  при другом наборе параметров. Тогда получим аналогичные равенства

$$\begin{aligned} \frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p+1})}{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})} &= \frac{V(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{p+1})}{V(\bar{z}_2, \bar{z}_3, \dots, \bar{z}_{p+1}, \bar{z}_{p+2})}, \\ \frac{V(y_2, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_3, \dots, y_{p+1}, y_{p+2})} &= \frac{V(\bar{z}_2, \bar{z}_3, \dots, \bar{z}_{p+1}, \bar{z}_{p+2})}{V(\bar{z}_1, \bar{z}_3, \dots, \bar{z}_{p+1}, \bar{z}_{p+2})}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-2}, y_p, y_{p+1}, y_{p+2})}{V(y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, y_{p+2})} &= \frac{V(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{p-2}, \bar{z}_p, \bar{z}_{p+1}, \bar{z}_{p+2})}{V(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{p-1}, \bar{z}_{p+1}, \bar{z}_{p+2})}. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Исключая из уравнений (9.14) и (9.15) переменные  $y_{\bar{t}}$ , найдем сердцевину рассматриваемой три-ткани  $A_p W$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{V(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})}{V(z_2, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})} &= \frac{V(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{p+1})}{V(\bar{z}_2, \bar{z}_3, \dots, \bar{z}_{p+1}, \bar{z}_{p+2})}, \\ \frac{V(z_2, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})}{V(z_1, z_3, \dots, z_{p+1}, z_{p+2})} &= \frac{V(\bar{z}_2, \bar{z}_3, \dots, \bar{z}_{p+1}, \bar{z}_{p+2})}{V(\bar{z}_1, \bar{z}_3, \dots, \bar{z}_{p+1}, \bar{z}_{p+2})}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{V(z_1, z_2, \dots, z_{p-2}, z_p, z_{p+1}, z_{p+2})}{V(z_1, z_2, \dots, z_{p-1}, z_{p+1}, z_{p+2})} &= \frac{V(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{p-2}, \bar{z}_p, \bar{z}_{p+1}, \bar{z}_{p+2})}{V(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{p-1}, \bar{z}_{p+1}, \bar{z}_{p+2})}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1.2, найденная сердцевина вполне определяет координатный группоид три-ткани  $A_p W$ .

Теперь рассмотрим группу проективных преобразований плоскости. С четырьмя точками плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, невозможно связать никакой проективный инвариант, не равный  $-1$ . Зафиксируем на плоскости пять точек  $y_{\bar{t}}$ ,  $\bar{t} = 1, 2, 3, 4, 5$ . Пусть  $h_1$  и  $h_3$  — перпендикуляры, опущенные из точки  $y_1$  на прямые  $y_2 y_3$  и  $y_2 y_5$  соответственно,  $h_2$  и  $h_4$  — перпендикуляры, опущенные на те же прямые из точки  $y_4$  (см. рис. 29).

Пусть, как и выше,  $S_{123}$  — площадь треугольника с вершинами  $y_1, y_2, y_3$  и т. д. Покажем, что выражение

$$\frac{S_{123} S_{425}}{S_{423} S_{125}}$$

является проективным инвариантом. Обозначим через  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  углы при вершине  $y_2$ :

$$\alpha_1 = (c, a), \quad \alpha_2 = (d, a), \quad \alpha_3 = (c, b), \quad \alpha_4 = (d, b).$$

Как видно из рис. 29, справедливо равенство

$$\frac{S_{123} S_{425}}{S_{423} S_{125}} = \frac{h_1 h_4}{h_2 h_3}.$$

Находя высоты  $h_1, h_2, h_3, h_4$  из соответствующих прямоугольных треугольников и подставляя их в последнее равенство, получим:

$$\frac{S_{123} S_{425}}{S_{423} S_{125}} = \frac{\sin(c, a) \sin(d, b)}{\sin(d, a) \sin(c, b)}.$$

Выражение справа, как известно, является проективным инвариантом — сложным отношением четверки прямых  $a, b, c, d$  (см. рис. 29). Аналогичным образом найдем еще один проективный инвариант, связанный с точкой  $y_2$ :

$$\frac{S_{123} S_{524}}{S_{523} S_{124}}.$$

Можно показать, что другие инварианты, связанные с рассматриваемыми пятью точками, выражаются через найденные два. Таким образом, проективная группа преобразований плоскости имеет всего два пятиточечных инварианта.

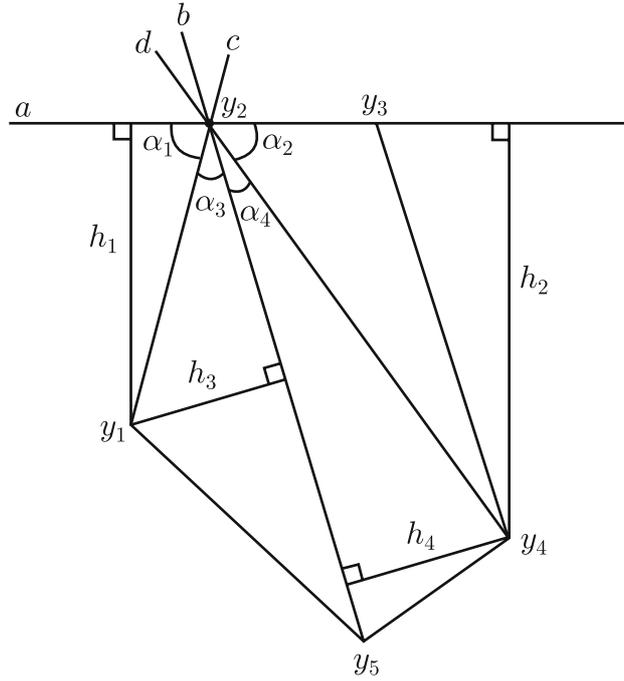


Рис. 29

Приведем аналитическое доказательство этого факта. При проективном преобразовании

$$\rho z^{\bar{\alpha}} = a_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} y^{\bar{\alpha}},$$

$\bar{\alpha}, \bar{\beta} = 1, 2, 3$ , точки  $y_{\bar{t}}(y_{\bar{t}}^{\bar{\alpha}})$ ,  $\bar{t} = 1, 2, 3, 4, 5$ , перейдут в точки  $z_{\bar{t}}(z_{\bar{t}}^{\bar{\alpha}})$ :

$$\rho_{\bar{t}} z_{\bar{t}}^{\bar{\alpha}} = a_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} y_{\bar{t}}^{\bar{\alpha}}.$$

Пусть  $S'_{123}$  — площадь треугольника с вершинами  $z_1, z_2, z_3$  и  $S'_{124}$  — площадь треугольника с вершинами  $z_1, z_2, z_4$  и т. д. Тогда справедливы равенства

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 S'_{123} = A S_{123}, \quad \rho_1 \rho_2 \rho_4 S'_{124} = A S_{124},$$

где

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}.$$

Для других наборов индексов получаем:

$$\rho_{\bar{t}_1} \rho_{\bar{t}_2} \rho_{\bar{t}_3} S'_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \bar{t}_3} = A S_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \bar{t}_3},$$

$\bar{t}_1 \neq \bar{t}_2 \neq \bar{t}_3$ . Отсюда имеем

$$\frac{S'_{123} S'_{425}}{S'_{423} S'_{125}} = \frac{S_{123} S_{425}}{S_{423} S_{125}}, \quad \frac{S'_{123} S'_{524}}{S'_{523} S'_{124}} = \frac{S_{123} S_{524}}{S_{523} S_{124}}.$$

Следовательно, выражения

$$\frac{S_{123} S_{425}}{S_{423} S_{125}}, \quad \frac{S_{123} S_{524}}{S_{523} S_{124}}$$

являются проективными инвариантами.

Теперь найдем точечные инварианты группы проективных преобразований  $P_p$ :

$$\rho z^{\bar{\alpha}} = a_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} y^{\bar{\beta}}, \quad \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots = 1, 2, \dots, p+1.$$

Пусть при этом преобразовании точки  $y_{\bar{t}}(y_{\bar{t}}^1, y_{\bar{t}}^2, \dots, y_{\bar{t}}^{p+1})$ ,  $\bar{t} = \overline{1, p+3}$ , переходят в точки  $z_{\bar{t}}(z_{\bar{t}}^1, z_{\bar{t}}^2, \dots, z_{\bar{t}}^{p+1})$ , тогда

$$\rho_{\bar{t}} z_{\bar{t}}^{\bar{\alpha}} = a_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} y_{\bar{t}}^{\bar{\beta}}.$$

Обозначим, как и выше, через  $V_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_{p+1}}$  «объем» полиэдра с вершинами  $y_{\bar{t}_1}, y_{\bar{t}_2}, \dots, y_{\bar{t}_{p+1}}$ , т.е. определитель, составленный из координат указанных точек, а через  $V'_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_{p+1}}$  — «объем» полиэдра с вершинами  $z_{\bar{t}_1}, z_{\bar{t}_2}, \dots, z_{\bar{t}_{p+1}}$ ,  $\bar{t}_1 \neq \bar{t}_2 \neq \dots \neq \bar{t}_{p+1}$ . Тогда справедливы следующие равенства:

$$\rho_{\bar{t}_1} \rho_{\bar{t}_2} \dots \rho_{\bar{t}_{p+1}} V'_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_{p+1}} = A V_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_{p+1}},$$

где  $A = \det(a_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}})$ . Отсюда следует, что  $p$  отношений

$$\frac{V_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_p \bar{t}_{p+1}} V_{\bar{t}_3 \bar{t}_4 \dots \bar{t}_{p+2} \bar{t}_{p+3}}}{V_{\bar{t}_1 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+2}} V_{\bar{t}_2 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+3}}}$$

являются независимыми проективными инвариантами:

$$\frac{V'_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_p \bar{t}_{p+1}} V'_{\bar{t}_3 \bar{t}_4 \dots \bar{t}_{p+2} \bar{t}_{p+3}}}{V'_{\bar{t}_1 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+2}} V'_{\bar{t}_2 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+3}}} = \frac{V_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_p \bar{t}_{p+1}} V_{\bar{t}_3 \bar{t}_4 \dots \bar{t}_{p+2} \bar{t}_{p+3}}}{V_{\bar{t}_1 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+2}} V_{\bar{t}_2 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+3}}}. \quad (9.16)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 9.8.** *Группа проективных преобразований  $P_p$  имеет ровно  $p$  независимых  $(p+3)$ -точечных инварианта.*

Рассмотрим три-ткань, порождаемую действием проективной группы  $P_p$  на  $p$ -мерном гладком многообразии  $Y$ . Обозначим эту ткань  $P_p W$ . Она образована тремя слоениями размерностей  $p$ ,  $(p+1)(p+1) - 1$  и  $(p+1)(p+1) - 1$ . Найдем сердцевину три-ткани  $P_p W$ . Пусть  $z_{\bar{t}}$  — образы точек  $y_{\bar{t}}$  при проективном преобразовании с некоторым набором параметров и, как и выше,  $V'_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_{p+1}}$  — объем полиэдра с вершинами  $z_{\bar{t}_1}, z_{\bar{t}_2}, \dots, z_{\bar{t}_{p+1}}$  (см. уравнения (9.16)). Далее, пусть  $\bar{z}_{\bar{t}}$  — образы точек  $y_{\bar{t}}$  при другом наборе параметров, а  $\bar{V}_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_{p+1}}$  — объем полиэдра с вершинами  $\bar{z}_{\bar{t}_1}, \bar{z}_{\bar{t}_2}, \dots, \bar{z}_{\bar{t}_{p+1}}$ . Тогда получим уравнения, аналогичные уравнениям (9.16):

$$\frac{\bar{V}_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_p \bar{t}_{p+1}} \bar{V}_{\bar{t}_3 \bar{t}_4 \dots \bar{t}_{p+2} \bar{t}_{p+3}}}{\bar{V}_{\bar{t}_1 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+2}} \bar{V}_{\bar{t}_2 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+3}}} = \frac{V_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_p \bar{t}_{p+1}} V_{\bar{t}_3 \bar{t}_4 \dots \bar{t}_{p+2} \bar{t}_{p+3}}}{V_{\bar{t}_1 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+2}} V_{\bar{t}_2 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+3}}}. \quad (9.17)$$

Исключая из уравнений (9.16) и (9.17) переменные  $y_{\bar{t}}$ , получим уравнения сердцевины рассматриваемой три-ткани  $P_p W$ :

$$\frac{\bar{V}_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_p \bar{t}_{p+1}} \bar{V}_{\bar{t}_3 \bar{t}_4 \dots \bar{t}_{p+2} \bar{t}_{p+3}}}{\bar{V}_{\bar{t}_1 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+2}} \bar{V}_{\bar{t}_2 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+3}}} = \frac{V'_{\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_p \bar{t}_{p+1}} V'_{\bar{t}_3 \bar{t}_4 \dots \bar{t}_{p+2} \bar{t}_{p+3}}}{V'_{\bar{t}_1 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+2}} V'_{\bar{t}_2 \bar{t}_3 \dots \bar{t}_{p+1} \bar{t}_{p+3}}}.$$

Согласно теореме 1.2, найденная сердцевина вполне определяет координатный группоид три-ткани  $P_p W$ .

**9.7.** Пусть  $GW(p, q, q)$  — три-ткань, определяемая группой Ли преобразований, а  $W(q, q, q)$  — групповая три-ткань, порождаемая параметрической группой  $G$  [3]. Очевидно, что эти ткани связаны между собой. В [65] описано каноническое вложение ткани  $GW(p, q, q)$  в три-ткань  $W(q, q, q)$ . Оно заключается в следующем.

Пусть  $G(\cdot)$  — группа Ли размерности  $q$ :

$$c = a \cdot b \equiv \phi(a, b). \quad (9.18)$$

Уравнение (9.18) определяет на  $2q$ -мерном многообразии  $G \times G$  групповую три-ткань или три-ткань  $R$ , образованную тремя  $q$ -мерными слоениями  $a = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$  и  $c = \text{const}$ .

Три-ткань  $R$  можно описать с помощью некоторой групповой структуры [91]. Обозначим через  $G^{-1}$  группу с операцией  $a * b = b \cdot a$ . Тогда отображение  $\Theta : G \rightarrow G^{-1}$ ,  $\Theta(x) = x^{-1}$ , является изоморфизмом. Рассмотрим прямое произведение групп  $G$  и  $G^{-1}$ :  $M = G \times G^{-1}$  с операцией

$$(x, y) \circ (a, b) = (x \cdot a, y * b), \quad g = (x \cdot a, b \cdot y) \in G.$$

На  $M$  есть три  $q$ -мерные подгруппы:  $G_1 = (e, G^{-1})$ ,  $G_2 = (G, e)$  и  $G_3$  — график изоморфизма  $\Theta$ , образованный парами вида  $(x, \Theta(x))$  (здесь  $e$  — единица группы  $G$ ). Смежные классы по этим подгруппам и образуют групповую три-ткань  $R$ . Слоения ткани обозначим через  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ .

Пусть группа  $G$  имеет подгруппу  $H$  размерности  $q - p$  ( $p \leq q$ ). Левое действие  $G$  на однородном пространстве  $B = G/H$ ,  $\dim B = p$ , обозначим через  $f$ :

$$f : G \times B \rightarrow B, \quad z = f(a, y), \quad (9.19)$$

$a \in G$ ,  $y, z \in B$ .

Уравнения (9.19) определяют на многообразии  $G \times B$  размерности  $q + p$  три-ткань  $GW(p, q, q)$ , образованную двумя  $q$ -мерными слоениями  $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  и  $p$ -мерным слоением  $a = \text{const}$ . Слоения ткани  $GW(p, q, q)$  обозначим  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{\lambda}_2$  и  $\tilde{\lambda}_3$  соответственно.

Известно [25], что группу преобразований (9.19) можно канонически продолжить до ее параметрической группы  $G$  (9.18). Это означает существование таких локальных координат в группе  $G$ , в которых ее уравнения

$$c^i = \phi^i(a^j, b^k), \quad i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, q,$$

записываются в виде

$$c^\alpha = f^\alpha(a^j, b^\gamma), \quad c^u = \phi^u(a^j, b^k), \quad (9.20)$$

$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, p$ ;  $u, v, w = p + 1, \dots, q$ , причем первая серия уравнений (9.20) совпадает с уравнениями (9.19), если обозначить  $c^\alpha \rightarrow z^\alpha$ ,  $b^\gamma \rightarrow y^\gamma$ . Величины  $b^\gamma$  (или  $c^\alpha$ ) являются локальными координатами на базе  $B$  слоения  $G/H$ . Можно считать, что база  $B$  вложена в группу  $G$  (локально!) как некоторая координатная плоскость. Заметим, что на базе  $B$  никакой естественной групповой структуры, вообще говоря, не возникает. Но она возникает, например, в случае, если группа  $G$  является полупрямым произведением двух своих подгрупп. Заметим также, что на базе  $B$  всегда можно ввести структуру левой лупы Бола [56].

С другой стороны, уравнения (9.20) определяют групповую три-ткань на многообразии  $M$ . При этом  $a^i$  есть локальные координаты в горизонтальном слое  $G_2$ ,  $b^i$  — локальные координаты в вертикальном слое  $G_1$ , а база  $B$  вложена в вертикальный слой  $G_1$  как некоторое координатное подмногообразие. Три-ткань  $GW(p, q, q)$  задается первой серией уравнений (9.20) на некотором подмногообразии  $\tilde{M} \sim G_2 \times B$  многообразия  $M$ ,  $\dim \tilde{M} = q + p$ . Выясним строение три-ткани  $GW(p, q, q)$ .

Рассмотрим некоторый горизонтальный слой  $\tilde{\mathcal{F}}_2$  слоения  $\tilde{\lambda}_2$  три-ткани  $GW(p, q, q)$ , определяемый на многообразии  $\tilde{M}$  уравнениями  $b^\gamma = \text{const}$ . На многообразии  $M$  эти уравнения задают  $(q - p)$ -параметрическое семейство горизонтальных слоев  $\mathcal{F}_2$  слоения  $\lambda_2$  три-ткани  $R$ , определяемых уравнениями  $b^j = \text{const}$ . С другой стороны, уравнения  $b^\gamma = \text{const}$  фиксируют смежный класс  $bH^{-1}$ ,  $H^{-1} = \Theta(H)$ , лежащий в вертикальном слое ткани  $R$  и проходящий через точку  $b$  этого слоя. Следовательно, уравнения  $b^\gamma = \text{const}$  задают на  $M$   $(q - p)$ -параметрическое семейство горизонтальных слоев  $\mathcal{F}_2$ , пересекающих этот смежный класс. Пересекая это слоение многообразием  $\tilde{M} \sim G_2 \times B$ , получим горизонтальный слой  $\tilde{\mathcal{F}}_2$  три-ткани  $GW(p, q, q)$ . Но, поскольку многообразие  $B$  и  $bH^{-1}$  пересекаются в точке  $b$ , то рассматриваемый слой  $\tilde{\mathcal{F}}_2$  есть в точности горизонтальный слой  $\mathcal{F}_2$ , проходящий через точку  $b$ .

Таким образом, многообразие  $\tilde{M}$  можно рассматривать как расслоенное пространство, слоями которого являются горизонтальные слои  $\mathcal{F}_2$  ткани  $R$ , а локальная база диффеоморфна многообразию  $B$ , которое вложено в вертикальный слой  $\mathcal{F}_1 \equiv G_1$ .

Произвольный вертикальный слой  $\tilde{\mathcal{F}}_1 \subset \tilde{\lambda}_1$  ткани  $GW(p, q, q)$  определяется на  $\tilde{M}$  уравнениями  $a = \text{const}$  и локально эквивалентен многообразию  $B$  (вложенному в слой  $G_1$ ). Можно сказать, что  $\tilde{\mathcal{F}}_1$  получается проектированием многообразия  $B$  горизонтальными слоями на вертикальный слой исходной ткани  $R$ .

Произвольный слой  $\tilde{\mathcal{F}}_3$  третьего слоения  $\tilde{\lambda}_3$  ткани  $GW(p, q, q)$  определяется на  $\tilde{M}$  уравнениями  $c^\gamma = \text{const}$ . На многообразии  $M$  эти уравнения определяют  $(q - p)$ -параметрическое семейство наклонных слоев  $\mathcal{F}_3$  ткани  $R$ , пересекающих смежный класс  $cH^{-1}$ , лежащий в вертикальном

слое ткани  $R$  и проходящий через точку  $c$  этого слоя. Обозначим это семейство  $S_3$ . Многообразие  $\tilde{M}$  пересекает каждый слой этого семейства по  $p$ -мерному подмногообразию, которое является проекцией базы  $B$  ( $B \subset G_1$ ) на  $\mathcal{F}_3$  горизонтальными слоями ткани  $R$ . Обозначим его  $\bar{B}$ .  $(q-p)$ -параметрическое семейство подмногообразий  $\bar{B}$  и является  $q$ -мерным слоем  $\tilde{\mathcal{F}}_3$  три-ткани  $GW(p, q, q)$ .

Слои  $\tilde{\mathcal{F}}_2$  и  $\tilde{\mathcal{F}}_3$  пересекаются на многообразии  $\tilde{M}$  по  $(q-p)$ -мерному подмногообразию, которое является смежным классом по подгруппе  $H$ . Действительно, как уже было сказано, наклонные слои  $\mathcal{F}_3$  третьего слоения три-ткани  $R$  устанавливают изоморфизм  $\Theta$  между вертикальным и горизонтальным слоениями этой ткани. При этом изоморфизме смежный класс  $cH^{-1} \subset \mathcal{F}_1 = G^{-1}$  отображается в смежный класс  $c^{-1}H \subset \mathcal{F}_2 = G$ . Пересекая многообразие  $S_3$  многообразием  $\tilde{M}$ , получаем слой  $\tilde{\mathcal{F}}_3$ , который пересекается с вертикальным слоем  $\tilde{\mathcal{F}}_1$  в точке  $c$ , а с горизонтальным слоем  $\tilde{\mathcal{F}}_2$  — по смежному классу  $c^{-1}H$ .

Описанное вложение три-ткани  $GW(p, q, q)$  в групповую три-ткань  $R$  названо в [65] каноническим.

**9.8.** В [65] найдены структурные уравнения три-ткани  $GW(p, q, q)$  с помощью структурных уравнений Маурера—Картана группы Ли  $G$  (см. [25]):

$$d\omega^i = c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (9.21)$$

$i, j, k = 1, 2, \dots, q$ . Здесь  $\omega^i$  — инвариантные формы группы Ли  $G$ , а  $c_{jk}^i$  — ее структурный тензор, удовлетворяющий тождеству Якоби

$$c_{[jk}^m c_{|m|l]}^i = 0.$$

Тогда, как показано в [3], структурные уравнения групповой три-ткани  $R$ , определяемой группой  $G$  на многообразии  $G \times G^{-1}$ , записываются следующим образом:

$$d\omega_1^i = c_{jk_1}^i \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \quad d\omega_2^i = -c_{jk_2}^i \omega_2^j \wedge \omega_2^k. \quad (9.22)$$

При этом слоения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ткани  $R$  определяются соответственно уравнениями

$$\omega_1^i = 0, \quad \omega_2^i = 0, \quad \omega_3^i \equiv \omega_1^i + \omega_2^i = 0. \quad (9.23)$$

Пусть подгруппа  $H$  группы  $G$  ( $\dim H = q-p$ ) определяется системой дифференциальных уравнений

$$\omega^\alpha = 0, \quad (9.24)$$

$\alpha = 1, 2, \dots, p$ . Поскольку эта система вполне интегрируема, то величины  $c_{uv}^\alpha = 0$ ,  $u, v = p+1, p+2, \dots, q$ , и уравнения (9.21) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= c_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + 2c_{\beta u}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^u, \\ d\omega^u &= c_{jk}^u \omega^j \wedge \omega^k. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Структурные уравнения (9.22) соответствующей групповой три-ткани  $R$  запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} d\omega_1^\alpha &= c_{\beta\gamma_1}^\alpha \omega_1^\beta \wedge \omega_1^\gamma + 2c_{\beta u_1}^\alpha \omega_1^\beta \wedge \omega_1^u, \\ d\omega_1^u &= c_{jk_1}^u \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \\ d\omega_2^\alpha &= -c_{\beta\gamma_2}^\alpha \omega_2^\beta \wedge \omega_2^\gamma - 2c_{\beta u_2}^\alpha \omega_2^\beta \wedge \omega_2^u, \\ d\omega_2^u &= -c_{jk_2}^u \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \end{aligned} \quad (9.26)$$

Подмногообразие  $\tilde{M} \subset M$  размерности  $q+p$  представляет собой  $p$ -параметрическое семейство горизонтальных слоев, поэтому его можно задать системой уравнений вида:

$$\omega_2^u = a_\alpha^u \omega_2^\alpha. \quad (9.27)$$

Условие интегрируемости системы (9.27) приводит к уравнениям

$$da_\alpha^u = a_{\alpha\beta}^u \omega_2^\beta, \quad a_{[\alpha\beta]}^u = c_{\alpha\beta}^u + 2c_{[\alpha|v]}^u a_{\beta]}^v + c_{vw}^u a_\alpha^v a_\beta^w - a_\gamma^u c_{\alpha\beta}^\gamma - 2a_\gamma^u c_{[\alpha|v]}^\gamma a_{\beta]}^v.$$

Подставляя (9.27) в (9.26), преобразуем структурные уравнения три-ткани  $GW(p, q, q)$  к виду

$$\begin{aligned} d\omega_1^\alpha &= c_{\beta\gamma}^\alpha \omega_1^\beta \wedge \omega_1^\gamma + 2c_{\beta u}^\alpha \omega_1^\beta \wedge \omega_1^u, \\ d\omega_1^u &= c_{jk}^u \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \\ d\omega_2^\alpha &= -(c_{\beta\gamma}^\alpha + 2c_{\beta u}^\alpha a_\gamma^u) \omega_2^\beta \wedge \omega_2^\gamma. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Слоение  $\tilde{\lambda}_1$  ткани  $GW(p, q, q)$  определяется уравнениями

$$\omega_1^\alpha = 0, \quad \omega_1^u = 0, \quad (9.29)$$

слоение  $\tilde{\lambda}_2$  — уравнениями

$$\omega_2^\alpha = 0, \quad (9.30)$$

а слоение  $\tilde{\lambda}_3$  — уравнениями

$$\bar{\omega}_3^\alpha \equiv \omega_3^\alpha + b_u^\alpha \omega_1^u = 0. \quad (9.31)$$

Уравнения (9.27) и (9.31) определяют вложение три-ткани  $GW(p, q, q)$  в групповую три-ткань  $R$ . Полагая

$$\bar{\omega}_1^\alpha = \omega_1^\alpha + b_u^\alpha \omega_1^u, \quad \bar{\omega}_1^u = \omega_1^u, \quad \bar{\omega}_2^\alpha = \omega_2^\alpha,$$

запишем структурные уравнения три-ткани  $GW(p, q, q)$  в том виде, в каком они получены в [65]:

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}_1^\alpha &= \bar{\omega}_1^\beta \wedge \Theta_\beta^\alpha + \mu_{u\beta}^\alpha \bar{\omega}_1^u \wedge \bar{\omega}_3^\beta - \mu_{\beta\gamma}^\alpha \bar{\omega}_1^\beta \wedge \bar{\omega}_1^\gamma, \\ d\bar{\omega}_1^u &= \bar{\omega}_1^v \wedge \omega_v^u + \bar{\omega}_1^\beta \wedge \omega_\beta^u, \\ d\bar{\omega}_2^\alpha &= \bar{\omega}_2^\beta \wedge \Theta_\beta^\alpha + \mu_{\beta\gamma}^\alpha \bar{\omega}_2^\beta \wedge \bar{\omega}_2^\gamma. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Здесь  $\mu_{u\beta}^\alpha$  и  $\mu_{\beta\gamma}^\alpha$  кососимметричны по нижним индексам. При этом слоение  $\tilde{\lambda}_1$  определяется уравнениями

$$\bar{\omega}_1^i = 0,$$

слоение  $\tilde{\lambda}_2$  — уравнениями

$$\bar{\omega}_2^\alpha = 0,$$

а слоение  $\tilde{\lambda}_3$  — уравнениями

$$\bar{\omega}_3^\alpha = \bar{\omega}_1^\alpha + \bar{\omega}_2^\alpha = 0.$$

Условия интегрируемости системы (9.31) приводят к серии конечных и дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции  $a_\alpha^u$ ,  $b_u^\alpha$ , величины  $\mu_{u\beta}^\alpha$  и  $\mu_{\beta\gamma}^\alpha$ , а также структурные константы группы  $G$ .

**9.9.** Найдем конечные уравнения некоторых три-тканей  $GW(p, q, q)$ , исходя из структурных уравнений соответствующей группы  $G$ .

**Пример 1.** Пусть  $G$  — двумерная некоммутативная группа Ли. Ее структурный тензор приводится к виду [25]

$$c_{12}^1 = 1, \quad c_{12}^2 = 0.$$

Обозначим через  $\omega^1$  и  $\omega^2$  инвариантные формы этой группы и запишем ее структурные уравнения:

$$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^2, \quad d\omega^2 = 0.$$

С другой стороны, последние уравнения определяют параметрическую группу аффинной группы на прямой.

Уравнение  $\omega^1 = 0$  является вполне интегрируемым на  $G$  и определяет одномерную подгруппу  $H$  параллельных переносов. Многообразие смежных классов  $G/H$  также одномерно. Базу  $B$  этого расслоения можно (локально!) отождествить с одномерным многообразием, определяемым уравнением  $\omega^2 = 0$ . Это одномерная подгруппа гомотетий.

Согласно п. 9.7, действие рассматриваемой группы  $G$  на однородном пространстве  $G/H$  определяет три-ткань  $GW(1, 2, 2)$ . Найдем ее уравнение. Для этого запишем сначала структурные уравнения групповой три-ткани  $R$ , порождаемой группой  $G$  на четырехмерном многообразии  $\mathcal{M} = G \times G^{-1}$ :

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= \omega_1^1 \wedge \omega_1^2, & d\omega_1^2 &= 0, \\ d\omega_2^1 &= -\omega_2^1 \wedge \omega_2^2, & d\omega_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Уравнение

$$\omega_2^2 = 0 \quad (9.34)$$

является вполне интегрируемым и определяет на многообразии  $\mathcal{M}$  однопараметрическое семейство горизонтальных слоев  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$  три-ткани  $R$ . Обозначим это многообразие через  $\tilde{M}$ ,  $\dim \tilde{M} = 3$ . Структурные уравнения многообразия  $\tilde{M}$ , на котором определена три-ткань  $GW(1, 2, 2)$ , в силу (9.34) имеют следующий вид:

$$d\omega_1^1 = \omega_1^1 \wedge \omega_1^2, \quad d\omega_1^2 = 0, \quad d\omega_2^1 = 0. \quad (9.35)$$

В соответствии с п. 9.8 слоения  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{\lambda}_2$  и  $\tilde{\lambda}_3$  ткани  $GW(1, 2, 2)$  определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1: \quad & \omega_1^1 = 0, \quad \omega_1^2 = 0; \\ \tilde{\lambda}_2: \quad & \omega_2^1 = 0; \\ \tilde{\lambda}_3: \quad & \omega_1^1 + \omega_2^1 + b_2^1 \omega_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Дифференцируя последнее уравнение, получим

$$db_2^1 = \omega_2^1. \quad (9.37)$$

Найдем структурные уравнения три-ткани  $GW(1, 2, 2)$  в виде (9.32). В соответствии с п. 9.8 обозначим

$$\bar{\omega}_1^1 = \omega_1^1 + b_2^1 \omega_1^2, \quad \bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2, \quad \bar{\omega}_2^1 = \omega_2^1. \quad (9.38)$$

Тогда структурные уравнения ткани  $GW(1, 2, 2)$  в силу (9.36) и (9.38) примут вид

$$d\bar{\omega}_1^1 = (\bar{\omega}_1^1 + \omega_2^1) \wedge \omega_1^2, \quad d\omega_1^2 = 0, \quad d\omega_2^1 = 0. \quad (9.39)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (9.32), видим, что  $\mu_{12}^1 = c_{12}^1 = 1$  и все формы кривизны  $\omega_\beta^\alpha$ ,  $\omega_v^u$ ,  $\omega_\beta^u$  равны нулю.

Убедимся, что построенная ткань действительно определяется аффинной группой на прямой. Для этого найдем конечное уравнение этой ткани. Интегрируя систему (9.39), находим инвариантные формы

$$\bar{\omega}_1^1 = e^{-u^2} dw^1 - dv^1, \quad \omega_1^2 = du^2, \quad \omega_2^1 = dv^1. \quad (9.40)$$

Далее, интегрируя уравнения (9.36) с учетом (9.38) и (9.40), найдем уравнения слоений

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1: \quad & e^{-u^2} w^1 - v^1 = x^1, \quad u^2 = x^2; \\ \tilde{\lambda}_2: \quad & v^1 = y^1; \\ \tilde{\lambda}_3: \quad & w^1 = z, \end{aligned}$$

где  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $y^1$  и  $z$  — постоянные интегрирования — параметры слоев ткани. Исключая локальные координаты  $w^1$ ,  $u^2$ ,  $v^1$  из последних уравнений, получим конечное уравнение три-ткани  $GW(1, 2, 2)$  в виде

$$z = e^{x^2} (x^1 + y^1).$$

Проводя изотопические (допустимые) преобразования

$$e^{x^2} = a^1, \quad e^{x^2} x^1 = a^2, \quad y^1 = y^1,$$

придем к известному уравнению аффинной группы на прямой:

$$z = a^1 y^1 + a^2.$$

**Пример 2.** Рассмотрим трехмерную группу Ли  $G$ , структурные уравнения которой имеют вид [25]:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \lambda\omega^1 \wedge \omega^3 - \omega^2 \wedge \omega^3, \\ d\omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^3 + \lambda\omega^2 \wedge \omega^3, \\ d\omega^3 &= 0, \end{aligned} \quad (9.41)$$

где  $\lambda = \text{const}$ . Уравнения  $\omega^1 = 0$  и  $\omega^2 = 0$  являются вполне интегрируемыми на  $G$  и определяют в этой группе одномерную подгруппу  $H$ . Многообразие смежных классов  $G/H$  двумерно. Базу  $B$  этого расслоения можно (локально!) отождествить с двумерным многообразием, определяемым уравнением  $\omega^3 = 0$ .

Действие группы  $G$  на однородном пространстве  $G/H$  определяет три-ткань  $GW(2, 3, 3)$ . Найдем ее уравнения. Для этого запишем структурные уравнения соответствующей групповой три-ткани  $R$ , порождаемой группой  $G$  на шестимерном многообразии  $\mathcal{M} = G \times G^{-1}$ :

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= \lambda\omega_1^1 \wedge \omega_1^3 - \omega_1^2 \wedge \omega_1^3, & d\omega_2^1 &= -\lambda\omega_2^1 \wedge \omega_2^3 + \omega_2^2 \wedge \omega_2^3, \\ d\omega_1^2 &= \omega_1^1 \wedge \omega_1^3 + \lambda\omega_1^2 \wedge \omega_1^3, & d\omega_2^2 &= -\omega_2^1 \wedge \omega_2^3 - \lambda\omega_2^2 \wedge \omega_2^3, \\ d\omega_1^3 &= 0, & d\omega_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Уравнение

$$\omega_2^3 = 0 \quad (9.43)$$

является вполне интегрируемым и определяет на многообразии  $\mathcal{M}$  дупараметрическое семейство горизонтальных слоев  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$  три-ткани  $R$ . Это многообразие обозначим, как и выше, через  $\tilde{M}$ ,  $\dim \tilde{M} = 5$ . Структурные уравнения многообразия  $\tilde{M}$ , на котором определена три-ткань  $GW(2, 3, 3)$ , в силу (9.43) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= \lambda\omega_1^1 \wedge \omega_1^3 - \omega_1^2 \wedge \omega_1^3, & d\omega_1^3 &= 0, \\ d\omega_2^1 &= \omega_2^1 \wedge \omega_2^3 + \lambda\omega_2^2 \wedge \omega_2^3, & d\omega_2^3 &= 0, \\ d\omega_1^2 &= \omega_1^1 \wedge \omega_1^3 + \lambda\omega_1^2 \wedge \omega_1^3, & d\omega_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.44)$$

В соответствии с п. 9.8 слоения  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{\lambda}_2$  и  $\tilde{\lambda}_3$  ткани  $GW(2, 3, 3)$  определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1: & \quad \omega_1^1 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0; \\ \tilde{\lambda}_2: & \quad \omega_2^1 = 0, \quad \omega_2^2 = 0; \\ \tilde{\lambda}_3: & \quad \begin{cases} \omega_1^1 + \omega_2^1 + b_3^1 \omega_1^3 = 0, \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 + b_3^2 \omega_1^3 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.45)$$

Дифференцируя последние уравнения в соответствии с п. 9.8, устанавливаем, что величины  $b_3^1$  и  $b_3^2$  удовлетворяют уравнениям

$$db_3^1 = \lambda\omega_2^1 - \omega_2^2, \quad db_3^2 = \omega_2^1 + \lambda\omega_2^2. \quad (9.46)$$

Найдем структурные уравнения три-ткани  $GW(2, 3, 3)$  в виде (9.32). В соответствии с п. 9.8 обозначим

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1^1 &= \omega_1^1 + b_3^1 \omega_1^3, & \bar{\omega}_2^1 &= \omega_2^1, & \bar{\omega}_1^3 &= \omega_1^3, \\ \bar{\omega}_1^2 &= \omega_1^2 + b_3^2 \omega_1^3, & \bar{\omega}_2^2 &= \omega_2^2, & & \end{aligned} \quad (9.47)$$

Тогда структурные уравнения ткани  $GW(2, 3, 3)$  в силу (9.45) и (9.47) примут вид

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}_1^1 &= \lambda(\bar{\omega}_1^1 + \omega_2^1) \wedge \omega_1^3 - (\bar{\omega}_1^2 + \omega_2^2) \wedge \omega_1^3, & d\omega_1^3 &= 0, \\ d\bar{\omega}_1^2 &= (\bar{\omega}_1^1 + \omega_2^1) \wedge \omega_1^3 + \lambda(\bar{\omega}_1^2 + \omega_2^2) \wedge \omega_1^3, & d\omega_2^1 &= 0, \\ & & d\omega_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Заметим, что формы кривизны этой ткани также равны нулю.

Убедимся, что построенная ткань действительно определяется исходной группой  $G$  (9.41). Для этого найдем конечные уравнения этой ткани. Интегрируя систему (9.48), находим инвариантные формы

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1^1 &= e^{-\lambda u^3} (\sin u^3 dw^1 + \cos u^3 dw^2) - dv^1, & \omega_1^3 &= du^3, \\ \bar{\omega}_1^2 &= e^{-\lambda u^3} (\cos u^3 dw^1 - \sin u^3 dw^2) - dv^2, & \omega_2^1 &= dv^1, \\ & & \omega_2^2 &= dv^2. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Теперь проинтегрируем уравнения (9.45) с учетом (9.47) и (9.49) и найдем уравнения слоений

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1: & \begin{cases} e^{-\lambda u^3} (w^1 \sin u^3 + w^2 \cos u^3) - v^1 = x^1, \\ e^{-\lambda u^3} (w^1 \cos u^3 - w^2 \sin u^3) - v^2 = x^2, \\ u^3 = x^3; \end{cases} \\ \tilde{\lambda}_2: & v^1 = y^1, \quad v^2 = y^2; \\ \tilde{\lambda}_3: & w^1 = z^1, \quad w^2 = z^2, \end{aligned}$$

где  $x^i, y^\alpha, z^\alpha$  — постоянные интегрирования — параметры слоев ткани. Исключая локальные координаты  $w^1, w^2, u^3, v^1, v^2$  из последних уравнений и проводя изотопические (допустимые) преобразования, получим конечные уравнения три-ткани  $GW(2, 3, 3)$  в виде

$$z^1 = e^{\lambda a^3} (y^1 \sin a^3 + y^2 \cos a^3) + a^1, \quad z^2 = e^{\lambda a^3} (y^1 \cos a^3 - y^2 \sin a^3) + a^2.$$

Найденные уравнения определяют семейство три-тканей  $GW(2, 3, 3)$ , зависящее от параметра  $\lambda$ . При  $\lambda = 0$  получаем три-ткань, порождаемую группой движений на плоскости. В [25] показано, что параметрической группой этой группы преобразований является исходная группа  $G$  (9.41).

**Пример 3.** Рассмотрим трехмерную группу Ли  $G$ , структурные уравнения которой имеют вид [25]:

$$d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^1, \quad d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^1, \quad d\omega^3 = \omega^3 \wedge \omega^2. \quad (9.50)$$

Эти уравнения определяют параметрическую группу проективной группы на прямой. Уравнение  $\omega^1 = 0$  является вполне интегрируемым на  $G$  и определяет в этой группе двупараметрическую аффинную подгруппу  $H$ . Многообразие смежных классов  $G/H$  одномерно. Базу  $B$  этого расслоения можно (локально!) отождествить с одномерным многообразием, определяемым уравнениями  $\omega^2 = 0, \omega^3 = 0$ .

Действие группы  $G$  на однородном пространстве  $G/H$  определяет три-ткань  $GW(1, 3, 3)$ . Найдем ее уравнения. Для этого запишем структурные уравнения групповой три-ткани  $R$ , порождаемой группой  $G$  на шестимерном многообразии  $\mathcal{M} = G \times G^{-1}$ :

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= \omega_1^2 \wedge \omega_1^1, & d\omega_2^1 &= -\omega_2^2 \wedge \omega_2^1, \\ d\omega_1^2 &= \omega_1^3 \wedge \omega_1^1, & d\omega_2^2 &= -\omega_2^3 \wedge \omega_2^1, \\ d\omega_1^3 &= \omega_1^3 \wedge \omega_1^2, & d\omega_2^3 &= -\omega_2^3 \wedge \omega_2^2. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Вполне интегрируемая система

$$\omega_2^2 = 0, \quad \omega_2^3 = 0 \quad (9.52)$$

определяет на многообразии  $\mathcal{M}$  однопараметрическое семейство горизонтальных слоев  $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$  три-ткани  $R$ . Это многообразие обозначим, как и выше, через  $\tilde{M}$ ,  $\dim \tilde{M} = 4$ . Структурные уравнения многообразия  $\tilde{M}$ , на котором определена три-ткань  $GW(1, 3, 3)$ , в силу (9.52) имеют следующий вид:

$$d\omega_1^1 = \omega_1^2 \wedge \omega_1^1, \quad d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_1^1, \quad d\omega_1^3 = \omega_1^3 \wedge \omega_1^2, \quad d\omega_2^1 = 0. \quad (9.53)$$

В соответствии с п. 9.8 слоения  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{\lambda}_2$  и  $\tilde{\lambda}_3$  ткани  $GW(1, 3, 3)$  определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 : \quad & \omega_1^1 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0; \\ \tilde{\lambda}_2 : \quad & \omega_2^1 = 0; \\ \tilde{\lambda}_3 : \quad & \omega_1^1 + \omega_2^1 + b_2^1 \omega_1^2 + b_3^1 \omega_1^3 = 0. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Дифференцируя последнее уравнение в соответствии с п. 9.8, получим

$$db_2^1 = -\omega_2^1, \quad db_3^1 = -b_2^1 \omega_2^1, \quad (b_2^1)^2 - 2b_3^1 = 0. \quad (9.55)$$

Найдем структурные уравнения три-ткани  $GW(1, 3, 3)$  в виде (9.32). В соответствии с п. 9.8 обозначим

$$\bar{\omega}_1^1 = \omega_1^1 + b_2^1 \omega_1^2 + b_3^1 \omega_1^3, \quad \bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2, \quad \bar{\omega}_1^3 = \omega_1^3, \quad \bar{\omega}_2^1 = \omega_2^1. \quad (9.56)$$

Тогда структурные уравнения ткани  $GW(1, 3, 3)$  в силу (9.54) и (9.56) примут вид

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}_1^1 &= (\omega_1^2 + b_2^1 \omega_1^3) \wedge (\bar{\omega}_1^1 + \omega_2^1), & d\omega_1^3 &= \omega_1^3 \wedge \omega_1^2, \\ d\omega_1^2 &= \omega_1^3 \wedge (\bar{\omega}_1^1 - b_2^1 \omega_1^2), & d\omega_2^1 &= 0. \end{aligned}$$

Полагая

$$\tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + b_2^1 \omega_1^3, \quad (9.57)$$

перепишем последние уравнения окончательно в виде

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}_1^1 &= \tilde{\omega}_1^2 \wedge (\bar{\omega}_1^1 + \omega_2^1), & d\omega_1^3 &= \omega_1^3 \wedge \tilde{\omega}_1^2, \\ d\tilde{\omega}_1^2 &= \omega_1^3 \wedge (\bar{\omega}_1^1 + \omega_2^1), & d\omega_2^1 &= 0. \end{aligned} \quad (9.58)$$

Заметим, что формы кривизны  $\omega_2^2$  и  $\omega_3^3$  этой ткани не равны нулю.

Убедимся, что построенная ткань действительно определяется проективной группой на прямой. Для этого найдем конечное уравнение этой ткани. Интегрируя систему (9.58), находим инвариантные формы

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1^1 &= -dw^1 + w^1(-d \ln u^2 + w^1 u^2 du^3) - \frac{1}{2}(w^1)^2 u^2 du^3 - dv^1, \\ \tilde{\omega}_1^2 &= -d \ln u^2 + w^1 u^2 du^3, \\ \omega_1^3 &= u^2 du^3, \\ \omega_2^1 &= dv^1. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Теперь интегрируем уравнения (9.54) с учетом (9.56), (9.57) и (9.59) и находим уравнения слоений

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 : \quad & w^1 + v^1 = x^1, \quad u^2 = x^2, \quad u^3 = x^3; \\ \tilde{\lambda}_2 : \quad & v^1 = y^1; \\ \tilde{\lambda}_3 : \quad & u^3 - \frac{2}{w^1 u^2} = z, \end{aligned}$$

где  $x^i, y^1, z$  — постоянные интегрирования — параметры слоев ткани. Исключая из этих уравнений локальные координаты  $w^1, u^2, u^3, v^1$  и проводя изотопические (допустимые) преобразования, получаем конечное уравнение три-ткани  $GW(1, 3, 3)$  в виде

$$z = \frac{a^1 y^1 + a^2}{y^1 + a^3}.$$

Это уравнение проективной группы на прямой.

**Пример 4.** В примерах 1–3 на базе  $B$  расслоения смежных классов  $G/H$  имеется структура абелевой группы, поскольку исходная группа  $G$  являлась полупрямым произведением своих подгрупп. Рассмотрим пример, где этого не будет. А именно, рассмотрим три-ткань  $GW(2, 3, 3)$ , определяемую группой  $G$  (9.50) и ее одномерной подгруппой  $H$ , выделяемой уравнениями  $\omega^1 = 0, \omega^2 = 0$ . Структурные уравнения соответствующей групповой три-ткани  $R$  имеют вид (9.51). Пятимерное многообразие  $M$  ткани  $GW(2, 3, 3)$  выделяется уравнением

$$\omega_2^3 = 0. \quad (9.60)$$

Его структурные уравнения в силу (9.51) и (9.60) имеют вид

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= \omega_1^2 \wedge \omega_1^1, & d\omega_2^1 &= -\omega_2^2 \wedge \omega_2^1, \\ d\omega_1^2 &= \omega_1^3 \wedge \omega_1^1, & d\omega_2^2 &= 0, \\ d\omega_1^3 &= \omega_1^3 \wedge \omega_1^2, \end{aligned} \quad (9.61)$$

В соответствии с п. 9.8 слоения  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$  и  $\tilde{\lambda}_3$  рассматриваемой ткани  $GW(2, 3, 3)$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1: & \quad \omega_1^1 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0; \\ \tilde{\lambda}_2: & \quad \omega_2^1 = 0, \quad \omega_2^2 = 0; \\ \tilde{\lambda}_3: & \quad \begin{cases} \omega_1^1 + \omega_2^1 + b_3^1 \omega_1^3 = 0, \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 + b_3^2 \omega_1^3 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.62)$$

Дифференцируя последние уравнения в соответствии с п. 9.8, устанавливаем, что величины  $b_3^1$  и  $b_3^2$  удовлетворяют уравнениям

$$db_3^1 = -2b_3^1 \omega_2^2 + b_3^2 \omega_2^1, \quad db_3^2 = -b_3^2 \omega_2^2 - \omega_2^1, \quad (b_3^2)^2 + 2b_3^1 = 0. \quad (9.63)$$

Найдем структурные уравнения три-ткани  $GW(2, 3, 3)$  в виде (9.32). В соответствии с п. 9.8 обозначим

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1^1 &= \omega_1^1 + b_3^1 \omega_1^3, & \bar{\omega}_1^3 &= \omega_1^3, \\ \bar{\omega}_2^1 &= \omega_2^1 + b_3^2 \omega_1^3, & \bar{\omega}_2^3 &= \omega_2^1, \\ \bar{\omega}_1^2 &= \omega_1^2 + b_3^1 \omega_1^3, & \bar{\omega}_2^2 &= \omega_2^2. \end{aligned} \quad (9.64)$$

Тогда структурные уравнения ткани  $GW(2, 3, 3)$  в силу (9.62) и (9.64) примут вид

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}_1^1 &= \bar{\omega}_2^2 \wedge \bar{\omega}_1^1 + b_3^2 \left[ (\bar{\omega}_1^1 + \omega_2^1) + b_3^2 (\bar{\omega}_1^2 + \omega_2^2) \right] \wedge \bar{\omega}_1^3, \\ d\bar{\omega}_1^2 &= - \left[ (\bar{\omega}_1^1 + \omega_2^1) + b_3^2 (\bar{\omega}_1^2 + \omega_2^2) \right] \wedge \bar{\omega}_1^3, \\ d\bar{\omega}_1^3 &= \omega_1^3 \wedge \bar{\omega}_1^2, \\ d\bar{\omega}_2^1 &= -\omega_2^2 \wedge \bar{\omega}_2^1, \\ d\bar{\omega}_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Полагая

$$\tilde{\omega}_1^1 = \bar{\omega}_1^1 + b_3^2 \bar{\omega}_1^2, \quad \tilde{\omega}_2^1 = \omega_2^1 + b_3^2 \omega_2^2, \quad (9.65)$$

перепишем последние уравнения в окончательном виде:

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}_1^1 &= \bar{\omega}_1^2 \wedge (\tilde{\omega}_1^1 + \tilde{\omega}_2^1), & d\omega_1^3 &= \omega_1^3 \wedge \bar{\omega}_1^2, \\ d\tilde{\omega}_1^2 &= \omega_1^3 \wedge (\tilde{\omega}_1^1 + \tilde{\omega}_2^1), & d\tilde{\omega}_2^1 &= 0, \\ & & d\omega_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.66)$$

Заметим, что формы кривизны  $\omega_3^2$  и  $\omega_3^3$  этой ткани не равны нулю.

Найдем конечные уравнения рассматриваемой ткани. Интегрируя систему (9.66), находим инвариантные формы

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1^1 &= -dw^1 + w^1(-d \ln u^2 + w^1 u^2 du^3) - \frac{1}{2}(w^1)^2 u^2 du^3 - dv^1, \\ \bar{\omega}_1^2 &= -d \ln u^2 + w^1 u^2 du^3, \\ \omega_1^3 &= u^2 du^3, \\ \tilde{\omega}_2^1 &= dv^1, \\ \omega_2^2 &= dv^2. \end{aligned} \quad (9.67)$$

Теперь интегрируем уравнения (9.62) с учетом (9.64), (9.65) и (9.67) и находим уравнения слоений

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &: w^1 + v^1 = x^1, \quad u^2 = x^2, \quad u^3 = x^3; \\ \tilde{\lambda}_2 &: v^1 = y^1, \quad v^2 = y^2; \\ \tilde{\lambda}_3 &: \begin{cases} 2e^{v^2} (w^1)^2 u^2 = z^1, \\ u^3 + \frac{2}{u^2 w^1} = z^2, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $x^i$ ,  $y^\alpha$ ,  $z^\alpha$  — постоянные интегрирования — параметры слоев ткани  $GW(2, 3, 3)$ . Исключая из этих уравнений локальные координаты  $w^1$ ,  $u^2$ ,  $u^3$ ,  $v^1$ ,  $v^2$  и проводя изотопические (допустимые) преобразования, получим уравнение три-ткани  $GW(2, 3, 3)$  в виде

$$z^1 = a_1^1 y^1 + a_2^1 y^2, \quad z^2 = a_1^2 y^1 + a_2^2 y^2,$$

причем определитель  $|a_\beta^\alpha|$  равен 1. Следовательно, последние уравнения определяют унимодулярную группу на плоскости.

## 10. КВАЗИГРУППЫ БОЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ИМИ ТРИ-ТКАНИ

**10.1.** Основы теории непрерывных квазигрупп преобразований заложены в работах А. И. Баталина (см., например, [97]). Понятие квазигруппы преобразований является естественным обобщением понятия группы Ли преобразований. Исследованием свойств таких квазигрупп и их физических приложений занимались также А. И. Нестеров и В. А. Степаненко [53]. Обобщение теории групп Ли преобразований для луп Муфанг и Бола начато в работах П. О. Михеева [49, 111]. В указанных работах квазигруппа преобразований рассматривается как семейство преобразований гладкого многообразия, не замкнутое, вообще говоря, относительно композиции. В [67] предлагается несколько иной подход к изучению гладких квазигрупп преобразований. Квазигруппа преобразований определяется как действие локальной гладкой квазигруппы на гладком многообразии. Такой подход позволяет связать с квазигруппой преобразований геометрический объект — некоторую три-ткань и использовать аппарат теории три-тканей для изучения ее свойств.

Итак, пусть  $Q(*)$  — гладкая  $q$ -мерная квазигруппа. Будем говорить, что  $Q$  действует на гладком  $p$ -мерном многообразии  $Y$  ( $p \leq q$ ), если задана гладкая функция вида

$$f : Q \times Y \rightarrow Y, \quad z = f(a, y), \quad (10.1)$$

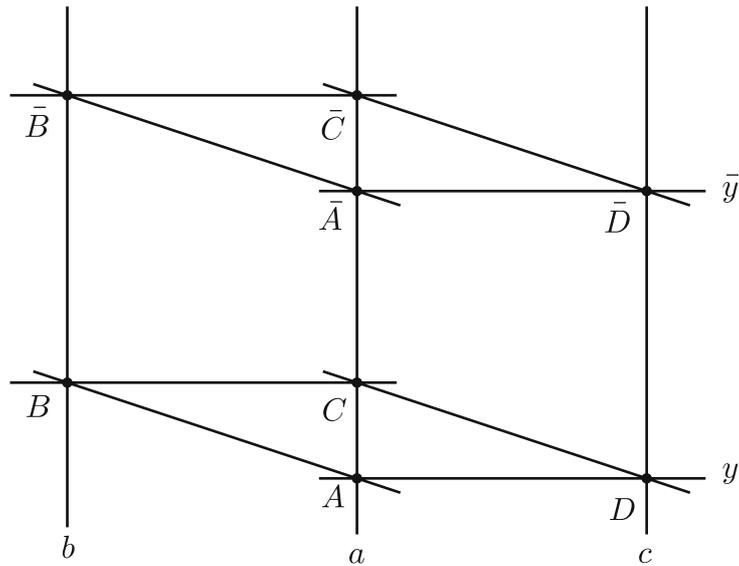


Рис. 30

причем в некоторых локальных координатах ранги матриц  $\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)$  и  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$  являются максимальными в каждой точке области определения.

Уравнение (10.1), рассматриваемое с точностью до изотопических преобразований, определяет на прямом произведении  $M = Q \times Y$  три-ткань, образованную слоениями

$$\lambda_1 : a = \text{const}, \quad \lambda_2 : y = \text{const}, \quad \lambda_3 : z = f(a, y) = \text{const}$$

размерностей соответственно  $p$ ,  $q$  и  $q$ . Эта ткань обозначена в [67]  $QW(p, q, q)$ . Функцию  $f$  будем называть координатным группоидом три-ткани  $QW(p, q, q)$  и записывать также в виде  $z = a \cdot y$ .

Пусть функция  $f$  удовлетворяет тождеству

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y))) = f(a * b, y), \quad a, b \in Q, \quad y \in Y. \quad (10.2)$$

Его геометрический смысл заключается в следующем. Рассмотрим на ткани  $QW(p, q, q)$  два произвольных достаточно близких вертикальных слоя, определяемых параметрами  $a$  и  $b$ , а также вертикальный слой  $c = a * b$  (см. рис. 30). Пусть произвольный горизонтальный слой, определяемый параметром  $y$ , пересекает вертикальный слой  $a$  в некоторой точке  $A$ . Через  $A$  проходит единственный наклонный слой  $f(a, y)$ . Этот слой пересечет вертикальный слой  $b$  в некоторой точке  $B$ . Через  $B$  проходит единственный горизонтальный слой  $f^{-1}(b, f(a, y))$ , который, в свою очередь, пересечет вертикальный слой  $a$  в некоторой точке  $C$ . Через  $C$  проходит единственный наклонный слой  $f(a, f^{-1}(b, f(a, y)))$ . Обозначим через  $D$  точку пересечения слоев  $c$  и  $y$ . Через  $D$  проходит единственный наклонный слой  $f(c, y)$ . Равенство (10.2) означает, что точки  $C$  и  $D$  лежат на одном наклонном слое.

Если провести аналогичное построение, начав с другого горизонтального слоя  $\bar{y}$ , то получатся новые точки  $\bar{C}$  и  $\bar{D}$ , которые также лежат на одном и том же наклонном слое в силу того же равенства (10.2).

Конфигурация  $ABCD\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ , изображенная на рис. 30, аналогична известной левой конфигурации Бола  $B_l$  на три-ткани, образованной слоениями одинаковой размерности. Поэтому назовем группоид (10.1), удовлетворяющий условию (10.2), квазигруппой Бола преобразований.

Очевидно, что операция  $*$  в квазигруппе Бола преобразований однозначно определяется координатным группоидом  $f$ . По аналогии с теорией групп преобразований операцию  $c = a * b$  можно назвать параметрической квазигруппой Бола преобразований.

Три-ткань  $QW(p, q, q)$ , порожденная квазигруппой Бола преобразований, названа в [67] тканью Бола и обозначена  $B_l(p, q, q)$ .

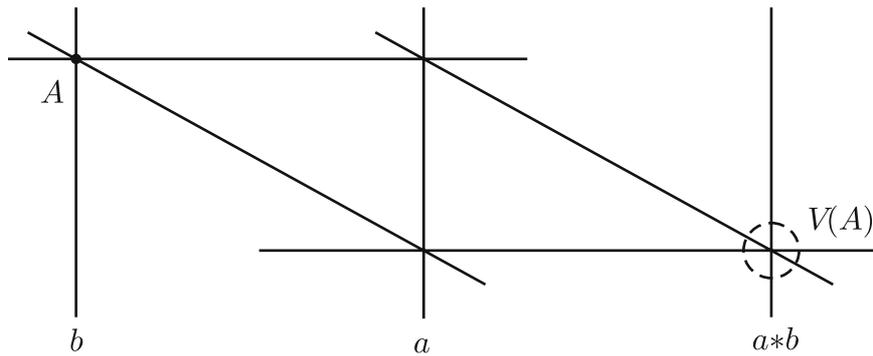


Рис. 31

Можно показать, что параметрическая квазигруппа  $Q(*)$  квазигруппы Бола преобразований обладает следующими свойствами:

$$\begin{array}{ll} a * a = a & \text{идемпотентность,} \\ a * (a * b) = b & \text{левая обратимость,} \\ a * (b * c) = (a * b) * (a * c) & \text{левая дистрибутивность.} \end{array}$$

В [9] доказано, что лупа, изотопная квазигруппе с данными свойствами, является левой лупой Бола. Следовательно, верна следующая теорема.

**Теорема 10.1.** *Параметрическая квазигруппа квазигруппы Бола преобразований изотопна левой лупе Бола.*

Согласно [42], многообразие  $Q$  является локально симметрическим пространством, а операция  $*$  определяет симметрию  $S_a(b) = a * b$  слоя  $b$  относительно слоя  $a$ . Эта симметрия является аналогом сердцевинки для луп Бола, введенной в [18]. Кроме того, симметрии  $S_a(b) = a * b$  задают на многообразии три-ткани  $B_l(p, q, q)$  точечное отображение  $\varphi$ ,  $\varphi(A) = V(A) \cap (a * b)$ , где слой  $a$  фиксирован, а образом слоя  $b$  будет общая трансверсаль  $(q - p)$ -мерных многообразий  $V(A)$ , при условии, что точка  $A$  пробегает вертикальный слой  $b$  (см. рис. 31). Соответствующий левый сдвиг  $L_a$  в координатном группоиде  $f$  вертикальные слои ткани переводит в вертикальные, а горизонтальные и наклонные слои ткани меняет местами. Следовательно, отображение  $\varphi$  является автоморфизмом ткани  $B_l(p, q, q)$ . При этом, поскольку оно порождается сдвигами координатного группоида, то его можно называть внутренним автоморфизмом.

**10.2.** Рассмотрим теперь произвольную три-ткань  $W(p, q, q)$ , образованную слоениями размерностей  $p$ ,  $q$  и  $q$ . Фиксируем два достаточно близких вертикальных слоя  $a$  и  $b$  этой ткани. Возьмем на слое  $b$  произвольную точку  $B$  и построим точки  $A$  и  $C$  так, как показано на рис. 30. Проведем через  $C$  наклонный слой, а через  $A$  — горизонтальный слой (обозначим последний  $y$ ). Эти слои пересекаются по  $(q - p)$ -мерному многообразию, которое обозначим  $V(y)$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 10.2** (см. [67]). *Если на ткани  $W(p, q, q)$  при любых достаточно близких вертикальных слоях  $a$  и  $b$  все достаточно близкие многообразия  $V(y)$  допускают общий трансверсальный вертикальный слой, принадлежащий этой ткани, то ткань  $W(p, q, q)$  является тканью  $B_l(p, q, q)$ .*

Последнее утверждение можно усилить. Пусть, как и выше,  $a$  и  $b$  — произвольные вертикальные слои три-ткани  $W(p, q, q)$ . Рассмотрим  $m = [q/p]$  достаточно близких горизонтальных слоев этой ткани с параметрами  $y_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, m$ . Каждый из них определяет слои  $A_t B_t$ ,  $B_t C_t$  (см. рис. 32) и соответствующее многообразие  $V(y_t)$ . Тогда существует вертикальный слой ткани  $W(p, q, q)$ , трансверсальный всем многообразиям  $V(y_t)$ . Но  $m + 1$  многообразий  $V(y_{\bar{t}})$ ,  $\bar{t} = 1, 2, \dots, m + 1$ , уже не имеют, вообще говоря, общей трансверсали, являющейся вертикальным слоем ткани  $W(p, q, q)$ .

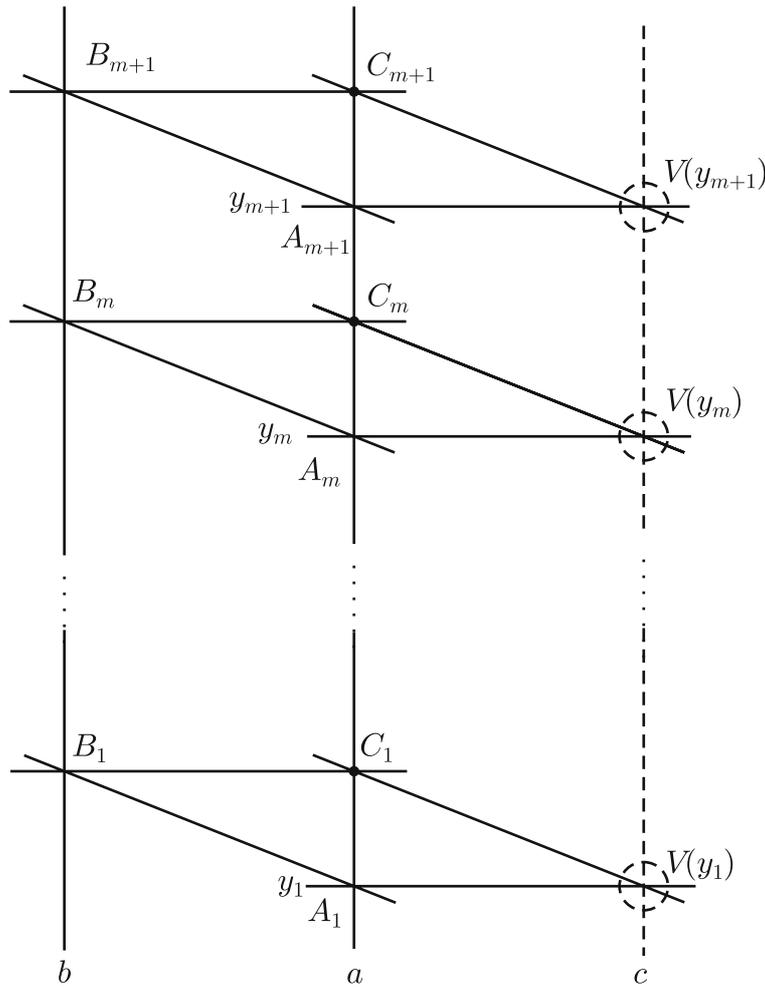


Рис. 32

Конфигурация, образованная двумя вертикальными слоями  $a$  и  $b$  и «параллелограммами» вида  $B_{\bar{t}}A_{\bar{t}}C_{\bar{t}}V(y_{\bar{t}})$ ,  $\bar{t} = 1, 2, \dots, m + 1$ , названа в [67] обобщенной конфигурацией Бола и обозначена  $B_l(1, m)$  (см. рис. 32).

Если для многообразий  $V(y_{\bar{t}})$ , входящих в некоторую фигуру  $B_l(1, m)$ , существует трансверсаль, являющаяся вертикальным слоем ткани  $W(p, q, q)$ , то будем говорить, что эта конфигурация замыкается. Верна следующая теорема.

**Теорема 10.3.** *Если на три-ткани  $W(p, q, q)$  замыкаются все конфигурации  $B_l(1, m)$ , то она является тканью  $B_l(p, q, q)$ .*

**10.3.** Рассмотрим три-ткань  $W(p, q, q)$ , для которой число  $q$  кратно  $p$ , т.е.  $q = mp$ . Для такой ткани, как показано в п. 9.4, существует координатный моноид  $\mu_{(a,b)}(\circ)$ . Найдем тождество в координатных моноидах ткани  $W(p, q, q)$ , соответствующее замыканию на этой ткани обобщенных конфигураций Бола  $B_l(1, m)$ .

В области  $\mathcal{N}$  многообразия  $\mathcal{M}$ , несущего три-ткань  $W(p, mp, mp)$ , зафиксируем один вертикальный слой  $a$  и  $m$  горизонтальных слоев  $b_1, b_2, \dots, b_m$  (см. рис. 33). Согласно п. 9.4, эти слои образуют координатную решетку ткани  $W(p, mp, mp)$ . Пусть  $u_1, u_2, \dots, u_m$  и  $v$  — произвольные наклонные слои в области  $\mathcal{N}$ . Слой  $u_t$  пересекает соответствующий (с тем же номером) горизонтальный слой  $b_t$  по некоторому подмногообразию  $U_t$ ,  $U_t = u_t \cap b_t$ ,  $\dim U_t = q - p = p(m - 1)$ ,  $t = \overline{1, m}$ . Пусть  $x$  — вертикальный слой, трансверсальный подмногообразиям  $U_1, U_2, \dots, U_m$ .

Наклонный слой  $v$  пересекает ветрикальный слой  $a$  в некоторой точке  $A$ , через которую проходит горизонтальный слой, обозначим его  $y$ . Наклонный слой, проходящий через точку пересечения

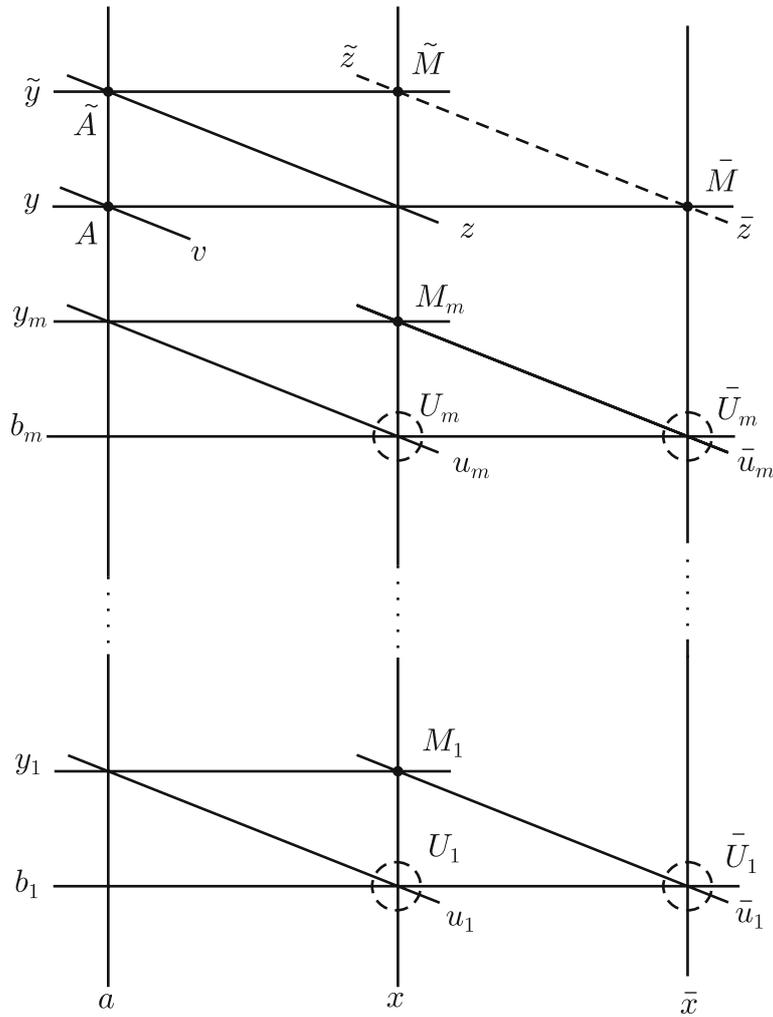


Рис. 33

слоев  $x$  и  $y$ , обозначим  $z$ . Согласно определению операции  $\circ$  имеем

$$(u_1, u_2, \dots, u_m) \circ v = x \cdot y = z.$$

Слой  $z$  пересекает вертикальный слой  $a$  в некоторой точке  $\tilde{A}$ , через которую проходит горизонтальный слой  $\tilde{y}$ . Пусть  $\tilde{M} = x \cap \tilde{y}$  и  $\tilde{z}$  — наклонный слой, проходящий через  $\tilde{M}$ . Тогда, как видно из рис. 33,

$$(u_1, u_2, \dots, u_m) \circ z = x \cdot \tilde{y} = \tilde{z},$$

и, с учетом предыдущих равенств, получаем

$$\tilde{z} = (u_1, u_2, \dots, u_m) \circ ((u_1, u_2, \dots, u_m) \circ v).$$

Далее, наклонный слой  $u_t$  пересекает вертикальный слой  $a$  в некоторой точке, через которую проходит горизонтальный слой  $y_t$ . Слои  $y_1, y_2, \dots, y_m$  пересекают вертикальный слой  $x$  соответственно в точках  $M_1, M_2, \dots, M_m$ , через каждую из которых проходит наклонный слой; обозначим эти слои  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$ , при этом

$$(u_1, u_2, \dots, u_m) \circ u_1 = \bar{u}_1, \quad \dots, \quad (u_1, u_2, \dots, u_m) \circ u_m = \bar{u}_m.$$

Слой  $\bar{u}_t$  пересекает горизонтальный слой  $b_t$  по подмногообразию  $\bar{U}_t$ ,  $t = \overline{1, m}$ . Эти подмногообразия допускают трансверсальный вертикальный слой  $\bar{x}$ , который пересекает горизонтальный слой  $y$  в точке  $\bar{M}$ . Пусть  $\bar{z}$  — наклонный слой, проходящий через  $\bar{M}$ . Тогда

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m) \circ v = \bar{z}.$$

Подставляя в последнее равенство выражения для  $\bar{u}_t$ , запишем его в виде

$$\bar{z} = \left( (u_1, u_2, \dots, u_m) \circ u_1, (u_1, u_2, \dots, u_m) \circ u_2, \dots, (u_1, u_2, \dots, u_m) \circ u_m \right) \circ v.$$

Слои  $\bar{z}$  и  $\tilde{z}$  будут совпадать тогда и только тогда, когда на ткани  $W(p, q, q)$  замыкается обобщенная конфигурация  $B_l(1, m)$  (см. рис. 33). Справедлива следующая теорема.

**Теорема 10.4.** Пусть  $u_1, u_2, \dots, u_m$  и  $v$  — произвольные наклонные слои три-ткани  $W(p, mp, mp)$ . Ткань  $W(p, mp, mp)$  будет тканью  $B_l(p, mp, mp)$  тогда и только тогда, когда в каждом ее координатном моноиде  $\mu_{(a,b)}(\circ)$  выполняется следующее тождество:

$$\left( (u_1, \dots, u_m) \circ u_1, \dots, (u_1, \dots, u_m) \circ u_m \right) \circ v = (u_1, \dots, u_m) \circ \left( (u_1, \dots, u_m) \circ v \right). \quad (10.3)$$

При  $m = 1$  тождество (10.3) обращается в тождество левой альтернативности

$$(u \circ u) \circ v = u \circ (u \circ v),$$

которое, как известно, выполняется в координатных лупах классической три-ткани Бола  $B_l$ , образованной слоениями одинаковой размерности. Поэтому назовем (10.3) тождеством обобщенной альтернативности.

**10.4.** Найдем структурные уравнения три-ткани  $B_l(p, q, q)$ . Вначале преобразуем структурные уравнения (9.32) произвольной три-ткани  $W(p, q, q)$ . Складывая первое и третье уравнения системы (9.32) и полагая

$$\begin{aligned} \Theta_\beta^\alpha &= \omega_\beta^\alpha + \frac{1}{2} \mu_{u\beta}^\alpha \omega_1^u + \mu_{\beta\gamma}^\alpha (-\omega_2^\gamma + \omega_3^\gamma), \\ \Theta_3^\alpha &= \frac{1}{2} \mu_{u\beta}^\alpha \omega_1^u \wedge \omega_3^\beta + \mu_{\beta\gamma}^\alpha \omega_3^\beta \wedge \omega_2^\gamma, \\ \Theta_2^\alpha &= -\frac{1}{2} \mu_{u\beta}^\alpha \omega_1^u \wedge \omega_2^\beta + \mu_{\beta\gamma}^\alpha \omega_2^\beta \wedge \omega_3^\gamma, \end{aligned}$$

запишем уравнения (9.32) в более простой (симметричной) форме

$$\begin{aligned} d\omega_3^\alpha &= \omega_3^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \Theta_3^\alpha, \\ d\omega_1^u &= \omega_1^v \wedge \omega_v^u + (\omega_3^\beta - \omega_2^\beta) \wedge \omega_\beta^u, \\ d\omega_2^\alpha &= \omega_2^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \Theta_2^\alpha. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (10.4), получим

$$\begin{aligned} (d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha) \wedge \omega_3^\beta + d\Theta_3^\alpha + \Theta_3^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha &= 0, \\ (d\omega_v^u - \omega_v^w \wedge \omega_w^u) \wedge \omega_1^v + (d\omega_\beta^u - \omega_\beta^v \wedge \omega_v^u - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^u) \wedge (\omega_3^\beta - \omega_2^\beta) + (\Theta_3^\beta - \Theta_2^\beta) \wedge \omega_\beta^u &= 0, \\ (d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha) \wedge \omega_2^\beta + d\Theta_2^\alpha + \Theta_2^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha &= b_{\beta\gamma\delta}^\alpha \omega_2^\gamma \wedge \omega_3^\delta + \bar{b}_{\beta\gamma u}^\alpha \omega_2^\gamma \wedge \omega_1^u + \tilde{b}_{\beta\gamma u}^\alpha \omega_3^\gamma \wedge \omega_1^u, \\ d\omega_v^u - \omega_v^w \wedge \omega_w^u &= b_{v\alpha\beta}^u \omega_2^\alpha \wedge \omega_3^\beta + \bar{b}_{v\alpha w}^u \omega_2^\alpha \wedge \omega_1^w + \tilde{b}_{v\alpha w}^u \omega_3^\alpha \wedge \omega_1^w, \\ d\omega_\alpha^u - \omega_\alpha^v \wedge \omega_v^u - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^u &= b_{\alpha\beta\gamma}^u \omega_2^\beta \wedge \omega_3^\gamma + \bar{b}_{\alpha\beta v}^u \omega_2^\beta \wedge \omega_1^v + \tilde{b}_{\alpha\beta v}^u \omega_3^\beta \wedge \omega_1^v. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Согласно [11] совокупность величин  $b_{\beta\gamma\delta}^\alpha, \bar{b}_{\beta\gamma u}^\alpha, \tilde{b}_{\beta\gamma u}^\alpha, b_{v\alpha\beta}^u, \bar{b}_{v\alpha w}^u, \tilde{b}_{v\alpha w}^u, b_{\alpha\beta\gamma}^u, \bar{b}_{\alpha\beta v}^u, \tilde{b}_{\alpha\beta v}^u$  образует тензор кривизны три-ткани  $W(p, q, q)$ .

**10.5.** Уточним понятие эквивалентности для три-тканей  $W(p, q, q)$ .

Две ткани  $W(p, q, q)$  и  $\tilde{W}(p, q, q)$ , заданные соответственно на многообразиях  $M$  и  $\tilde{M}$  размерности  $p + q$ , назовем эквивалентными, если существует локальный диффеоморфизм  $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ , при котором слоения ткани  $W(p, q, q)$  переходят в слоения ткани  $\tilde{W}(p, q, q)$ .

Пусть отображение  $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$  переводит ткань  $W(p, q, q)$  в эквивалентную ей ткань  $\tilde{W}(p, q, q)$ . Это значит, что каждое из расслоений, образующих ткань  $W(p, q, q)$ , переходит в соответствующее расслоение ткани  $\tilde{W}(p, q, q)$ . Поэтому базисные формы  $\tilde{\omega}_3^\alpha$ ,  $\tilde{\omega}_2^\alpha$  и  $\tilde{\omega}_1^u$  ткани  $\tilde{W}(p, q, q)$  выражаются через базисные формы  $\omega_3^\alpha$ ,  $\omega_2^\alpha$  и  $\omega_1^u$  ткани  $W(p, q, q)$  следующим образом:

$$\tilde{\omega}_3^\alpha = A_{\beta 3}^\alpha \omega_3^\beta, \quad \tilde{\omega}_2^\alpha = A_{\beta 2}^\alpha \omega_2^\beta, \quad \tilde{\omega}_1^u = A_v^u \omega_1^v + A_\beta^u (\omega_3^\beta - \omega_2^\beta),$$

причем ранги матриц  $A_{\beta 3}^\alpha$ ,  $A_v^u$  и  $A_\beta^u$  являются максимальными. Отсюда следует, что выбирая определенным образом базис в касательном пространстве  $T_A(M)$ ,  $A \in M$ , можно привести эти уравнения к виду

$$\tilde{\omega}_3^\alpha = \omega_3^\alpha, \quad \tilde{\omega}_2^\alpha = \omega_2^\alpha, \quad \tilde{\omega}_1^u = \omega_1^u. \quad (10.6)$$

Структурные уравнения ткани  $\tilde{W}(p, q, q)$  запишем в виде (10.4), (10.5), только входящие в них формы отметим тильдой. Дифференцируя уравнения (10.6) и пользуясь структурными уравнениями тканей  $W(p, q, q)$  и  $\tilde{W}(p, q, q)$ , получим:

$$\begin{aligned} \omega_3^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - \tilde{\omega}_\beta^\alpha) + \Theta_3^\alpha - \tilde{\Theta}_3^\alpha &= 0, \\ \omega_2^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - \tilde{\omega}_\beta^\alpha) + \Theta_2^\alpha - \tilde{\Theta}_2^\alpha &= 0, \\ \omega_1^v \wedge (\omega_v^u - \tilde{\omega}_v^u) + (\omega_3^\beta - \omega_2^\beta) \wedge (\omega_\beta^u - \tilde{\omega}_\beta^u) &= 0. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \omega_\beta^\alpha &= \tilde{\omega}_\beta^\alpha, \quad \Theta_3^\alpha = \tilde{\Theta}_3^\alpha, \quad \Theta_2^\alpha = \tilde{\Theta}_2^\alpha, \\ \mu_{\beta\gamma}^\alpha &= \tilde{\mu}_{\beta\gamma}^\alpha, \quad \mu_{u\beta}^\alpha = \tilde{\mu}_{u\beta}^\alpha, \\ \omega_v^u - \tilde{\omega}_v^u &= A_{vw}^u \omega_1^w + A_{v\beta}^u (\omega_3^\beta - \omega_2^\beta), \\ \omega_\beta^u - \tilde{\omega}_\beta^u &= A_{\beta v}^u \omega_1^v + A_{\beta\gamma}^u (\omega_3^\gamma - \omega_2^\gamma), \end{aligned} \quad (10.8)$$

причем величины  $A_{vw}^u$ ,  $A_{v\beta}^u$ ,  $A_{\beta v}^u$  и  $A_{\beta\gamma}^u$  удовлетворяют условиям

$$A_{v\beta}^u = A_{\beta v}^u, \quad A_{[vw]}^u = 0, \quad A_{[\beta\gamma]}^u = 0.$$

Покажем, что  $\omega_v^u = \tilde{\omega}_v^u$  и  $\omega_\beta^u = \tilde{\omega}_\beta^u$  (с точностью до их допустимых преобразований). Как показывают уравнения (10.4), допустимыми преобразованиями для форм  $\omega_v^u$  и  $\omega_\beta^u$  являются следующие:

$$\begin{aligned} \omega_v^u &= \bar{\omega}_v^u + B_{vw}^u \omega_1^w + B_{v\beta}^u (\omega_3^\beta - \omega_2^\beta), \\ \omega_\beta^u &= \bar{\omega}_\beta^u + B_{\beta v}^u \omega_1^v + B_{\beta\gamma}^u (\omega_3^\gamma - \omega_2^\gamma), \end{aligned} \quad (10.9)$$

где величины  $B_{vw}^u$ ,  $B_{\beta\gamma}^u$ ,  $B_{\beta v}^u$  симметричны по нижним индексам. Эти преобразования сохраняют вид структурных уравнений (10.4). Сравнивая соотношения (10.8) и (10.9), мы получаем, что для заданных эквивалентных тканей  $W(p, q, q)$  и  $\tilde{W}(p, q, q)$

$$\bar{\omega}_v^u = \tilde{\omega}_v^u, \quad \bar{\omega}_\beta^u = \tilde{\omega}_\beta^u.$$

Убирая черту из уравнений (10.5) и аналогичных им для тканей  $\tilde{W}(p, q, q)$  получаем, что соответствующие тензоры кривизны тканей  $W(p, q, q)$  и  $\tilde{W}(p, q, q)$  совпадают. Доказана следующая теорема.

**Теорема 10.5.** Если ткани  $W(p, q, q)$  и  $\tilde{W}(p, q, q)$  эквивалентны, то в соответствующих реперах их тензоры кручения и кривизны совпадают.

Доказательство обратной теоремы проводится также, как и доказательство аналогичной теоремы для классических три-тканей, образованных слоениями одинаковой размерности (см. [91]). Поэтому приведем только ее формулировку.

**Теорема 10.6.** Пусть две три-ткани  $W(p, q, q)$  и  $\tilde{W}(p, q, q)$  заданы соответственно на дифференцируемых многообразиях  $M$  и  $\tilde{M}$  размерности  $p + q$  и существует локальный диффеоморфизм  $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ , а также гладкое поле линейных отображений  $\Phi_A : R_A \rightarrow R_{\phi(A)}$ , где  $A \in M$ ,  $R_A$  и  $R_{\phi(A)}$  — реперы в соответствующих точках. Пусть в соответствующих реперах тензоры кручения и кривизны тканей  $W(p, q, q)$  и  $\tilde{W}(p, q, q)$  совпадают. Тогда три-ткани  $W(p, q, q)$  и  $\tilde{W}(p, q, q)$  эквивалентны.

**10.6.** Пусть ткань  $W(p, q, q)$  является левой тканью Бола  $B_l(p, q, q)$ . Тогда, как показано выше в п. 10.1, на многообразии ткани возникает точечное отображение  $\varphi$ ,  $\varphi(A) = V(A) \cap (a * b)$  (см. рис. 31). Оно порождается сдвигами  $L_a$  координатного группоида  $f$ , а потому является внутренним автоморфизмом ткани  $B_l(p, q, q)$ .

В дифференциальной форме сдвиг  $L_a$  задается уравнениями

$$\omega_1^\alpha = 0, \quad \omega_1^u = 0,$$

поэтому соответствие между вторым и третьим слоениями определяется уравнениями

$$\omega_3^\alpha = \omega_2^\alpha,$$

а точечное соответствие  $\varphi$  — уравнениями

$$\omega_2^\alpha = \bar{\omega}_3^\alpha, \quad \omega_3^\alpha = \bar{\omega}_2^\alpha, \quad \omega_1^u = -\bar{\omega}_1^u. \quad (10.10)$$

Поскольку эти преобразования являются автоморфизмами, то они сохраняют вид структурных уравнений (10.4) и (10.5). Отсюда получаем следующие соотношения на компоненты тензора кривизны:

$$b_{\beta(\gamma\delta)}^\alpha = 0, \quad b_{v(\gamma\delta)}^u = 0, \quad b_{\beta(\gamma\delta)}^u = 0, \quad \bar{b}_{\beta\gamma u}^\alpha = -\bar{b}_{\beta\gamma u}^\alpha, \quad \bar{b}_{v\beta w}^u = -\bar{b}_{v\beta w}^u, \quad \bar{b}_{\alpha\beta v}^u = -\bar{b}_{\alpha\beta v}^u. \quad (10.11)$$

Таким образом, окончательный вид дифференциальных продолжений (10.5) структурных уравнений (10.4) ткани  $B_l(p, q, q)$  будет такой:

$$\begin{aligned} d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha &= b_{\beta\gamma\delta}^\alpha \omega_2^\gamma \wedge \omega_3^\delta + b_{\beta\gamma w}^\alpha (\omega_2^\gamma - \omega_3^\gamma) \wedge \omega_1^w, \\ d\omega_v^u - \omega_v^w \wedge \omega_w^u &= b_{v\gamma\delta}^u \omega_2^\gamma \wedge \omega_3^\delta + b_{v\gamma w}^u (\omega_2^\gamma - \omega_3^\gamma) \wedge \omega_1^w, \\ d\omega_\beta^u - \omega_\beta^v \wedge \omega_v^u - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^u &= b_{\beta\gamma\delta}^u \omega_2^\gamma \wedge \omega_3^\delta + b_{\beta\gamma w}^u (\omega_2^\gamma - \omega_3^\gamma) \wedge \omega_1^w, \\ (d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha) \wedge \omega_3^\beta + d\Theta_3^\alpha + \Theta_3^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha &= 0, \\ (d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha) \wedge \omega_2^\beta + d\Theta_2^\alpha + \Theta_2^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha &= 0, \end{aligned}$$

где

$$b_{\beta(\gamma\delta)}^\alpha = 0, \quad b_{v(\beta\gamma)}^u = 0, \quad b_{\alpha(\beta\gamma)}^u = 0$$

и введены обозначения

$$b_{\beta\gamma w}^\alpha = \bar{b}_{\beta\gamma w}^\alpha, \quad b_{v\beta w}^u = \bar{b}_{v\beta w}^u, \quad b_{\alpha\beta w}^u = \bar{b}_{\alpha\beta w}^u.$$

Согласно теореме 10.6 полученные условия являются и достаточными для того, чтобы ткань  $W(p, q, q)$  являлась тканью  $B_l(p, q, q)$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 10.7.** Ткань  $W(p, q, q)$  на многообразии размерности  $p + q$  является тканью Бола  $B_l(p, q, q)$  тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны удовлетворяет условиям (10.11).

Аналогичное доказательство проходит и для классических три-тканей Бола  $B_l(r, r, r)$  (см. [8]).

**10.7.** В [68] найдены конечные уравнения три-ткани  $B_l(2, 3, 3)$ , которая имеет единственную отличную от нуля компоненту тензора кривизны  $b_{223}^1 = b = \text{const}$ . Структурные уравнения такой ткани приводятся к виду

$$\begin{aligned} d\omega_3^1 &= \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 + \Theta_3^1, & d\omega_3^2 &= 0, & d\omega_1^3 &= 0, \\ d\omega_2^1 &= \omega_2^2 \wedge \omega_2^1 + \Theta_2^1, & d\omega_2^2 &= 0, & d\omega_2^1 &= b(\omega_2^2 - \omega_3^2) \wedge \omega_1^3, \\ d\Theta_3^1 &= -d\omega_2^1 \wedge \omega_3^2, & d\Theta_2^1 &= -d\omega_2^1 \wedge \omega_2^2. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Эта система замкнута относительно внешнего дифференцирования. Путем последовательного интегрирования системы (10.12) находятся формы

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= -\frac{1}{8}b(w^2)^2 du^3 + \frac{1}{8}u^3 d(w^2)^2 + dw^1, \\ \omega_1^3 &= du^3, \quad \omega_3^2 = dw^2, \quad \omega_2^2 = dv^2, \\ \omega_2^1 &= \frac{1}{8}b(v^2)^2 du^3 - \frac{1}{8}u^3 d(v^2)^2 + dv^1, \\ \omega_2^1 &= \frac{1}{2}bv^2 w^2 du^3 - \frac{1}{2}bu^3 d(v^2 - w^2), \\ \Theta_3^1 &= -\frac{1}{2}b(u^3 dv^2 - v^2 du^3) \wedge dw^2, \\ \Theta_2^1 &= \frac{1}{2}b(u^3 dw^2 - w^2 du^3) \wedge dv^2, \end{aligned}$$

где  $w^1, w^2, u^3, v^1$  и  $v^2$  — локальные координаты.

Далее находятся уравнения слоений рассматриваемой три-ткани  $B_l(2, 3, 3)$ . Слои третьего слоения определяются уравнениями

$$\omega_3^1 = dw^1 - \frac{1}{8}b(w^2)^2 du^3 + \frac{1}{8}u^3 d(w^2)^2 = 0, \quad \omega_3^2 = dw^2 = 0.$$

Интегрируя их, получаем

$$w^1 - \frac{1}{8}b(\bar{z}^2)^2 u^3 = \bar{z}^1, \quad w^2 = \bar{z}^2,$$

где  $\bar{z}^1, \bar{z}^2$  — первые интегралы системы. Аналогично находятся уравнения слоев второго слоения ткани:

$$\omega_2^1 = dv^1 + \frac{1}{8}b(v^2)^2 du^3 - \frac{1}{8}u^3 d(v^2)^2 = 0, \quad \omega_2^2 = dv^2 = 0.$$

Интегрирование этих уравнений приводит к равенствам

$$v^1 + \frac{1}{8}b(\bar{y}^2)^2 u^3 = \bar{y}^1, \quad v^2 = \bar{y}^2,$$

где  $\bar{y}^1, \bar{y}^2$  — постоянные интегрирования. Слои первого слоения три-ткани  $B_l(2, 3, 3)$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned} dw^1 - \frac{1}{8}b(w^2)^2 du^3 + \frac{1}{8}u^3 d(w^2)^2 - dv^1 + \frac{1}{8}b(v^2)^2 du^3 - \frac{1}{8}u^3 d(v^2)^2 &= 0, \\ dw^2 - dv^2 &= 0, \quad du^3 = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя их, находим

$$w^1 - v^1 + \frac{1}{4}b\bar{x}^3(v^2)^2 = \bar{x}^1, \quad w^2 - v^2 = \bar{x}^2, \quad u^3 = \bar{x}^3,$$

где  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$  — первые интегралы системы.

Исключая локальные координаты из полученных уравнений слоений и проводя допустимые (изотопические) преобразования, найдем конечные уравнения рассматриваемой три-ткани  $B_l(2, 3, 3)$  в виде

$$z^1 = x^1 + y^1 - x^3 y^2 (x^2 + y^2), \quad z^2 = x^2 + y^2.$$

С другой стороны, согласно п. 10.1, последние уравнения определяют трехпараметрическую квазигруппу Бола преобразований на двумерном многообразии. Найдем ее параметрическую квазигруппу  $Q(*)$ . Для этого составим равенства (10.2). Они являются тождествами относительно  $y$  и связывают величины  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_1 * x_2$ . Проведя необходимые вычисления, получим

$$\begin{aligned} c^1 &= 2a^1 - b^1 - (a^2 - b^2)(a^2(a^3 - b^3) + a^3(a^2 - b^2)), \\ c^2 &= 2a^2 - b^2, \quad c^3 = 2a^3 - b^3, \end{aligned} \quad (10.13)$$

где введены обозначения  $c = x_1 * x_2$ ,  $a = x_1$ ,  $b = x_2$ .

Уравнения (10.13) некоторым изотопическим преобразованием приводятся к виду

$$w^1 = u^1 + v^1 - u^3 v^2 (u^2 + v^2), \quad w^2 = u^2 + v^2, \quad w^3 = u^3 + v^3,$$

а последние определяют левую лупу Бола с единицей  $e(0, 0, 0)$ .

Заметим, что квазигруппа, левая обратная квазигруппе (9.41), изотопна средней лупе Бола, уравнения (0.12) которой найдены из других соображений в [72].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азизова Н. Х. Об однопараметрическом семействе преобразований плоскости, допускающем бесчисленное множество систем импримитивности// Материалы науч. конф. препод. матем. кафедр пед. ин-тов Сибири. — Новокузнецк, 1969.
2. Азизова Н. Х. О три-тканях кривых и поверхностей// Уч. зап. МГПУ им. В. И. Ленина. — 1970. — 374. — С. 7–17.
3. Аквис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей// Тр. геом. семин. ВИНТИ АН СССР. — 1969. — 2. — С. 7–31.
4. Аквис М. А. О замкнутых  $G$ -структурах на дифференцируемом многообразии// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНТИ, 1975. — 7. — С. 69–79.
5. Аквис М. А. О локальных алгебрах многомерных три-тканей// Сиб. мат. ж. — 1976. — 17, № 1. — С. 5–11.
6. Аквис М. А. Об интегрировании структурных уравнений три-ткани Муфанг минимальной размерности// Диффер. геом. — Калинин, 1977. — С. 3–9.
7. Аквис М. А. Дифференциальная геометрия тканей// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНТИ, 1983. — 15. — С. 187–213.
8. Аквис М. А., Апресян Ю. А. О три-тканях  $W(n+1, n+1, n)$  на многообразии размерности  $2n+1$ // Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1990. — С. 4–10.
9. Аквис М. А., Герасименко С. А. О некоторых фигурах замыкания на многообразиях с симметрией// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1982. — С. 7–11.
10. Аквис М. А., Гольдберг В. В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей// Докл. АН СССР. — 1972. — 203, № 2. — С. 263–266.
11. Аквис М. А., Гольдберг В. В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей// Тр. геом. семин. ВИНТИ. — 1973. — 4. — С. 179–204.
12. Аквис М. А., Шелехов А. М. О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани и ассоциатора связанной с ней локальной квазигруппы// Сиб. мат. ж. — 1971. — 12, № 5. — С. 953–966.
13. Аквис М. А., Шелехов А. М. Основы теории тканей. — Калинин, 1981.
14. Апресян Ю. А. Три-ткани кривых и гиперповерхностей и семейства диффеоморфизмов одномерных многообразий// Диффер. геом. — Калинин, 1977. — С. 10–22.
15. Апресян Ю. А. О многомерных три-тканях, образованных двумя семействами гиперповерхностей и одним семейством кривых// Изв. вузов. Сер. мат. — 1977. — 4 (179). — С. 132–135.
16. Апресян Ю. А. Трехпараметрические семейства диффеоморфизмов прямой на прямую, содержащие два линейных комплекса однопараметрических подсемейств специального типа// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1984. — С. 8–15.
17. Аракелян Г. С. Некоторые классы многомерных три-тканей, у которых поверхности одного из семейств принадлежат поверхностям другого семейства// Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех. — 1981. — 2. — С. 3–7.
18. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука. — 1967.
19. Белоусов В. Д. Алгебраические сети и квазигруппы. — Кишинев: Штиинца. — 1971.

20. Белоусов В. Д., Рыжков В. В. Геометрия тканей// Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. — М.: ВИНТИ, 1972. — 10. — С. 159–188.
21. Биллиг В. А., Шелехов А. М. О классификации тождеств от одной переменной в гладкой локальной лупе// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1987. — С. 24–32.
22. Биллиг В. А., Шелехов А. М. Классификация тождеств длины 12 порядка 4 с одной переменной в локальной аналитической лупе// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1990. — С. 10–18.
23. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. — М.: ГИФМЛ, 1959.
24. Боцу В. П. Об изоклинности четырехмерных шестиугольных три-тканей/ Деп. в ВИНТИ 14.08.1984, № 5824-84.
25. Васильева М. В. Группы Ли преобразований. — М.: МГПУ, 1969.
26. Гвоздович Н. В. Некоторые вопросы общей теории инфинитезимальных автоморфизмов многомерных три-тканей// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1985. — С. 49–54.
27. Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основании геометрии// Об основаниях геометрии. — М., 1956. — С. 366–388.
28. Гольдберг В. В. Трансверсально-геодезические, шестиугольные и групповые три-ткани, образованные поверхностями разных размерностей// Сб. статей по диффер. геом. — Калинин, 1974. — С. 52–64.
29. Гольдберг В. В. О приводимых, групповых и  $(2n + 2)$ -эдричных  $(n + 1)$ -тканях многомерных поверхностей// Сиб. мат. ж. — 1976. — 1. — С. 44–57.
30. Иванов А. Д. О четырехмерных тканях Боля эллиптического и гиперболического типов// Изв. вузов. Сер. мат. — 1975. — 9. — С. 25–34.
31. Иванов А. Д. О четырехмерных тканях Боля параболического типа// Изв. вузов. Сер. мат. — 1976. — 1. — С. 42–47.
32. Иванов В. Г. Пространства с обобщенным параллелизмом// Геометрия погруженных многообразий/ Сб. науч. тр. — М.: МГПУ им. В. И. Ленина, 1978. — С. 47–54.
33. Иванов В. Г. Линейный обобщенный параллелизм// Геометрия погруженных многообразий/ Сб. науч. тр. — М.: МГПУ им. В. И. Ленина, 1979. — С. 51–56.
34. Иванов В. Г. Обобщенный параллелизм в проективном пространстве// Изв. вузов. Сер. мат. — 1980. — 8 (219). — С. 27–31.
35. Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике/ Тр. ин-та физики АН Эстонии. — Тарту, 1990.
36. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»)// Об основаниях геометрии. — М.: Наука. — 1956. — С. 402–434.
37. Кузьмин Е. Н. О связи между алгебрами Мальцева и аналитическими лупами Муфанг// Алгебра и логика. — 1971. — 10, № 1. — С. 3–22.
38. Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур/ С добавлением Г. Г. Михайличенко, — Новосибирск, 1968.
39. Кулаков Ю. И. О теории физических структур// Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1983. — 127. — С. 103–151.
40. Кулаков Ю. И., Владимиров Ю. С., Карнаухов А. В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику, — М.: Архимед, 1992.
41. Курдгеллаидзе Д. Ф. Основы неассоциативной теории поля// В сб.: «Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике»/ Тр. ин-та физики. — Тарту, 1990. — 66. — С. 122–133.
42. Лоос О. Симметрические пространства, — М.: Наука, 1985.
43. Лыхмус Я., Паал Э., Соргсепп Л. Неассоциативность в математике и физике// В сб.: «Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике»/ Тр. ин-та физики. — Тарту, 1990. — 66. — С. 8–22.
44. Мальцев А. И. Аналитические лупы// Мат. сб. — 1955. — 36, № 3. — С. 569–575.
45. Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур// Докл. АН СССР. — 1972. — 206, № 5. — С. 1056–1058.
46. Михайличенко Г. Г. Об одной задаче в теории физических структур// Сиб. мат. ж. — 1977. — 18, № 6. — С. 1342–1355.
47. Михайличенко Г. Г. Математический аппарат теории физических структур. — Горно-Алтайск: Изд-во Горно-Алтайского ун-та. — 1997.
48. Михайличенко Г. Г. Групповая симметрия физических структур. — Барнаул, 2003.
49. Михеев П. О. О лупах преобразований/ Деп. в ВИНТИ, 1985. — № 4531–85.
50. Нгуен Зоан Туан. О многомерных три-тканях типа  $W(p, p, q)$ // Геометрия погруженных многообразий. — М.: МГПИ, 1986.
51. Нгуен Зоан Туан. Некоторые подклассы три-тканей типа  $W(p, p, q)$  с постоянными компонентами основного тензора// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1987. — С. 82–87.

52. *Нестеров А. И.* Квазигрупповые идеи в физике// В сб.: «Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике»/ Тр. ин-та физики. — Тарту, 1990. — 66. — С. 107–120.
53. *Нестеров А. И., Степаненко В. А.* О методах неассоциативной алгебры в геометрии и физике/ Препринт 400-Ф. — Красноярск, 1986.
54. *Помаскина Л. А.* Идемпотентные квазигруппы, определяемые на многомерной три-ткани// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1982. — С. 55–63.
55. *Сабинин Л. В.* Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии// Добавление к книге: *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука. — 1981. — С. 293–339.
56. *Сабинин Л. В., Михеев П. О.* Теория гладких луп Бола. — М.: Ун-т Дружбы народов, 1985.
57. *Толстихина Г. А.* О главных направлениях на  $r$ -мерной поверхности, определяемых  $2r$ -мерной три-тканью// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1987. — С. 99–107.
58. *Толстихина Г. А.* Об однопараметрических подквазигруппах идемпотентной квазигруппы, индуцируемой три-тканью на гладком подмногообразии// Деп. в ВИНТИ 29.12.1987. — № 9153В-87.
59. *Толстихина Г. А.* О сердцевине координатной квазигруппы некоторой шестимерной три-ткани Боля// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1990. — С. 18–22.
60. *Толстихина Г. А.* Сеть линий, определяемая грассманизуемой три-тканью на гладком подмногообразии// Изв. вузов. Сер. мат. — 1990. — 7. — С. 83–87.
61. *Толстихина Г. А.* О локально плоской структуре, связанной с тканью Боля// Алгебраические методы в геометрии. — М.: РУДН, — 1992. — С. 56–61.
62. *Толстихина Г. А., Шелехов А. М.* О три-тканях  $W(p, q, p+q-1)$ , на которых замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера// Деп. в ВИНТИ 13.08.2001. — № 1869-В2001.
63. *Толстихина Г. А., Шелехов А. М.* Обобщенная ассоциативность в гладких группоидах// Докл. РАН. — 2002. — 383, № 1. — С. 32–33.
64. *Толстихина Г. А., Шелехов А. М.* Три-ткани, определяемые группами преобразований// Докл. РАН. — 2002. — 385, № 4. — С. 1–3.
65. *Толстихина Г. А., Шелехов А. М.* Вложение три-ткани, определяемой группой преобразований, в групповую три-ткань// Деп. в ВИНТИ, 2003. — № 880-В2003.
66. *Толстихина Г. А., Шелехов А. М.* Многоточечные инварианты групп преобразований и определяемые ими три-ткани// Изв. вузов. Сер. мат. — 2003. — 11 (498). — С. 82–87.
67. *Толстихина Г. А., Шелехов А. М.* О квазигруппах Бола преобразований// Докл. РАН (в печати).
68. *Толстихина Г. А., Шелехов А. М.* О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей// Изв. вузов. Сер. мат. (в печати).
69. *Ферапонтов Е. В.* Системы трех дифференциальных уравнений гидродинамического типа с шестимерной три-тканью характеристик// Функц. анализ. прилож. — 1989. — 23, № 2. — С. 79–80.
70. *Ферапонтов Е. В.* Интегрирование слабо нелинейной и полугамильтоновой системы гидродинамического типа методами геометрии тканей// Мат. сб. — 1990. — 181, № 9. — С. 1220–1235.
71. *Ферапонтов Е. В.* Уравнения гидродинамического типа с точки зрения геометрии тканей// Мат. заметки. — 1991. — 50, № 5. — С. 97–108.
72. *Федорова В. И.* Шестимерные три-ткани Боля с симметричным тензором  $a_{ij}$ // Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1981. — С. 110–123.
73. *Федорова В. И.* Об условии, определяющем многомерные три-ткани Боля// Сиб. мат. ж. — 1987. — 19, № 4. — С. 922–926.
74. *Фиников С. П.* Теория пар конгруэнций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
75. *Шелехов А. М.* О замкнутых  $G$ -структурах, определяемых многомерными три-тканями// Деп. в ВИНТИ 25.12.1985. — № 8815-В85.
76. *Шелехов А. М.* Тождества с одной переменной в лупах, эквивалентные моноассоциативности// Проблемы теории тканей и квазигрупп. — Калинин, 1985. — С. 89–93.
77. *Шелехов А. М.* О вычислении ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1986. — С. 96–103.
78. *Шелехов А. М.* Дифференциально-геометрические объекты высших порядков многомерной три-ткани// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНТИ, 1987. — 19. — С. 101–154.
79. *Шелехов А. М.* О три-тканях с эластичными координатными лупами// Деп. в ВИНТИ 02.12.1987. — № 8465-В87.
80. *Шелехов А. М.* Классификация многомерных три-тканей по условиям замыкания// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНТИ, 1989. — 21. — С. 109–154.

81. Шелехов А. М. Вычисление вторых ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1990. — С. 10–18.
82. Шелехов А. М. Автотопии три-тканей и геометрические  $G$ -ткани// Изв. вузов. Сер. мат. — 1990. — 5. — С. 75–77.
83. Шелехов А. М. Об аналитических решениях функционального уравнения  $(xy)x = x(yx)$ // Мат. заметки. — 1991. — 50, № 4. — С. 132–140.
84. Шелехов А. М., Шестакова М. А. О тождествах в лупах со слабой ассоциативностью// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1985. — С. 115–121.
85. Шестаков И. П. Линейные представления алгебр Аквивиса// Докл. РАН. — 1999. — 368, № 1. — С. 21–23.
86. Шестакова М. А. Пример шестиугольной три-ткани с частично симметричным тензором кривизны// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1990. — С. 22–28.
87. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. — М.: Наука. — 1955.
88. Aklivis M. A., Goldberg V. V. Differential geometry of webs/ Chap. 1 in «Handbook of Differential Geometry». — Elsevier Science, 2000. — С. 1–152.
89. Aklivis M. A., Goldberg V. V. Algebraic aspects of web geometry// Comment. Math. Univ. Carolinae. — 2000. — 41, № 2. — С. 205–236.
90. Aklivis M. A., Shelekhov A. M. On subwebs of 3-webs and subalgebras of local  $W_k$ -algebras// Acta Math. Hungar. — 1988. — 52, №№ 3-4. — С. 265–271.
91. Aklivis M. A., Shelekhov A. M. Algebra and geometry of multidimensional three-webs. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1992.
92. Aklivis M. A., Shelekhov A. M. Contravariant theory of multidimensional three-webs// Webs and Quasigroups. — Tver, 1993. — С. 20–32.
93. Albert A. A. Structure of algebras. — New York, 1939.
94. Balandina G. A., Shelekhov A. M. On general theory of elastic webs// Webs and Quasigroups. — Tver, 1995. — С. 62–74.
95. Balk A. M., Ferapontov E. V. Invariants of wave systems and web geometry// Nonlinear waves and weak turbulence/ Zakharov V. E., ed. — Trans. Amer. Math. Soc., Ser. 2. — Amer. Math. Soc. Providence, 1998. — 182. — С. 1–30.
96. Barlotti A., Strambach K. The geometry of binary systems// Adv. Math. — 1983. — 49, № 1. — С. 1–105.
97. Batalin I. A. Quasigroup construction and first class constraints// J. Math. Phys. — 1981. — 22, № 9. — С. 1837–1849.
98. Blaschke W. Zwei Kurvenscharen und eine Flachenschar// Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1931. — С. 48–63.
99. Bol G. Uber zwei Kurvenscharen and eine Flachenschar// Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1932. — С. 93–94.
100. Bol G. Über 3-Gewebe in vierdimensionalen Raum// Math. Ann. — 1935. — С. 431–463.
101. Bruck R. H., Paige L. J. Loops whose inner mapping are automorphisms// Ann. Math. — 1956. — 63, № 2. — С. 308–323.
102. Burdujan I. On binary triple algebras// An. Sti. Univ. «Al. I. Cuza» IASI XXXIX. — 1993. — 1. — С. 49–56.
103. Chern S. S. Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus  $r$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten in  $R_{2r}$ // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1936. — 11, №№1-2. — С. 336–358.
104. Goldberg V. V. Local differentiable quasigroups and webs// Chap. X in «Quasigroups and Loops: Theory and Applications». — Berlin: Heldermann-Verlag, 1990. — С. 263–311.
105. Hofmann K. H., Strambach K. The Aklivis algebra of a homogeneous loop// Mathematika. — 1986. — 33, № 1. — С. 87–95.
106. Jordan P., von Neumann J., Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism// Ann. Math. (USA). — 1934. — 35, № 1. — С. 29–64.
107. Karanda H. M.  $\psi$ -cores of  $\psi$ -Bol loops// Far East J. Math. Sci. — 1998. — 6, № 2. — С. 229–240.
108. Kikkawa M. Geometry of homogneneous Lie loops// Hiroshima Math. J. — 1975. — 5, № 2. — С. 141–179.
109. Lohmus J., Sorgsepp L. Ternary algebra of sedenions// Trans. Inst. Phys. Estonian Acad. Sci. — 1990. — 66. — С. 170–179.
110. McCrimmon K. The Russian revolution in Jordan algebras// Algebras Groups Geom. — 1984. — 1, № 1. — С. 1–61.
111. Miheev P. O. Quasigroups of transformations// В сб.: «Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике»/ Тр. ин-та физики. — Тарту, 1990. — 66. — С. 54–66.

112. *Nagy T. P.* Invariant tensor fields and the canonical connection of a 3-web// *Alg. Math.* — 1987.
113. *Nisthimori T.* Octahedral webs on closed manifolds// *Tohoku Math. J.* — 1980. — 32, № 3. — С. 399–410.
114. *Nisthimori T.* Some remarks on octahedral webs// *Jap. J. Math.* — 1981. — 7, № 1. — С. 169–179.
115. *Parehall K. H., Joseph H. M.* Wedderburn and the structure theory of algebras// *Arch. Hist. Exact. Sci.* — 1985. — 32, №№ 3-4. — С. 223–349.
116. *Sabinin L. V.* Smooth quasigroups and loops mathematics and its applications. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academie Publ., 1999.
117. *Sagle A. A.* Mal'cev algebras// *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1961. — 101, № 3. — С. 426–458.
118. *Santilli R. M.* Foundations of theoretical mechanics. — New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1978. — 1.
119. *Santilli R. M.* Status of the mathematical and physical studies on the Lie-admissible formulations on July with particular reference to the strong interactions// *Hadronic J.* — 1979. — 2, № 6. — С. 1460–2018.
120. *Santilli R. M.* Lie-admissible approach to the hadronic structure// *Hadronic J.* — 1982. — 5. — С. 264.
121. *Shelekhov A. M.* The  $G$ -structure associated with a multidimensional hexagonal 3-web, is closed// *J. Geom.* — 1989. — 35. — С. 167–176.
122. *Shelekhov A. M.* New closure conditions and some problems in loop theory// *Aequationes Math. Univ. of Waterloo.* — 1991. — 41. — С. 79–84.
123. *Shelekhov A. M.* On the theory of  $G$ -webs and  $G$ -loops// *Proc. Conf. «Global Differential Geometry and Global Analysis», Berlin/ Lecture Notes Math.* — 1991. — 1418. — С. 265–270.
124. *Shelekhov A. M.* A good formula for 3-web curvature tensor// *Webs and Quasigroups.* — Tver, 1993. — С. 44–49.
125. *Shelekhov A. M.* The structure of Bol web  $E_1$ // *Webs and Quasigroups.* — Tver, 1994. — С. 34–46.
126. *Shestakov I. P.* Every Akinis algebra is linear// *Geom. Dedicata.* — 1999. — 77. — С. 215–223.
127. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* Free Akinis algebras, primitive elements, and hyperalgebras// *J. Algebra.* — 2002. — 250. — С. 533–548.
128. *Shestakova M. A.* On geometry of a six-dimensional hexagonal three-web  $H_s^1$ // *Webs and Quasigroups.* — Tver, 2002. — С. 106–117.
129. *Sorgsepp L., Lohmus J.* About nonassociativity in physics and Cayley–Graves octonions// *Hadronic J.* — 1979. — 2, № 6. — С. 1388–1459.
130. *Tolstikhina G. A.* On subquasigroups of an idempotent quasigroup defined by a three-web// *Webs and Quasigroups.* — Tver, 1993. — С. 51–55.
131. *Tolstikhina G. A.* On subquasigroups of an idempotent quasigroup defined by a three-web, 2// *Webs and Quasigroups.* — Tver, 1994. — С. 57–59.
132. *Tolstikhina G. A.* On associative smooth monoids// *Webs and Quasigroups.* — Tver, 2002. — С. 53–59.
133. *Tolstikhina G. A., Shelekhov A. M.* On normal subwebs of multidimensional three-web and ideals of its tangent  $W$ -algebra// *Webs and Quasigroups.* — Tver, 1999. — С. 85–910.
134. *Tolstikhina G. A., Shelekhov A. M.* The three-web determined by affine transformation group// *Webs and Quasigroups.* — Tver, 2002. — С. 46–49.

## О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ

© 2005 г. А. А. УТКИН, А. М. ШЕЛЕХОВ

### СОДЕРЖАНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| Введение . . . . .  | 116 |
| 1. Структурные уравнения криволинейной ткани . . . . .  | 118 |
| 2. Криволинейные три-ткани, у которых одна из ковариантных производных кри-<br>визны равна нулю . . . . .                                 | 120 |
| 3. Три-ткани, определяемые линейным дифференциальным уравнением . . . . .   | 123 |
| 4. Три-ткани, определяемые уравнением Риккати . . . . .   | 126 |
| 5. Криволинейные три-ткани, допускающие однопараметрическое семейство авто-<br>морфизмов . . . . .  | 129 |
| 6. Инвариантная характеристика спрямляемых три-тканей . . . . .   | 131 |
| 7. Вычисление ковариантных производных ткани $W$ через частные производные от<br>функции $z = f(x, y)$ , определяющей эту ткань . . . . . | 134 |
| 8. Заключительные замечания . . . . .   | 137 |
| Список литературы . . . . .   | 138 |

**Введение.** Криволинейной тканью в классической дифференциальной геометрии называют совокупность нескольких семейств гладких кривых, заданных на плоскости, или на поверхности однородного пространства, или на некотором гладком двумерном многообразии. Через каждую точку области определения проходит по одной линии из каждого семейства, линии ткани в каждой точке попарно трансверсальны, и у каждой точки есть окрестность, в которой каждое из семейств образует слоение.

Криволинейные ткани различают по количеству семейств кривых, их составляющих (2-ткани или сети, три-ткани,  $d$ -ткани) и по отношению эквивалентности. В настоящей статье рассматриваются три-ткани с точностью до произвольных локальных диффеоморфизмов — наиболее широкого отношения эквивалентности, сохраняющего трансверсальность слоев, поэтому здесь не отражены, например, работы, в которых изучаются евклидовы или аффинные свойства три-тканей.

Заметим, что в дифференциально-топологической теории тканей не имеет смысла рассматривать сети (2-ткани), поскольку подходящим локальным диффеоморфизмом всякую сеть можно отобразить (локально) на декартову сеть. Но уже три-ткани представляют собой нетривиальный объект, так как не существует, вообще говоря, локального диффеоморфизма, который все три семейства отображает на три семейства параллельных прямых.

Основной геометрический образ в дифференциально-топологической теории тканей — конфигурации, образованные слоениями ткани, см. [5, 35]. При локальных диффеоморфизмах сохраняется свойство конфигураций быть замкнутыми. В соответствии с этим обстоятельством основные специальные классы многомерных три-тканей определяются типом замыкающихся на них конфигураций, см. [35]. Но для криволинейных три-тканей на двумерном многообразии эта классификация является тривиальной, поскольку в этом случае все условия замыкания совпадают [5].

Дифференциально-топологической теории многомерных три-тканей, образованных на многообразии размерности  $2r$  тремя слоениями размерности  $r$ ,  $r > 1$ , посвящено значительное количество

работ. Описаны основные типы тканей, для некоторых размерностей и типов проведена детальная классификация, см. обзоры [1, 4, 33, 35]. В то же время по теории криволинейных три-тканей ( $r = 1$ ) имеется сравнительно немного работ, хотя их число в последние годы растет.

Поскольку два семейства линий произвольной три-ткани  $W$  всегда можно «выпрямить» и принять за декартову сеть, то в некоторой окрестности ее (т.е. три-ткань) можно задать уравнением  $z = f(x, y)$ , причем линии третьего семейства суть линии уровня функции  $f$ . Ограничение на функцию  $f(x, y)$  минимально: уравнение ткани должно быть однозначно разрешимо (локально) относительно каждой из переменных  $x$  и  $y$ . Последнее обстоятельство делает теорию тканей приложимой к любой теории, где объектом изучения является гладкая функция двух переменных. Это, например, некоторые физические законы, двусторонне разрешимые бинарные операции (квазигруппы и лупы) и т. д., см., например, [18–21, 32, 36, 54].

Первым дифференциально-топологические свойства три-тканей начал рассматривать В. Бляшке [5]. Он применил для их изучения внешнее дифференциальное исчисление, ввел понятие кривизны, доказал, что обращение кривизны в нуль характеризует параллелизуемые (регулярные) три-ткани, т.е. ткани, эквивалентные простейшей (параллельной) ткани, образованной тремя семействами параллельных прямых.

Одно из исторически первых приложений криволинейных тканей — номография. Номограмма представляет собой конечное множество линий одного семейства ткани, параметры которых берутся с некоторым шагом. Особенно удобны так называемые номограммы «из выравненных точек», которым соответствует прямолинейная три-ткань. Напомним, что прямолинейная три-ткань образована на плоскости тремя семействами прямых (не обязательно параллельных). Геометрически прямолинейные ткани устроены весьма просто — каждое семейство прямых можно задать его огибающей. Ткань, эквивалентная прямолинейной ткани, называется спрямляемой. Основная проблема, на которую указал Бляшке еще в [5], состоит в том, чтобы охарактеризовать класс спрямляемых тканей с помощью дифференциально-топологических инвариантов ткани, к которым относится кривизна ткани и ее ковариантные производные. Иными словами, проблема состоит в том, чтобы найти соотношение на инварианты, характеризующее спрямляемые ткани. С самого начала было ясно, что задача является весьма сложной, и в [5] Бляшке даже утверждал, что, по видимому, это дело безнадежное, поскольку решение лежит в дифференциальной окрестности не ниже восьмого порядка. Тем не менее, в 1988 г. В. В. Гольдбергу в определенном смысле удалось решить задачу: он предъявил алгоритм, сводящий проблему к анализу системы из одного алгебраического уравнения и вполне интегрируемой системы из шести уравнений Пфаффа с шестью функциями от двух независимых переменных [41]. В [10, 45] проблема сведена к доказательству существования общего корня пяти алгебраических уравнений степеней 17, 17, 18, 24, 24; более подробно мы рассматриваем эту задачу в разделах 6, 7.

Другой известный класс три-тканей связан с понятием автоморфизма ткани. Дело в том, что произвольная криволинейная три-ткань не допускает, вообще говоря, автоморфизмов. Регулярные ткани и только они допускают транзитивную группу автоморфизмов [35] (в частности, параллельная ткань на плоскости, определяемая уравнением  $z = x + y$ , допускает автоморфизмы вида  $x \rightarrow ax + b$ ,  $y \rightarrow ay + c$ ,  $z \rightarrow az + b + c$ ).

Промежуточный класс криволинейных три-тканей на плоскости, допускающих однопараметрическое семейство автоморфизмов, исследовался в [9], где найдено дифференциальное уравнение первого порядка на функцию  $f(x, y)$ , определяющую такие ткани. В разделе 5 мы даем полное решение проблемы — находим вид конечных уравнений произвольной три-ткани, допускающей однопараметрическое семейство автоморфизмов.

Кроме указанных двух классов в математической литературе, посвященной дифференциально-топологической теории вещественных криволинейных три-тканей, детально рассматривались еще ткани, определяемые на поверхности трехмерного пространства каким-либо геометрическим образом третьего порядка. Все перечисленные ниже авторы с успехом использовали метод внешних форм и подвижного репера.

В работах В. М. Бычек [6, 7] рассматривается координатная три-ткань на поверхности трехмерного пространства Аппеля, в котором абсолютном является плоскость с тремя фиксированными на

ней прямыми. Ткань образована линиями, касательные к которым пересекают абсолютные прямые. Оснащение поверхности, заданное указанным абсолютом, порождает каноническую связность, в терминах которой описывается геометрия поверхности и свойства лежащей на ней координатной три-ткани. Ткань будет регулярной на поверхностях  $x^a y^b z^c = \text{const}$ , в частности, на сфере Аппеля  $xyz = \text{const}$ . Многомерное обобщение этой задачи рассматривается в [8] (см. также [1]).

В [13, 15] В. Б. Лазарева вводит более общее понятие триаксиального пространства, в котором абсолютом является тройка прямых общего положения. Абсолютные прямые порождают на произвольной поверхности две координатные ткани, соответствующие семейства которых образуют сопряженную сеть. При этом касательные к линиям одной ткани пересекают абсолют, а вторая состоит из линий тени при освещении поверхности из точек, лежащих на абсолютных прямых. Построено инвариантное оснащение поверхности триаксиального пространства, найден ее тензор Дарбу и соответствующие семейства соприкасающихся квадрик, вычислена кривизна ткани, рассмотрены специальные классы тканей и т. д. Многомерное обобщение задачи рассматривается в [14, 16].

Особо выделен случай, когда рассматриваемая поверхность является квадрикой. В этом случае координатная ткань эквивалентна ткани, образованной тремя пучками окружностей. Используя построенную теорию, В. Б. Лазарева находит все регулярные круговые ткани, пучки которых имеют общую окружность. Полному решению проблемы В. Бляшке о нахождении всех регулярных тканей, образованных тремя пучками окружностей, посвящена одна из статей настоящего сборника.

Обобщение указанной задачи Бляшке рассматривается в [17, 49]. В первой из этих работ перечисляются все регулярные ткани, высекаемые на произвольной кубической поверхности плоскостями пучков, оси которых лежат на этой поверхности. В [17] классифицированы ткани, образованные на проективной плоскости тремя пучками коник.

В. К. Драгунов в [10–12] рассматривает примерно тот же круг вопросов в пространстве кубической метрики — так названо проективное пространство с фиксированной кубической кривой в несобственной плоскости. А. А. Уткин в [18–22, 54, 55] рассматривает поверхности и координатные ткани на них в пространстве  $N^3$  — проективном пространстве с фиксированной норм-кривой (пространственной кривой третьего порядка). В частности, с помощью построенной теории им найдено геометрическое условие принадлежности тройки кривых некоторой норм-кривой (аналитическое условие было найдено раньше М. А. Акивисом в [2]).

На необходимость и возможность систематической классификации криволинейных три-тканей на двумерном многообразии было указано в [56], где были приведены продолжения произвольного порядка структурных уравнений таких тканей и рассмотрены ткани специального вида, у которых одна из ковариантных производных  $k$ -го порядка от кривизны равна нулю. Показано, что при  $k = 1$  слоения ткани определяются некоторым уравнением Риккати, а при  $k \geq 2$  — уравнением Абеля и его обобщениями вида

$$\frac{dy}{dx} = -ay^n + b(x)y^{n-2} + \dots + c(x).$$

Более подробно эта проблема обсуждается в разделе 2.

В [23] предложен другой подход к классификации — по типу дифференциального уравнения, определяющего ткань. В [23] рассмотрена ткань, определяемая линейным дифференциальным уравнением первого порядка, и найдены определяющие ее соотношения на инварианты ткани. Эти результаты мы подробно обсуждаем в разделе 3. В разделе 4 найдены необходимые и достаточные условия на инварианты ткани, определяемой дифференциальным уравнением Риккати.

**1. Структурные уравнения криволинейной ткани.** Пусть три-ткань  $W$  образована в некоторой области  $D$  тремя слоениями  $\lambda_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , которые задаются соответственно уравнениями  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  и  $z = f(x, y) = \text{const}$ . Напомним, что уравнение ткани

$$z = f(x, y) \tag{1.1}$$

связывает параметры  $x$ ,  $y$  и  $z$  линий ткани, проходящих через одну точку области  $D$ .

Следуя [5] (см. также [35]), определим слоения  $\lambda_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , соответственно уравнениями Пфаффа

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 = 0. \quad (1.2)$$

Формы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  удовлетворяют так называемым структурным уравнениям

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega, \quad (1.3)$$

$$d\omega = b\omega_1 \wedge \omega_2. \quad (1.4)$$

Функция  $b$  называется *кривизной* ткани  $W$ .

Согласно [5], 3-ткань  $W$  является параллелизуемой если и только если  $b = 0$ . Нас же интересует случай  $b \neq 0$ .

Внешнее дифференцирование уравнения (1.4) приводит к соотношению

$$(db - 2b\omega) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

Так как формы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  независимы, отсюда получаем

$$db - 2b\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2. \quad (1.5)$$

Функции  $b_1$  и  $b_2$  называются ковариантными производными кривизны  $b$  ткани.

Внешнее дифференцирование уравнений (1.5) и применение леммы Картана приводит к уравнениям

$$db_1 - 3b_1\omega = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2, \quad db_2 - 3b_2\omega = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2, \quad (1.6)$$

и соотношениям

$$b_{12} - b_{21} = 2b^2. \quad (1.7)$$

Дифференцируя (1.6), мы получим уравнения

$$\begin{aligned} db_{11} - 4b_{11}\omega &= b_{111}\omega_1 + b_{112}\omega_2, \\ db_{12} - 4b_{12}\omega &= b_{121}\omega_1 + b_{122}\omega_2, \\ db_{21} - 4b_{21}\omega &= b_{211}\omega_1 + b_{212}\omega_2, \\ db_{22} - 4b_{22}\omega &= b_{221}\omega_1 + b_{222}\omega_2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

и т. д. Таким образом, получается последовательность функций

$$b, \quad b_1, \quad b_2, \quad b_{11}, \quad b_{12}, \quad b_{21}, \quad b_{22}, \quad \dots \quad (1.9)$$

Как показано в [35, § 1.1] и [5], эти функции являются относительными инвариантами веса 2, 3, 4, ... соответственно относительно допустимых преобразований, сохраняющих вид структурных уравнений (1.3) и (1.4). Это означает следующее: если три-ткань  $W$  эквивалентна (изотопна) некоторой другой три-тканью  $\tilde{W}$  и структурные уравнения обеих тканей записаны в виде (1.3), то соответствующие базисные формы связаны соотношениями

$$\tilde{\omega}_1 = A\omega_1, \quad \tilde{\omega}_2 = A\omega_2,$$

а кривизна  $b$  и ее ковариантные производные — соотношениями

$$\tilde{b} = A^{-2}b, \quad \tilde{b}_1 = A^{-3}b_1, \quad \tilde{b}_{11} = A^{-4}b_{11}, \dots$$

При этом кривизна  $b$  выражается через производные до третьего порядка от функции  $f(x, y)$  включительно; величины  $b_1$  и  $b_2$  выражаются через производные до четвертого порядка и т. д.

Функции  $b_1$  и  $b_2$  независимы, но уже следующие производные связаны соотношением (1.7). Ковариантные производные следующего порядка также связаны некоторыми соотношениями, но мы их не приводим, так как нам они не понадобятся.

Из относительных инвариантов можно построить абсолютные инварианты

$$c_1 = \frac{b_1^2}{b^3}, \quad c_2 = \frac{b_2^2}{b^3}, \quad c_{11} = \frac{b_{11}}{b^2}, \quad c_{12} = \frac{b_{12}}{b^2}, \quad c_{21} = \frac{b_{21}}{b^2}, \quad c_{22} = \frac{b_{22}}{b^2}, \quad \dots$$

Очевидно, в дифференциальной окрестности четвертого порядка ткань имеет два независимых абсолютных инварианта  $c_1$  и  $c_2$ . В дифференциальной окрестности пятого порядка независимых

инвариантов будет пять:  $c_1, c_2, c_{11}, c_{12}, c_{22}$ ; в дифференциальной окрестности порядка  $(s + 3)$  имеется  $2 + 3 + 4 + \dots + (s + 1) = s(s + 3)/2$  независимых абсолютных инвариантов.

Естественно классифицировать криволинейные три-ткани с помощью различных соотношений на инварианты. Прежде всего необходимо рассмотреть ткани, для которых один из относительных инвариантов равен нулю. Если кривизна  $b$  равна нулю, то ткань, как уже было сказано, является регулярной. Легко проверяется, что если оба инварианта  $b_1$  и  $b_2$  равны нулю, то ткань также будет регулярной. Поэтому первоочередному рассмотрению подлежат ткани, у которых один из этих вариантов равен нулю.

**2. Криволинейные три-ткани, у которых одна из ковариантных производных кривизны равна нулю.** Обозначим через  $B_{\langle\alpha\rangle\beta}$  класс тканей, для которых  $b_{\langle\alpha\rangle\beta} = 0$ , но  $b_{\langle\alpha\rangle} \neq 0$ , где  $\alpha = 1, 2$ ,  $\beta = 1, 2$  и  $\langle\alpha\rangle$  — мультииндекс, состоящий из цифр 1 и 2. Назовем такие классы тканей основными.

Рассмотрим основной класс  $B_{\langle 1 \rangle}$ , заданный соотношением

$$b_{\langle 1 \rangle; s+1} = 0, \quad (2.1)$$

где  $s + 1$  указывает число цифр в мультииндексе, состоящем только из единиц. Напомним, что число  $s + 1$  есть порядок соответствующей ковариантной производной кривизны  $b$ .

Рассмотрим относительный инвариант  $b_{\langle 1 \rangle; s}$ . Ввиду (2.1) его ковариантный дифференциал запишется в виде

$$db_{\langle 1 \rangle; s} - (s + 2)b_{\langle 1 \rangle; s}\omega = b_{\langle 1 \rangle; s, 2}\omega_2. \quad (2.2)$$

Так как  $b_{\langle 1 \rangle; s}$  есть относительный инвариант, то корепер можно нормировать так, что в области определения ткани будет выполняться условие

$$b_{\langle 1 \rangle; s} = 1. \quad (2.3)$$

Тогда из (2.2) получим

$$-(s + 2)b_{\langle 1 \rangle; s}\omega = b_{\langle 1 \rangle; s, 2}\omega_2, \quad (2.4)$$

и второе уравнение системы (1.3) даст  $d\omega_2 = 0$ . По лемме Пуанкаре получаем

$$\omega_2 = dv. \quad (2.5)$$

В результате уравнение (2.4) можно записать следующим образом:

$$\omega = \gamma dv. \quad (2.6)$$

Рассмотрим теперь инвариант  $b_{\langle 1 \rangle; s-1}$ . В силу (2.3) и (2.5) он удовлетворяет уравнению

$$db_{\langle 1 \rangle; s-1} - (s + 1)b_{\langle 1 \rangle; s-1}\omega = \omega_1 + b_{\langle 1 \rangle; s-1, 2}dv,$$

которое можно переписать в следующем виде (см. (2.6)):

$$db_{\langle 1 \rangle; s-1} = \omega_1 + (\dots)dv. \quad (2.7)$$

Рассмотрим аналогичное уравнение для предыдущей ковариантной производной:

$$db_{\langle 1 \rangle; s-2} - sb_{\langle 1 \rangle; s-2}\omega = b_{\langle 1 \rangle; s-1}\omega_1 + b_{\langle 1 \rangle; s-2, 2}dv.$$

Ввиду (2.6) и (2.7) имеем:

$$db_{\langle 1 \rangle; s-2} = b_{\langle 1 \rangle; s-1}db_{\langle 1 \rangle; s-1} + K_{s-2}dv = \frac{1}{2}d(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^2 + K_{s-2}dv. \quad (2.8)$$

Отсюда видно, что функция  $K_{s-2}$  зависит только от одной переменной  $v$ . Интегрируя (2.8), получим

$$b_{\langle 1 \rangle; s-2} = \frac{1}{2}(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^2 + T_{s-2}(v). \quad (2.9)$$

Аналогично, для ковариантной производной  $b_{\langle 1 \rangle; s-3}$  порядка  $(s - 3)$  имеем:

$$\begin{aligned} db_{\langle 1 \rangle; s-3} &= (s - 1)b_{\langle 1 \rangle; s-3}\omega + b_{\langle 1 \rangle; s-2}\omega_1 + b_{\langle 1 \rangle; s-3, 2}dv = \\ &= \frac{1}{2}(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^2 + T_{s-2}(v)(b_{\langle 1 \rangle; s-1} - (\dots)dv) + (\dots)dv = \\ &= \frac{1}{3!}d(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^3 + d(T_{s-2}(v)b_{\langle 1 \rangle; s-1}) + K_{s-3}dv. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция  $K_{s-3}$  зависит только от одной переменной  $v$ . Следовательно, при интегрировании получится уравнение

$$b_{\langle 1 \rangle; s-3} = \frac{1}{3!} (b_{\langle 1 \rangle; s-1})^3 + T_{s-2}(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T_{s-3}(v). \quad (2.10)$$

Рассуждая далее по индукции, мы придем к уравнению

$$\begin{aligned} b = & \frac{1}{s!} (b_{\langle 1 \rangle; s-1})^s + \frac{1}{(s-2)!} T_{s-2}(v) (b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s-2} + \\ & + \frac{1}{(s-3)!} T_{s-3}(v) (b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s-3} + \dots + T_1(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T_0(v). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Теперь можно найти форму  $\omega$  из уравнения (1.4), которое с помощью (2.5)–(2.7) и (2.11) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} d\omega = & b\omega_1 \wedge dv = b db_{\langle 1 \rangle; s-1} \wedge dv = \\ = & \left( \frac{1}{s!} (b_{\langle 1 \rangle; s-1})^s + \frac{1}{(s-2)!} T_{s-2}(v) (b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s-2} + \dots + T_1(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T_0(v) \right) db_{\langle 1 \rangle; s-1} \wedge dv = \\ = & \left( \frac{1}{(s+1)!} d(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s+1} + \frac{1}{(s-1)!} T_{s-2}(v) d(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s-1} + \dots + T_0(v) db_{\langle 1 \rangle; s-1} \right) \wedge dv = \\ = & \left( \frac{1}{(s+1)!} d(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s+1} + \frac{1}{(s-1)!} d(T_{s-2}(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s-1}) + \dots + d(T_0(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}) \right) \wedge dv. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega = & \left( \frac{1}{(s+1)!} b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s+1} + \frac{1}{(s-1)!} T_{s-2}(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s-1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(s-2)!} T_{s-3}(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s-2} + \dots + T_0(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T(v) \right) dv. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В силу уравнений (2.7) и (2.12) первое из уравнений (1.3) примет вид

$$\begin{aligned} d\omega_1 = & \omega_1 \wedge \omega = db_{\langle 1 \rangle; s-1} \wedge \left( \frac{1}{(s+1)!} b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s+1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(s-1)!} T_{s-2}(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s-1} + \dots + T_0(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T(v) \right) dv. \end{aligned}$$

Интегрируя, находим форму  $\omega_1$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \left( \frac{1}{(s+2)!} b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s+2} + \frac{1}{s!} T_{s-2}(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^s + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} T_0(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^2 + T(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T^1(v) \right) dv + dt, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $t$  — некоторая новая переменная.

Сравнивая уравнения (2.13) и (2.7), находим, что

$$db_{\langle 1 \rangle; s-1} = dt + K dv.$$

Но из этого уравнения вытекает, что функция  $K$  зависит только от переменной  $v$ . Следовательно,

$$b_{\langle 1 \rangle; s-1} = t + p(v). \quad (2.14)$$

Найденное соотношение показывает, что переменные  $v$  и  $b_{\langle 1 \rangle; s-1} \stackrel{\text{def}}{=} u$  могут быть выбраны как независимые переменные в некоторой области определения рассматриваемой ткани. Тогда уравнение  $\omega_1 = 0$  первого слоя ткани  $W$  (см. (1.2)) эквивалентно следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{(s+2)!} u^{s+2} - \frac{1}{s!} T_{s-2}(v) u^s - \dots - T_0(v) u^2 - T(v) u - q(v). \quad (2.15)$$

Второе слоение ткани  $W$  определяется уравнением  $\omega_2 = 0$  или  $v = \text{const}$ , третье — уравнением  $\omega_1 + \omega_2 = 0$  или, ввиду (2.15), уравнением

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{(s+2)!}u^{s+2} - \frac{1}{s!}T_{s-2}(v)u^s - \dots - T_0(v)u^2 - T(v)u - q(v) - 1. \quad (2.16)$$

В случае  $s = 0$  уравнения (2.15) и (2.16) являются уравнениями Риккати специального вида:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{2}u^2 - q(v), \quad (2.17)$$

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{2}u^2 - q(v) - 1. \quad (2.18)$$

При  $s = 1$ , получается так называемое уравнение Абеля. Если  $s$  произвольно, то уравнения (2.15) и (2.16) называются обобщенными уравнениями Абеля.

Аналогичный результат получится, если приравнять нулю ковариантную производную с мультииндексом, состоящим только из цифры 2. Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть одна из ковариантных производных кривизны  $b$  ткани  $W$  равна нулю,  $b_{\alpha\alpha\dots\alpha} = 0$ . Тогда ткань  $W$  эквивалентна ткани, образованной линиями  $v = \text{const}$  и интегральными кривыми двух обобщенных уравнений Абеля вида (2.15) и (2.16).

Рассмотрим более подробно ткани типа  $B_1$ , слоения которых задаются уравнениями (2.17),  $v = 0$  и (2.18).

**Случай I:**  $q(v) = 0$ . Тогда слоения ткани задаются уравнениями

$$u = \frac{2}{v+x}, \quad v = y, \quad \text{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v+z),$$

где  $x, y, z$  — постоянные интегрирования. Чтобы найти уравнение ткани, следует из этих уравнений исключить локальные координаты  $u$  и  $v$ . После преобразований придем к уравнению

$$x+y = -\text{ctg}(y+z).$$

**Случай II:**  $q(v) = \frac{1}{2}a^2$ . Тогда уравнения (2.17) и (2.18), определяющие первое и третье слоения, примут вид

$$\frac{du}{u^2+a^2} = -\frac{1}{2}dv, \quad \frac{du}{u^2+b^2} = -\frac{1}{2}dv,$$

где  $b^2 = a^2 + 2$ . Они имеют решения

$$\frac{1}{a} \text{arctg} \frac{u}{a} = -\frac{1}{2}(v+x), \quad \frac{1}{b} \text{arctg} \frac{u}{b} = -\frac{1}{2}(v+z).$$

Присоединим уравнение второго слоения  $v = y$  и исключим переменные  $u$  и  $v$ . После изоморфизма

$$\frac{a}{2}x \rightarrow x, \quad \frac{a}{2}y \rightarrow y, \quad \frac{a}{2}z \rightarrow z$$

придем к уравнению рассматриваемой три-ткани:

$$\text{tg}(x+y) = c \text{tg} c(y+z),$$

где  $c = b/a$ .

**Случай III:**  $q(v) = -\frac{1}{2}a^2$ . Тогда уравнение (2.17) первого слоения принимают вид

$$\frac{du}{u^2-a^2} = -\frac{1}{2}dv,$$

откуда

$$u = a \text{cth} \frac{a(v+x)}{2}. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.18) третьего слоения примет вид

$$\frac{du}{u^2-a^2+1} = -\frac{1}{2}dv. \quad (2.20)$$

Получаем 3 подслучая.

*Подслучай IIIa:*  $a = \sqrt{2}$ . Тогда уравнение (2.20) имеет решение

$$u = \frac{2}{v+z}. \quad (2.21)$$

После исключения переменных  $u$  и  $v$  из (2.19) и (2.21) (с учетом уравнения второго слоения  $v = y$ ), мы получим уравнение соответствующей три-ткани:

$$y+z = \operatorname{th}(x+y).$$

*Подслучай IIIb:*  $a^2 > 2$ . Положим  $a^2 = 2 + b^2$ . Тогда уравнение (2.20) примет вид

$$\frac{du}{u^2 - b^2} = -\frac{1}{2}dv,$$

откуда

$$u = b \operatorname{cth} \frac{b(v+z)}{2}. \quad (2.22)$$

Из (2.19), (2.22) и  $v = y$  мы получаем следующее уравнение ткани:

$$c \operatorname{th}(y+z) = \operatorname{th} c(x+y).$$

*Подслучай IIIc:*  $a^2 < 2$ . Положим  $a^2 = 2 - b^2$ . Тогда уравнение (2.20)

$$\frac{du}{u^2 + b^2} = -\frac{1}{d}v$$

имеет решение

$$\frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} = -\frac{1}{2}(v+z).$$

Соответствующее уравнение ткани будет

$$c \operatorname{ctg}(y+z) = -\operatorname{th} c(x+y).$$

В заключение заметим, что три-ткани, соответствующие различным функциям  $q(v)$ , являются неэквивалентными.

**3. Три-ткани, определяемые линейным дифференциальным уравнением.** Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = F(x, y) \quad (3.1)$$

определяет три-ткань  $W$ , состоящую из семейств линий  $\lambda_\alpha$ :

$$\lambda_1 : x = \operatorname{const}, \quad \lambda_2 : y = \operatorname{const}, \quad \lambda_3 : f(x, y) = \operatorname{const},$$

причем последнее семейство состоит из интегральных кривых уравнения (3.1). Обратно, каждая криволинейная три-ткань  $W$  эквивалентна некоторой три-ткани  $\widetilde{W}$ , состоящей из трех вышеуказанных семейств  $\lambda_\alpha$ , причем слои третьего слоения ткани  $\widetilde{W}$  являются интегральными кривыми некоторого обыкновенного дифференциального уравнения

$$f_x dx + f_y dy = 0.$$

Уравнение три-ткани  $z = f(x, y)$  определено с точностью до изотопических преобразований, т.е. локальных диффеоморфизмов вида

$$x = \alpha(\tilde{x}), \quad y = \beta(\tilde{y}), \quad z = \gamma(\tilde{z}),$$

определяющих замену параметров на слоениях ткани. Для рассматриваемых тканей параметром третьего слоения является постоянная интегрирования. Таким образом, уравнение (3.1) определено не однозначно, а с точностью до замен вида

$$x = \alpha(\tilde{x}), \quad y = \beta(\tilde{y}), \quad (3.2)$$

переводящих декартову сеть  $x = \operatorname{const}$ ,  $y = \operatorname{const}$  снова в декартову сеть. Иными словами, теория тканей, в рамках которой мы проводим наши рассуждения, улавливает те свойства дифференциальных уравнений, которые сохраняются при изотопических преобразованиях вида (3.2). Такой подход

дает возможность классифицировать обыкновенные дифференциальные уравнения с точностью до указанной изотопии при помощи дифференциально-геометрических инвариантов соответствующей три-ткани.

С другой стороны, мы получаем возможность перенести свойства решений дифференциального уравнения на свойства соответствующей три-ткани.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда три-ткань  $W$  определяется линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$y' + yf(x) = g(x), \quad (3.3)$$

и найдем инвариантную характеристику соответствующего класса тканей.

Пусть, как и выше, три-ткань  $W$  задается структурными уравнениями (1.3)–(1.9), а слоения ткани — уравнениями (1.2).

Рассмотрим уравнение (3.3). С помощью изотопического преобразования

$$f(x)dx = d\tilde{x}$$

оно приводится к виду

$$dy + (y + \tilde{g}(\tilde{x}))d\tilde{x} = 0. \quad (3.4)$$

Опустив тильду, обозначим

$$\omega_1 = (y + g(x))dx, \quad \omega_2 = dy. \quad (3.5)$$

Тогда уравнение (3.4), определяющее третье слоение ткани  $W$ , принимает вид  $\omega_1 + \omega_2 = 0$ , а это означает, что структурные уравнения рассматриваемой три-ткани  $W$  должны иметь вид (1.3)–(1.4).

Так как  $d\omega_2 = 0$ , то из (1.3) следует, что

$$\omega = \lambda\omega_2 = \lambda dy. \quad (3.6)$$

Имеем:

$$d\omega_1 = dy \wedge dx = \omega_1 \wedge \frac{-\omega_2}{y + g(x)}, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \frac{-\omega_2}{y + g(x)}.$$

Сравнивая с (1.3), находим, что

$$\omega = \frac{-\omega_2}{y + g(x)} = \frac{-dy}{y + g(x)} \quad (3.7)$$

Далее,

$$d\omega = -d\frac{1}{y + g(x)} \wedge dy = \frac{g'dx}{(y + g)^2} \wedge dy = \frac{g'}{(y + g)^3} \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Сравнивая с (1.4), находим, что

$$b = \frac{g'}{(y + g)^3}. \quad (3.8)$$

Используя формулы (3.5)–(3.8), получаем:

$$\begin{aligned} db - 2b\omega &= \left( \frac{g''}{(y + g)^3} - \frac{3(g')^2}{(y + g)^4} \right) dx - \frac{3g'dy}{(y + g)^4} - \frac{2g'}{(y + g)^3} \frac{-\omega_2}{y + g} = \\ &= \left( \frac{g''}{(y + g)^4} - \frac{3(g')^2}{(y + g)^5} \right) \omega_1 - \frac{g'}{(y + g)^4} \omega_2. \end{aligned}$$

Сравнивая с (1.5), находим ковариантные производные кривизны:

$$b_1 = \frac{g''}{(y + g)^4} - \frac{3(g')^2}{(y + g)^5}, \quad b_2 = -\frac{g'}{(y + g)^4}. \quad (3.9)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} db_2 - 3b_2\omega &= \left( -\frac{g''}{(y + g)^4} + \frac{4(g')^2}{(y + g)^5} \right) dx + \frac{4g'dy}{(y + g)^5} + \frac{3g'}{(y + g)^4} \frac{-dy}{y + g} = \\ &= \left( \frac{-g''}{(y + g)^5} + \frac{4g'^2}{(y + g)^6} \right) \omega_1 + \frac{g'}{(y + g)^5} \omega_2. \end{aligned}$$

Сравнивая теперь с уравнениями (1.6), получаем:

$$b_{21} = \frac{-g''}{(y+g)^5} + \frac{4g'^2}{(y+g)^6}, \quad b_{22} = \frac{g'}{(y+g)^5}. \quad (3.10)$$

Исключая из уравнений (3.8)–(3.10) переменные  $g'$ ,  $g''$  и т. д., получим соотношения, связывающие относительные инварианты рассматриваемой ткани:

$$bb_{22} - (b_2)^2 = 0, \quad bb_{21} - b_1b_2 - b^3 = 0. \quad (3.11)$$

Итак, доказано следующее утверждение: *инварианты три-ткани  $W$ , определяемой линейным дифференциальным уравнением (3.3), удовлетворяют соотношениям (3.11).*

Обратно, рассмотрим три-ткань  $W$ , для которой выполняются соотношения (3.11), и докажем, что ей отвечает линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Заметим сначала, что на любой три-ткани можно выбрать кобазис так, чтобы форма  $\omega_2$ , например, была полным дифференциалом:

$$\omega_2 = dy. \quad (3.12)$$

Тогда  $d\omega_2 = 0$  и в силу (1.3) получаем

$$\omega = \lambda\omega_2 = \lambda dy. \quad (3.13)$$

Соотношения (3.11) разрешим, введя параметр  $k$ :

$$b_2 = kb, \quad b_{22} = k^2b, \quad b_{21} = kb_1 + b^2, \quad b_{12} = kb_1 + 3b^2 \quad (3.14)$$

(последнее вытекает из (1.7)). В результате уравнения (1.5)–(1.7) для рассматриваемой ткани примут следующий вид:

$$\begin{aligned} db - 2b\omega &= b_1\omega_1 + kb\omega_2, \\ db_1 - 3b_1\omega &= b_{11}\omega_1 + (kb_1 + 3b^2)\omega_2, \\ db_2 - 3b_2\omega &= (kb_1 + b^2)\omega_1 + k^2b\omega_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Дифференцируя с помощью (3.15) равенство  $b_2 = kb$ , приходим к уравнению

$$dk - k\omega = b\omega_1. \quad (3.16)$$

Из (3.16) и (1.3) имеем:

$$dk \wedge \omega_1 = k\omega \wedge \omega_1 = -k\omega_1 \wedge \omega = -kd\omega_1,$$

или

$$d\omega_1 = -\frac{dk}{k} \wedge \omega_1.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_1 = -\frac{1}{k}dx, \quad (3.17)$$

где  $x$  — некоторая новая переменная. Дифференцируя внешним образом уравнения (3.13) с учетом равенства (3.17), получим:

$$d\omega = d\lambda \wedge dy = \lambda_x dx \wedge dy = -\lambda_x k\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Сравнивая далее с (1.4), находим, что

$$b = -k\lambda_x. \quad (3.18)$$

В результате уравнение (3.16) примет вид

$$dk = k\lambda dy + \lambda_x dx.$$

Отсюда

$$k_x = \lambda_x, \quad k_y = k\lambda.$$

Исключая  $\lambda$ , находим, что

$$k_y = k^2 + k\varphi(y), \quad (3.19)$$

а равенство (3.18) запишется в виде  $b = -kk_x$ . Положим

$$\mu = k^{-1}. \quad (3.20)$$

С помощью (3.19) находим, что  $\mu$  удовлетворяет уравнению

$$\mu_y = -1 - \mu\varphi(y). \quad (3.21)$$

Положим

$$\varphi(y) = -\frac{\theta_y(y)}{\theta(y)}.$$

Тогда однородное уравнение  $\mu_y = -\mu\varphi$  имеет решение  $\mu = c(x)\theta(y)$ , а общее решение уравнения (3.21) имеет вид

$$\mu = \left( -\int \frac{dy}{\theta} - g(x) \right) \theta.$$

В результате в силу (3.12), (3.17) и (3.20) уравнение третьего слоения  $\omega_1 + \omega_2 = 0$  принимает вид  $-\mu dx + dy = 0$  или, в силу последнего уравнения,

$$\frac{dy}{\theta} + \left( \int \frac{dy}{\theta} + g(x) \right) dx = 0. \quad (3.22)$$

Теперь сделаем изотопическое преобразование

$$\int \frac{dy}{\theta(y)} = \tilde{y}.$$

В результате уравнение (3.22) примет вид

$$d\tilde{y} + (\tilde{y} + g(x))dx = 0,$$

т.е. совпадет с уравнением (3.10).

Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** *Инварианты криволинейных три-тканей, определяемых линейным дифференциальным уравнением (3.3) и только таких криволинейных тканей удовлетворяют соотношениям (3.11).*

**4. Три-ткани, определяемые уравнением Риккати.** Рассмотрим три-ткань  $W$ , определяемую произвольным уравнением Риккати

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x), \quad (4.1)$$

и найдем характеризующее ее соотношение на инварианты ткани.

Пусть, как и выше, слоения ткани задаются уравнениями (1.2), причем формы Пфаффа  $\omega_1$  и  $\omega_2$  удовлетворяют структурным уравнениям (1.3)–(1.8). Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** *Инварианты криволинейных три-тканей, определяемых дифференциальным уравнением Риккати и только таких криволинейных тканей удовлетворяют соотношению*

$$b_{222}b - b_{22}b_2 = 0. \quad (4.2)$$

Еще раз напомним, что три-ткань рассматривается с точностью до локальных диффеоморфизмов. Это означает, что параметры слоений ткани допускают гладкие монотонные замены. Иными словами, уравнение (4.1) определено с точностью до замен вида (3.2) и, кроме того, аналогичное преобразование можно делать и с постоянной интегрирования — параметром третьего слоения ткани.

*Доказательство.* С помощью изотопического преобразования вида (3.2) отличную от нуля функцию  $f(x)$  в уравнении (4.1) можно сделать равной  $-1$ , тогда оно примет вид

$$dy + (y^2 + g(x)y + h(x))dx = 0. \quad (4.3)$$

Положим

$$\omega_1 = (y^2 + g(x)y + h(x))dx, \quad \omega_2 = dy, \quad (4.4)$$

в результате уравнение (4.3), определяющее третье слоение ткани, примет вид  $\omega_1 + \omega_2 = 0$ , а это означает, что структурные уравнения рассматриваемой три-ткани  $W$  должны иметь вид (1.3)–(1.4), причем будут выполняться и все последующие соотношения (1.5)–(1.8).

Так как  $d\omega_2 = 0$ , то из (1.3) следует, что

$$\omega = \lambda\omega_2 = \lambda dy. \quad (4.5)$$

Дифференцируя форму  $\omega_1$ , заданную первым уравнением (4.4), и пользуясь структурными уравнениями (1.3), найдем, что

$$\omega = -\frac{2y + g}{y^2 + g(x)y + h(x)}\omega_2. \quad (4.6)$$

Далее, дифференцируя последнее уравнение и сравнивая результат со структурным уравнением (1.4), найдем кривизну рассматриваемой ткани:

$$b = \frac{g'y^2 + 2h'y + h'g - hg'}{(y^2 + g(x)y + h(x))^3}. \quad (4.7)$$

Если теперь продифференцировать это уравнение и воспользоваться уравнением (1.5), то найдем инвариант  $b_2$ :

$$b_2 = -\frac{(-2h' + gg')y^2 + 2(2g'h - gh')y + 2hh' - g^2h' + gg'h}{(y^2 + g(x)y + h(x))^4}. \quad (4.8)$$

Дифференцируя это уравнение и пользуясь уравнениями (1.6), найдем инвариант  $b_{22}$ :

$$b_{22} = \frac{g^2 - 4h}{(y^2 + g(x)y + h(x))^2}b. \quad (4.9)$$

Наконец, аналогичным образом найдем инвариант  $b_{222}$ :

$$b_{222} = \frac{[(gg' - 2h')y^2 + 2(2g'h - gh')y + 2hh' - g^2h' + gg'h](g^2 - 4h)}{(y^2 + g(x)y + h(x))^6}. \quad (4.10)$$

Исключая из уравнений (4.7)–(4.10) функции  $g$ ,  $h$  и т. д., придем к соотношению (4.2). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Обратно, рассмотрим три-ткань  $W$ , для которой выполняется соотношение (4.2), и докажем, что ей отвечает уравнение Риккати.

Заметим сначала, что дифференциальное уравнение любой криволинейной три-ткани можно записать в виде  $\omega_1 + \omega_2 = 0$ , причем форма  $\omega_1$  пропорциональна  $dx$ , а форма  $\omega_2$  является полным дифференциалом:  $\omega_2 = dy$ . Тогда  $d\omega_2 = 0$ , откуда

$$\omega = k\omega_2 = k dy.$$

Продифференцировав это уравнение внешним образом и воспользовавшись структурными уравнениями (1.5), придем к уравнению  $(dk - b\omega_1) \wedge dy = 0$ . Отсюда находим, что  $dk = b\omega_1 + p dy$ .

Соотношения (4.2) разрешим, введя параметр  $\lambda$ :

$$b_{22} = \lambda b, \quad b_{222} = \lambda b_2. \quad (4.11)$$

В результате уравнения (1.5)–(1.8) и последующие дадут:

$$\begin{aligned} db &= b_1\omega_1 + (b_2 + 2bk)dy, \\ db_2 &= b_{21}\omega_1 + (\lambda b + 3b_2k)dy, \\ db_{22} &= b_{221}\omega_1 + (\lambda b_2 + 4\lambda bk)dy, \\ db_{222} &= b_{2221}\omega_1 + (\lambda^2 b + 5\lambda b_2k)dy. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Продифференцировав первое из равенств (4.11) и воспользовавшись третьим уравнением (4.12), получим дифференциальное уравнение на  $\lambda$ :

$$d\lambda = (\dots)\omega_1 + 2\lambda k dy. \quad (4.13)$$

Отсюда видно, во-первых, что  $\lambda_y = 2\lambda k$ . Положив  $\lambda = e^{2\varphi}$ , получим  $k = \varphi_y$ .

Во-вторых, умножив уравнение (4.13) внешним образом на форму  $\omega_1$ , получим уравнение

$$d\lambda \wedge \omega_1 = 2\lambda k dy \wedge \omega_1 = -2\lambda d\omega_1,$$

или

$$d\omega_1 = -(2\lambda)^{-1}d\lambda \wedge \omega_1 = \omega_1 \wedge d\varphi.$$

Решением этого уравнения будет форма

$$\omega_1 = e^{-\varphi} dx, \quad (4.14)$$

где  $x$  — некоторая новая переменная. Подставляя найденные значения  $k$  и  $\omega_1$  в (1.4), найдем выражение для кривизны:

$$b = e^{\varphi} \varphi_{xy}.$$

Из первого уравнения (4.12) следует, что  $b_y = b_2 + 2bk$ . Подставляя сюда найденные уже  $b$  и  $k$ , получим

$$b_2 = e^{\varphi} (\varphi_{xyy} - \varphi_{xy} \varphi_y).$$

Из второго уравнения (4.12) имеем  $b_{2y} = \lambda b + 3b_2 k$ . Подставляя сюда  $b$ ,  $b_2$  и  $k$ , приходим к дифференциальному уравнению на функцию  $\varphi$ :

$$\varphi_{xyyy} - \varphi_{xy} \varphi_{yy} + 2\varphi_{xy} \varphi_y^2 - e^{2\varphi} \varphi_{xy} - 3\varphi_y \varphi_{xyy} = 0. \quad (4.15)$$

Непосредственным вычислением доказываются следующие утверждения.

**Лемма 1.** Уравнение (4.15) эквивалентно уравнению

$$(e^{-2\varphi})_{xyyy} + 2\varphi_{xy} + 3(\varphi_y(e^{-2\varphi})_{xy})_y + 2(\varphi_x(e^{-2\varphi})_{yy})_y + 6((\varphi_y)^2(e^{-2\varphi})_x)_y = 0. \quad (4.16)$$

**Лемма 2.** Уравнение (4.16) эквивалентно уравнению

$$\left( \frac{u_{yy}}{u} + u^{-1} - \frac{3}{4} \left( \frac{u_y}{u} \right)^2 \right)_x = \frac{\gamma(x)}{u}, \quad (4.17)$$

где

$$u = e^{-2\varphi}. \quad (4.18)$$

**Лемма 3.** Уравнение (4.17) эквивалентно уравнению

$$\left( \frac{1}{(t^2)_y} \left( -\frac{1}{t^2} + 4(t_y)^2 \right) \right)_x = \frac{\gamma(x)}{t^4}, \quad (4.19)$$

где

$$u = t^4. \quad (4.20)$$

**Лемма 4.** Уравнение (4.19) эквивалентно уравнению

$$\left( \frac{1}{z_y} \left( -\frac{1}{z} + \frac{(z_y)^2}{z} \right) \right)_y = \frac{\gamma(x)}{z^2}, \quad (4.21)$$

где

$$z = t^2. \quad (4.22)$$

Обозначим через  $y = y(x, z)$  функцию, правую обратную для  $z = z(x, y)$ . Тогда  $z_y = (y_z)^{-1}$  и уравнение (4.21) преобразуется к виду

$$\left( -\frac{1}{z} + \frac{1}{z(y_z)^2} \right)_{zx} = \frac{\gamma(x)}{z^2}, \quad (4.23)$$

Выражение, стоящее в правой части в скобках, зависит от переменных  $y$  и  $z$ . Поэтому, вводя вместо  $z$  переменную  $v = z^{-1}$ , мы получим

$$\gamma(x)v^2 = \left( -v + \frac{v}{(y_z)^2} \right)_{xv} \frac{dv}{dz}.$$

Но  $dv/dz = -v^2$ , поэтому последнее уравнение принимает вид

$$\left( -v + \frac{v}{(y_z)^2} \right)_{xv} = -\gamma(x)$$

или

$$\left( \frac{v}{(y_z)^2} \right)_{xv} = -\gamma(x). \quad (4.24)$$

Обозначим правую часть через  $\alpha'(x)$ . Тогда, проинтегрировав (4.24) последовательно по  $x$  и  $v$ , получим:

$$\left(\frac{v}{(yz)^2}\right)_v = \alpha(x), \quad \frac{v}{(yz)^2} = \alpha(x)v + \beta(x).$$

Разделив на  $v$ , получаем

$$\frac{1}{(yz)^2} = \alpha(x) + \beta(x)z$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{\alpha(x) + \beta(x)z}.$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{\alpha(x) + \beta(x)z} \right) = \frac{1}{2}\beta(x).$$

Отсюда легко получаем, что

$$z = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

где  $a(x)$ ,  $b(x)$  и  $c(x)$  — произвольные гладкие функции.

Осталось найти уравнение третьего слоения рассматриваемой ткани. Как уже отмечалось, оно имеет вид  $\omega_1 + \omega_2 = 0$ , или, с учетом (4.14),  $e^{-\varphi}dx + dy = 0$ . Из обозначений (4.18), (4.20) и (4.22) вытекает, что  $e^{-\varphi} = z$ , следовательно, уравнение рассматриваемой ткани есть уравнение Риккати общего вида. Теорема доказана.  $\square$

**5. Криволинейные три-ткани, допускающие однопараметрическое семейство автоморфизмов.** В этом разделе мы находим общий вид конечных уравнений криволинейной три-ткани, допускающей однопараметрическое семейство автоморфизмов (см. [31]).

Как уже было отмечено, параллелизуемая три-ткань допускает транзитивное семейство автоморфизмов. Поэтому будем считать, что рассматриваемая три-ткань  $W$  не является параллелизуемой, т.е. ее кривизна отлична от нуля,  $b \neq 0$ . Поскольку кривизна является относительным инвариантом, семейство адаптированных кореперов ткани можно сузить так, чтобы во всей области определения ткани кривизна стала постоянной. Положим, например,  $b = -1/2$ . В этом случае из уравнения (1.5) и (1.6) получаем

$$\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \quad (5.1)$$

$$db_1 = (b_{11} + 3b_1^2)\omega_1 + (b_{12} + 3b_1b_2)\omega_2, \quad db_2 = (b_{21}b_2 + 3b_1b_2)\omega_1 + (b_{22} + 3b_1^2)\omega_2, \quad (5.2)$$

и т. д. Аналогичные уравнения получатся для величин  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ , ...

Пусть рассматриваемая три-ткань  $W$  допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов. Тогда (см. [35]) вдоль траекторий этого семейства адаптированные реперы ткани можно выбрать так, что в этих реперах все структурные тензоры ткани станут постоянными. Следовательно, на траекториях семейства правые части уравнений (5.2) и им аналогичных обращаются в нуль. А значит, на всем многообразии ткани указанные правые части пропорциональны. Поэтому, приравнявая их нулю, мы получим дифференциальное уравнение однопараметрического семейства автоморфизмов ткани.

Далее, пропорциональность правых частей означает, что дифференциалы всех функций  $b_2$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ , ... пропорциональны, например,  $db_1$ . Следовательно, можно считать, что на многообразии ткани все эти функции зависят от одной переменной  $b_1$ :

$$b_2 = b_2(b_1), \quad b_{11} = b_{11}(b_1), \quad b_{12} = b_{12}(b_1)$$

и т. д. Но тогда в силу (5.1) и первого из уравнений (5.2) первое из уравнений (1.3) преобразуется следующим образом:

$$d\omega_1 = b_2(b_1)\omega_1 \wedge \omega_1 = -b_2(b_1)\omega_1 \wedge \frac{db_1}{b_{12}(b_1) + 3b_1b_2(b_1)} = \omega_1 \wedge d\theta_1(b_1),$$

где  $\theta_1(b_1)$  — некоторая функция. Интегрируя последнее уравнение, найдем форму  $\omega_1$ :

$$\omega_1 = e^{-\theta_1(b_1)} du. \quad (5.3)$$

Здесь  $u$  — некоторая новая переменная. Аналогично находим форму  $\omega_2$ :

$$\omega_2 = e^{-\theta_2(b_1)} dv. \quad (5.4)$$

Подставив найденные значения базисных форм в первое уравнение, найдем, что

$$db_1 = \alpha(b_1)\omega_1 + \beta(b_1)\omega_2.$$

Отсюда следует, что частные производные от функции  $b_1 = \varphi(u, v)$  также являются функциями от  $b_1$ .

Обозначим через  $u = \bar{\varphi}(b_1, v)$  и  $v = \tilde{\varphi}(u, b_1)$  левую и правую обратные функции для функции  $b_1 = \varphi(u, v)$ . Тогда из очевидных равенств

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial b_1} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial b_1} = 1$$

вытекает, что производные

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial b_1}, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial b_1}$$

также зависят только от  $b_1$ . Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$u = \bar{\varphi}(b_1, v) = p(b_1) + q(v), \quad v = \tilde{\varphi}(u, b_1) = r(u) + s(b_1).$$

Решение этой системы можно записать в виде  $b_1 = \varphi(u + av)$ , где  $a$  — некоторая постоянная. Тогда все функции от переменной  $b_1$  станут функциями от переменной  $u + av$ , в частности, базисные формы (см. (5.3) и (5.4)) запишутся в виде

$$\omega_1 = e^{-\theta_1(u+av)} du, \quad \omega_2 = e^{-\theta_2(u+av)} dv,$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — уже некоторые новые функции.

Теперь найдем уравнения слоений рассматриваемой три-ткани. В соответствии с уравнениями (1.2) первое слоение задается уравнением  $u = x$ , второе — уравнением  $v = y$ , третье — дифференциальным уравнением

$$e^{\theta_2 - \theta_1} du + dv = 0.$$

Обозначим  $u + av = p$ ,  $u - av = q$ . Так как функции  $\theta_1$  и  $\theta_2$  зависят от переменной  $u + av$ , то последнее уравнение перепишется в виде

$$e^{\delta(p)}(dp + dq) + \frac{1}{a}(dp - dq) = 0.$$

В этом уравнении переменные разделяются, и после интегрирования мы получаем  $u - av + f(u + av) = z$ .

Постоянная интегрирования  $z$  — параметр третьего слоения ткани. Исключая из уравнений слоений локальные координаты  $u$  и  $v$ , в соответствии с теорией придем к искомому уравнению рассматриваемой три-ткани:  $z = x - ay + f(x + ay)$ , которое связывает параметры  $x$ ,  $y$  и  $z$  трех слоев ткани, проходящие через одну точку.

После изотопического преобразования  $ay \rightarrow -y$  уравнение ткани примет более простой вид:

$$z = x + y + f(x - y). \quad (5.5)$$

Рассматриваемая ткань не является, вообще говоря, регулярной (параллелизуемой). Найдем подкласс регулярных тканей в классе тканей, допускающих однопараметрическое семейство автоморфизмов.

Для этого, согласно теории, следует приравнять нулю кривизну ткани, определяемой уравнением (5.5). Кривизна выражается через частные производные по формуле Сен-Робера [5]:

$$b = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \frac{F_x}{F_y},$$

где  $F$  — левая часть уравнения (5.5). Приравнявая правую часть нулю, после преобразований приходим к дифференциальному уравнению

$$f'''(f')^2 - f''' - 2f'(f'')^2 = 0.$$

Его решением (помимо очевидного решения  $f = \text{const}$ ) будет функция вида

$$\alpha^{-1} \ln \text{ch}(\alpha(x - y) + \beta) + \gamma,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — постоянные интегрирования. Следовательно, ткань вида (5.5) будет регулярной тогда и только тогда, когда либо  $f = \text{const}$ , либо уравнение ткани имеет вид

$$z = x + y + \frac{1}{\alpha} \ln \text{ch}(\alpha(x - y) + \beta) + \gamma.$$

Заметим, что этот факт легко проверяется непосредственно: последнее уравнение подходящим изотопическим преобразованием приводится к каноническому виду  $z = x + y$ .

Легко указать автоморфизмы рассматриваемого класса тканей, заданных уравнением (5.5):  $x \rightarrow x + a, y \rightarrow y + a, z \rightarrow z + 2a$ . Траектории автоморфизма определяются уравнениями  $x - y = \text{const}$ . Из этого замечания вытекает, в частности, что все ткани типа  $B_1$ , приведенные в качестве примеров в разделе 2, допускают однопараметрическое семейство автоморфизмов.

**6. Инвариантная характеристика спрямляемых три-тканей.** В этом разделе дается краткое изложение решения проблемы спрямляемости, приведенное в [41].

Основная идея работы состоит в том, что на двумерном многообразии, несущем криволинейную три-ткань  $W$ , рассматривается множество всех аффинных связностей, в которых линии этой ткани являются геодезическими. Ткань  $W$  является линейризуемой тогда и только тогда, когда среди этих связностей существует плоская связность (т.е. такая, форма кривизны которой равна нулю). Эта идея была высказана в 1973 г. М. А. Акивисом на семинаре по классической дифференциальной геометрии (МГУ). Используя этот подход, А. В. Чакмазян в [28] провел часть вычислений, но виду их значительной сложности не сумел довести работу до конца.

Прежде всего заметим, что структурные уравнения ткани (1.3) и (1.4) можно рассматривать как уравнения некоторой аффинной связности  $\gamma$ . Действительно, структурные уравнения произвольной аффинной связности имеют вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + R_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad j, k = 1, 2; \quad (6.1)$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \quad j, k, l = 1, 2, \quad (6.2)$$

где  $\omega_j^i, R_{jk}^i$  и  $R_{jkl}^i$  — формы связности, ее тензор кручения и тензор кривизны соответственно. Уравнения ткани (1.3) и (1.4) примут указанный выше вид, если положить

$$\omega_i = \omega^i, \quad i = 1, 2, \quad \omega_j^i = \delta_j^i \omega,$$

где  $\delta_j^i$  — символ Кронекера. Тензор кручения связности  $\gamma$ , определяемой уравнениями (1.3) и (1.4), равен нулю, а тензор кривизны имеет вид

$$R_{jkl}^i = -\frac{1}{2} b \varepsilon_{kl} \delta_j^i,$$

где  $b$  — кривизна ткани,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$ .

Известно [35], что линии ткани являются геодезическими линиями описанной выше связности  $\gamma$ . Рассмотрим на многообразии ткани пучок  $\gamma(T)$  аффинных связностей, определяемых формами  $\{\omega^i, \omega_j^i\}$ , где

$$\omega_j^i = \omega_j^i + T_{jk}^i \omega^k, \quad (6.3)$$

а  $T_{jk}^i = T_{kj}^i$  — так называемый тензор аффинной деформации. Все связности в этом пучке, как легко убедиться, не имеют кручения.

Верны следующие утверждения.

**Предложение 1.** *Линии ткани  $W$  будут геодезическими для всех связностей пучка  $\gamma(T)$  тогда и только тогда, когда*

$$T_{11}^2 = 0, \quad T_{22}^1 = 0, \quad T_{11}^1 + T_{22}^2 - 2(T_{12}^1 + T_{12}^2) = 0. \quad (6.4)$$

Формы

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i \quad (6.5)$$

называются, как известно, формами кривизны аффинной связности.

**Предложение 2.** *Формы кривизны пучка связностей  $\gamma(T)$  вычисляются по формуле*

$${}^* \Omega_j^i = \Omega_j^i + \nabla T_{jk}^i \wedge \omega^k - T_{mk}^i T_{jl}^m \omega^l \wedge \omega^k, \quad (6.6)$$

где

$$\nabla T_{jk}^i = dT_{jk}^i - T_{mk}^i \omega_j^m - T_{jm}^i \omega_k^m + T_{jk}^m \omega_m^i. \quad (6.7)$$

**Предложение 3.** *Три-ткань  $W$  линейризуема тогда и только тогда, когда в пучке связностей  $\gamma(T)$  существует связность, для которой все линии ткани являются геодезическими и форма кривизна которой равна нулю:*

$${}^* \Omega_j^i = 0. \quad (6.8)$$

Действительно, если ткань линейризуема, то она эквивалентна прямолинейной ткани на плоскости, т.е. на многообразии с плоской аффинной связностью. Обратно, если связность плоская, то слои ткани суть прямые линии как геодезические линии этой плоской связности, и следовательно, эта ткань линейризуема.

Для удобства перепишем соотношения (6.4) в более простой форме:

$$\begin{aligned} T_{11}^2 &= 0, & T_{22}^1 &= 0, \\ T_{12}^2 &= \lambda_1, & T_{12}^1 &= \lambda_2, \\ T_{11}^1 &= 2\lambda_1 + \mu, & T_{22}^2 &= 2\lambda_2 - \mu. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Кроме того, уравнения (1.6), (1.8) и последующие, им аналогичные, перепишем, учитывая соотношения (1.7) и ему подобные, следующим образом:

$$\begin{cases} \nabla b_1 = b_{11}\omega^1 + (b_{12} + b^2)\omega^2, \\ \nabla b_2 = (b_{12} - b^2)\omega^1 + b_{22}\omega^2, \end{cases} \quad (6.10)$$

$$\begin{cases} \nabla b_{11} = b_{111}\omega^1 + b_{112}\omega^2, \\ \nabla b_{12} = (b_{112} - 5b_1 b)\omega^1 + (b_{122} + 5b_2 b)\omega^2, \\ \nabla b_{22} = b_{122}\omega^1 + b_{222}\omega^2. \end{cases} \quad (6.11)$$

**Основная теорема 1.** *Необходимое и достаточное условие линейризуемости состоит в том, что кривизна ткани и ее ковариантные производные  $b_i, b_{ij}, b_{ijk}$  связаны линейным соотношением*

$$\begin{aligned} & b_{112} - b_{122} + \mu(-b_{12} + b_{11} + b_{22}) + b_1 [4\lambda_{12} + 6\lambda_{21} - 6\lambda_1 \lambda_2] + b_2 [-6\lambda_{12} + 6\lambda_1 \lambda_2 + 4b] \\ & + b [-\mu^3 - 8\lambda_{12}(\mu - \lambda_2) - 8\lambda_{21}(\mu + \lambda_1) + 8\lambda_{122} + 8\lambda_1 \lambda_2(\mu + \lambda_1 - \lambda_2)] = 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Здесь величины  $\lambda_{12}$  и  $\lambda_{21}$  суть ковариантные производные величин  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , точнее, имеют место уравнения

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_1 &= \lambda_1(\lambda_1 + \mu)\omega^1 + \lambda_{12}\omega^2, \\ \nabla \lambda_2 &= \lambda_2(\lambda_2 - \mu)\omega^2 + \lambda_{21}\omega^1, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\nabla \mu = (2\lambda_{21} - \lambda_{12} + b - \lambda_1 \lambda_2)\omega^1 + (-2\lambda_{12} + \lambda_{21} + b + \lambda_1 \lambda_2)\omega^2,$$

где введено обозначение

$$\nabla \lambda_{ij} = d\lambda_{ij} - 2\lambda_{ij}\gamma.$$

К этим уравнениям следует присоединить еще условия их интегрируемости:

$$\begin{aligned}\nabla\lambda_{12} &= \left[ \mu\lambda_{12} + \lambda_1(\lambda_{21} + \lambda_1\lambda_2) \right] \omega^1 + \\ &+ \left[ \lambda_{122} + 2\mu\lambda_{12} + \lambda_1(\lambda_{21} + \lambda_1\lambda_2) - b_1 - \frac{1}{2}b\mu \right] \omega^2, \\ \nabla\lambda_{21} &= \left[ -\lambda_{122} - 2\mu\lambda_{21} + \lambda_2(\lambda_{12} + \lambda_1\lambda_2) + b_2 - \frac{1}{2}b\mu \right] \omega^1 + \\ &+ \left[ -\mu\lambda_{21} + \lambda_2(\lambda_{12} + \lambda_1\lambda_2) \right] \omega^2,\end{aligned}\tag{6.14}$$

а также

$$\nabla\lambda_{122} = A_i\omega^i,\tag{6.15}$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned}A_1 &= \lambda_{122}(\mu + \lambda_1) + \lambda_{12} \left( 5\lambda_1\lambda_2 + \frac{3}{2}b \right) - \lambda_{21} \left[ 2(\lambda_1)^2 + 2\lambda_{12} + \lambda_1\mu - b \right] + \\ &+ (\lambda_1)^2\lambda_2(\lambda_2 - 4\mu - 2\lambda_1) - b \left[ \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1\mu - \frac{1}{2}b \right] + b_{11} - \frac{1}{2}\mu b_1 + \lambda_1 b_2, \\ A_2 &= \lambda_{122}(-\mu + \lambda_2) + \lambda_{12} \left[ 2(\lambda_2)^2 + 2\lambda_{21} - \lambda_2\mu + b \right] - \lambda_1(\lambda_2)^2(\lambda_1 + 4\mu - 2\lambda_2) - \\ &- b \left[ \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2\mu + \frac{1}{2}b \right] + \lambda_{21} \left( -5\lambda_1\lambda_2 - \frac{7}{2}b \right) + b_{22} + \frac{1}{2}\mu b_2 - \lambda_2 b_1.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Найденное условие линейризуемости не является в определенном смысле конструктивным, поскольку содержит кроме относительных инвариантов  $b, b_i, b_{ij}, b_{ijk}$  ткани еще и величины  $\mu, \lambda_i, \lambda_{ij}, \lambda_{ijk}$ , которые удовлетворяют вполне интегрируемой системе дифференциальных уравнений (6.13), (6.14), (6.15). Существует два способа выяснить, используя найденные соотношения, является ли заданная ткань  $W$  линейризуемой.

Первый способ: мы находим относительные инварианты заданной ткани, подставляем их в уравнения (6.13), (6.14) и (6.15), интегрируем эту систему, затем подставляем найденные функции  $\mu, \lambda_i, \lambda_{ij}, \lambda_{ijk}$  в соотношение (6.12). Если оно выполняется тождественно, ткань линейризуема.

Второй способ позволяет исключить функции  $\mu, \lambda_i, \lambda_{ij}, \lambda_{ijk}$ , не производя интегрирования. Продифференцируем соотношение (6.12) и в полученном уравнении приравняем нулю коэффициенты при формах  $\omega^1$  и  $\omega^2$ . Это даст два новых соотношения на указанные шесть величин и на относительные инварианты ткани, но кроме того, в них появятся инварианты  $b_{ijkl}$  следующей дифференциальной окрестности (седьмого порядка).

Далее аналогичным образом дифференцируем два найденных уравнения и получаем еще четыре уравнения, содержащие те же величины и еще инварианты ткани из дифференциальной окрестности пятого порядка —  $b_{ijklm}$ . Таким образом, вместе с исходным уравнением (6.12) получится всего семь уравнений, содержащих шесть величин  $\mu, \lambda_i, \lambda_{ij}, \lambda_{ijk}$ . Если ткань является линейризуемой, то после их исключения получится тождество.

Заметим, что полученные описанным образом уравнения являются алгебраическими степени не выше пяти относительно переменных  $\mu, \lambda_i, \lambda_{ij}, \lambda_{ijk}$ , поэтому исключение переменных из них (даже если они найдены!) представляет собой сложную алгебраическую задачу. Эта задача была решена в [45], где авторы не дважды, а трижды продолжили уравнение (6.12). После исключения «лишних» переменных они получили пять алгебраических уравнений степеней 17, 17, 18, 24 и 24 и доказали, что ткань линейризуема тогда и только тогда, когда эти уравнения имеют общий корень. Этот критерий был найден с помощью обобщенного результата нескольких многочленов. В [45] также найдены 1040 инвариантов ткани, принадлежащих дифференциальной окрестности девятого порядка, причем среди них только 18 инвариантов восьмого порядка. Тождественное обращение этих инвариантов в нуль дает необходимое и достаточное условие линейризуемости. Практический алгоритм, согласно [45], состоит в нахождении НОД указанных многочленов. Ткань линейризуема, если НОД имеет вещественный корень.

В заключение раздела заметим, что столь же интересной нам представляется задача выразить кривизну прямолинейной ткани через проективные инварианты огибающих семейств прямых, составляющих эту ткань.

**7. Вычисление ковариантных производных ткани  $W$  через частные производные от функции  $z = f(x, y)$ , определяющей эту ткань.** В некоторых задачах, например, при изучении конкретных тканей, приходится вычислять кривизну ткани и ее ковариантные производные через обычные частные производные от функции, задающих ткань в некоторых локальных координатах. В частности, чтобы проверить, является ли три-ткань, заданная уравнением  $z = f(x, y)$ , линейзуемой или нет, нужно, как сказано выше, найти ее кривизну и ковариантные производные кривизны по крайней мере до третьего порядка включительно.

Выражение для тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани, заданной на  $2r$ -мерном многообразии, найдено М. А. Акивисом и А. М. Шелеховым в [3]. При  $r = 1$  формула для кривизны принимает вид

$$b = \frac{f_{xy^2}}{f_x(f_y)^2} - \frac{f_{x^2y}}{(f_x)^2 f_y} + \frac{f_{xy} f_{xx}}{(f_x)^3 f_y} - \frac{f_{xy} f_{yy}}{f_x(f_y)^3} = -\frac{1}{f_x f_y} \left( \ln \frac{f_x}{f_y} \right)_{xy}.$$

Формулы для ковариантных производных первого и второго порядка тензора кривизны многомерной три-ткани найдены А. М. Шелеховым в [29, 30]. Из этих формул легко получаются соответствующие формулы для криволинейной ткани (при  $r = 1$ ). Но в данной работе мы приводим их в обозначениях статьи [41], где приведенные ниже формулы найдены с помощью компьютера:

$$b_1 = \frac{b_x}{f_x} + 2b \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \quad b_2 = \frac{b_y}{f_y} + 2b \frac{f_{xy}}{f_x f_y},$$

или

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{f_{x^3y}}{(f_x)^3 f_y} - \frac{f_{x^2y^2}}{(f_x)^2 (f_y)^2} - 3 \frac{f_{x^2y} f_{x^2}}{(f_x)^4 f_y} + \frac{f_{xy^2} f_{xy}}{(f_x)^2 (f_y)^3} - \frac{f_{x^3} f_{xy}}{(f_x)^4 f_y} + \frac{f_{x^2y} f_{xy}}{(f_x)^3 (f_y)^2} \\ &+ \frac{f_{xy^2} f_{x^2}}{(f_x)^3 (f_y)^2} + \frac{f_{x^2y} f_{y^2}}{(f_x)^3 (f_y)^2} + 3 \frac{f_{xy} (f_{x^2})^2}{(f_x)^5 f_y} - \frac{(f_{xy})^2 f_{y^2}}{(f_x)^2 (f_y)^4} - \frac{f_{x^2} f_{y^2} f_{xy}}{(f_x)^3 (f_y)^3} - \frac{(f_{xy})^2 f_{x^2}}{(f_x)^4 (f_y)^2}, \\ b_2 &= \frac{f_{xy^3}}{f_x (f_y)^3} - \frac{f_{x^2y^2}}{(f_x)^2 (f_y)^2} - 3 \frac{f_{xy^2} f_{y^2}}{f_x (f_y)^4} + \frac{f_{x^2y} f_{xy}}{(f_x)^3 (f_y)^2} - \frac{f_{y^3} f_{xy}}{f_x (f_y)^4} - \frac{f_{xy^2} f_{xy}}{(f_x)^2 (f_y)^3} \\ &+ \frac{f_{x^2y} f_{y^2}}{(f_x)^2 (f_y)^3} + \frac{f_{xy^2} f_{y^2}}{(f_x)^3 (f_y)^2} + 3 \frac{f_{xy} (f_{y^2})^2}{f_x (f_y)^5} - \frac{(f_{xy})^2 f_{x^2}}{(f_x)^4 (f_y)^2} - \frac{f_{x^2} f_{y^2} f_{xy}}{(f_x)^3 (f_y)^3} - \frac{(f_{xy})^2 f_{y^2}}{(f_x)^2 (f_y)^2}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{(b_1)_x}{f_x} + 3b_1 \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \quad b_{22} = \frac{(b_1)_y}{f_y} + 3b_2 \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \\ b_{12} &= b^2 + \frac{(b_1)_y}{f_y} + 3b_1 \frac{f_{xy}}{f_x f_y} = -b^2 + \frac{(b_2)_x}{f_x} + 3b_2 \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} b_{11} &= 3(F_{x^2})^2 F_{xy} F_{y^2} + 2F_{x^2} (F_{xy})^2 F_{y^2} + (F_{xy})^3 F_{y^2} - 15(F_{x^2})^3 F_{xy} \\ &+ 10(F_{x^2})^2 (F_{xy})^2 - F_{x^2} (F_{xy})^3 - F_{x^3} F_{xy} F_{y^2} - 3F_{x^2} F_{x^2y} F_{y^2} \\ &- 2F_{x^2y} F_{xy} F_{y^2} + 10F_{x^2} F_{x^3} F_{xy} + 15(F_{x^2})^2 F_{x^2y} - 3(F_{x^2})^2 F_{xy^2} \\ &- 3F_{x^3} (F_{xy})^2 - 11F_{x^2} F_{x^2y} F_{xy} - 2F_{x^2} F_{xy} F_{xy^2} - F_{x^2y} (F_{xy})^2 \\ &- (F_{xy})^2 F_{xy^2} + F_{x^3y} F_{y^2} - F_{x^4} F_{xy} - 4F_{x^3} F_{x^2y} \\ &- 6F_{x^2} F_{x^3y} + F_{x^3} F_{xy^2} + 3F_{x^3y} F_{xy} + 3F_{x^2} F_{x^2y^2} \\ &+ 2(F_{x^2y})^2 + F_{x^2y} F_{xy^2} + F_{x^4y} - F_{x^3y^2}, \\ b_{12} &= 3F_{x^2} F_{xy} (F_{y^2})^2 + 5(F_{xy})^2 (F_{y^2})^2 - 3F_{x^2} F_{xy} F_{y^2} - (F_{xy})^3 F_{y^2} \\ &- 5(F_{x^2})^2 (F_{xy})^2 - 5F_{x^2} (F_{xy})^3 - F_{x^2} F_{xy} F_{y^3} - (F_{xy})^2 F_{y^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3F_{x^2y}(F_{y^2})^2 + F_{x^3}F_{xy}F_{y^2} + 3F_{x^2}F_{x^2y}F_{y^2} - 3F_{x^2}F_{x^2y}F_{y^2} \\
& -7F_{xy}F_{xy^2}F_{y^2} + 3(F_{x^2})^2F_{xy^2} + F_{x^3}F_{xy} + 7F_{x^2}F_{x^2y}F_{xy} \\
& -F_{x^2y}(F_{xy})^2 + (F_{xy})^2F_{xy^2} + F_{x^2y}F_{y^3} - F_{x^3y}F_{y^2} \\
& + 3F_{x^2y^2}F_{y^2} - F_{x^3}F_{x^2y} - F_{x^3y}F_{xy} - 3F_{x^2}F_{x^2y^2} - 2(F_{x^2y})^2 \\
& + F_{x^2}F_{xy^3} + F_{xy}F_{xy^3} + 2(F_{xy^2})^2 + F_{x^3y^2} - F_{x^2y^3},
\end{aligned}$$

где введено обозначение

$$F_{x^p y^q} = \frac{f_{x^p y^q}}{(f_x)^p (f_y)^q}.$$

Для инвариантов следующей дифференциальной окрестности в [41] получены формулы

$$\begin{aligned}
b_{111} &= \frac{(b_{11})_x}{f_x} + 4b_{11} \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, & b_{112} &= \frac{(b_{11})_y}{f_y} + 4b_{11} \frac{f_{xy}}{f_x f_y} = -5b_1 b + \frac{(b_{12})_x}{f_x} + 4b_{12} \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \\
b_{222} &= \frac{(b_{22})_y}{f_x} + 4b_{22} \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, & b_{122} &= \frac{(b_{22})_x}{f_x} + 4b_{22} \frac{f_{xy}}{f_x f_y} = 5b_2 b + \frac{(b_{12})_y}{f_y} + 4b_{12} \frac{f_{xy}}{f_x f_y},
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
b_{111} &= -15(F_{x^2})^3 F_{xy} F_{y^2} - 10(F_{x^2})^2 F_{xy} F_{y^2} - 3F_{x^2} (F_{xy})^3 F_{y^2} \\
& - (F_{xy})^4 F_{y^2} + 105(F_{x^2})^4 F_{xy} - 105(F_{x^2})^3 (F_{xy})^2 \\
& + 25(F_{x^2})^2 (F_{xy})^3 - F_{x^2} (F_{xy})^4 + 10F_{x^3} F_{x^2} F_{xy} F_{y^2} \\
& + 15F_{x^2y} (F_{x^2})^2 F_{xy} F_{y^2} + F_{x^3} (F_{xy})^2 F_{y^2} + 7F_{x^2y} F_{x^2} F_{xy} F_{y^2} \\
& + 3F_{x^2y} (F_{xy})^2 F_{y^2} - 105F_{x^3} (F_{x^2})^2 F_{xy} - 105F_{x^2y} (F_{x^2})^3 \\
& + 15F_{xy^2} (F_{x^2})^3 + 65F_{x^3} F_{x^2} (F_{xy})^2 - 7F_{x^3} (F_{xy})^3 \\
& + 120F_{x^2y} (F_{x^2})^2 F_{xy} + 5F_{xy^2} (F_{x^2})^2 F_{xy} - 29F_{x^2y} F_{x^2} (F_{xy})^2 \\
& + 3F_{xy^2} F_{x^2} (F_{xy})^2 + F_{x^2y} (F_{xy})^3 + F_{xy^2} (F_{xy})^3 F_{y^2} \\
& - F_{x^4} F_{xy} F_{y^2} - 4F_{x^3} F_{x^2y} F_{y^2} - 6F_{x^3y} F_{x^2} F_{y^2} \\
& - F_{x^3y} F_{xy} F_{y^2} - 2(F_{x^2y})^2 F_{y^2} + 15F_{x^4} F_{x^2} F_{xy} + 10(F_{x^3})^2 F_{xy} \\
& + 60F_{x^3} F_{x^2y} F_{x^2} + 45F_{x^3y} (F_{x^2})^2 - 10F_{x^3} F_{xy^2} F_{x^2} \\
& - 6F_{x^4} (F_{xy})^2 - 29F_{x^3} F_{x^2y} F_{xy} - 41F_{x^3y} F_{x^2} F_{xy} \\
& - 15(F_{x^2y})^2 F_{x^2} - 15F_{x^2y^2} (F_{x^2})^2 - F_{x^3} F_{x^2y} F_{xy} \\
& - 11F_{x^2y} F_{xy^2} F_{x^2} + 7F_{x^3y} (F_{xy})^2 + 4F_{x^2y^2} F_{x^2} F_{xy} \\
& + 4(F_{x^2y})^2 F_{xy} - 2F_{x^2y} F_{xy^2} F_{xy} - F_{x^2y^2} (F_{xy})^2 + F_{x^4y} F_{y^2} \\
& - F_{x^5} F_{xy} - 5F_{x^4} F_{x^2y} - 10F_{x^3y} F_{x^3} - 10F_{x^4y} F_{x^2} + F_{x^4} F_{xy^2} \\
& + 6F_{x^4y} F_{xy} + 4F_{x^2y^2} F_{x^3} + 5F_{x^3y} F_{x^2y} + 6F_{x^3y^2} F_{x^2} \\
& + 3F_{x^3y} F_{xy^2} - 2F_{x^3y^2} F_{xy} + 2F_{x^2y^2} F_{x^2y} + F_{x^5y} - F_{x^4y^2}, \\
b_{112} &= -9(F_{x^2})^2 F_{xy} (F_{y^2})^2 - 8F_{x^2} (F_{xy})^2 (F_{y^2})^2 - 5(F_{xy})^3 (F_{y^2})^2 \\
& + 15(F_{x^2})^3 F_{xy} F_{y^2} - 23(F_{x^2})^2 (F_{xy})^2 F_{y^2} + 3F_{x^2} (F_{xy})^3 F_{y^2} \\
& + (F_{xy})^4 F_{y^2} + 45(F_{x^2})^3 (F_{xy})^2 - 20(F_{x^2})^2 (F_{xy})^3 \\
& + F_{x^2} (F_{xy})^4 + 3(F_{x^2})^2 F_{xy} F_{y^3} + 2F_{x^2} (F_{xy})^2 F_{y^3} + (F_{xy})^3 F_{y^3} \\
& + 3F_{x^3} F_{xy} (F_{y^2})^2 + 9F_{x^2y} F_{x^2} (F_{y^2})^2 + 8F_{x^2y} F_{xy} (F_{y^2})^2 \\
& - 10F_{x^3} F_{x^2} F_{xy} F_{y^2} - 15F_{x^2y} (F_{x^2})^2 F_{y^2} + 9F_{xy^2} (F_{x^2})^2 F_{y^2} \\
& + 6F_{x^3} (F_{xy})^2 F_{y^2} + 28F_{x^2y} F_{x^2} F_{xy} F_{y^2} + 10F_{xy^2} F_{x^2} F_{xy} F_{y^2} \\
& - 3F_{x^2y} (F_{xy})^2 F_{y^2} + 7F_{xy^2} (F_{xy})^2 F_{y^2} - 15F_{xy^2} (F_{x^2})^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -20F_{x^3}F_{x^2}(F_{xy})^2 - 75F_{x^2y}(F_{x^2})^2F_{xy} + 23F_{xy^2}(F_{x^2})^2F_{xy} \\
& + 3F_{x^3}(F_{xy})^3 + 31F_{x^2y}F_{x^2}F_{xy} - 3F_{xy^2}F_{x^2}(F_{xy})^2 - F_{x^2y}(F_{xy})^3 \\
& - F_{xy^2}(F_{xy})^3 - F_{x^3}F_{xy}F_{y^3} - 3F_{x^2y}F_{x^2}F_{y^3} - 2F_{x^2y}F_{xy}F_{y^3} \\
& - 3F_{x^3y}(F_{y^2})^2 + F_{x^4}F_{xy}F_{y^2} + 4F_{x^3}F_{x^2y}F_{y^2} + 6F_{x^3y}F_{x^2}F_{y^2} \\
& - 3F_{x^3}F_{xy^2}F_{y^2} - 6F_{x^3y}F_{xy}F_{y^2} - 9F_{x^2y^2}F_{x^2}F_{y^2} - 5(F_{x^2y})^2F_{y^2} \\
& - 8F_{x^2y}F_{xy^2}F_{y^2} - 2F_{x^2y^2}F_{xy}F_{y^2} + 10F_{x^3}F_{xy^2}F_{x^2} + F_{x^4}(F_{xy})^2 \\
& + 14F_{x^3}F_{x^2y}F_{xy} + 16F_{x^3y}F_{x^2}F_{xy} + 15F_{x^2y^2}(F_{x^2})^2 + 30(F_{x^2y})^2F_{x^2} \\
& - 3F_{xy^3}(F_{x^2})^2 - 6F_{x^3}F_{xy^2}F_{xy} - 17F_{x^2y}F_{xy^2}F_{x^2} - 3F_{x^3y}(F_{xy})^2 \\
& - 11F_{x^2y^2}F_{xy}F_{x^2} - 11(F_{x^2y})^2F_{xy} - 2F_{xy^3}F_{x^2}F_{xy} - 2(F_{xy^2})^2F_{x^2} \\
& + 2F_{x^2y}F_{xy^2}F_{xy} + F_{x^2y^2}(F_{xy})^2 - F_{xy^3}(F_{xy})^2 - 2(F_{xy^2})^2F_{xy} \\
& + F_{x^3y}F_{y^3} - F_{x^4y}F_{y^2} + 3F_{x^3y^2}F_{y^2} - F_{x^4}F_{xy^2} - F_{x^4y}F_{xy} \\
& - 4F_{x^3}F_{x^2y^2} - 10F_{x^3y}F_{x^2y} - 6F_{x^3y^2}F_{x^2} + F_{xy^3}F_{x^3} \\
& + 4F_{x^3y}F_{xy^2} + 2F_{x^3y^2}F_{xy} + 3F_{x^2y^3}F_{x^2} + 5F_{x^2y^2}F_{x^2y} \\
& + 2F_{xy^3}F_{x^2y} + 2F_{x^2y^2}F_{xy^2} + F_{x^4y^2} - F_{x^3y^3},
\end{aligned}$$

Выражения для  $b_{22}$ ,  $b_{122}$  и  $b_{222}$  могут быть получены из формул для величин  $b_{11}$ ,  $b_{112}$  и  $b_{111}$ , заменой  $x$  на  $y$ ,  $y$  на  $x$  изменением знака каждого слагаемого.

Чтобы было удобней пользоваться формулой (6.12), приведем выражения для входящих туда величин  $b_{11} + b_{22}$  и  $b_{112} - b_{122}$ , которые получаются из приведенных выше формул:

$$\begin{aligned}
b_{11} + b_{22} &= 3F_{x^2}F_{xy}(F_{y^2})^2 - 5(F_{xy})^2(F_{y^2})^2 + 10F_{x^2}(F_{xy})^2F_{y^2} \\
& + 6(F_{xy})^3F_{y^2} - 15(F_{x^2})^3F_{xy} - 5(F_{x^2})^2(F_{xy})^2 + 6F_{x^2}(F_{xy})^3 \\
& - F_{x^2}F_{xy}F_{y^3} + 2(F_{xy})^2(F_{y^3})^2 - 3F_{x^2y}(F_{y^2})^2 - 3F_{xy^2}F_{x^2}F_{y^2} \\
& - 10F_{x^2y}F_{xy}F_{y^2} + 4F_{xy^2}F_{xy}F_{y^2} + 10F_{x^3}F_{x^2}F_{xy} + 15F_{x^2y}(F_{x^2})^2 \\
& + F_{x^3}(F_{xy})^2 + 7F_{x^2y}F_{x^2}F_{xy} - 10F_{xy^2}F_{x^2}F_{xy} - 6F_{x^2y}(F_{xy})^2 \\
& - 6F_{xy^2}(F_{xy})^2 + F_{x^2y}F_{y^3} + 3F_{x^2y^2}F_{y^2} - F_{x^4}F_{xy} - 4F_{x^3}F_{x^2y} \\
& - 6F_{x^3y}F_{x^2} - F_{x^3y}F_{xy} - 2(F_{x^2y})^2 + F_{xy^3}F_{x^2} + 4F_{x^2y}F_{xy^2} \\
& + 6F_{x^2y^2}F_{xy} - 2F_{xy^3}F_{xy} + (F_{xy^2})^2 + F_{x^4y} - F_{x^2y^3}, \\
b_{112} - b_{122} &= -18(F_{x^2})^2F_{xy}(F_{y^2})^2 - 31F_{x^2}(F_{xy})^2(F_{y^2})^2 - 25(F_{xy})^3(F_{y^2})^2 \\
& + 15(F_{x^2})^3F_{xy}F_{y^2} - 31(F_{x^2})^2(F_{xy})^2F_{y^2} + 6F_{x^2}(F_{xy})^3F_{y^2} \\
& + 2(F_{xy})^4F_{y^2} + 45(F_{x^2})^3(F_{xy})^2 - 25(F_{x^2})^2(F_{xy})^3 \\
& + 2F_{x^2}(F_{xy})^4 + 15(F_{y^2})^3F_{xy}F_{x^2} + 45(F_{y^2})^3(F_{xy})^2 + 6(F_{x^2})^2F_{xy}F_{y^3} \\
& + 8F_{x^2}(F_{xy})^2F_{y^3} + 4(F_{xy})^3F_{y^3} + 6F_{x^3}F_{xy}(F_{y^2})^2 + 18F_{x^2y}F_{x^2}(F_{y^2})^2 \\
& + 31F_{x^2y}F_{xy}(F_{y^2})^2 - 10F_{x^3}F_{x^2}F_{xy}F_{y^2} - 15F_{x^2y}(F_{x^2})^2F_{y^2} \\
& + 18F_{xy^2}(F_{x^2})^2F_{y^2} + 8F_{x^3}(F_{xy})^2F_{y^2} + 38F_{x^2y}F_{x^2}F_{xy}F_{y^2} \\
& + 38F_{xy^2}F_{x^2}F_{xy}F_{y^2} - 6F_{x^2y}(F_{xy})^2F_{y^2} + 7F_{xy^2}(F_{xy})^2F_{y^2} \\
& - 15F_{xy^2}(F_{x^2})^3 - 20F_{x^3}F_{x^2}(F_{xy})^2 - 75F_{x^2y}(F_{x^2})^2F_{xy} \\
& + 31F_{xy^2}(F_{x^2})^2F_{xy} + 3F_{x^3}(F_{xy})^3 + 31F_{x^2y}F_{x^2}F_{xy} \\
& - 6F_{xy^2}F_{x^2}(F_{xy})^2 - 2F_{x^2y}(F_{xy})^3 - 2F_{xy^2}(F_{xy})^3 + (F_{xy})^3F_{x^3} \\
& - 10F_{y^3}F_{y^2}F_{xy}F_{x^2} - 15F_{y^2x}(F_{y^2})^2F_{x^2} + 7F_{yx^2}(F_{xy})^2F_{x^2} \\
& - 15F_{yx^2}(F_{y^2})^3 - 20F_{y^3}F_{y^2}(F_{xy})^2 - 75F_{y^2x}(F_{y^2})^2F_{xy}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 31F_{y^2x}F_{y^2}F_{xy} - 2F_{x^3}F_{xy}F_{y^3} - 6F_{x^2y}F_{x^2}F_{y^3} - 8F_{x^2y}F_{xy}F_{y^3} \\
& - 6F_{x^3y}(F_{y^2})^2 + F_{x^4}F_{xy}F_{y^2} + 4F_{x^3}F_{x^2y}F_{y^2} + 6F_{x^3y}F_{x^2}F_{y^2} \\
& - 6F_{x^3}F_{xy^2}F_{y^2} - 8F_{x^3y}F_{xy}F_{y^2} - 18F_{x^2y^2}F_{x^2}F_{y^2} - 5(F_{x^2y})^2F_{y^2} \\
& - 25F_{x^2y}F_{xy^2}F_{y^2} - 13F_{x^2y^2}F_{xy}F_{y^2} + 10F_{x^3}F_{xy^2}F_{x^2} + F_{x^4}(F_{xy})^2 \\
& + 14F_{x^3}F_{x^2y}F_{xy} + 16F_{x^3y}F_{x^2}F_{xy} + 15F_{x^2y^2}(F_{x^2})^2 + 30(F_{x^2y})^2F_{x^2} \\
& - 6F_{xy^3}(F_{x^2})^2 - 8F_{x^3}F_{xy^2}F_{xy} - 25F_{x^2y}F_{xy^2}F_{x^2} - 4F_{x^3y}(F_{xy})^2 \\
& - 13F_{x^2y^2}F_{xy}F_{x^2} - 13(F_{x^2y})^2F_{xy} - 8F_{xy^3}F_{x^2}F_{xy} - 7(F_{xy^2})^2F_{x^2} \\
& + 4F_{x^2y}F_{xy^2}F_{xy} + 2F_{x^2y^2}(F_{xy})^2 - 4F_{xy^3}(F_{xy})^2 - 13(F_{xy^2})^2F_{xy} \\
& + F_{y^4}F_{xy}F_{x^2} + 4F_{y^3}F_{y^2x}F_{x^2} + 6F_{y^3x}F_{y^2}F_{x^2} + 10F_{y^3}F_{yx^2}F_{y^2} \\
& + F_{y^4}(F_{xy})^2 + 14F_{y^3}F_{y^2x}F_{xy} + 16F_{y^3x}F_{y^2}F_{xy} + 15F_{x^2y^2}(F_{y^2})^2 \\
& + 30(F_{y^2x})^2F_{y^2} - 2(F_{yx^2})^2F_{y^2} + 2F_{x^3y}F_{y^3} - F_{x^4y}F_{y^2} + 6F_{x^3y^2}F_{y^2} \\
& - F_{x^4}F_{xy^2} - F_{x^4y}F_{xy} - 4F_{x^3}F_{x^2y^2} - 10F_{x^3y}F_{x^2y} - 6F_{x^3y^2}F_{x^2} \\
& + 2F_{xy^3}F_{x^3} + 6F_{x^3y}F_{xy^2} + 2F_{x^3y^2}F_{xy} + 6F_{x^2y^3}F_{x^2} \\
& + 7F_{x^2y^2}F_{x^2y} + 6F_{xy^3}F_{x^2y} + 7F_{x^2y^2}F_{xy^2} - F_{y^4x}F_{x^2} - F_{y^4}F_{yx^2} \\
& - F_{y^4x}F_{xy} - 4F_{y^3}F_{x^2y^2} - 10F_{y^3x}F_{y^2x} - 6F_{y^3x^2}F_{y^2} \\
& + 2F_{y^3x^2}F_{xy} + F_{x^4y^2} - 2F_{x^3y^3} + F_{y^4x^2}.
\end{aligned}$$

**8. Заключительные замечания.** Теория тканей имеет разнообразные приложения (см. [4, 32, 35]); здесь мы отметим только то, что касается криволинейных тканей, заданных на двумерном многообразии. Важнейшее из «внутренних» приложений — классификация  $d$ -тканей, образованных  $d$  слоениями на плоскости. При  $d > 3$   $d$ -ткани классифицируются по виду и свойствам составляющих их три-тканей. В [42] рассматриваются такие 4-ткани на двумерном многообразии, у которых все три-подткани имеют одинаковые формы кривизны. Доказывается, что следующее свойство является характеристическим: все 3-подткани являются параллелизуемыми. Семейство 4-тканей данного вида зависит от одного параметра. В работе найдены также конечные уравнения слоений, составляющих 4-ткань. В [34] получены условия линейризуемости  $d$ -ткани при  $d > 3$ . Оказалось, что эти условия связаны с окрестностью четвертого порядка (а не восьмого, как для 3-ткани).

В [43] рассматривается специальный класс 4-тканей, у которых все три-подткани имеют одинаковые формы кривизны: добавляется условие, что основной аффиноид 4-ткани ковариантно постоянен на одном из слоений ткани относительно связности Черна одной из 3-подтканей (базисный аффиноид есть сложное отношение касательных к линиям ткани, проходящим через одну точку). Доказывается, что все 3-подткани в этом случае являются шестиугольными, и что не существует таких 4-тканей, у которых все три-подткани имеют одинаковые формы кривизны, и у которых базисный аффиноид 4-ткани ковариантно постоянен на некотором слоении, отличном от слоений, составляющих рассматриваемую 4-ткань.

В [44] рассматривается проблема линейризуемости для различных классов 4-тканей на плоскости. С помощью результатов, полученных в [43], дается еще одно доказательство того известного факта, что 4-ткань Майерхофера с равными формами кривизны ее три-подтканей и непостоянным базисным инвариантом всегда линейризуема. Также с помощью [43] доказывается, что 4-ткань с постоянным базисным инвариантом линейризуема тогда и только тогда, когда она параллелизуема. Здесь же изучаются 4 класса так называемых почти параллелизуемых 4-тканей, для которых кривизна равна нулю и базисный инвариант постоянен на одном из слоений 4-ткани. Такие ткани, как показано, будут линейризуемыми тогда и только тогда, когда совпадают с соответствующим специальным классом тканей Майерхофера.

В [24–27] теория криволинейных тканей используется для описания свойств систем дифференциальных уравнений гидродинамического типа. В [25], в частности, рассматриваются три-ткани, образованные характеристиками на решениях такой системы, и выделяется подкласс систем, для

которых три-ткань будет регулярной. В [40], помимо этого, показано, как понятие ранга ткани использовать для классификации законов сохранения.

Авторы работ [37–39] используют криволинейную ткань для описания геометрических свойств особенностей.

В непосредственной близости от рассматриваемой тематики стоят работы по тканям на комплексной плоскости [47, 48, 51], а также работы, где делаются попытки создать глобальную теорию тканей (см., например, [52, 53]).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аквис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей// Тр. геом. семин. ВИНТИ. — 1969. — 2. — С. 7–31.
2. Аквис М. А. Об условии алгебраизуемости тройки кривых в трехмерном проективном пространстве// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1987. — С. 129–136.
3. Аквис М. А., Шелехов А. М. О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани и ассоциатора связанной с ней локальной квазигруппы// Сиб. мат. ж. — 1971. — 12, № 5. — С. 953–966.
4. Белоусов В. Д., Рыжков В. В. Геометрия тканей// Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. — М.: ВИНТИ, 1972. — 10. — С. 159–188.
5. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. — М.: ГИТТЛ, 1959.
6. Бычек В. М. О координатных три-тканях на подмногообразиях обобщенного пространства Аппеля// М.: МГПИ, 1980. — Деп. в ВИНТИ 13.10.1980. — № 4335-80 Деп.
7. Бычек В. М. О конгруэнциях нормалей поверхности в трехмерном пространстве Аппеля гиперболического типа// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1981. — С. 23–29.
8. Бычек В. М. О многомерном обобщении гиперболического пространства Аппеля и некоторых вопросах его дифференциальной геометрии// Изв. вузов. Сер. мат. — 1981. — 6. — С. 65–68.
9. Виноградов А. М., Юмагузин В. А. Дифференциальные инварианты тканей на двумерных многообразиях// Мат. заметки. — 1990. — 48, № 1. — С. 26–37.
10. Драгунов В. К. О координатной три-ткани поверхности в пространстве кубической метрики// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1982. — С. 86–93.
11. Драгунов В. К. О семействе кубических сфер, соприкасающихся с кубической поверхностью в пространстве кубической метрики  $K^3$ // Проблемы теории тканей и квазигрупп. — Калинин, 1985. — С. 133–139.
12. Драгунов В. К. О существовании координатной три-ткани Дарбу на поверхности в пространстве  $K^3$ // Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1986. — С. 29–36.
13. Лазарева В. Б. Три-ткани на двумерной поверхности в триаксиальном пространстве// Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград, 1979. — 10. — С. 54–79.
14. Лазарева В. Б. О три-тканях, порожденных тремя  $r$ -плоскостями в проективном пространстве размерности  $2r + 1$ // Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1981. — С. 56–68.
15. Лазарева В. Б. О три-ткани Дарбу на поверхности в триаксиальном пространстве// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1982. — С. 45–55.
16. Лазарева В. Б. К геометрии  $n$ -аксиального пространства// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1987. — С. 68–75.
17. Лазарева В. Б., Шелехов А. М. О геометрической интерпретации инвариантного оснащения точечного соответствия трех прямых// Изв. вузов. Сер. мат. — 1984. — 9. — С. 43–47.
18. Уткин А. А. О три-ткани, определяемой на поверхности норм-кривой// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1986. — С. 71–77.
19. Уткин А. А. О существовании координатной три-ткани Дарбу на гладкой поверхности в пространстве  $N^3$ // Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1987. — С. 113–119.
20. Уткин А. А. О соприкасающихся кубических сферах поверхности пространства  $N^3$ // Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1988. — С. 51–58.
21. Уткин А. А. О геометрическом условии принадлежности тройки кривых трехмерного пространства одной норм-кривой// Изв. вузов. Сер. мат. — 1989. — 5. — С. 82–84.
22. Уткин А. А., Шелехов А. М. К геометрии гладкой поверхности пространства  $N^3$ // Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1987. — С. 120–128.
23. Уткин А. А., Шелехов А. М. О три-тканях, определяемых линейным дифференциальным уравнением первого порядка// Изв. вузов. Сер. мат. — 2001. — 11. — С. 4–57.

24. *Ферапонтов Е. В.* Слабо нелинейные полугамильтоновы системы дифференциальных уравнений с точки зрения теории тканей// Уч. зап. Тартуского ун-та. — 803. — 1988. — С. 103–114.
25. *Ферапонтов Е. В.* Системы трех дифференциальных уравнений гидродинамического типа с шестиугольной три-тканью из характеристик на решениях// Функц. анал. прилож. — 1989. — 23, № 2. — С. 79–80.
26. *Ферапонтов Е. В.* Интегрирование слабо нелинейных полугамильтоновых систем гидродинамического типа методами теории тканей// Мат. сб. — 1990. — 181, № 9. — С. 1220–1235.
27. *Ферапонтов Е. В.* Уравнения гидродинамического типа с точки зрения теории тканей// Мат. заметки. — 1991. — 50, № 5. — С. 97–108.
28. *Чакмазян А. В.* О геодезических три-тканях на двумерном многообразии аффинной связности// Докл. АН Арм. ССР. — 1974. — 59. — С. 136–140.
29. *Шелехов А. М.* О вычислении ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1986. — С. 96–103.
30. *Шелехов А. М.* Вычисление вторых ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани// Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1990. — С. 49–55.
31. *Шелехов А. М.* Криволинейные три-ткани, допускающие однопараметрическую группу автоморфизмов// Изв. вузов. Сер. мат. — 2005. — 5. — С. 68–70.
32. *Aczel J.* Quasigroups, nets and nomograms// Adv. Math. — 1965. — 1, № 3. — С. 383–450.
33. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Differential geometry of webs// Chap. 1 in «Handbook of Differential Geometry». — Elsevier Sci., 2000. — С. 1–152.
34. *Akivis M. A., Goldberg V. V., Lychagin V. V.* Linearizability of  $d$ -webs,  $d \geq 4$ , on the 2-dimensional manifold// Selecta Math. — 2004. — 10, № 4. — С. 431–451.
35. *Akivis M. A., Shelekhov A. M.* Geometry and algebra of multidimensional three-webs. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publ., 1992.
36. *Balk A. M., Ferapontov E. V.* Invariants of wave systems and web geometry// Nonlinear waves and weak turbulence/ Zakharov V. E., ed. — Trans. Amer. Math. Soc., Ser. 2. — Amer. Math. Soc. Providence, 1998. — 182. — С. 1–30.
37. *Dufour J. P., Jean P.* Rigidity of webs and families of hypersurfaces// Singularities and Dynamical Systems (Iraklion, 1983)/ North-Holland Math. Stud. — Amsterdam–New York: North-Holland, 1985. — 103. — С. 271–283.
38. *Dufour J. P.* Introduction aux tissus// Semin. Gaston Darboux Geom. Topologie Differ. — 1990–1991, 1992. — С. 55–76.
39. *Dufour J. P.* Rigidity of webs// Web theory and related topics. — Singapore: World Scientific, 2001. — С. 106–113.
40. *Ferapontov E. V.* Web geometry and mathematical physics// in: *Akivis M. A., Shelekhov A. M.* Geometry and algebra of multidimensional three-webs. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publ., 1992. — С. 310–323 (см. [7]).
41. *Goldberg V. V.* On a linearizability condition for a three-web on a two-dimensional manifold// Lecture Notes Math. — 1988. — 1410. — С. 223–239.
42. *Goldberg V. V.* Curvilinear 4-webs with equal curvature forms of its 3- subwebs// Webs and Quasigroups. — Tver, 1993. — С. 9–19.
43. *Goldberg V. V.* Special classes of curvilinear 4-webs with equal curvature forms of their 3-subwebs// Webs and Quasigroups. — Tver, 1996–1997. — С. 24–39.
44. *Goldberg V. V.* Four-webs in the Plane and their linearizability// Acta Appl. Math. — 2004. — 80. — С. 35–55.
45. *Goldberg V. V., Lychagin V. V.* On the Blaschke conjecture for 3-webs// J. Geom. Anal. — 2006. — 16; preprint arXiv math.DG/0411460.
46. *Goldberg V. V., Lychagin V. V.* On linearization of planar three-webs and Blaschke's conjecture// C. R. Acad. Sci. Paris. — 2005. — 1341, № 3. — С. 169–173.
47. *Heñaut A.* Caractérisation des tissus de  $\mathbf{C}^2$  dont le rang est maximal et qui sont linéarisables// Compos. Math. — 1994. — 94. — С. 247–268.
48. *Heñaut A.* On planar web geometry through abelian relations and connections// Ann. Math. — 2004. — 159. — С. 425–445.
49. *Lazareva V. B.* Three-webs on cubic surfaces// Webs and Quasigroups. — Tver, 1996–1997. — С. 101–126.
50. *Lazareva V. B., Shelekhov A. M.* Three-webs formed by pencils of conics// Webs and Quasigroups. — Tver, 2000. — С. 63–76.

51. *Nakai I.* Topology of complex webs of codimension one and geometry of projective space curves// Topology. — 1987. — 26. — С. 475–504.
52. *Nakai I.* Curvature of curvilinear 4-webs and pencils of one forms// Topology of holomorphic dynamical systems and related topics. — Kyoto. — 1995. — Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku. — 955, № 8. — С. 109–132.
53. *Nakai I.* Curvature of curvilinear 4-webs and pencils of one forms: Variation on the theme a theorem of Poincaré, Mayrhofer and Reidemeister on curvilinear 4-webs// Comment. Math. Helv. — 1988. — 73. — С. 177–205.
54. *Utkin A. A.* On connections determined by a normal cubic on a smooth surface// Webs and Quasigroups. — Tver, 1992. — С. 97–105.
55. *Utkin A. A.* On some geometric sign of algebraizability criterion for a triple of curves// Webs and Quasigroups. — Tver, 1995. — С. 135–138.
56. *Utkin A. A., Shelekhov A. M.* On local classification of curvilinear three-webs// Webs and Quasigroups. — Tver, 1998-1999. — С. 76–85.