

ISSN 1512–1712

**Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики**

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 34

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ



**Тбилиси
2005**

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Е. С. Голод (Московский государственный университет)

И. Т. Кигурадзе (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

А. Лаши (Грузинский технический университет)

Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Овчинников (Московский государственный университет)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Сарычев (Университет Флоренции)

Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

Г. Г. Чоговадзе (Академия наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 34

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი

2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

О лебеговой размерности топологических произведений (<i>К. Л. Козлов, Б. А. Пасынков</i>) . . .	3
Равномерно суперпаракомпактные, вполне паракомпактные и сильно паракомпактные равномерные пространства (<i>Д. К. Мусаев</i>)	87
Некоторые свойства множественно-открытых топологий (<i>С. Э. Нохрин</i>)	100
Исследование семейств монотонных непрерывных функций над тихоновскими пространствами (<i>Д. С. Охезин</i>)	130
Модификации равномерной базы и вопросы классификации топологических пространств (<i>С. А. Перегудов</i>)	162

О ЛЕБЕГОВОЙ РАЗМЕРНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

© 2005 г. К. Л. КОЗЛОВ, Б. А. ПАСЫНКОВ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. d -правильность	5
1.1. d -правильные отображения в обратные спектры	5
1.2. d -правильные обратные спектры и d -правильные подмножества пределов обратных спектров	7
1.3. Нульмерность и d -правильность отображений в обратные спектры	8
1.4. d -правильность и обратные последовательности	8
1.5. d -правильные отображения	10
1.6. d -правильные и d -расположенные подмножества. Монотонность размерности $\dim$	10
1.7. Некоторые случаи d -правильности и (n, d) -правильности подмножеств пространств	11
1.8. Еще один случай (n, d) - и d -правильности подмножества пространства. σ -локально конечная теорема суммы для функционально открытых множеств. d -пространства	12
1.9. Равенство $\text{loc dim } G = \dim G$ для топологических групп G	13
1.10. Критерии и свойства d -правильности и sd -правильности	14
1.11. d -правильность, sd -правильность и паракомпактность	21
1.12. Еще о монотонности размерности $\dim$	23
1.13. О совершенных открытых отображениях, повышающих размерность	25
1.14. О размерности Δ	25
2. Размерность $\dim$ (кусочно) прямоугольных произведений	26
2.1. Кусочная цилиндричность и цилиндричность	26
2.2. Кусочная прямоугольность и прямоугольность	28
2.3. Связь (кусочной) прямоугольности и (кусочной) цилиндричности тихоновских произведений	31
2.4. Произведения, близкие к (кусочно) прямоугольным (σ -(кусочно) прямоугольные и σ -дискретно (кусочно) прямоугольные)	32
3. (σ)-прямоугольность и (σ)-кусочная прямоугольность некоторых произведений	33
3.1. Случай, когда на сомножители накладываются одинаковые условия (бикомпактности, метризуемости, быть паракомпактным p - или Σ -пространством).	33
3.2. Случай произведений двух пространств, когда условия накладываются на один из его сомножителей или на одну из его проекций	38
3.3. Случай, когда один из сомножителей метризуем или является совершенным образом метризуемого пространства	41
3.4. Случай двух сомножителей, один из которых лашневский	48
3.5. Случай нульмерных сомножителей	48
3.6. Еще некоторые случаи и условия (не)прямоугольности топологических произведений	49
4. Примеры произведений, размерность которых больше суммы размерностей сомножителей	51
4.1. Свойства типа нормальности и паракомпактности пространств согласованных семейств	52
4.2. Размерность пространств согласованных семейств	58
4.3. n -Мерные вполне несвязные топологии на произведениях множеств	62

4.4. Совершенно нормальные произведения, размерность которых больше суммы размерностей сомножителей	70
4.5. Нормальные произведения, размерность которых больше суммы размерностей сомножителей	76
Список литературы	83

ВВЕДЕНИЕ

Операция взятия топологического произведения является одной из самых основных в топологии. Определение топологического произведения $X \times Y$ двух топологических пространств X и Y достаточно просто и вполне естественно. Однако далеко не все топологические свойства сомножителей переходят от них к произведению. Например, это так для нормальности, паракомпактности, линделефовости. Размерность произведения $\dim X \times Y$ очень сложно связана с размерностями сомножителей $\dim X$ и $\dim Y$. Казалось бы, что должно выполняться равенство

$$\dim X \times Y = \dim X + \dim Y. \quad (++)$$

Однако в 1930 г. Л. С. Понтрягин построил два таких двумерных метризуемых компакта X и Y , что

$$\dim X \times Y = 3 < 4 = \dim X + \dim Y.$$

В то же время для достаточно большого запаса топологических пространств выполняется неравенство

$$\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y. \quad (+)$$

Это так, например, при перемножении бикомпактов или метризуемых пространств. Была надежда, что неравенство (+) верно для любых X и Y . Но в 1978 г. Ваге, а затем Пшимушински и др. построили пространства X и Y , для которых неравенство (+) не выполнено, как в случае нормальности пространств $X \times Y$, так и в случае метризуемости пространства X (и тихоновости пространства Y). Вопрос о выполнении неравенства (+) для паракомпактного хаусдорфова пространства $X \times Y$ открыт и по сей день.

Первая часть статьи, состоящая из первых трех разделов, посвящена условиям, достаточным для выполнения неравенства (+) и аналогичного неравенства для тихоновских произведений. Эта часть написана Б. А. Пасынковым (и все ее новые результаты получены им). Она содержит, в частности, его доказательства двух теорем (теоремы 1.59 и 3.15), опубликованных ранее без доказательств.

Вторая часть статьи (раздел 4) посвящена примерам пространств, размерность произведения которых больше суммы их размерностей (в частности, таким парам пространств, для которых неравенство (+) не выполнено). Она написана К. Л. Козловым; все ее новые результаты принадлежат ему.

В дальнейшем под пространством понимается топологическое пространство, под непрерывным отображением — непрерывное отображение между пространствами, бикомпакт (паракомпакт) — это бикомпактное (паракомпактное) хаусдорфово пространство. Отметим, что иногда, без специальных замечаний, вместо самих рассматриваемых отображений берутся их коограничения.

Размерность $\dim$ определяется при помощи конечных функционально открытых покрытий (см. [26, 48, 63]), которые в случае нормальных пространств могут быть заменены на конечные открытые покрытия. Напомним, что $\dim X = \dim \beta X$ для любого тихоновского пространства X (см., например, [26]). Для множества A через A_f (соответственно, A_ω) обозначается множество всех его конечных (соответственно, счетных) подмножеств.

В соответствие каждому пространству X и его непрерывному отображению $f : X \rightarrow Y$ можно поставить тихоновское пространство τX , непрерывное отображение «на» $\tau_X : X \rightarrow \tau X$ и непрерывное отображение $\tau(f) : \tau X \rightarrow \tau Y$, такие, что $\tau_Y \circ f = \tau(f) \circ \tau_X$ и $\tau_X = \text{id}_X$ для тихоновского пространства X . Соответствие $X \rightarrow \tau X$, $f \rightarrow \tau(f)$ называется функтором Тихонова. Всегда $\dim \tau X = \dim X$ (более того, для любого функционально открытого в X множества O множество $\tau_X O$ функционально открыто в τX и $O = \tau_X^{-1} \tau_X O$).

1. d -ПРАВИЛЬНОСТЬ

Некоторые общие утверждения, касающиеся размерности $\dim$ топологических произведений и их подмножеств, вытекают из соответствующих утверждений для обратных спектров. При этом доказательства в случае обратных спектров оказываются даже менее громоздкими. Поэтому начнем со случая обратных спектров. Фиксируем в этом и следующем параграфах обратный спектр

$$S = \{X_\lambda, p_{\mu\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$$

с пределом X и предельными проекциями $p_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$.

1.1. d -ПРАВИЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ОБРАТНЫЕ СПЕКТРЫ.

Определение 1.1. *Отображением $\varphi = \{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ пространства A в обратный спектр S назовем такую систему непрерывных отображений $\varphi_\lambda : A \rightarrow X_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, что*

$$(a) \quad \varphi_\lambda = p_{\mu\lambda} \circ \varphi_\mu, \quad \lambda < \mu.$$

Отображение $\varphi = \{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ пространства A в спектр S назовем:

- d -*правильным*, если в любое конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное (функционально открытое) покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее следующим свойством:

для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти индекс $\lambda(\alpha) \in \Lambda$ и функционально открытое в $X_{\lambda(\alpha)}$ множество U_α так, что множество O_α содержится и открыто-замкнуто в $\varphi_{\lambda(\alpha)}^{-1}U_\alpha$; (d)_{is}

- (n, d) -*правильным*, $n = -1, 0, 1, \dots$, если в любое конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное (функционально открытое) покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее следующим свойством: для каждого $a \in \mathcal{A}_f$ можно найти индекс $\lambda(a) \in \Lambda$, множество $D_a \subset X_{\lambda(a)}$ и функционально открытое в $X_{\lambda(a)}$ множество U_a такие, что
 - (b) $U_a \subset D_a$, $\dim D_a \leq n$;
 - (c) $\lambda(a) \succ \lambda(b)$, если $a \supset b$;
 - (d) множество $O_a = \bigcap \{O_\alpha : \alpha \in a\}$ содержится в $\varphi_{\lambda(a)}^{-1}U_a$ и в случае $|a| = 1$ оно открыто-замкнуто в $\varphi_{\lambda(a)}^{-1}U_a$.

Замечание 1.2. В обозначениях предыдущего определения, функциональная открытость множеств U_α в $X_{\lambda(\alpha)}$ обеспечивает функциональную открытость в A множеств O_α и O_a .

Взаимоотношение d -правильности и (n, d) -правильности описывает следующее утверждение.

Предложение 1.3. d -*правильное отображение φ пространства A в обратный спектр S , является (n, d) -правильным, если $\dim X_\lambda \leq n$ для любого $\lambda \in \Lambda$.*

Доказательство. Используем обозначения определения 1.1. Для $a = \{\alpha\}$ положим $\lambda(a) = \lambda(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Индукцией по числу элементов множеств $a \in \mathcal{A}_f$ можно, пользуясь направленностью Λ , указать индексы $\lambda(a)$ так, чтобы выполнялось условие (c) определения 1.1. Тогда ясно, что множества

$$D_a = X_{\lambda(a)}, \quad U_a = \bigcap \{p_{\lambda(a)\lambda(\alpha)}^{-1}U_\alpha : \alpha \in a\}$$

удовлетворяют условиям (b) и (d) определения 1.1. □

Следующее утверждение (см. [77, предложение 1]) выявляет цель определения 1.1 и играет в дальнейшем ключевую роль. Напомним, что непрерывное отображение $f : A \rightarrow R$ называется ω -отображением для покрытия ω пространства A , если существует такое открытое покрытие ν пространства R , прообраз которого $f^{-1}\nu$ вписан в ω .

Предложение 1.4. *Пусть дано отображение $\varphi = \{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ пространства A в обратный спектр S и пусть σ -локально конечное открытое покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ пространства A таково, что для каждого $a \in \mathcal{A}_f$ можно найти индекс $\lambda(a) \in \Lambda$, множество $D_a \subset X_{\lambda(a)}$ и*

функционально открытое в $X_{\lambda(a)}$ множество U_a , удовлетворяющие условиям (b)–(d) определения 1.1. Тогда существует ω -отображение пространства A на метризуемое пространство R размерности $\dim R \leq n$, $n = 0, 1, \dots$

Доказательство. Доказательство основывается на [15, § 3, предложение 9] (и приводится в силу трудной доступности в России статьи [77].)

Без потери общности можно считать, что

$$(e) \ p_{\lambda(a)\lambda(b)}U_a \subset U_b \text{ при } b \subset a \in \mathcal{A}_f$$

(иначе вместо U_a может быть взято множество $\bigcap \{p_{\lambda(a)\lambda(b)}^{-1}U_b : b \subset a\}$). Тогда, очевидно,

$$(i) \ O_a \text{ есть открыто-замкнутое подмножество множества } \varphi_{\lambda(a)}^{-1}U_a \text{ для любого } a \in \mathcal{A}_f.$$

Возьмем для каждого $a \in \mathcal{A}_f$ непрерывное отображение θ_a пространства $X_{\lambda(a)}$ в $I_a = [0, 1]$ такое, что $U_a = \theta_a^{-1}(0, 1]$.

Фиксируем $a \in \mathcal{A}_f$ и предположим, что для каждого $b \subset a$, $b \neq a$, метризуемое пространство R_b , его открытое подмножество V_b и непрерывные отображения

$$g_b : X_{\lambda(b)} \rightarrow R_b, \quad h_b : R_b \rightarrow I_b, \quad \pi_{bb'} : V_b \rightarrow V_{b'}, \quad b' \subset b,$$

построены так, что выполнены следующие условия:

- (1) $\dim V_b \leq n$;
- (2) $U_b = g_b^{-1}V_b$, $g_b U_b = V_b$;
- (3) $g_{b'} \circ p_{\lambda(b)\lambda(b')} = \pi_{bb'} \circ g_b$ на U_b , $b' \subset b$;
- (4) $\theta_b = h_b \circ g_b$;
- (5) множество $R_b \setminus V_b$ состоит только из одной точки o_b .

Обозначим диагональное произведение отображений θ_a и $g_b \circ p_{\lambda(a)\lambda(b)}$, $b \subset a$, $b \neq a$, через ξ_a , а проекции произведения $\Pi_a = I_a \times \prod \{R_b : b \subset a, b \neq a\}$ на сомножители I_a и R_b через pr_a и pr_b соответственно. Согласно факторизационной теореме (см. [8, 11]; [15, теорема 2, следствие 2], [61, лемма 2.2]) существует метризуемое пространство S_a и непрерывные отображения $g'_a : D_a \rightarrow S_a$, $h'_a : S_a \rightarrow \Pi_a$ такие, что $h'_a \circ g'_a = \xi_a$ на D_a и $\dim S_a \leq \dim D_a \leq n$. Мы можем, конечно, считать, что $S_a = g'_a D_a$. Рассмотрим $W_a = (\text{pr}_a \circ h'_a)^{-1}(0, 1]$. Ясно, что $U_a = (g'_a)^{-1}W_a$ и $g'_a U_a = W_a$. Множество точек пространства R_a получается из множества W_a добавлением к нему точки $o_a \notin W_a$. Обозначим отображение, равное 0 в точке o_a и совпадающее с $\text{pr}_a \circ h'_a$ на W_a , через h_a . Возьмем прообразы всех открытых в I_a множеств и все открытые подмножества пространства W_a в качестве базы топологии на R_a . Ясно, что пространство R_a метризуемо и что отображение h_a непрерывно. Обозначим множество W_a , рассматриваемое как подмножество пространства R_a , через V_a . Очевидно, V_a гомеоморфно W_a . Таким образом, $\dim V_a \leq \dim S_a \leq n$ и поэтому $\dim R_a \leq n$. Отображение $g_a : X_{\lambda(a)} \rightarrow R_a$, совпадающее с g'_a на U_a и переводящее $X_{\lambda(a)} \setminus U_a$ в точку o_a , непрерывно и $g_a^{-1}V_a = U_a$, $g_a U_a = V_a$, $\theta_a = h_a \circ g_a$.

Для отображения $\pi_{ab} = \text{pr}_b \circ h'_a : (V_a \equiv W_a) \rightarrow R_b$, $b \subset a$, $b \neq a$, мы имеем на U_a (и на его образах) соотношение

$$\pi_{ab} \circ g_a = \text{pr}_b \circ h'_a \circ g'_a = \text{pr}_b \circ \xi_a = g_b \circ p_{\lambda(a)\lambda(b)}$$

и (в силу соотношения (e))

$$\pi_{ab}(V_a \equiv W_a) = \pi_{ab} \circ g_a U_a = g_b \circ p_{\lambda(a)\lambda(b)} U_a \subset g_b U_b = V_b.$$

Таким образом, соотношения (1)–(5) для $b = a$ выполнены.

Описанные построения позволяют при помощи индукции по числу элементов во множестве $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{A}_f$ получить для любого $a \in \mathcal{A}_f$ метризуемое пространство R_a , открытое в R_a множество V_a и непрерывные отображения $g_a : X_{\lambda(a)} \rightarrow R_a$, $h_a : R_a \rightarrow I_a$, $\pi_{ab} : V_a \rightarrow V_b$, $b \subset a$, удовлетворяющие условиям (1)–(5) (где b и b' заменены на a и b соответственно).

Для каждого $a \in \mathcal{A}_f$ определено отображение $f_a : A \rightarrow R_a$, равное $g_a \circ \varphi_{\lambda(a)}$ на O_a и переводящее $A \setminus O_a$ в точку o_a (следовательно, f_a совпадает с $g_a \circ \varphi_{\lambda(a)}$ на $(A \setminus \varphi_{\lambda(a)}^{-1}U_a) \cup O_a$). Это отображение непрерывно по условию (i).

Ясно, что $f_a^{-1}V_a = O_a$ и $\pi_{ab} \circ f_a = f_b$ на O_a , где $b \subset a$.

Итак, для пространств R_a , их подмножеств V_a и отображений f_a и π_{ab} все условия предложения 9 из [15] выполнены. Отсюда следует доказательство нашего предложения. $\square$

Для применения предложения 1.4 осталось напомнить следующее простое утверждение.

Лемма 1.5. *Если пространство A для любого своего конечного функционально открытого покрытия ω обладает ω -отображением в нормальное пространство R_ω размерности $\dim R_\omega \leq n$, то и $\dim A \leq n$.*

Доказательство. Действительно, если ω есть конечное функционально открытое покрытие пространства R , а $f : A \rightarrow R$ есть ω -отображение в нормальное пространство размерности $\dim R \leq n$, то существует открытое покрытие ν пространства R , прообраз $f^{-1}\nu$ которого вписан в ω .

Операция укрупнения покрытия ω [1] позволяет, не ограничивая общности рассуждений, считать покрытие ν конечным. Тогда в ν можно вписать конечное функционально открытое покрытие η кратности $\leq n + 1$. Его прообраз $f^{-1}\eta$ будет вписанным в ω , конечным, функционально открытым покрытием пространства A кратности $\leq n + 1$. $\square$

Из предложения 1.4, леммы 1.5 и определения 1.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.6. *Если пространство A обладает (n, d) -правильным отображением в какой-нибудь обратный спектр, то $\dim A \leq n$, $n = 0, 1, \dots$*

В частности, имеем следующее утверждение.

Следствие 1.7. *Если пространство A обладает d -правильным отображением в обратный спектр $\{X_\lambda, p_{\mu\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$, то $\dim A \leq \sup\{\dim X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.*

Рассмотрим важнейшие ситуации, связанные с d -правильными отображениями в обратные спектры.

1.2. d -правильные обратные спектры и d -правильные подмножества пределов обратных спектров. Для обратного спектра S и подмножества A его предела X система $\{p_\lambda|_A : \lambda \in \Lambda\}$, очевидно, образует отображение A в S , которое мы в дальнейшем будем называть *каноническим*.

Определение 1.8. Подмножество A предела обратного спектра S будем называть *d -правильным* (соответственно, *(n, d) -правильным относительно S*), если каноническое отображение A в S является d -правильным (соответственно, (n, d) -правильным).

Более подробно (в случае d -правильности), подмножество A предела обратного спектра S называется *d -правильным относительно S* , если для любого конечного функционально открытого покрытия Ω пространства A существует вписанное в Ω и σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, обладающее следующим свойством:

для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти $\lambda(\alpha) \in \Lambda$ и функционально открытое в $X_{\lambda(\alpha)}$ множество U_α так, что O_α открыто-замкнуто в пересечении $A \cap p_{\lambda(\alpha)}^{-1}U_\alpha$. (d)_{iss}

Из следствий 1.6 и 1.7 вытекает следующая теорема.

Теорема 1.9. *Если подмножество A обратного спектра $S = \{X_\lambda, p_{\mu\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$ является d -правильным (соответственно, (n, d) -правильным относительно S), то*

$$\dim A \leq \sup\{\dim X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

(соответственно, $\dim A \leq n$).

Определение 1.10. Обратный спектр S будем называть *d -правильным*, если его предел d -правильен относительно него, т.е. обратный спектр S называется *d -правильным*, если для любого конечного функционально открытого покрытия Ω предела спектра S существует вписанное в Ω и σ -локально конечное покрытие ω этого предела такое, что

для любого $O \in \omega$ можно найти индекс $\lambda(O) \in \Lambda$ и функционально открытое в $X_{\lambda(O)}$ множество $U(O)$, в прообразе $p_{\lambda(O)}^{-1}U(O)$ которого множество O открыто-замкнуто. (d)_{isl}

Замечание 1.11. Отметим, что d -правильные обратные спектры введены в [77] и названы там кусочно прямоугольными.

Из теоремы 1.9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.12 (см. [77]). *Для предела d -правильного обратного спектра S выполнено соотношение*

$$\dim X \leq \sup\{\dim X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}.$$

1.3. Нульмерность и d -правильность отображений в обратные спектры. Следствие 1.7 и теоремы 1.9, 1.12 могут быть дополнены следующим образом.

Лемма 1.13. *Если $\dim A \leq 0$, то любое отображение пространства A в любой обратный спектр d -правильно.*

Доказательство. Пусть дано отображение $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ пространства A в обратный спектр S и пусть Ω — конечное функционально открытое покрытие пространства A . Впишем в Ω конечное открытое дизъюнктное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Фиксируем $\lambda \in \Lambda$ и положим $\lambda(\alpha) = \lambda$, $U_\alpha = X_\lambda$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$. $\square$

Следствие 1.14. *Для пространства A следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) $\dim A \leq 0$;
- (2) *любое отображение пространства A в любой обратный спектр S является d -правильным;*
- (3) *существует d -правильное отображение пространства A в обратный спектр S с $\dim X_\lambda \leq 0$, $\lambda \in \Lambda$.*

Доказательство. Действительно, импликации $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)$ вытекают из следствия 1.7 и леммы 1.13 соответственно. Импликация $(2) \Rightarrow (3)$ вытекает из существования отображения пространства A в обратный спектр, состоящий из одного одноточечного пространства. $\square$

Следствие 1.15. *Пусть обратный спектр S таков, что $\dim X_\lambda \leq 0$, $\lambda \in \Lambda$. Подмножество A предела X этого спектра имеет размерность $\dim A \leq 0$ тогда и только тогда, когда оно является d -правильным относительно спектра S .*

Следствие 1.16 (см. [77]). *Пусть обратный спектр $S = \{X_\lambda, p_{\mu\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$ таков, что $\dim X_\lambda \leq 0$, $\lambda \in \Lambda$. Предел X этого спектра имеет размерность $\dim X \leq 0$ тогда и только тогда, когда спектр S является d -правильным.*

1.4. d -правильность и обратные последовательности. Пусть в этом пункте S — обратная последовательность $\{X_i, p_{ji}; i \in \mathbb{N}\}$ с пределом X и предельными проекциями p_i . Разумеется, все сказанное выше о d -правильности и обратных спектрах распространяется и на обратные последовательности. В частности (см. теорему 1.12), для предела X d -правильной обратной последовательности S выполнено неравенство

$$\dim X \leq \sup\{\dim X_i : i \in \mathbb{N}\}. \quad (s)$$

Однако в случае обратных последовательностей можно получить некоторые специфические достаточные условия d -правильности.

Теорема 1.17. *Пусть отображение $\varphi = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ пространства A в обратную последовательность S обладает следующим свойством:*

для любого функционально открытого в A множества O найдутся такие функционально открытые в X_i множества U_i и такие открыто-замкнутые в $\varphi_i^{-1}U_i$ множества O_i , $i \in \mathbb{N}$, что $O = \bigcup\{O_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Тогда отображение φ пространства A в S является d -правильным и

$$\dim A \leq \sup\{\dim X_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Доказательство. Действительно, первое утверждение предложения очевидно, а второе вытекает из следствия 1.7. $\square$

Следствие 1.18. Пусть подмножество A предела X обратной последовательности S обладает следующим свойством:

для любого функционально открытого в A множества O найдутся такие функционально открытые в X_i множества U_i и такие открыто-замкнутые в $A \cap p_i^{-1}U_i$ множества O_i , что $O = \bigcup \{O_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Тогда множество A является d -правильным относительно S и

$$\dim A \leq \sup \{\dim X_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Следствие 1.19. Если

для любого функционально открытого в пределе X обратной последовательности S множества O найдутся такие функционально открытые в X_i множества U_i и такие открыто-замкнутые в $p_i^{-1}U_i$ множества O_i , что $O = \bigcup \{O_i : i \in \mathbb{N}\}$, (cdr)

то обратная последовательность S является d -правильной и

$$\dim X \leq \sup \{\dim X_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

В [32, предложение 3] вместо условия (cdr) используется условие (обозначим его через (cdp)), формулируемое так же, как и условие (cdr), но требуется, чтобы $O = \bigcup \{p^{-1}U_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Вопрос 1.20. Является ли условие (cdp) (не формально) более общим, чем условие (cdr)?

Очевидным образом из следствия 1.19 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.21. Если все элементы обратной последовательности S совершенно нормальны, то эта последовательность d -правильна.

Следствие 1.22 (см. [29]). В условиях предыдущего следствия для предела X последовательности S выполнено неравенство (s).

Следствие 1.23 (см. [65]). Для предела X обратной последовательности S метризуемых пространств выполнено неравенство (s).

В [14, 69] рассмотрены продавливаемые (прокалываемые) обратные последовательности S нормальных пространств и для их пределов X установлено неравенство (s). Этот результат покрывает случай следствия 1.22, а также следующие случаи выполнения неравенства (s):

- (1) предел X счетно компактен и все проекции p_{ji} сюръективны [29];
- (2) предел X счетно паракомпактен и все проекции p_{ji} открыты [68];
- (3) предел X счетно паракомпактен и все проекции замкнуты [12, 14].

Как показано в [32], случай продавливаемых обратных последовательностей нормальных пространств покрывается случаем предложения 3 из [32], т.е. условием (cdp) и, следовательно, условием (cdr). Поэтому продавливаемая обратная последовательность нормальных пространств является d -правильной.

Отметим, что в [102] показано, что продавливаемая обратная последовательность нормальных хаусдорфовых пространств даже sd -правильна (см. определение 1.51).

Отметим также, что рассмотренный в [23] случай выполнения неравенства (s) покрывается случаем прокалываемых обратных последовательностей нормальных пространств.

Отметим еще, что примеры обратных последовательностей, для которых неравенство (s) не выполнено, можно найти в [26] (Problem 6.3.25), [30, 31, 91, 94].

М. G. Charalambous сформулировал следующий вопрос: верно ли неравенство (s) в случае обратной последовательности нормальных T_2 -пространств с открытыми проекциями?

1.5. d -правильные отображения. Обратимся к случаю, когда обратный спектр S состоит лишь из одного пространства (и его тождественного отображения как проекции).

Определение 1.24. Непрерывное отображение $\varphi : A \rightarrow X$ назовем (n, d) -правильным (соответственно, d -правильным), если в любое конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное (функционально открытое) покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее следующим свойством:

для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти в X множество D_α и функционально открытое множество U_α так, что $U_\alpha \subset D_\alpha$, $\dim D_\alpha \leq n$, O_α открыто-замкнуто в $\varphi^{-1}U_\alpha$ (d)_{mn}

или, соответственно, свойством

для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти в X функционально открытое множество U_α так, что O_α открыто-замкнуто в $\varphi^{-1}U_\alpha$. (d)_m

Замечание 1.25. d -правильные отображения впервые были введены в [77] (см. определение 3) под названием *сильно разбивающих*.

Из следствий 1.6 и 1.7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.26 (см. [77]). (а) Если отображение $\varphi : A \rightarrow X$ является (n, d) -правильным, то $\dim A \leq n$.

(б) Если отображение $\varphi : A \rightarrow X$ является d -правильным, то $\dim A \leq \dim X$.

Замечание 1.27. Из одноточечности X в теореме 1.26 следует неравенство $\dim A \leq 0$. Поэтому в случае нормального пространства A и T_1 -пространства X в теореме 1.26 $\dim \varphi^{-1}x \leq 0$ для любого $x \in X$. Следовательно, в случае (б) этой теоремы неравенство $\dim A \leq \dim X$ может быть переписано в виде $\dim A \leq \dim X + \dim \varphi$. Таким образом, случай (б) теоремы 1.26 может рассматриваться как вариант формулы Гуревича.

Теорему 1.26 дополняет следующее утверждение.

Следствие 1.28. Для непрерывного отображения $\varphi : A \rightarrow X$ с $\dim X \leq 0$ следующие условия эквивалентны:

- (1) φ является d -правильным;
- (2) $\dim A \leq 0$.

Доказательство вытекает из теоремы 1.26 и вытекающего из леммы 1.13 утверждения: любое непрерывное отображение пространства A с $\dim A \leq 0$ является d -правильным.

Задача 1.29. Для непрерывных отображений $f : A \rightarrow X$ найти обобщающие условие d -правильности достаточные условия или даже критерии выполнения неравенств

$$\dim A \leq \dim X; \quad \dim A \leq \dim X + n, \quad n = 1, 2, \dots$$

1.6. d -правильные и d -расположенные подмножества. Монотонность размерности $\dim$. Рассмотрим простейшие варианты определения 1.24 и теоремы 1.26, когда $A \subset X$ и φ есть тождественное вложение A в X .

Определение 1.30. Подмножество A пространства X назовем (n, d) -правильным, $n = 0, 1, \dots$ (соответственно, d -правильным), если в любое конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее следующим свойством:

для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти в X множество D_α и функционально открытое множество U_α так, что $U_\alpha \subset D_\alpha$, $\dim D_\alpha \leq n$ и O_α открыто-замкнуто в $A \cap U_\alpha$,

соответственно, свойством

для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти в X функционально открытое множество U_α так, что O_α открыто-замкнуто в $A \cap U_\alpha$. (d)_s

Интересны также следующие усиления свойств (n, d) -правильности и d -правильности множества в пространстве.

Определение 1.31. Подмножество A пространства X называется d -расположенным (соответственно, (n, d) -расположенным, $n = 0, 1, 2, \dots$), если в любое конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное (функционально открытое) покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее следующим свойством:

для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти в X функционально открытое множество $U(\alpha)$ так, что $O_\alpha = A \cap U(\alpha)$; (sd)_s

соответственно, свойством

для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти в X функционально открытое множество $U(\alpha)$ так, что $O_\alpha = A \cap U(\alpha)$ и $\dim U(\alpha) \leq n$. (sd)_{sn}

Замечание 1.32. Определения (n, d) -правильности, d -правильности, (n, d) -расположенности, d -расположенности множества в пространстве были даны в [16, 77] в несколько иной, но эквивалентной форме. В [16] неверно указано, что d -расположенность в смысле определения 1.31 фактически введена в [21]. Т. В. Проселкова показала [19], что d -расположенность A в X в смысле определения 1.31 эквивалентна d -расположенности в смысле В. В. Филиппова [23] в случае нормальных пространств, а за пределами нормальных пространств условие Филиппова слишком широко и не гарантирует неравенства $\dim A \leq \dim X$.

Из теоремы 1.26 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.33 (см. [16, 77]). (1) Если подмножество A пространства X является (n, d) -правильным (в частности, (n, d) -расположенным), то $\dim A \leq n$.
(2) Если подмножество A пространства X является d -правильным (в частности, d -расположенным), то $\dim A \leq \dim X$.

Как показывают результаты п. 1.7, условие d -правильности является пока наиболее общим условием монотонности размерности $\dim$ за пределами наследственно нормальных пространств.

1.7. Некоторые случаи d -правильности и (n, d) -правильности подмножеств пространств.

Предложение 1.34 (см. [77]). Если подмножество A пространства X имеет размерность $\dim A \leq 0$, то это подмножество d -правильно.

Доказательство. Действительно, если Ω есть конечное функционально открытое покрытие пространства A , то в него можно вписать конечное открытое и дизъюнктное покрытие ω этого пространства. Тогда любой элемент покрытия ω открыто-замкнут в пересечении $A \cap X = A$. □

Из предложения 1.34 и теоремы 1.33 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.35 (см. [77]). Если $\dim X = 0$ и $A \subset X$, то неравенство $\dim A \leq 0 = \dim X$ эквивалентно d -правильности подмножества A пространства X .

Таким образом, d -правильность дает критерий монотонности размерности $\dim$ в 0-мерных пространствах.

Задача 1.36. Для подпространства A пространства X найти достаточные условия, обобщающие условие d -правильности, или даже критерии выполнения неравенств

$$\dim A \leq \dim X; \quad \dim A \leq \dim X + n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Пространство X называется *вполне регулярным в своей точке x* , если множество $\{x\}$ функционально отделимо от дополнения к любой окрестности точки x в X .

Предложение 1.37 (см. [77]). Если пространство X вполне регулярно во всех точках своего вполне паракомпактного (в частности, сильно паракомпактного) подмножества A , то A является d -правильным подмножеством пространства X и $\dim A \leq \dim X$.

Вопрос 1.38 (см. [16, 77]). Является ли сильно (вполне) паракомпактное подмножество тихоновского (нормального, паракомпактного T_2 -) пространства d -расположенным?

Отметим, что в случае нормального T_2 -пространства X и его вполне паракомпактного подпространства A неравенство $\dim A \leq \dim X$ установлено в [3]. Отсюда сразу же следует, что пространство X можно считать тихоновским, так как $\dim A \leq \dim \beta X = \dim X$.

Напомним, что подмножество A пространства X является z -вложенным, если для любого функционально открытого в A множества O существует функционально открытое в X множество U , такое, что $O = A \cap U$. Очевидно, любое C^* -вложенное подмножество пространства является z -вложенным. Очевидно также, что любое функционально открытое подмножество пространства является z -вложенным. Наконец, ясно, что z -вложенное подмножество пространства является его d -расположенным подмножеством. Поэтому верно следующее утверждение.

Следствие 1.39 (см. [63, 69]). *Если A является z -вложенным (в частности, C^* -вложенным или функционально открытым) подмножеством пространства X , то $\dim A \leq \dim X$.*

Замечание 1.40. В [23] В. В. Филиппов определил весьма общее свойство z -расположенности подмножества A пространства X в этом пространстве, влекущее неравенство $\dim A \leq \dim X$. В [19] Т. В. Проселкова показала, что z -расположенность в смысле Филиппова является существенно менее общим условием, чем условие d -правильности подмножества пространства.

1.8. Еще один случай (n, d) - и d -правильности подмножества пространства. σ -локально конечная теорема суммы для функционально открытых множеств. d -пространства. Из теоремы 1.33 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.41 (см. [77, доказательство следствия 1]). *Если*

подмножество O пространства X есть объединение системы ω функционально открытых в X множеств O_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, и система ω является σ -локально конечной в O , (D)

то подмножество O пространства X является d -расположенным (и $\dim O \leq \dim X$, см. [69]). Если еще $\dim O_\alpha \leq n$, $\alpha \in \mathcal{A}$, то подмножество O пространства X является (n, d) -расположенным и (см. [63, 69], а также [72] — для нормальных пространств) $\dim O \leq n$.

Отметим, что условие (D) изучалось в [72].

Для доказательства следствия 1.41 заметим следующее: если O — функционально открытое подмножество пространства X , $O \subset A \subset X$, $U \subset A$ и U функционально открыто в A , то $O \cap U$ функционально открыто в X .

Действительно, $O \cap V$ функционально открыто в A и (поэтому) функционально открыто в O , а значит и в X .

Доказательство следствия 1.41. Если Ω — конечное функционально открытое покрытие пространства O , то система $\Omega \wedge \omega$, по только что сделанному замечанию, функционально открыта в X , вписана в ω , покрывает O и, очевидно, σ -локально конечна в O . Кроме того,

$$\dim U \cap O_\alpha \leq \dim O_\alpha (\leq \dim X)$$

для $U \in \Omega$, $O_\alpha \in \omega$. □

Следствие 1.42 (см. [63, 69]). *Если пространство X есть объединение σ -локально конечной системы ω функционально открытых в X множеств O_α размерности $\dim O_\alpha \leq n$, $\alpha \in \mathcal{A}$, то $\dim X \leq n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.*

В [36] Даукер назвал нормальное пространство X *тотально нормальным*, если любое открытое в X множество O является объединением локально конечной в O системы открытых и типа F_σ в X множеств. Тотально нормальные пространства наследственно нормальны. Частными случаями тотальной нормальности являются совершенная нормальность и наследственная паракомпактность. Для любого подмножества A тотально нормального пространства X Даукер установил неравенство $\dim A \leq \dim X$. Следуя Даукеру, дадим следующее определение.

Определение 1.43. Пространство X назовем d -пространством, если для любого открытого в X множества O существует такая σ -локально конечная в O и функционально открытая в X система ω , что $\bigcup \omega = O$.

Очевидно, любое подпространство d -пространства X является d -пространством. Очевидно и то, что любое тотально нормальное пространство является d -пространством. Кроме того, если $\dim O \leq \dim X$ для любого открытого подмножества O наследственно нормального пространства X , то $\dim A \leq \dim X$ для любого его подмножества A . Поэтому следующий вытекающий из следствия 1.41 результат обобщает цитированный выше результат Даукера о монотонности размерности $\dim$ по любым подмножествам в тотально нормальных пространствах.

Следствие 1.44. Любое открытое подмножество O любого d -пространства X является d -расположенным и для него $\dim O \leq \dim X$.

Понятие d -пространства может быть обобщено следующим образом.

Определение 1.45. Пространство X назовем (сильно) d -правильным, если для любого открытого в X множества O существует такая σ -локально конечная в O система $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, что $O = \bigcup \omega$ и для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ в X можно найти функционально открытое множество U_α так, что O_α открыто-замкнуто в $O \cap U_\alpha$ (соответственно, $O_\alpha = O \cap U_\alpha$).

Очевидно, d -пространства являются сильно d -правильными и любое подпространство (сильно) d -правильного пространства X является (сильно) d -правильным.

Верен ли аналог следствия 1.44 для (сильно) d -правильных пространств?

Было бы интересно построить (или указать уже имеющиеся) примеры: не (тотально) нормального d -пространства; (сильно) d -правильного не d -пространства.

1.9. Равенство $\text{loc dim } G = \dim G$ для топологических групп G . Применим следствие 1.42 к выяснению взаимоотношений локальной и интегральной размерностей в равномерных пространствах и в топологических группах.

Определение 1.46. Для псевдоравномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ полагаем $\mathcal{U}\text{-loc dim } X \leq n$, если существует такое равномерное покрытие ω пространства $(X, \mathcal{U})$, что $\dim O \leq n$ для любого $O \in \omega$, $n = -1, 0, 1, \dots$

Для топологического пространства X считаем $\text{loc dim } X \leq n$, если у любой точки $x \in X$ существует функционально открытая окрестность O_x с $\dim O_x \leq n$, $n = -1, 0, 1, \dots$

В силу монотонности размерности $\dim$ по функционально открытым множествам, всегда

$$\text{loc dim } X \leq \dim X.$$

Предложение 1.47. Для вполне регулярного пространства X и псевдоравномерности $\mathcal{U}$ (в частности, для тихоновского пространства X и равномерности $\mathcal{U}$) на множестве X , порождающей топологию пространства X , всегда

$$\text{loc dim } X \leq \mathcal{U}\text{-loc dim } X \leq \dim X.$$

Доказательство. Действительно, в любое равномерное покрытие пространства $(X, \mathcal{U})$ можно вписать функционально открытое локально конечное покрытие (см., например, [26, следствие 8.1.11]). $\square$

Теорема 1.48 (см. [77]). Для любой топологической группы G и ее левой (правой) равномерности $\mathcal{U}$ имеем

$$\text{loc dim } G = \dim G (= \mathcal{U}\text{-loc dim } G).$$

Доказательство. Пусть O есть такая функционально открытая окрестность единицы группы G , что $\dim O = \text{loc dim } G = n$. Тогда покрытие $\Omega = \{gO : g \in G\}$ является равномерным и $\dim gO = \dim O = n$, $g \in G$. Поэтому в него можно вписать локально конечное функционально открытое покрытие ω . Для любого $V \in \omega$ существует такой элемент $g \in G$, что $V \subset gO$. Поэтому $\dim V \leq \dim gO = n$. Согласно следствию 1.42 $\dim G \leq n$. Остальное следует из предложения 1.47. $\square$

1.10. Критерии и свойства d -правильности и sd -правильности. Взаимоотношения d - и (n, d) -правильности с размерностью $\dim$ выявлены в предыдущих пп. 1.1–1.9. Перейдем к критериям и свойствам d -правильности.

Предложение 1.49. Для отображения $\varphi = \{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ пространства A в обратный спектр $S = \{X_\lambda, p_{\mu\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$ следующие свойства эквивалентны:

- (1) φ является d -правильным;
- (2) в любое бинарное ($\equiv$ двухэлементное) функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ со свойством $(d)_{is}$ (см. определение 1.1);
- (3) для любого функционально открытого в A множества O существует σ -локально конечная в A система $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ такая, что $\bigcup \omega = O$ и для ω выполнено условие $(d)_{is}$;
- (4) в любое σ -локально конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ со свойством $(d)_{is}$.

Доказательство. Импликации (4) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) очевидны.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть множество O функционально открыто в A и непрерывная функция $f : A \rightarrow [0, 1]$ такова, что $O = f^{-1}(0, 1]$. Тогда $\Omega_n = \{O, A \setminus cl O_n\}$, где $O_n = f^{-1}[0, 1/n]$, есть функционально открытое бинарное покрытие пространства A , $n \in \mathbb{N}$. Поэтому существует σ -локально конечное (функционально открытое) покрытие $\omega_n = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_n\}$ пространства A со свойством $(d)_{is}$.

Пусть $\mathcal{A}'_n = \{\alpha \in \mathcal{A}_n : O_\alpha \subset O\}$ и $\mathcal{A} = \bigcup \{\mathcal{A}'_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что система $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ является искомой.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4). Возьмем σ -локально конечное функционально открытое покрытие $\Omega = \{U_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ пространства A . Для каждого $\beta \in \mathcal{B}$ возьмем σ -локально конечную и функционально открытую в A систему $\omega_\beta = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_\beta\}$ такую, что $U_\beta = \bigcup \omega_\beta$ и для ω_β выполнено условие $(d)_{is}$. Ясно, что покрытие $\omega = \bigcup \{\omega_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ является искомым. $\square$

Аналогично предложению 1.49 доказывается следующее утверждение.

Предложение 1.50. Для отображения $\varphi = \{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ пространства A в обратный спектр S следующие свойства эквивалентны:

- (1) в любое конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное (функционально открытое) покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее следующим свойством:
для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти индекс $\lambda(\alpha) \in \Lambda$ и функционально открытое в $X_{\lambda(\alpha)}$ множество $U(\alpha)$ так, что $O_\alpha = \varphi_{\lambda(\alpha)}^{-1} U(\alpha)$; (sd)_{is}
- (2) в любое бинарное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное (функционально открытое) покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства со свойством $(sd)_{is}$;
- (3) для любого функционально открытого в A множества O существует σ -локально конечная в A система $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ такая, что $\bigcup \omega = O$ и для ω выполнено условие $(sd)_{is}$;
- (4) в любое σ -локально конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ со свойством $(sd)_{is}$.

Определение 1.51. Отображение $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ пространства A в обратный спектр S будем называть sd -правильным ($\equiv$ сильно d -правильным), если для него выполнено условие (1) предложения 1.50.

Очевидно, sd -правильное отображение пространства в обратный спектр является d -правильным. Из предложения 1.49 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.52. Для подмножества A предела обратного спектра S следующие свойства эквивалентны:

- (1) A является d -правильным относительно S ;

- (2) в любое бинарное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ со свойством $(d)_{iss}$ (см. определение 1.8 и далее);
- (3) для любого функционально открытого в A множества O существует σ -локально конечная в A система $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ такая, что $\bigcup \omega = O$ и для ω выполнено условие $(d)_{iss}$;
- (4) в любое σ -локально конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие ω со свойством $(d)_{iss}$.

Определение 1.53. Подмножество A предела обратного спектра S с предельными проекциями p_λ назовем *sd-правильным* относительно S , если для любого конечного функционально открытого покрытия Ω пространства A существует вписанное в Ω и σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее следующим свойством:

для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти $\lambda(\alpha) \in \Lambda$ и функционально открытое в $X_{\lambda(\alpha)}$ множество $U(\alpha)$ так, что $O_\alpha = A \cap p_{\lambda(\alpha)}^{-1}U(\alpha)$. $(sd)_{iss}$

Из предложения 1.50 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.54. Для подмножества A предела обратного спектра S свойство быть *sd-правильным* относительно S эквивалентно каждому из трех свойств, получающихся из свойств (2)–(4) следствия 1.52 заменой в них условия $(d)_{iss}$ на условие $(sd)_{iss}$.

Из следствия 1.52 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.55. Для обратного спектра S следующие свойства эквивалентны:

- (1) S является *d-правильным*;
- (2) в любое бинарное функционально открытое покрытие Ω предела X спектра S можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ со свойством $(d)_{isl}$ (см. определение 1.10);
- (3) для любого функционально открытого в X множества O существует σ -локально конечная в X система $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ такая, что $\bigcup \omega = O$ и для ω выполнено условие $(d)_{isl}$;
- (4) в любое σ -локально конечное функционально открытое покрытие Ω пространства X можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ со свойством $(d)_{isl}$.

Определение 1.56. Обратный спектр $S = \{X_\lambda, p_{\mu\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$ с предельными проекциями p_λ и пределом X будем называть *sd-правильным*, если для любого конечного функционально открытого покрытия Ω пространства X существует вписанное в Ω и σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее следующим свойством:

для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти $\lambda(\alpha) \in \Lambda$ и функционально открытое в $X_{\lambda(\alpha)}$ множество $U(\alpha)$ так, что $O_\alpha = p_{\lambda(\alpha)}^{-1}U(\alpha)$. $(sd)_{isl}$

Очевидно, *sd-правильный* обратный спектр является *d-правильным*.

Замечание 1.57. По-видимому, впервые идея *sd-правильности* обратного спектра выделена в [12, лемма 1]. (Отметим, что в английском переводе этой леммы пропущено, что покрытие ν вписано в покрытие ω , обозначенное там буквой ϖ .) Явно определение цилиндричности ($\equiv$ *sd-правильности*) обратных спектров сформулировано в [77, 102] (где она названа прямоугольностью). В [77, 102] для *sd-правильного* спектра S и его предела X установлено (вытекающее из теоремы 1.12) неравенство

$$\dim X \leq \sup\{\dim X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}.$$

Из следствия 1.54 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.58. *sd-правильность* обратного спектра S эквивалентна каждому из трех свойств, получающихся из условий (2)–(4) следствия 1.55 заменой в них условия $(d)_{isl}$ на условие $(sd)_{isl}$.

Докажем следующее утверждение из [12] и, попутно, докажем *sd-правильность* обратного спектра из паракомпактов с совершенными проекциями.

Теорема 1.59 (см. [12, теорема 2]). Пусть дан обратный спектр $S = \{X_\alpha, \varpi_\alpha^\beta; \alpha \in \mathcal{A}\}$ с совершенными проекциями ϖ_α^β . Если его элементы X_α хаусдорфовы, нормальны, слабо паракомпактны и имеют размерности $\dim X_\alpha \leq n$, $\alpha \in \mathcal{A}$, а предел X спектра S нормален, то $\dim X \leq n$, $n = 0, 1, \dots$.

Для доказательства этой теоремы потребуются две леммы. Первая из них есть слегка подправленный вариант леммы 1 из [12] (по моему недосмотру опубликованный вариант очевидным образом неверен даже для спектра из одного пространства с тождественным отображением в качестве проекции, однако суть данного ниже доказательства леммы фактически осталась предполагавшейся в 1973 г.).

Напомним, что из хаусдорфовости элементов X_α и совершенности проекций спектра $S = \{X_\alpha, \varpi_\alpha^\beta; \alpha \in \mathcal{A}\}$ следует совершенность его предельных проекций ϖ_α .

Лемма 1.60 (исправленный вариант леммы 1 из [12]). Пусть дан обратный спектр

$$S = \{X_\alpha, \varpi_\alpha^\beta; \alpha \in \mathcal{A}\}$$

из слабо паракомпактных хаусдорфовых пространств X_α с совершенными проекциями ϖ_α^β . Тогда для любого открытого покрытия ω предела X спектра S существуют такое множество $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ и такие точечно конечные открытые системы μ_α в X_α , $\alpha \in \mathcal{A}'$, что система $\nu = \bigcup \{\varpi_\alpha^{-1}\mu_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}'\}$ является точечно конечным и вписанным в ω покрытием предела X .

Если предел X нормален, то, дополнительно, для любых $\alpha \in \mathcal{A}'$ и $U \in \mu_\alpha$ существуют замкнутые в X_α множества $\Phi(U) \subset U$ такие, что

$$\lambda = \bigcup \left\{ \{F(U) = \varpi_\alpha^{-1}\Phi(U) : U \in \mu_\alpha\} : \alpha \in \mathcal{A}' \right\}$$

есть (точечно конечное) покрытие предела X .

Если каждое пространство X_α паракомпактно, то требование нормальности X излишне, а покрытие ν и все системы μ_α в X_α можно считать локально конечными и существует указанное в предыдущем абзаце замкнутое (и уже локально конечное) покрытие λ .

Доказательство. Возьмем открытое покрытие ω предела X . Не теряя общности, можно считать, что для любого $O \in \omega$ существуют $\alpha(O)$ и открытое в $X_{\alpha(O)}$ множество $U(O)$ такие, что $O = \varpi_{\alpha(O)}^{-1}U(O)$. Произвольно возьмём $\gamma \in \mathcal{A}$. В силу совершенности проекции ϖ_γ и слабой паракомпактности (соответственно, паракомпактности) X_γ , существуют открытое точечно (локально) конечное покрытие $\{V_i : i \in I\}$ пространства X_γ и конечная подсистема $\omega_i = \{O(j(i)) : j(i) = 1(i), \dots, k(i)\}$ покрытия ω такие, что $\varpi_\gamma^{-1}V_i \subset \bigcup \omega_i$, $i \in I$. Очевидно,

$$\nu = \bigcup \left\{ \nu_i = \omega_i \wedge \varpi_\gamma^{-1}V_i : i \in I \right\}$$

есть вписанное в ω открытое и точечно (соответственно, локально) конечное покрытие предела X . Для каждого i найдем $\alpha(i) \in \mathcal{A}$, следующее за γ и всеми $\alpha(O(j(i)))$, $j(i) = 1(i), \dots, k(i)$. Для

$$V = (\varpi_\gamma^{-1}V_i) \cap O(j(i)) \in \nu_i \subset \nu$$

положим $\alpha(V) = \alpha(i)$ и

$$U(V) = (\varpi_{\alpha(V)\gamma}^{-1}V_i) \cap \varpi_{\alpha(V)\alpha(O(j(i)))}^{-1}U(O(j(i))).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varpi_{\alpha(V)}^{-1}U(V) &= \varpi_{\alpha(V)}^{-1}((\varpi_{\alpha(V)\gamma}^{-1}V_i) \cap \varpi_{\alpha(V)\alpha(O(j(i)))}^{-1}U(O(j(i)))) = \\ &= \varpi_\gamma^{-1}V_i \cap \varpi_{\alpha(O(j(i)))}^{-1}U(O(j(i))) = (\varpi_\gamma^{-1}V_i) \cap O(j(i)) = V. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \left\{ \alpha \in \mathcal{A} : \alpha = \alpha(V) \text{ для некоторого } V \in \nu \right\}, \\ \mu_\alpha &= \{U(V) : \alpha(V) = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathcal{A}'. \end{aligned}$$

Так как каждое μ_α есть дизъюнктное объединение своих конечных подсистем μ_α^i , все элементы которых содержатся в прообразе $\varpi_{\alpha\lambda}^{-1}V_i$, и покрытие $\{V_i : i \in I\}$ точно (локально) конечно, то и система μ_α точно (соответственно, локально) конечна.

Если предел X нормален, то, в силу точечной конечности ν , существует такое замкнутое покрытие $\lambda' = \{F'(V) : V \in \nu\}$ предела X , что $F'(V) \subset V$. Тогда, для $\Phi(U(V)) = \varpi_{\alpha(V)}F'(V)$, множества $F(U(V)) = \varpi_{\alpha(V)}^{-1}\Phi(U(V))$ являются обещанными в формулировке леммы множествами $F(U)$.

Осталось отметить, что (как давно известно, и это только что еще раз доказано) предел обратного спектра из паракомпактов с совершенными проекциями является паракомпактом и поэтому нормален. $\square$

Отметим (пользуясь обозначениями предыдущего доказательства), что для каждого $V \in \nu$ можно взять функционально открытое в $X_{\alpha(V)}$ множество $W(V)$ так, что $\Phi(U(V)) \subset W(V) \subset U(V)$. Тогда $\xi = \{\pi_{\alpha(V)}^{-1}W(V) : V \in \nu\}$ есть вписанное в ν функционально открытое и точно (локально) конечное покрытие, вписанное в ω . Таким образом (см. [102]), *обратный спектр из паракомпактов с совершенными проекциями является sd-правильным*.

Лемма 1.61 (см. [12, лемма 2]). *Пусть дан обратный спектр $S = \{X_\alpha, \varpi_\alpha^\beta; \alpha \in \mathcal{A}\}$ из хаусдорфовых регулярных пространств с совершенными проекциями ϖ_α^β . Пусть еще выполнено следующее условие:*

- (а) *существует такое множество $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ и такие открытые в X_α множества O_α , $\alpha \in \mathcal{A}'$, что (для предельных проекций ϖ_α спектра S) система $\nu = \{V_\alpha = \varpi_\alpha^{-1}O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}'\}$ образует точно конечное покрытие предела X спектра S .*

Тогда существуют хаусдорфово пространство Y , его точно конечное открытое покрытие $\eta = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}'\}$ и совершенное отображение «на» $f : X \rightarrow Y$, такие, что:

- $f^{-1}U_\alpha = V_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}'$;
- *для каждого конечного набора $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ различных индексов из $\mathcal{A}'$ можно так найти индекс $\alpha = \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, что*

$$\alpha(\alpha_1) = \alpha_1, \quad \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_s) > \alpha(\alpha'_1, \dots, \alpha'_r),$$

если $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_r\}$ содержится в $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$;

- *для каждого $\alpha = \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ определено такое совершенное отображение*

$$g_{\alpha_1 \dots \alpha_s} : (U_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \bigcap \{U_{\alpha_i : i=1, \dots, s}\} \rightarrow (O_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \bigcap \{(\varpi_{\alpha_i}^\alpha)^{-1}O_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s\}),$$

что на множестве $V_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \varpi_\alpha^{-1}O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ имеет место соотношение

$$\varpi_\alpha = g_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \circ f$$

и на множестве

$$B_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = U_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \setminus \bigcup \{U_{\alpha'_1 \dots \alpha'_k} : k > s\}$$

отображение $g_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ является гомеоморфизмом (на его образ).

Доказательству этой леммы предположим следующее замечание.

Замечание 1.62. Пусть для подмножества X тихоновского произведения $\Pi = \prod \{X_i : i \in I\}$ дано непрерывное отображение «на» $g : X \rightarrow Y$ такое, что существуют непрерывные отображения $h_i : Y \rightarrow X_i$, удовлетворяющие условиям $h_i \circ g = \text{pr}_i|_X$, где pr_i — проекция произведения Π на сомножитель X_i , $i \in I$. Тогда g есть гомеоморфизм.

Доказательство. Действительно, для произвольной точки $x \in X$ и диагонального произведения h отображений h_i , $i \in I$, имеем

$$h(gx) = \{\text{pr}_i h(gx)\}_{i \in I} = \{h_i(gx)\}_{i \in I} = \{\text{pr}_i x\}_{i \in I} = x.$$

Следовательно, g и коограничение h на X являются взаимно обратными и непрерывными отображениями. $\square$

Доказательство леммы 1.61. Если $\mathcal{A}$ имеет максимальный элемент, то утверждение очевидно. Пусть в $\mathcal{A}$ нет максимального элемента.

Существование индексов $\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ легко следует из направленности $\mathcal{A}$ и из того, что в $\mathcal{A}$ нет максимального элемента.

Для любого $\alpha = \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ пусть Y_α есть множество, полученное добавлением к $O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ точки 0_α . Пусть отображение $h_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ переводит $X_\alpha \setminus O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ в точку 0_α и является тождественным на $O_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}$. Снабдим Y_α топологией, при которой отображение h_α становится факторным. Ясно, что множество $O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ открыто в пространстве Y_α и что h_α на $O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ является гомеоморфизмом. Регулярность X_α обеспечивает хаусдорфовость Y_α . Далее $O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$, рассматриваемое как подмножество Y_α , будет обозначаться через W_α . Пусть Y' — тихоновское произведение пространств Y_α , а f' — диагональное произведение отображений $h_\alpha \circ \varpi_\alpha$ для всех $\alpha = \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathcal{A}'$. Положим $Y = f'X$, $f = f' : X \rightarrow Y$ и

$$\eta = \{U_\alpha = p_\alpha^{-1}W_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}'\},$$

где p_α — ограничение на Y проекции произведения Y' на сомножитель Y_α . Очевидно,

$$f^{-1}U_\alpha = f^{-1}p_\alpha^{-1}W_\alpha = (\varpi_\alpha)^{-1}(h_\alpha)^{-1}W_\alpha = (\varpi_\alpha)^{-1}O_\alpha = V_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}'.$$

Следовательно, $f^{-1}\eta = \nu$ и η (так как f — отображение «на») есть точно конечное и открытое покрытие пространства Y .

Фиксируем $\alpha = \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$.

Из совершенности предельной проекции ϖ_α следует совершенность отображения

$$(\pi_\alpha = \varpi_\alpha) : V_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \rightarrow O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}.$$

Поскольку отображение $h_\alpha : O_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \rightarrow W_\alpha$ является гомеоморфизмом, то отображение

$$(f_\alpha = p_\alpha \circ f) : V_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \rightarrow W_\alpha = h_\alpha \circ \varpi_\alpha : V_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \rightarrow W_\alpha$$

также совершенно. Так как f есть отображение «на» и

$$\begin{aligned} V_{\alpha_1 \dots \alpha_s} &= \varpi_\alpha^{-1}O_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \varpi_\alpha^{-1} \left(\bigcap \{ (\varpi_{\alpha_i})^{-1}O_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s \} \right) = \\ &= \bigcap \{ \varpi_{\alpha_i}^{-1}O_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s \} = \bigcap \{ \varpi_{\alpha_i}^{-1}h_{\alpha_i}^{-1}W_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s \} = \\ &= \bigcap \{ (h_{\alpha_i} \circ \varpi_{\alpha_i})^{-1}W_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s \} = \bigcap \{ f^{-1}p_{\alpha_i}^{-1}W_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s \} = \\ &= f^{-1} \bigcap \{ p_{\alpha_i}^{-1}W_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s \} = f^{-1} \bigcap \{ U_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s \} = f^{-1}U_{\alpha_1 \dots \alpha_s}, \end{aligned}$$

то отображение $p_\alpha : U_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \rightarrow W_\alpha$ также совершенно. Тогда и отображение $g_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$, являющееся композицией отображения $p_\alpha : U_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \rightarrow W_\alpha$ и гомеоморфизма $h_\alpha^{-1} : W_\alpha \rightarrow O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$, совершенно. Поскольку на множестве $V_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ (равном $f^{-1}U_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$) мы имеем $p_\alpha \circ f = h_\alpha \circ \varpi_\alpha$, то на нём $g_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \circ f = \varpi_\alpha$. Отсюда, из совершенности отображения $\varpi_\alpha : V_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \rightarrow O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ и хаусдорфовости $U_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ вытекает (см. [26, 3.7.10]) совершенность отображения $f : V_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \rightarrow U_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$.

Множество $C_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = f^{-1}B_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ состоит из всех точек пространства X , принадлежащих элементам $V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_s}$ покрытия ν и только им. Пусть $\alpha' = \alpha(\alpha'_1, \dots, \alpha'_k)$. Если набор $\alpha'_1, \dots, \alpha'_k$:

- (1) содержит элемент, не входящий в набор $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, то $p_{\alpha'} \circ f C_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \{0_{\alpha'}\}$;
- (2) содержится в наборе $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ (или совпадает с ним), то $\alpha = \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ следует за α'

и поэтому на $C_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ мы имеем

$$\begin{aligned} p_{\alpha'} \circ f &= h_{\alpha'} \circ \varpi_{\alpha'} = h_{\alpha'} \circ \varpi_{\alpha'}^\alpha \circ \varpi_\alpha = h_{\alpha'} \circ \varpi_{\alpha'}^\alpha \circ h_\alpha^{-1} \circ h_\alpha \circ \varpi_\alpha = \\ &= h_{\alpha'} \circ \varpi_{\alpha'}^\alpha h_\alpha^{-1} p_\alpha \circ f = h_{\alpha'} \circ \varpi_{\alpha'}^\alpha \circ g_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \circ f, \end{aligned}$$

откуда

$$p_{\alpha'} = h_{\alpha'} \circ \varpi_{\alpha'}^\alpha \circ g_{\alpha_1 \dots \alpha_s},$$

на $B_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$. Следовательно (см. замечание 1.62), $g_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ на $B_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ является гомеоморфизмом.

Докажем совершенность f .

Возьмём точку $y \in Y$ и замкнутое множество F в X такие, что $y \notin fF$. Пусть y содержится в элементе U_{α_1} покрытия η . В силу совершенности отображения $f : V_{\alpha_1} \rightarrow U_{\alpha_1}$ и соотношения $V_{\alpha_1} = f^{-1}U_{\alpha_1}$ прообраз $f^{-1}y$ бикомпактен, а $U_{\alpha_1} \setminus f(F \cap V_{\alpha_1})$ есть окрестность точки y в Y , не пересекающая fF . Таким образом, отображение f послойно бикомпактно и замкнуто. $\square$

Замечание 1.63. Для подмножества A пространства X считается $\text{rd } A \leq n$, $n = 0, 1, \dots$, если $\dim F \leq n$ для любого замкнутого в X множества $F \subset A$. Хорошо известно следующее полученное Даукером утверждение:

если для замкнутого подмножества F нормального пространства X выполнены неравенства $\dim F \leq n$ и $\text{rd}(X \setminus F) \leq n$, то $\dim X \leq n$. (D)

Пользуясь этим утверждением и теоремой суммы, легко получить следующий результат:

Пусть нормальное пространство X есть дизъюнктное объединение множеств A_i , $i = 1, 2, \dots$, таких, что все объединения $A_1 \cup \dots \cup A_i$, $i = 1, 2, \dots$, замкнуты в X и (D_∞)

$$\dim A_1 \leq n, \quad \text{rd } A_i \leq n, \quad i = 2, 3, \dots$$

Тогда $\dim X \leq n$.

Из (D_∞) вытекает следующее утверждение:

Пусть нормальное пространство X есть дизъюнктное объединение множеств A_i , $i = 1, 2, \dots$, таких, что все объединения $A_1 \cup \dots \cup A_i$, $i = 1, 2, \dots$, замкнуты в X , и пусть A_i есть объединение дискретной в $B_i = \bigcup \{A_j : j = i, i+1, \dots\}$ системы λ_i , $i = 1, 2, \dots$. Если $\text{rd } D \leq n$ для любых $D \in \lambda_i$ и $i = 1, 2, \dots$, то $\dim X \leq n$. (dD_∞)

Доказательство. Действительно, если множество F замкнуто в X и лежит в A_i то оно есть объединение дискретной в X системы $\{F \cap D : D \in \lambda\}$ замкнутых в X множеств размерности $\dim(F \cap D) \leq \text{rd } D \leq n$. Поэтому $\dim F \leq n$. Остальное следует из (D_∞). $\square$

Доказательство теоремы 1.59. Возьмем конечное открытое покрытие предела X спектра S . По лемме 1.60, существуют $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ и открытые точечно конечные системы μ_α в X_α , $\alpha \in \mathcal{A}'$, такие, что

$$\nu = \bigcup \{\pi_\alpha^{-1} \mu_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}'\}$$

— вписанное в ω точечно конечное покрытие. Тогда

$$\left\{ V_\alpha = \bigcup \varpi_\alpha^{-1} \mu_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}' \right\}$$

также есть точечно конечное покрытие предела X .

По лемме 1.61, существуют хаусдорфово пространство Y , его точечно конечное покрытие $\eta = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}'\}$ и совершенное отображение «на» $f : X \rightarrow Y$ такие, что $V_\alpha = f^{-1}U_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}'$, и выполнены все остальные утверждения этой леммы.

Из совершенности и сюръективности f следует, что Y есть нормальное и слабо паракомпактное пространство. Докажем, что $\dim Y \leq n$.

Пусть (см. лемму 1.61)

$$\lambda_s = \left\{ B_{\alpha_1 \dots \alpha_s} : \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathcal{A}' \right\}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Тогда (в силу открытости и точечной конечности покрытия η) система множеств $A_s = \bigcup \lambda_s$, $s = 1, 2, \dots$, есть дизъюнктное покрытие пространства Y такое, что все объединения $A_1 \cup \dots \cup A_s$, $s = 1, 2, \dots$, замкнуты в Y и A_{s+1} есть объединение дискретной в $B_s = \bigcup \{A_j : j = s, s+1, \dots\}$ системы λ_s , $s = 1, 2, \dots$.

Докажем, что $\text{rd } B \leq n$ для $B = B_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$.

Возьмем замкнутое в Y подмножество F множества B . Тогда множество $f^{-1}F$ замкнуто в X , а для $\alpha = \alpha(\alpha_1 \dots \alpha_s)$ множество $\Phi = \varpi_\alpha f^{-1}F$ замкнуто в X_α в силу совершенности ϖ_α . Поэтому

$\dim \Phi \leq \dim X_\alpha \leq n$. Так как $F \subset U_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$, то

$$\begin{aligned} f^{-1}F &\subset f^{-1}U_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = f^{-1} \bigcap \{U_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s\} = \\ &= \bigcap \{V_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s\} = \bigcap \{\varpi_\alpha^{-1} \varpi_{\alpha \alpha_i}^{-1} O_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s\} = \\ &= \varpi_\alpha^{-1} \bigcap \{\varpi_{\alpha_i}^{-1} O_{\alpha_i} : i = 1, \dots, s\} = \varpi_\alpha^{-1} O_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = V_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \end{aligned}$$

и

$$\Phi = \varpi_\alpha f^{-1}F \subset O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}.$$

Тогда

$$g_{\alpha_1 \dots \alpha_s} F = g_{\alpha_1 \dots \alpha_s} f(f^{-1}F) = \varpi_\alpha f^{-1}F = \Phi$$

и $g_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ гомеоморфно отображает F на Φ . Поэтому $\dim F \leq n$. По замечанию 1.63 и лемме 1.5, $\dim Y \leq n$ и $\dim X \leq n$. $\square$

Метод доказательства теоремы 1.59 (построение ω -отображения на n -мерное пространство, составленное из кусочков других пространств) позже (в несколько измененном виде) был использован для доказательства теоремы 17 в [15].

Так как предел обратного спектра из паракомпактов с совершенными проекциями является паракомпактом и поэтому нормален, то получаем следующее утверждение.

Следствие 1.64 (см. [12, следствие 3]). *Если все проекции ϖ_α^β обратного спектра*

$$S = \{X_\alpha, \varpi_\alpha^\beta; \alpha \in \mathcal{A}\}$$

с пределом X совершенны, а все X_α являются паракомпактами размерности $\dim X_\alpha \leq n$, то и $\dim X \leq n$.

Замечание 1.65. По поводу этого следствия см. также [49]. Утверждение этого следствия при более слабом условии на его проекции можно найти в [32, Proposition 15].

Перейдем к d -правильным отображениям.

Из предложения 1.49 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.66. *Для непрерывного отображения $\varphi : A \rightarrow X$ следующие свойства эквивалентны:*

- (1) φ является d -правильным;
- (2) в любое бинарное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ со свойством $(d)_m$ (см. определение 1.24);
- (3) для любого функционально открытого в A множества O существует σ -локально конечная в A система $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ такая, что $O = \bigcup \omega$ и для ω выполнено условие $(d)_m$;
- (4) в любое σ -локально конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ со свойством $(d)_m$.

Перейдем, наконец, к подмножествам пространств.

Из следствия 1.66 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.67. *Для подмножества A пространства X следующие свойства эквивалентны:*

- (1) A является d -правильным;
- (2) в любое бинарное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства со свойством $(d)_s$ (см. определение 1.30);
- (3) для любого функционально открытого в A множества O существует σ -локально конечная в A система $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ такая, что $\bigcup \omega = O$ и для ω выполнено условие $(d)_s$;
- (4) в любое σ -локально конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее свойством $(d)_s$.

Замечание 1.68. Эквивалентность условий (1) и (3) следствия 1.67 доказана в [77].

Из предложения 1.50 или следствия 1.54 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.69. Для подмножества A пространства X следующие условия эквивалентны:

- (1) A является d -расположенным;
- (2) в любое бинарное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее свойством $(sd)_s$ (см. определение 1.31);
- (3) для любого функционально открытого в A множества O существует σ -локально конечная в A система $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ такая, что $\bigcup \omega = O$ и для ω выполнено условие $(sd)_s$;
- (4) в любое σ -локально конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее свойством $(sd)_s$.

1.11. d -правильность, sd -правильность и паракомпактность. Так как в любое открытое покрытие паракомпакта можно вписать функционально открытое локально конечное покрытие, то из предложений 1.49 и 1.50 вытекают следующие утверждения.

Следствие 1.70. Для отображения $\varphi = \{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ паракомпакта A в обратный спектр S следующие условия эквивалентны:

- (1) φ является d -правильным (соответственно, sd -правильным);
- (2) в любое открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, обладающее свойством $(d)_{is}$ (соответственно, свойством $(sd)_{is}$).

Следствие 1.71. Если подпространство A предела обратного спектра S является паракомпактом, то следующие утверждения эквивалентны:

- (1) A является d -правильным (соответственно, sd -правильным) относительно S ;
- (2) в любое открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, обладающее свойством $(d)_{iss}$ (соответственно, свойством $(sd)_{iss}$).

Следствие 1.72. Если предел X обратного спектра S является паракомпактом, то следующие условия эквивалентны:

- (1) S является d -правильным (соответственно, sd -правильным);
- (2) в любое открытое покрытие Ω предела X можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, обладающее свойством $(d)_{isl}$ (соответственно, свойством $(sd)_{isl}$).

Следствие 1.73. Для непрерывного отображения $\varphi : A \rightarrow X$ паракомпакта A следующие условия эквивалентны:

- (1) φ является d -правильным;
- (2) в любое открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, обладающее свойством $(d)_m$.

Следствие 1.74. Если подпространство A пространства X является паракомпактом, то следующие условия эквивалентны:

- (1) A является d -правильным (соответственно, d -расположенным) подмножеством пространства X ;
- (2) в любое открытое покрытие Ω пространства A можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, обладающее свойством $(d)_s$ (соответственно, свойством $(sd)_s$).

Извлечем некоторые следствия из полученных критериев d - и sd -правильности.

Предложение 1.75. Пусть для обратных спектров S и $T = \{Y_\lambda, q_{\mu\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$ даны непрерывные отображения $\psi_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющие соотношениям

$$\psi_\lambda \circ p_{\mu\lambda} = q_{\mu\lambda} \circ \psi_\mu, \quad \lambda < \mu.$$

Пусть еще Y — предел, а q_λ — предельные проекции спектра T . Если отображение $\psi : X \rightarrow Y$ удовлетворяет соотношениям

$$q_\lambda \circ \psi = \psi_\lambda \circ p_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda; \quad A \subset X;$$

отображение $(\chi = \psi) : A \rightarrow (B = \psi A)$ замкнуто и послойно линделефово; все X_λ вполне регулярны; пространство B является паракомпактом и B является d -правильным (sd -правильным) относительно T , то A является d -правильным (sd -правильным) относительно S .

Доказательство. Заметим, что указанные в начале предложения отображения ψ_λ , $\lambda \in \Lambda$, гарантируют существование непрерывного отображения $\psi : X \rightarrow Y$, удовлетворяющего соотношениям

$$q_\lambda \circ \psi = \psi_\lambda \circ p_\lambda.$$

Рассмотрим произвольное покрытие Ω пространства A . Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что для любого $O \in \Omega$ существуют $\lambda(O)$ и функционально открытое в $X_{\lambda(O)}$ множество $U(O)$ такие, что $O = A \cap p_{\lambda(O)}^{-1}U(O)$. Для каждой точки $y \in B$ фиксируем такую счетную подсистему $\Omega(y)$ системы Ω , что $\chi^{-1}y \subset \Omega(y)$. В силу замкнутости χ можно найти такую окрестность O_y точки y в B , что $\chi^{-1}O_y \subset \Omega(y)$. Согласно следствию 1.71 существует такое вписанное в покрытие $\{O_y : y \in B\}$ паракомпакта B его σ -локально конечное покрытие $\omega' = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, обладающее следующим свойством: для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ найдутся $\lambda(\alpha) \in \Lambda$ и функционально открытое в $Y_{\lambda(\alpha)}$ множество $U(\alpha)$ такие, что O_α открыто-замкнуто в $B \cap q_{\lambda(\alpha)}^{-1}U(\alpha)$ (соответственно, $O_\alpha = B \cap q_{\lambda(\alpha)}^{-1}U(\alpha)$). Для каждого α фиксируем $y(\alpha) \in B$ так, что $O_\alpha \subset O_{y(\alpha)}$. Положим

$$\omega = \bigcup \{ \chi^{-1}O_\alpha \cap \Omega(y(\alpha)) : \alpha \in \mathcal{A} \}.$$

Ясно, что ω есть σ -локально конечное и вписанное в Ω покрытие пространства A . Пусть $V \in \omega$. Тогда существуют $\alpha \in \mathcal{A}$ и $O \in \Omega(y(\alpha))$ такие, что $V = \chi^{-1}O_\alpha \cap O$. Возьмем $\lambda(V) \in \Lambda$, следующее за $\lambda(O)$ и за $\lambda(\alpha)$. Тогда множество

$$W(V) = p_{\lambda(V)\lambda(\alpha)}^{-1}\psi_{\lambda(\alpha)}^{-1}U(\alpha) \cap p_{\lambda(V)\lambda(O)}^{-1}U(O)$$

функционально открыто в $X_{\lambda(V)}$ и V открыто-замкнуто в (соответственно, равно)

$$\begin{aligned} \chi^{-1}(B \cap q_{\lambda(\alpha)}^{-1}U(\alpha)) \cap O &= (A \cap \psi^{-1}(B \cap q_{\lambda(\alpha)}^{-1}U(\alpha))) \cap (A \cap p_{\lambda(O)}^{-1}U(O)) = \\ &= (A \cap \psi^{-1}q_{\lambda(\alpha)}^{-1}U(\alpha)) \cap (A \cap p_{\lambda(V)}^{-1}p_{\lambda(V)\lambda(O)}^{-1}U(O)) = \\ &= A \cap p_{\lambda(\alpha)}^{-1}\psi_{\lambda(\alpha)}^{-1}U(\alpha) \cap p_{\lambda(V)}^{-1}p_{\lambda(V)\lambda(O)}^{-1}U(O) = \\ &= A \cap p_{\lambda(V)}^{-1}p_{\lambda(V)\lambda(\alpha)}^{-1}\psi_{\lambda(\alpha)}^{-1}U(\alpha) \cap p_{\lambda(V)}^{-1}p_{\lambda(V)\lambda(O)}^{-1}U(O) = A \cap p_{\lambda(V)}^{-1}W(V). \end{aligned}$$

Предложение 1.75 доказано. $\square$

Так как произведение совершенных отображений совершенно и предел обратного спектра хаусдорфовых пространств замкнут в произведении этих пространств, то из только что доказанного предложения вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.76. Пусть даны обратные спектры $S = \{X_\lambda, p_{\mu\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$ с пределом X и предельными проекциями p_λ и $T = \{Y_\lambda, q_{\mu\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$ с пределом Y и с предельными проекциями q_λ . Пусть еще все пространства X_λ являются тихоновскими; совершенные отображения $\psi_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ удовлетворяют соотношениям

$$\psi_\lambda \circ p_\lambda = q_{\mu\lambda} \circ \psi_\mu$$

при $\lambda < \mu$; отображение $\psi : X \rightarrow Y$ удовлетворяет соотношениям

$$q_\lambda \circ \psi = \psi_\lambda \circ p_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda;$$

$B \subset Y$; пространство B является паракомпактом и B является d -правильным (sd -правильным) относительно T . Тогда множество $A = \psi^{-1}B$ является d -правильным (sd -правильным) относительно S .

Легко усмотреть, что обратная последовательность из совершенно нормальных пространств является sd -правильной. Кроме того, как показал Нагами, предел обратной последовательности совершенно нормальных паракомпактов является совершенно нормальным паракомпактом. Поэтому из предыдущего следствия вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.77. Пусть обратные последовательности

$$S = \{X_i, p_{ji}; i \in \mathbb{N}\}, \quad T = \{Y_i, q_{ji}; i \in \mathbb{N}\}$$

и совершенные отображения $\psi_i : X_i \rightarrow Y_i$, $i \in \mathbb{N}$, таковы, что все X_i хаусдорфовы, все Y_i являются совершенно нормальными паракомпактами и

$$\psi_i \circ p_{ji} = q_{ji} \circ \psi_j, \quad i < j.$$

Тогда обратная последовательность S является sd -правильной и для предела X последовательности S выполнено неравенство (s) (см. п. 1.4).

Полученное утверждение позволяет получить следующее утверждение.

Предложение 1.78. Пусть C — топологически замкнутый (т.е. выдерживающий взятие гомотопических образов) класс совершенно нормальных паракомпактов, являющийся конечно мультипликативным (т.е. если $X, Y \in C$, то и $X \times Y \in C$), монотонным по замкнутым подмножествам (т.е. если $X \in C$ и множество F замкнуто в X , то и $F \in C$) и пусть класс PC состоит из всевозможных хаусдорфовых совершенных прообразов пространств класса C . Тогда обратная последовательность $S = \{X_i, p_{ji}; i \in \mathbb{N}\}$, в которой $X_i \in PC$, $i \in \mathbb{N}$, является sd -правильной и для предела X последовательности S выполнено неравенство (s).

Доказательство. Возьмем совершенные отображения «на» $\varphi_i : X_i \rightarrow R_i$, где $R_i \in C$, $i \in \mathbb{N}$. Пусть $\Pi_n = \prod\{X_i : i \leq n\}$, $Q_n = \prod\{R_i : i \leq n\}$, $\pi_n = \prod\{\varphi_i : i \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. отождествим точки $x_n \in X_n$ с точками $\{p_{ni}x_n : i \leq n\} \in \Pi_n$. Тогда пространство X_n отождествится с подмножеством произведения Π_n , а отображение φ_n отождествится с отображением

$$\psi_n = \pi_n : X_n \rightarrow Y_n = \pi_n X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если pr_{ji} — проекция произведения Π_j на подпроизведение Π_i , а r_{ji} — проекция произведения Q_j на подпроизведение Q_i , то

$$p_{ji} = \text{pr}_{ji} : X_j \rightarrow X_i, \quad r_{ji}Y_j \subset Y_i, \quad \psi_i \circ p_{ji} = q_{ji} \circ \psi_j,$$

где $q_{ji} = r_{ji} : Y_j \rightarrow Y_i$, $i \leq j$. Таким образом, мы имеем обратную последовательность S , обратную последовательность $T = \{Y_i, q_{ji}; i \in \mathbb{N}\}$ пространств $Y_i \in C$ и последовательность совершенных (так как совершенны π_i , а X_i замкнуты в Π_i) отображений ψ_i , $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условиям предыдущего следствия. $\square$

Следствие 1.79. Обратная последовательность $S = \{X_i, p_{ji}; i \in \mathbb{N}\}$, в которой X_i есть хаусдорфов совершенный прообраз паракомпактного σ -пространства [76], $i \in \mathbb{N}$, является sd -правильной и для предела X последовательности S выполнено неравенство (s).

Следствие 1.80. Обратная последовательность $S = \{X_i, p_{ji}; i \in \mathbb{N}\}$ из паракомпактных r -пространств X_i является sd -правильной и для предела X последовательности S выполнено неравенство (s).

1.12. Еще о монотонности размерности $\dim$.

Определение 1.81 (см. [18]). Подмножество A пространства X называется *сильно z -вложенным*, если для любых функционально открытого в A множества O и открытого в X множества U со свойством $O = A \cup U$ существует функционально открытое в X множество V такое, что $O = A \cup V$ и $V \subset U$.

Очевидно, сильная z -вложенность и C^* -вложенность влекут z -вложенность. Пространство A всех счётных ординалов C^* -вложено (и значит z -вложено), но не сильно z -вложено в пространство всех ординалов $\leq \omega_1$.

Легко доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.82. *Подмножество A пространства X является сильно z -вложенным в каждом из следующих случаев:*

- (1) *пространство X нормально и множество A замкнуто или даже имеет тип F_σ в нем;*
- (2) *пространство X вполне регулярно в точках множества A , а пространство A линделёфово.*

Напомним, что непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ называется z -замкнутым (см. [46]), если замкнут в Y образ любого нуля-множества в X , и почти совершенным (см. [32]), если оно замкнуто и все его слои линделёфовы.

Предложение 1.83 (см. [18]). *Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, $A \subset X$, $B = fA$, пространство B является паракомпактом, отображение $g = f : A \rightarrow B$ является z -замкнутым и каждый слой $g^{-1}y$, $y \in B$, сильно z -вложен в X . Если B является d -правильным (d -расположенным) подмножеством пространства Y , то A является d -правильным (d -расположенным) подмножеством пространства X и $\dim A \leq \dim X$.*

Следствие 1.84. *Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, $A \subset X$, $B = fA$, B является паракомпактом, отображение $g = f : A \rightarrow B$ является z -замкнутым, а B является d -правильным (d -расположенным) подмножеством пространства Y . Тогда A является d -правильным (d -расположенным) подмножеством пространства X (и $\dim A \leq \dim X$) в каждом из следующих случаев:*

- (1) *пространство X нормально и каждый слой $g^{-1}y$, $y \in B$, замкнут в X ;*
- (2) *пространство X вполне регулярно и каждый слой $g^{-1}y$, $y \in B$, линделёфов.*

Поскольку любое подмножество наследственно паракомпактного хаусдорфова пространства является d -расположенным, то из следствия 1.84 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.85. *Пусть отображение f нормального пространства X в наследственно паракомпактное хаусдорфово пространство Y замкнуто. Тогда для любого $B \subset Y$ множество $A = f^{-1}B$ является d -расположенным и $\dim A \leq \dim X$.*

Следствие 1.86. *Если отображение f тихоновского пространства X в наследственно паракомпактное хаусдорфово пространство Y почти совершенно (в частности, совершенно), то для любого $B \subset Y$ множество $A = f^{-1}B$ является d -расположенным и $\dim A \leq \dim X$.*

Отметим что, в указанных условиях пространство X паракомпактно.

Напомним, что бэровские подмножества пространства получаются из системы всех его функционально открытых множеств при помощи счетной вполне упорядоченной последовательности операций счетного объединения и счетного пересечения (применяемых каждый раз к получаемому на всех предшествующих шагах запасу подмножеств пространства). При помощи трансфинитной индукции можно показать, что для бэровского подмножества A пространства X существуют непрерывное отображение f пространства X на сепарабельное метризуемое пространство Y и множество $B \subset Y$ такие, что $A = f^{-1}B$.

Следствие 1.87. *Пусть нормальное пространство X обладает квазисовершенным (т.е. замкнутым и послойно счетно компактным) отображением на совершенно нормальный паракомпакт. Тогда любое бэровское подмножество A пространства X является d -расположенным и $\dim A \leq \dim X$.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ квазисовершенно, Y — совершенно нормальный паракомпакт, а A — бэровское подмножество пространства X . Тогда, как отмечалось, существуют сепарабельное метризуемое пространство Z , его подмножество C и непрерывное отображение $g : X \rightarrow Z$ такие, что $A = g^{-1}C$. Нетрудно доказать, что диагональное произведение

$h = f\Delta g : X \rightarrow Y \times Z$ квазисовершенно. Так как пространство $Y \times Z$ совершенно нормально и паракомпактно, то оно наследственно паракомпактно. Если $B = \text{pr}^{-1}C$, где pr есть проекция произведения $Y \times Z$ на сомножитель Z , то $A = h^{-1}B$. Остальное вытекает из следствия 1.85. $\square$

Следствие 1.88. *Произвольное бэровское подмножество A нормального M -пространства в смысле Мориты, в частности, паракомпактного M -пространства (или p -пространства), X является d -расположенным и $\dim A \leq \dim X$.*

1.13. О совершенных открытых отображениях, повышающих размерность. C^* -вложенность (а следовательно, и z -вложенность) тихоновского пространства в его стоун-чеховское расширение позволяет из следствия 1.84 вывести следующее утверждение.

Следствие 1.89. *Для паракомпакта B и непрерывной сюръекции $f : X \rightarrow \beta B$ бикompакта X множество $A = f^{-1}B$ является d -расположенным в X и $\dim A \leq \dim X$ (а пространство A является паракомпактом).*

Напомним, что непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ называется 0-мягким (в смысле Е. В. Щепина), если для любого нульмерного паракомпакта Z , его замкнутого подмножества F и непрерывных отображений $\varphi : Z \rightarrow Y$, $\psi : F \rightarrow X$ таких, что $f \circ \psi = \varphi|_F$, существует непрерывное продолжение $\Psi : Z \rightarrow X$ отображения ψ , обладающее свойством $f \circ \Psi = \varphi$. Всякое нуль-мягкое отображение открыто.

В [35] показано, что любой ненульмерный бикompакт является образом одномерного бикompакта при нуль-мягком и послойно нульмерном отображении.

Теорема 1.90. *Любой ненульмерный паракомпакт B является совершенным, нуль-мягким и послойно нульмерным образом паракомпакта $A = A(B)$ размерности $\dim A \leq 1$.*

Доказательство. Возьмем паракомпакт βB . Согласно результату Чигогидзе, βB является нуль-мягким и послойно нульмерным образом бикompакта X размерности $\dim X = 1$ при отображении f . Тогда прообраз $A = f^{-1}B$ является паракомпактом (в силу совершенности отображения $g = f : F \rightarrow B$) размерности (согласно следствию 1.89) $\dim A \leq \dim X = 1$. Так как открытый и совершенный образ нульмерного паракомпакта нульмерен, то $\dim A = 1$. Отображение g , очевидно, послойно нульмерно и нуль-мягко. $\square$

Аналогично (подробности см. в [18]) может быть доказано и следующее утверждение.

Теорема 1.91. *Любой паракомпакт B является образом паракомпакта $A = A(B)$ размерности $\dim A = 1$ при совершенном, открытом и с линейно связными слоями непрерывном отображении.*

1.14. О размерности Δ . Прежде чем переходить к следующему утверждению, сделаем следующее очевидное замечание.

Замечание 1.92. Если B является d -правильным (d -расположенным) подмножеством пространства C , а C является z -вложенным подмножеством пространства Y , то B является d -правильным (d -расположенным) подмножеством пространства Y . В частности, если B является d -правильным (d -расположенным) подмножеством тихоновского пространства Y , то B является d -правильным (d -расположенным) подмножеством стоун-чеховского расширения βY .

Для бикompакта X считается: $\Delta X = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$ и $\Delta X \leq n$, если X — (непрерывный) кратности $\leq n + 1$ образ нульмерного бикompакта, $n = 0, 1, 2, \dots$. Для тихоновского пространства X будем считать $\Delta X = \Delta \beta X$. Заметим, что для паракомпакта X это определение размерности ΔX эквивалентно первоначальному определению В. И. Пономарева [78].

Предложение 1.93. *Если паракомпакт B является d -правильным подмножеством тихоновского пространства Y , то $\Delta B \leq \Delta Y$.*

Доказательство. Согласно предыдущему замечанию B является d -правильным подмножеством бикompакта βY . Пусть $\Delta Y = n$. Тогда, по исходному определению размерности Δ , существует

непрерывное отображение f кратности $\leq n + 1$ нульмерного бикомпакта X на βY . Отображение $g : (A = f^{-1}B) \rightarrow B$ сюръективно, замкнуто и имеет кратность $\leq n + 1$. Из паракомпактности B и совершенности g вытекает паракомпактность A , а из следствия 1.89 вытекает неравенство $\dim A \leq \dim X \leq 0$. Поэтому $\Delta B \leq n = \Delta Y$. $\square$

Отметим, что установленное предложение обобщает [32, предложение 14].

Замечание 1.94. В [15, теорема 12] (если принять во внимание [15, замечание 2]) доказано следующее утверждение: *если нормальное T_2 -пространство X обладает замкнутым отображением $f : X \rightarrow Y$ на метризуемое пространство Y размерности $\dim f \leq 0$ (т.е. $\dim f^{-1}y \leq 0$, $y \in Y$), то $\dim X = \text{Ind } X = \Delta \beta X = \Delta X$ (равенство $\dim X = \text{Ind } X$ было доказано ранее в [9]).*

Сформулированное утверждение обобщает следствие в [32, с. 391] (так как $\Delta \beta X = \Delta X$ для паракомпакта X ; см. [78]).

2. РАЗМЕРНОСТЬ $\dim$ (КУСОЧНО) ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Пусть далее в этом параграфе пространства X_i , $i \in I$, непусты; X есть их тихоновское произведение, для $J \subset I$ пусть $X_J = \prod \{X_i : i \in J\}$ (при этом вместо X_I и $X_{\{i\}}$, $i \in I$, пишем X и X_i , соответственно); для $J \subset K \subset I$ пусть p_{KJ} обозначает проекцию произведения X_K на подпроизведение X_J (при этом вместо $p_{I\{i\}}$, p_{IJ} , $p_{J\{i\}}$, при $i \in J \subset I$ пишем p_i , p_J , p_{Ji} , соответственно).

Для произведения X обратный спектр $S_f(X) = \{X_J, p_{KJ}; J \in I_f\}$ (соответственно, $S_\omega(X) = \{X_J, p_{KJ}; J \in I_\omega\}$) будем называть обратным спектром конечных (соответственно, счетных) граней произведения X .

2.1. Кусочная цилиндричность и цилиндричность. В этом пункте для тихоновского произведения X нас будут интересовать неравенства

$$\dim \prod \{X_i : i \in I\} \leq \sup \left\{ \dim \prod \{X_i : i \in J\} : J \in I_f \right\}, \quad (*)$$

$$\dim \prod \{X_i : i \in I\} \leq \sup \left\{ \dim \prod \{X_i : i \in J\} : J \in I_\omega \right\}. \quad (**)$$

Определение 2.1. Непрерывное отображение $g : A \rightarrow X$ будем называть (кусочно) цилиндричным (соответственно, счетно (кусочно) цилиндричным) относительно произведения X , если отображение $\varphi(g) = \{p_J \circ g : J \in I_f\}$ (соответственно, отображение $\varphi_\omega(g) = \{p_J \circ g : J \in I_\omega\}$) пространства A в обратный спектр $S_f(X)$ (соответственно, $S_\omega(X)$) является sd -правильным (соответственно, d -правильным).

Очевидно, любое (счетно) цилиндричное отображение пространства в тихоновское произведение является (счетно) кусочно цилиндричным и любое (кусочно) цилиндричное отображение пространства в тихоновское произведение является счетно (кусочно) цилиндричным. Очевидно также, что (кусочная) цилиндричность отображения пространства в тихоновское произведение, имеющее один множитель, совпадает с sd -правильностью (d -правильностью) этого отображения.

Из следствия 1.7 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.2. Если отображение $g : A \rightarrow X$ кусочно цилиндрично, соответственно, счетно кусочно цилиндрично, относительно произведения X , то

$$\dim A \leq \sup \left\{ \dim \prod \{X_i : i \in J\} : J \in I_f \right\}; \quad (\#)$$

соответственно,

$$\dim A \leq \sup \left\{ \dim \prod \{X_i : i \in J\} : J \in I_\omega \right\}. \quad (\#\#)$$

Определение 2.3. Подмножество A тихоновского произведения X назовем (кусочно) цилиндрично (соответственно, счетно (кусочно) цилиндрично) расположенным, если его тождественное вложение в X является (кусочно) цилиндричным (соответственно, счетно (кусочно) цилиндричным).

Из следствия 2.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.4. Для кусочно цилиндрично (соответственно, счетно кусочно цилиндрично) расположенного подмножества A тихоновского произведения X выполнено неравенство $(\#)$ (соответственно, $(\#\#)$).

Определение 2.5. Тихоновское произведение X назовем (кусочно) цилиндричным (соответственно, счетно (кусочно) цилиндричным), если X является (кусочно) цилиндрично (соответственно, счетно (кусочно) цилиндрично) расположенным подмножеством произведения X .

Замечание 2.6. Цилиндричные (соответственно, кусочно цилиндричные) тихоновские произведения определены в [102] (соответственно, в [94]).

Замечание 2.7. Нетрудно показать, что произведение X является (кусочно) цилиндричным тогда и только тогда, когда для любого функционально открытого в X множества O существуют σ -локально конечное в X покрытие ω_O пространства O , множества $J(U) \in I_f$ и функционально открытые в $X_{J(U)}$ множества $V(U)$ такие, что $U = O \cap p_{J(U)}^{-1} V(U)$ (соответственно, U открыто-замкнуто в $O \cap p_{I(U)}^{-1} V(U)$), $U \in \omega_O$.

Аналогичную характеристику (с заменой I_f на I_ω) можно дать и счетной (кусочной) цилиндричности.

Из теоремы 2.4 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.8. Для кусочно цилиндричного (соответственно, счетно кусочно цилиндричного) произведения X выполнено неравенство $(*)$ (соответственно, неравенство $(**)$).

Замечание 2.9. Для кусочно цилиндричных произведений сформулированная теорема установлена в [94], для цилиндричных — в [102].

Остановимся на некоторых конкретных случаях (кусочной) цилиндричности произведений.

Теорема 2.10 (см. [23]). Тихоновское произведение любой системы паракомпактных p -пространств цилиндрично и для него выполнено неравенство $(*)$.

Следствие 2.11 (см. [79]). Для тихоновского произведения любой системы метризуемых пространств выполнено неравенство $(*)$.

Обобщением следствия 2.11 и частичным обобщением теоремы 2.10 является следующая теорема.

Теорема 2.12 (см. [102]). Тихоновское произведение паракомпактных Σ -пространств, все конечные грани которых имеют счетную тесноту (например, если все сомножители удовлетворяют первой аксиоме счетности) цилиндрично и выполнено неравенство $(*)$.

Замечание 2.13. В [102] доказано, что тихоновское произведение любой счетной системы паракомпактов, являющихся Σ -пространствами, цилиндрично.

Напомним, что непрерывная функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, определенная на подмножестве A тихоновского произведения X , называется факторизуемой через счетную грань ($\equiv$ зависящей от счетного числа координат), если существует $J \in I_\omega$ и непрерывная функция $g : p_J A \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f = g \circ p_J|_A$.

Подмножество A тихоновского произведения X (в частности, само тихоновское произведение X), называется счетно факторизуемым, если любая непрерывная функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ (в частности, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$) факторизуема через счетную грань.

Предложение 2.14. Если подмножество A тихоновского произведения X счетно факторизуемо и $A_J = p_J A$ является d -правильным (d -расположенным) подмножеством грани X_J произведения X для всех $J \in I_\omega$, то A является счетно кусочно цилиндрично (счетно цилиндрично) расположенным подмножеством произведения X (и выполнено неравенство $(**)$).

Доказательство. Пусть Ω — конечное функционально открытое покрытие пространства A . Из счетной факторизуемости A вытекает существование таких $J \in I_\omega$ и конечного функционально открытого покрытия Ω' множества $A_J = p_J A$, что $\Omega = (p_J|_A)^{-1}\Omega'$. Тогда в покрытие Ω' можно вписать σ -локально конечное покрытие $\omega' = \{O'_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ пространства A_J так, что O'_α открыто-замкнуто в пересечении (совпадает с пересечением) функционально открытого в X_J множества U'_α с A_J . Осталось взять $(p_J|_A)^{-1}\omega'$ и $U_\alpha = p_J^{-1}U'_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. $\square$

Следствие 2.15. Если тихоновское произведение X счетно факторизуемо, то выполнено неравенство (**).

Счетная факторизуемость тихоновских произведений и их подмножеств для оценки их размерности была использована Хараламбусом [29] (см. также [60]) для получения следующего утверждения.

Теорема 2.16. Неравенство (*) верно для произведения X , если все счетные грани произведения X линделефовы или если все конечные грани произведения X наследственно линделефовы.

Отметим, что в [102] для рассмотренных в теореме 2.16 произведений установлена их цилиндричность.

По поводу счетной факторизуемости см. [24, 37, 44].

2.2. Кусочная прямоугольность и прямоугольность. В этом пункте для произведения X нас будет интересовать неравенство

$$\dim X \leq \sum \{\dim X_i : i \in I\}, \quad (\star)$$

где

$$\sum \{\dim X_i : i \in I\} = \sup \left\{ \sum \{\dim X_i : i \in J\} : J \in I_f \right\},$$

а также для $A \subset X$ неравенство

$$\dim A \leq \sum \{\dim X_i : i \in I\}. \quad (\star\star)$$

В этом пункте будем пользоваться обозначениями предыдущего пункта.

Определение 2.17. Подмножество O тихоновского произведения X называется (замкнутым, (функционально) открытым) прямоугольником, если существуют $J \in I_f$ и (замкнутые, (функционально) открытые) в X_i множества O_i , $i \in J$, такие, что $O = \bigcap \{p_i^{-1}O_i : i \in J\}$.

Определение 2.18. Непрерывное отображение $g : A \rightarrow X$ будем называть кусочно прямоугольным (соответственно, прямоугольным) относительно тихоновского произведения X , если для любого конечного функционально открытого покрытия Ω пространства A существует вписанное в Ω и σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее следующим свойством:

$$\begin{aligned} &\text{для каждого } \alpha \in \mathcal{A} \text{ можно найти функционально открытый прямоугольник} \\ &U_\alpha \text{ произведения } X \text{ так, что множество } O_\alpha \text{ содержится и открыто-замкнуто в} \quad (pr)_m \\ &g^{-1}U_\alpha, \end{aligned}$$

соответственно, свойством

$$\begin{aligned} &\text{для каждого } \alpha \in \mathcal{A} \text{ можно найти функционально открытый прямоугольник } U_\alpha \\ &\text{произведения } X \text{ так, что } O_\alpha = g^{-1}U_\alpha. \quad (r)_m \end{aligned}$$

Замечание 2.19. Очевидно, (кусочно) прямоугольное относительно тихоновского произведения отображение является также (кусочно) цилиндричным относительно этого произведения (и для него выполнено утверждение следствия 2.2).

Нам требуется следующая хорошо известная теорема.

Теорема 2.20. Для тихоновского произведения X бикомпактов X_i , $i \in I$, выполнено неравенство ($\star$).

Доказательство. Для конечного I это утверждение доказано Хеммингсенем (см., например, [1, 38]). Остальное следует из того, что для любого конечного открытого покрытия Ω пространства X существуют $J \in I_f$ и конечное открытое покрытие ω грани X_J произведения X такие, что покрытие $p_J^{-1}\omega$ вписано в покрытие Ω . $\square$

Теорема 2.21. Если отображение $g : A \rightarrow X$ кусочно прямоугольно относительно тихоновского произведения X , то выполнено неравенство $(\boxtimes\boxtimes)$.

Доказательство. Для произведения X положим $X(\beta) = \prod\{\beta(\tau X_i) : i \in I\}$, а проекцию произведения $X(\beta)$ на сомножитель $\beta(\tau X_i)$ обозначим через pr_i , $i \in I$. Заметим, что

$$\dim \beta(\tau X_i) = \dim \tau X_i = \dim X_i.$$

Поэтому (см. теорему 2.20)

$$\dim X(\beta) \leq \sum \{\dim \beta(\tau X_i) : i \in I\} = \sum \{\dim X_i : i \in I\}.$$

Возьмем конечное функционально открытое покрытие пространства A . Существует вписанное в него σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ пространства A со свойством $(pr)_m$. Для каждого α фиксируем $J(\alpha) \in I_f$ и функционально открытые в X_i множества U_i , $i \in J(\alpha)$, так, что $U_\alpha = \bigcap \{p_i^{-1}U_i : i \in J(\alpha)\}$. В силу свойств функтора Тихонова τ , в τX_i существует функционально открытое множество V_i такое, что $U_i = (\tau X_i)^{-1}V_i$. Пусть $V_i = \tau X_i \cap W_i$, где W_i функционально открыты в $\beta(\tau X_i)$. Тогда $U_i = h_i^{-1}W_i$ для отображения h_i , являющегося композицией отображения τX_i и тождественного вложения τX_i в $\beta(\tau X_i)$. Пусть h есть произведение отображений h_i , $i \in I$. Тогда для каждого α имеем соотношение

$$g^{-1}U_\alpha = g^{-1} \bigcap \{p_i^{-1}h_i^{-1}W_i : i \in J(\alpha)\} = g^{-1}h^{-1} \bigcap \{\text{pr}_i^{-1}W_i : i \in J(\alpha)\}.$$

Следовательно, отображение $h \circ g : A \rightarrow X(\beta)$ является d -правильным. Остальное следует из теоремы 1.26. $\square$

Следствие 2.22. Если $\dim X_i = 0$, $i \in I$, и отображение $g : A \rightarrow X = \prod\{X_i : i \in I\}$ непрерывно, то $\dim A \leq 0$ тогда и только тогда, когда отображение g кусочно прямоугольно относительно тихоновского произведения X .

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 2.21. Необходимость следует из того, что любое открыто-замкнутое в A множество открыто-замкнуто в $g^{-1}p_i^{-1}X_i$, $i \in I$. $\square$

Определение 2.23 (см. [51]). Подмножество A тихоновского произведения X называется *кусочно прямоугольно* (соответственно, *прямоугольно*) *расположенным*, если тождественное вложение A в X является кусочно прямоугольным (соответственно, прямоугольным) относительно произведения X отображением, т.е., если для любого конечно функционально открытого покрытия Ω пространства A существует вписанное в него σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее следующим свойством:

для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти функционально открытый прямоугольник U_α произведения X так, что множество O_α содержится и открыто-замкнуто в $A \cap U_\alpha$, (pr)_s

соответственно, свойством

для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти функционально открытый прямоугольник U_α произведения X так, что $O_\alpha = A \cap U_\alpha$. (r)_s

Замечание 2.24. Очевидно, любое (кусочно) прямоугольно расположенное подмножество тихоновского произведения является и (кусочно) цилиндрично расположенным подмножеством этого произведения (и для него выполнено утверждение теоремы 2.4).

Из теоремы 2.21 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.25 (см. [51]). Для кусочно прямоугольно расположенного подмножества A тихоновского произведения X выполнено неравенство $(\boxtimes\boxtimes)$.

Следствие 2.26. Если $\dim X_i = 0$, $i \in I$, и $A \subset X$, то неравенство $\dim A \leq 0$ равносильно тому, что A есть кусочно прямоугольно расположенное подмножество произведения X .

В классе тихоновских пространств (кусочно) прямоугольно расположенные подмножества тихоновских произведений могут быть достаточно просто охарактеризованы.

Предложение 2.27. Для подмножества A произведения X тихоновских пространств следующие условия эквивалентны:

- (1) A является кусочно прямоугольно (прямоугольно) расположенным подмножеством тихоновского произведения X ;
- (2) A является d -правильным (d -расположенным) подмножеством тихоновского произведения $X(\beta) = \prod\{\beta X_i : i \in I\}$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2), фактически, установлено в доказательстве теоремы 2.21. Докажем импликацию (2) $\Rightarrow$ (1).

Рассмотрим конечное функционально открытое покрытие Ω пространства A . Существует вписанное в Ω и σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, обладающее следующим свойством: для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ в $X(\beta)$ найдется такое функционально открытое множество U_α , что O_α открыто-замкнуто в (совпадает с) $A \cap U_\alpha$. Так как пространство U_α является σ -бикompактным, то оно является объединением счетной системы функционально открытых прямоугольников $U_{\alpha i}$, $i \in \mathbb{N}$, произведения $X(\beta)$. Тогда множества $V_{\alpha i} = X \cap U_{\alpha i}$ являются функционально открытыми прямоугольниками произведения X , множества $W_{\alpha i} = O_\alpha \cap V_{\alpha i}$ открыто-замкнуты в (совпадают с) $A \cap V_{\alpha i}$ и $\{W_{\alpha i} : i \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathcal{A}\}$ есть вписанное в Ω и σ -локально конечное покрытие пространства A . $\square$

Определение 2.28 (см. [16, 77]). Тихоновское произведение X называется *кусочно прямоугольным* (соответственно, *прямоугольным*), если для любого конечного функционально открытого покрытия Ω пространства X существует вписанное в него σ -локально конечное покрытие $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ этого пространства, обладающее следующим свойством:

для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти функционально открытый прямоугольник U_α
произведения X так, что множество O_α содержится и открыто-замкнуто в U_α , (pr)

соответственно, свойством

для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ можно найти функционально открытый прямоугольник U_α
произведения X так, что $O_\alpha = U_\alpha$. (r)

Замечание 2.29. Для двух и для любой конечной системы сомножителей прямоугольные произведения были определены в [12, 13]. Для произведений двух нормальных сомножителей понятие прямоугольности произведения эквивалентно понятию F -произведения из [70]. Прямоугольность любых тихоновских произведений под другим названием была определена также в [23].

Очевидно, любое (кусочно) прямоугольное тихоновское произведение является (кусочно) цилиндричным (и для него выполнено утверждение теоремы 2.8).

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Предложение 2.30. Произведение X (кусочно) прямоугольно тогда и только тогда, когда для любого функционально открытого в X множества O существуют σ -локально конечное в X покрытие ω_O пространства O и, для любого $U \in \omega_O$, функционально открытый прямоугольник $V(U)$ произведения X , такие, что $U = V(U)$ (соответственно, U открыто-замкнуто в $V(U)$).

Отметим следующую характеристику (кусочной) прямоугольности, вытекающую из предложения 2.27.

Предложение 2.31 (см. [77]). Тихоновское произведение X тихоновских пространств тогда и только тогда кусочно прямоугольно (прямоугольно), когда X является d -правильным (d -расположенным) подмножеством тихоновского произведения $\prod\{\beta X_i : i \in I\}$.

Из теоремы 2.25 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.32 (см. [16, 77]). *Для кусочно прямоугольного (в частности, прямоугольного) тихоновского произведения X выполнено неравенство $(\boxtimes)$.*

Замечание 2.33. Эта теорема дает одно из самых общих достаточных для выполнения неравенства $(\boxtimes)$ условий. В случае прямоугольности произведения конечной системы пространств сформулированное утверждение было установлено в [12, 13] для случая тихоновских сомножителей и в [15, 43] для случая любых сомножителей.

Следствие 2.34 (см. [16, 77]). *Если $\dim X_i = 0$, $i \in I$, то $\dim X = 0$ тогда и только тогда, когда произведение X кусочно прямоугольно.*

2.3. Связь (кусочной) прямоугольности и (кусочной) цилиндричности тихоновских произведений.

Предложение 2.35. *Тихоновское произведение является (кусочно) прямоугольным тогда и только тогда, когда оно (кусочно) цилиндрично и все его конечные грани (кусочно) прямоугольны.*

Доказательство. Пусть произведение X кусочно цилиндрично и все его конечные грани X_J , $J \in I_f$, кусочно прямоугольны. Рассмотрим функционально открытое подмножество O пространства X . Согласно замечанию 2.7 существует σ -локально конечная в X система $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ и для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ существуют $J(\alpha) \in I_f$ и функционально открытое в $X_{J(\alpha)}$ множество U_α такие, что O_α открыто-замкнуто в $p_{J(\alpha)}^{-1}U_\alpha$ и $O = \bigcup \omega$. Согласно предложению 2.30 можно найти σ -локально конечную в $X_{J(\alpha)}$ систему $\omega_\alpha = \{U_\beta : \beta \in \mathcal{L}(\alpha)\}$ и для каждого $\beta \in \mathcal{L}(\alpha)$ можно найти функционально открытый в $X_{J(\alpha)}$ прямоугольник V_β так, что U_β открыто-замкнуто в V_β и $U_\alpha = \bigcup \omega_\alpha$. Тогда система

$$\Omega = \bigcup \{O_\alpha \wedge p_{J(\alpha)}^{-1}\omega_\alpha = \{W_\beta = \{O_\alpha \cap p_{J(\alpha)}^{-1}U_\beta : \beta \in \mathcal{L}(\alpha)\} : \alpha \in \mathcal{A}\}$$

является σ -локально конечной в X , множество W_β открыто-замкнуто в функционально открытом прямоугольнике $p_{J(\alpha)}^{-1}V_\beta$, $\beta \in \mathcal{L}(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, и $\bigcup \Omega = \bigcup \omega = O$. Кусочная прямоугольность произведения X установлена. Случай прямоугольности рассматривается так же (но проще).

Пусть теперь произведение X (кусочно) прямоугольно. Тогда, как уже отмечалось, оно (кусочно) цилиндрично. Остальное вытекает из следующего утверждения. $\square$

Предложение 2.36. *Подпроизведение (кусочно) прямоугольного произведения (кусочно) прямоугольно.*

Доказательство. Пусть $J \subset I$ и O — функционально открытое в X_J множество. Тогда множество $O' = p_J^{-1}O$ функционально открыто в X . Если произведение X кусочно прямоугольно, то существует такая σ -локально конечная в X система $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, что $O = \bigcup \omega$ и O_α открыто-замкнуто в функционально открытом прямоугольнике U_α произведения X , $\alpha \in \mathcal{A}$. Фиксируем точки $x_i^0 \in X_i$, $i \in I \setminus J$. Подпроизведение X_J можно отождествить с подмножеством

$$\{x = \{x_i : i \in I\} : x_i = x_i^0, i \in I \setminus J\}$$

произведения X . Тогда $X_J \wedge \omega$ есть такая σ -локально конечная в X_J система, что $O = X_J \cap O' = \bigcup (X_J \wedge \omega)$. Кроме того, для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ множество $X_J \cap O_\alpha$ открыто-замкнуто в функционально открытом прямоугольнике $X_J \cap U_\alpha$ произведения X_J .

Случай прямоугольности рассматривается аналогично. $\square$

В связи с предложением 2.35 возникает следующий вопрос.

Вопрос 2.37. Когда из (кусочной) прямоугольности конечных или даже счетных граней бесконечного тихоновского произведения следует его (кусочная) прямоугольность?

2.4. Произведения, близкие к (кусочно) прямоугольным (σ -(кусочно) прямоугольные и σ -дискретно (кусочно) прямоугольные). Как показал В. Золотарев (см. [13]), уже квадрат стрелки Зоргенфрея не прямоуголен. В [43] показано, что *тихоновское пространство является локально бикомпактным паракомпактом, если прямоугольно его произведение на любое тихоновское пространство.*

Таким образом, уже для любого σ -бикомпактного не локально бикомпактного тихоновского пространства существует тихоновское пространство, такое, что их произведение не прямоугольно. Отметим в связи с этим, что в [85] указаны *коллективно нормальное пространство X и счетное (следовательно, σ -бикомпактное) метризуемое, с одной неизолированной точкой пространство M такие, что произведение $X \times M$ не прямоугольно.*

Задача 2.38. Охарактеризовать те (тихоновские или паракомпактные тихоновские) пространства X , для которых произведение $X \times Y$ кусочно прямоугольно для любого (тихоновского или паракомпактного тихоновского) пространства Y .

Хотя произведение тихоновского пространства X на σ -бикомпактное тихоновское пространство Y не прямоугольно, однако неравенство $\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y$ в этом случае выполняется [62].

Чтобы охватить этот и другие случаи выполнения неравенства ($\boxtimes$), обобщим понятие (кусочной) прямоугольности топологического произведения.

Определение 2.39. Тихоновское произведение X назовем:

- (a) σ -(кусочно) *прямоугольным*,
- (b) σ -дискретно (кусочно) *прямоугольным*,

если существует покрытие ϱ этого произведения такими прямоугольниками $\Pi_\alpha = \prod \{X_{i\alpha} : i \in I\}$ (где $X_{i\alpha} \subset X_i$, $i \in I$, и $X_{i\alpha} = X_i$ для всех, кроме конечного числа, индексов $i \in I$), что все произведения Π_α (кусочно) *прямоугольны*, $\alpha \in \mathcal{A}$, и, соответственно,

- (a) покрытие ϱ счетно и все прямоугольники Π_α являются C^* -вложенными в X ;
- (b) ϱ есть объединение таких дискретных в X систем ϱ_n , что каждое объединение $\bigcup \varrho_n$ является C^* -вложенным в X , $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 2.40. Очевидно, (в обозначениях определения 2.39) произведение X является σ -дискретно (кусочно) *прямоугольным*, если пространство X нормально, покрытие ϱ является σ -дискретным в X , все прямоугольники Π_α замкнуты и все произведения Π_α (кусочно) *прямоугольны*. Очевидно также, что произведение X является σ -(кусочно) *прямоугольным*, если покрытие ϱ счетно, все прямоугольники Π_α замкнуты, все произведения Π_α (кусочно) *прямоугольны* и произведение X *прямоугольно нормально* (определение *прямоугольной нормальности* см. в [85]).

Теорема 2.41. Для σ -дискретно кусочно *прямоугольного* (в частности, для σ -кусочно *прямоугольного*) произведения X выполнено неравенство ($\boxtimes$).

Доказательство. Воспользуемся обозначениями определения 2.39 и возьмем такое, как там, покрытие ϱ , распадающееся в объединение дискретных в X систем ϱ_n , $n \in \mathbb{N}$.

Из C^* -вложенности $\bigcup \varrho_n$ в X следует C^* -вложенность в X любого $\Pi_\alpha \in \varrho_n$. Из C^* -вложенности прямоугольника Π_α в X следует C^* -вложенность множеств $X_{i\alpha}$ в X_i для всех α . Поэтому $\dim X_{i\alpha} \leq \dim X_i$ для всех i . Из кусочной *прямоугольности* Π_α вытекает неравенство

$$\dim \Pi_\alpha \leq \Sigma = \sum \{\dim X_i : i \in I\}.$$

Из дискретности системы ϱ_n вытекает неравенство

$$\dim \bigcup \varrho_n \leq \Sigma.$$

Наконец, из C^* -вложенности всех $\bigcup \varrho_n$ в X следует неравенство ($\boxtimes$) (см. [48, 63]). □

В связи с определением 2.39 и теоремой 2.41 см. [14].

3. (σ) -ПРЯМОУГОЛЬНОСТЬ И (σ) -КУСОЧНАЯ ПРЯМОУГОЛЬНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

В этом параграфе демонстрируется общность понятий прямоугольного и кусочно прямоугольного произведений.

3.1. Случай, когда на сомножители накладываются одинаковые условия (бикомпактности, метризуемости, быть паракомпактным p - или Σ -пространством). Начнем со случая метризуемых пространств.

М. Катетов и К. Морита доказали неравенство $(\star)$ для любой конечной системы метризуемых сомножителей X_i . Из этой теоремы Катетова—Мориты и из теоремы Нагами о размерности $\dim$ предела обратной последовательности метризуемых пространств (см. следствие 1.23) легко вывести неравенства $(*)$ и $(\star)$ для любой счетной системы метризуемых сомножителей X_i . Оба эти утверждения вытекают также из теоремы 2.32 и из следующего легко доказываемого результата.

Предложение 3.1. *Тихоновское произведение не более чем счетной системы метризуемых пространств прямоугольно.*

Доказательство. Действительно, если B_i есть σ -локально конечная база в метризуемом пространстве X_i , а p_i есть проекция произведения $X = \prod\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ на сомножитель X_i , $i \in \mathbb{N}$, то система

$$B = \bigcup \left\{ \{p_1^{-1}O_1 \cap \dots \cap p_n^{-1}O_n : O_i \in B_i, i = 1, \dots, n\} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

является σ -локально конечной и состоящей из функционально открытых прямоугольников базой произведения X . Следовательно, в любое открытое покрытие произведения X можно вписать покрытие, являющееся подсистемой базы B . $\square$

В [23] отмечено, что в [5, 6] фактически доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. *Тихоновское произведение любой системы метризуемых пространств прямоугольно.*

Следующее утверждение может быть выведено из упоминаемой выше теоремы Катетова—Мориты и теоремы 2.10 или непосредственно из теоремы 2.32 (и теоремы 3.2).

Следствие 3.3. *Для тихоновского произведения любой системы метризуемых пространств $X_i : i \in I$, выполнено неравенство $(\star)$.*

Перейдем к случаю бикомпактов.

Теорема 3.4. *Тихоновское произведение любой системы бикомпактов прямоугольно.*

Доказательство. Действительно, из определения тихоновской топологии произведения и бикомпактности произведения бикомпактов сразу же следует, что для любого открытого покрытия Ω произведения X бикомпактов X_i , $i \in I$, существует такое конечное множество $F \subset I$ и такое конечное и состоящее из функционально открытых прямоугольников произведения X_F покрытие ν этого произведения, что прообраз $\omega = p_F^{-1}\nu$ вписан в Ω . $\square$

Класс паракомпактных p -пространств (или хаусдорфовых паракомпактных M -пространств), который можно определить как класс всех хаусдорфовых совершенных прообразов метризуемых пространств или, с точностью до гомеоморфизмов, как класс замкнутых подмножеств произведений метризуемых пространств на бикомпакты, содержит в себе как класс всех метризуемых пространств, так и класс всех бикомпактов.

В [70] фактически (поскольку в классе нормальных пространств свойство произведения конечной системы сомножителей быть F -произведением и быть прямоугольным эквивалентны) доказано, что *произведение конечной системы паракомпактных p -пространств прямоугольно.*

Верно и более общее утверждение.

Предложение 3.5. *Тихоновское произведение не более чем счетной системы паракомпактных p -пространств прямоугольно.*

Для доказательства сформулированного предложения потребуется следующее утверждение.

Предложение 3.6. Пусть тихоновское произведение $Y = \prod\{Y_i : i \in I\}$ (кусочно) прямоугольно, Y является паракомпактом, а отображения $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ тихоновских пространств X_i совершенны, $i \in I$. Тогда тихоновское произведение $X = \prod\{X_i : i \in I\}$ (кусочно) прямоугольно (и выполняется неравенство $(\star)$).

Доказательство. Пусть $g_i : \beta X_i \rightarrow \beta Y_i$ — непрерывное продолжение f_i , $i \in I$, и

$$g = \prod\{g_i : i \in I\} : \left(X(\beta) = \prod\{\beta X_i : i \in I\}\right) \longrightarrow \left(Y(\beta) = \prod\{\beta Y_i : i \in I\}\right).$$

Согласно предложению 2.31 множество Y является d -расположенным (d -правильным) в $Y(\beta)$, а согласно следствию 1.84 (в силу совершенности отображения g) множество X является d -расположенным (d -правильным) в $X(\beta)$. Тогда, опять же согласно предложению 2.31 произведение X является (кусочно) прямоугольным. $\square$

Замечание 3.7. В [32] доказано, что в классе тихоновских пространств из паракомпактности и кусочной прямоугольности произведения $Y_1 \times Y_2$ и из существования совершенных отображений $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, $i = 1, 2$, вытекает неравенство $\dim X_1 \times X_2 \leq \dim X_1 + \dim X_2$.

Предложение 3.5 вытекает из предложений 3.1 и 3.6 сразу же.

Замечание 3.8. Предложение 3.5 верно и для любых совершенных (не обязательно хаусдорфовых) прообразов метризуемых пространств (для конечного I см. [15, теорема 1.8], для счетного I доказательство аналогично данному в [15] для конечного I).

Следствие 3.9. Для тихоновского произведения счетной системы паракомпактных p -пространств выполнено неравенство $(\star)$.

Для произведения конечной системы паракомпактных p -пространств это утверждение установлено в [12, 15, 20]. В силу замечания 3.8, следствие 3.9 верно для любых совершенных прообразов метризуемых пространств (для конечного числа сомножителей см. [15, следствие 8]).

На самом деле имеет место следующая общая теорема.

Теорема 3.10. Тихоновское произведение любой системы паракомпактных p -пространств прямоугольно.

Следствие 3.11. Для тихоновского произведения любой системы паракомпактных p -пространств выполнено неравенство $(\star)$.

Замечание 3.12. Хотя теорема 3.10 и следствие 3.11 утверждаются в [23], однако фактически там доказана лишь цилиндричность произведения любой системы паракомпактных p -пространств (это отмечается, например, в [94]). Тем не менее из доказанного Филипповым в [23] предложения 2.35 и предложения 3.5 (для конечного числа сомножителей) теорема 3.10 (и следствие 3.11) вытекает.

В связи с теоремой 3.10 и вопросом 2.37 возникает следующий вопрос.

Вопрос 3.13. Пусть непрерывные отображения $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, $i \in I$, тихоновских пространств совершенны, все конечные (или даже счетные) грани произведения $\prod\{Y_i : i \in I\}$ паракомпактны, а само это произведение (кусочно) прямоугольно. Будет ли (кусочно) прямоугольным произведение $\prod\{X_i : i \in I\}$?

Классы метризуемых, бикомпактных хаусдорфовых и паракомпактных p -пространств относятся к числу важнейших. Паракомпактные Σ -пространства обобщают паракомпактные p -пространства и также обладают многими интересными свойствами. Напомним определение Σ -пространств, данное Нагами в [66, 67].

Последовательность $\mathcal{F}$ локально конечных замкнутых покрытий $\mathcal{F}_i = \{F_{i\alpha} : \alpha \in \mathcal{A}_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, пространства X называется Σ -сетью, если для любой последовательности непустых замкнутых в X множеств K_i такой, что $K_i \supset K_{i+1}$ и существует точка $x \in X$, для которой

$$K_i \subset (C(x, \mathcal{F}_i) = \bigcap \{F \in \mathcal{F}_i : x \in F\}), \quad i \in \mathbb{N},$$

пересечение $\bigcap \{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ непусто. Если еще $|\mathcal{A}_i| \leq \theta$, $i \in \mathbb{N}$, то Σ -сеть называется $\Sigma(\theta)$ -сетью.

Пространство, обладающее Σ -сетью (соответственно $\Sigma(\theta)$ -сетью), называется Σ -пространством (соответственно, $\Sigma(\theta)$ -пространством). В [66, 67] показано, что в любом $\Sigma(\theta)$ -пространстве существует спектральная $\Sigma(\theta)$ -сеть, т.е. $\Sigma(\theta)$ -сеть с дополнительными свойствами (а)–(д), указанными в доказательстве следующей далее теоремы.

Нам потребуется еще данное Моритой в [59] следующее определение.

Определение 3.14. Пространство X называется $P(\theta)$ -пространством (для кардинального числа θ), если для любой системы открытых в X множеств $G(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_i \in \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, такой, что $|\Omega| \leq \theta$, $G(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \subset G(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1})$ и для любой последовательности $\alpha_i \in \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, существует система замкнутых в X множеств $H(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \subset G(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_i \in \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, обладающих следующим свойством:

$$\bigcup \{H(\alpha_1, \dots, \alpha_i) : i \in \mathbb{N}\} = X \quad \text{как только} \quad \bigcup \{G(\alpha_1, \dots, \alpha_i) : i \in \mathbb{N}\} = X.$$

Пространство называется P -пространством, если оно является $P(\theta)$ -пространством для любого θ .

Интерес и важность P -пространств демонстрируется следующим утверждением [59]: *пространство X является нормальным (и паракомпактным) P -пространством тогда и только тогда, когда нормально (и паракомпактно) его произведение на любое метризуемое пространство.*

Теорема 3.15. *Произведение $X \times Y$ прямоугольно, если X и Y — паракомпакты и X является $\Sigma(\theta)$ -пространством, а Y является $P(\theta)$ -пространством. В этом случае*

$$\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть ω — произвольное открытое покрытие произведения $X \times Y$. (Ниже мы используем обозначения из статьи Нагами [67, с. 285-286].)

Выберем в X спектральную $\Sigma(\theta)$ -сеть $\{\mathcal{F}_i : i \in \mathbb{N}\}$. т.е. Σ -сеть, удовлетворяющую следующим условиям:

- (а) $\mathcal{F}_i = \{F(\alpha_1, \dots, \alpha_i) : \alpha_1, \dots, \alpha_i \in \Omega\}$, $i \in \mathbb{N}$, $|\Omega| \leq \theta$;
- (б) $F(\alpha_1, \dots, \alpha_i) = \bigcup \{F(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}) : \alpha_{i+1} \in \Omega\}$ для каждого набора $\alpha_1, \dots, \alpha_i \in \Omega$, $i \in \mathbb{N}$;
- (с) каждое покрытие $\mathcal{F}_i$ (являющееся, по определению Σ -сети, замкнутым и локально конечным) конечно-мультипликативно;
- (д) для каждой точки $x \in X$ существует такая последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ индексов из Ω , что

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_i) = C(x, \mathcal{F}_i) = \bigcap \text{St}(x, \mathcal{F}_i)$$

для любого i .

Выберем для каждого i такие открытые и состоящие из F_σ -множеств локально конечные покрытия

$$D_i = \{D(\alpha_1, \dots, \alpha_i) : \alpha_1, \dots, \alpha_i \in \Omega\},$$

что $F(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \subset D(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ для каждого набора $\alpha_1, \dots, \alpha_i$.

Пусть

$$\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_i) = \{U_\lambda \times V_\lambda : \lambda \in \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_i)\}$$

— система всех произведений $U_\lambda \times V_\lambda$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) каждое V_λ открыто в Y ;
- (2) каждое U_λ открыто в X ;
- (3) существует такое конечное покрытие η_λ множества U_λ открытыми и типа F_σ в X множествами, что покрытие $\{U \times V_\lambda : U \in \eta_\lambda\}$ произведения $U_\lambda \times V_\lambda$ вписано в ω ;
- (4) $F(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \subset U_\lambda \subset \bigcup \eta_\lambda \subset D(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ для каждого $\lambda \in \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$.

Пусть

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_i) = \bigcup \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_i)\}.$$

Очевидно,

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \subset V(\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1})$$

для любой последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ индексов из Ω .

Так как Y есть нормальное $P(\theta)$ -пространство, то в Y существуют такие открытые F_σ -множества $C(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$, что

(5)

$$C(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \subset \text{cl } C(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \subset V(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$$

для любого набора $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ из Ω ;

$$(6) \text{ если } \bigcup \{V(\alpha_1, \dots, \alpha_i) : i \in \mathbb{N}\} = Y, \text{ то и } \bigcup \{C(\alpha_1, \dots, \alpha_i) : i \in \mathbb{N}\} = Y.$$

В покрытие $\{V_\lambda : \lambda \in \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_i)\}$ паракомпактного пространства $\text{cl } C(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ впишем локально конечное покрытие $\zeta'(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ множества типа F_σ в $\text{cl } C(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$. Тогда пересечения элементов покрытия $\zeta'(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ с множеством $C(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ открыты и имеют тип F_σ в Y , а система $\zeta(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ этих пересечений локально конечна в Y и покрывает множество $C(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$, т.е. $C(\alpha_1, \dots, \alpha_i) = \bigcup \zeta(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$.

Каждому элементу W системы $\zeta(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ поставим в соответствие какое-нибудь такое $\lambda(W) \in \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$, что $W \subset V_{\lambda(W)}$.

Тогда система

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_i) = \{U \times W : U \in \eta_{\lambda(W)}, W \in \zeta(\alpha_1, \dots, \alpha_i)\}$$

локально конечна в произведении $X \times Y$ (в силу конечности покрытий η_λ), вписана в покрытие ω , а множества U и W открыты и имеют тип F_σ в X и Y , соответственно.

Система $\varphi_i = \bigcup \{\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_i) : \alpha_1, \dots, \alpha_i \in \Omega\}$ локально конечна, так как локально конечно покрытие D_i . Следовательно, система $\varphi = \bigcup \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ является σ -локально конечной и вписанной в ω .

Осталось показать, что φ есть покрытие произведения $X \times Y$.

Пусть $x_0 \in X$. По условию (d) существует такая последовательность $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots$, что

$$C(x_0, \mathcal{F}_i) = F(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Множество $B = \bigcap \{F(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0) : i \in \mathbb{N}\}$ является (в силу определения Σ -сети) счетно компактным, а следовательно и бикompактным, в силу паракомпактности пространства X .

Пусть $y_0 \in Y$. Из бикompактности множества $B \times \{y_0\}$ вытекает существование такого открытого конечного покрытия η'_λ множества типа F_σ в X некоторой окрестности U'_λ бикompакта B и такой окрестности V_λ точки y_0 , что система $\{U \times V_\lambda : U \in \eta'_\lambda\}$ вписана в покрытие ω .

Поскольку $B = \bigcap \{F(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0) : i \in \mathbb{N}\}$ и

$$F(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0, \alpha_{i+1}^0) \subset F(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0)$$

согласно условию (b), то существует номер i , для которого

$$F(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0) \subset U'_\lambda.$$

Тогда для $\eta_\lambda = D(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0) \wedge \eta'_\lambda$ имеем

$$F(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0) \subset U_\lambda = U'_\lambda \cap D(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0) \subset \bigcup \eta_\lambda \subset D(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0).$$

Ясно, что $y_0 \in V_\lambda \subset V(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0)$.

Таким образом, $Y = \bigcup \{V(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0) : i \in \mathbb{N}\}$ и, в силу условия (6),

$$Y = \bigcup \{C(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0) : i \in \mathbb{N}\} = \bigcup \left\{ \bigcup \zeta(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0) : i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Поэтому существуют $j \in \mathbb{N}$ и $W \in \zeta(\alpha_1^0, \dots, \alpha_j^0)$, для которых $y_0 \in W$. Тогда

$$(x_0, y_0) \in B \times W \subset F(\alpha_1^0, \dots, \alpha_i^0) \times W \subset \left(\bigcup \eta_{\lambda(W)} \right) \times W.$$

Следовательно, существует элемент U системы $\eta_{\lambda(W)}$, содержащий точку x_0 . Для него $(x_0, y_0) \in U \times W \in \varphi(\alpha_1^0, \dots, \alpha_j^0)$. $\square$

Замечание 3.16. По ходу дела доказано, что в условиях теоремы 3.15 произведение $X \times Y$ паракомпактно (см. [66]).

Поскольку любое паракомпактное $\Sigma(\theta)$ -пространство является $P(\theta)$ -пространством (см. [66, доказательство теоремы 2.7]), то имеем следующее утверждение.

Следствие 3.17. *Произведение двух паракомпактов, являющихся $\Sigma(\theta)$ -пространствами для какого-либо θ , прямоугольно. Для этого произведения выполнено неравенство (+).*

Следствие 3.18 (см. [13]). *Произведение двух паракомпактов прямоугольно, если один из них является Σ -пространством, а другой — P -пространством. Для такого произведения выполнено неравенство (+).*

Следствие 3.19 (см. [13]). *Произведение двух паракомпактов прямоугольно, если они являются Σ -пространствами.*

Так как произведение двух паракомпактов, являющихся Σ -пространствами, вновь является паракомпактным Σ -пространством [66], то имеем следующее утверждение.

Следствие 3.20 (см. [13]). *Произведение любой конечной системы паракомпактов X_i , $i \in I$, являющихся Σ -пространствами, прямоугольно и выполняется неравенство ($\boxtimes$).*

Из следствия 3.20, предложения 2.35 и цилиндричности счетного произведения паракомпактов, являющихся Σ -пространствами [102], вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.21. *Тихоновское произведение любой счетной системы паракомпактов X_i , $i \in I$, являющихся Σ -пространствами, прямоугольно и для него выполнено неравенство ($\boxtimes$).*

Вопрос 3.22. Верны ли утверждения следствия 3.21 для тихоновского произведения любой системы паракомпактных Σ -пространств?

Частичный ответ на поставленный вопрос дает следующее утверждение.

Следствие 3.23. *Тихоновское произведение паракомпактов X_i , являющихся Σ -пространствами, $i \in I$, все конечные грани которого имеют счетную тесноту, прямоугольно (и для него выполнено неравенство ($\boxtimes$)).*

Действительно, цилиндричность рассматриваемых в следствии 3.23 произведений установлена в [102] (см. теорему 2.12), остальное следует из предложения 2.35 и следствия 3.20.

Следствие 3.24. *Тихоновское произведение паракомпактов X_i , являющихся Σ -пространствами с первой аксиомой счетности, $i \in I$, прямоугольно (и для него выполнено неравенство (+)).*

Отметим, что следствия 3.23 и 3.24 усиливают пункт (а) следствия 4 из [102]. В случае $\dim X_i = 0$ неравенство (+) в условиях следствия 3.24 получено в [103].

Во всех рассмотренных в п. 3.1 случаях (хотя требования накладывались только на сомножители) произведения конечной (или даже счетной) системы сомножителей были паракомпактными. Поэтому естественным кажется следующий вопрос.

Вопрос 3.25 (см. [14, 63]). Верно ли неравенство (+) для паракомпактного (и хаусдорфова) произведения $X \times Y$ (даже для $X \times X$)?

Сформулированный вопрос тесно связан со следующим вопросом (в случае прямоугольности поставленным еще в [13]).

Вопрос 3.26. Всегда ли паракомпактное (и хаусдорфово) произведение $X \times Y$ (даже квадрат $X \times X$) (кусочно) прямоугольно?

Частичный ответ на вопрос 3.25 и вопрос 3.26 таков.

Теорема 3.27 (см. [77]). *Если произведение $X \times Y$ тихоновских пространств вполне паракомпактно (в частности, сильно паракомпактно), то оно кусочно прямоугольно.*

Доказательство. Из предложения 1.37 вытекает d -правильность $X \times Y$ в $\beta X \times \beta Y$, а из предложения 2.31 вытекает кусочная прямоугольность $X \times Y$. $\square$

Замечание 3.28. В случае сильно паракомпактного произведения $X \times Y$ неравенство (+) установлено в [57].

В связи с результатами этого пункта см. п. 3.5.

3.2. Случай произведений двух пространств, когда условия накладываются на один из его сомножителей или на одну из его проекций. В п. 3.1 в основном рассматривались топологические произведения с сомножителями, на которые накладывались одинаковые требования. Однако при рассмотрении произведения двух сомножителей для выполнения неравенства (+) или даже для (кусочной) прямоугольности этого произведения бывает достаточно накладывать требования лишь на один сомножитель (при произвольности другого).

Теорема 3.29. *Если в топологическом произведении $X \times Y$ сомножитель Y есть локально бикompактный паракомпакт, то произведение $X \times Y$ прямоугольно и выполняется неравенство (+).*

Замечание 3.30. Прямоугольность рассматриваемого в теореме 3.29 произведения установлена в [13] в классе тихоновских пространств и в [43] для любого пространства X , а выполнение неравенства (+) доказано в [60] в классе тихоновских пространств, в [63] для любого пространства X и в [14] в классе любых пространств даже для паракомпактного σ -локально бикompактного (и не обязательно хаусдорфова) пространства Y .

Так как проекция $p : X \times Y \rightarrow X$ замкнута, если сомножитель Y бикompактен, то следующее утверждение пересекается с теоремой 3.29 по случаю, когда один из сомножителей бикompактен.

Теорема 3.31. *Если проекция $p : X \times Y \rightarrow X$ топологического произведения на сомножитель замкнута, то произведение $X \times Y$ прямоугольно и выполняется неравенство (+).*

Замечание 3.32. Прямоугольность произведения в теореме 3.31 установлена в [13, 15], а выполнение неравенства (+) — в [20, 21] (для тихоновских пространств) и в [15].

Теорема 3.31 может быть немного обобщена. Напомним, что непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ называется z -замкнутым, если замкнут в Y образ fA любого нуль-множества A в X (в [46] такие отображения названы Z -отображениями).

Теорема 3.33 (см. [15], [16, замечание 1]). *Утверждение теоремы 3.31 верно, если проекция $p : X \times Y \rightarrow X$ является z -замкнутой.*

Доказательство проводится так же, как доказательство теоремы 19 из [15], требуется только следующая лемма.

Лемма 3.34. *Все утверждения леммы 5 из [15] верны, если в ней проекция p не τ -замкнута, а z -замкнута и пространство R имеет счетный вес.*

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь непрерывность в наших условиях отображения g в [15, лемма 5].

Пусть $x \in X$ и $\epsilon > 0$. Возьмем счетное покрытие ν множества $f(\{x\} \times Y)$ открытыми в R множествами диаметра $< \epsilon$. Для $U \in \nu$ положим $O_U = f^{-1}U \cap q^{-1}q(f^{-1}U \cap p^{-1}x)$. Очевидно, множества O_U функционально открыты в $X \times Y$ и покрывают множество $\{x\} \times Y$. Поэтому (так как ν счетно) $O = \bigcup \{O_U : U \in \nu\}$ — функционально открытая окрестность этого множества. В силу z -замкнутости p существует такая окрестность Ox точки x , что $p^{-1}Ox \subset O$. Дальнейшее протекает так же, как в доказательстве леммы 5 из [15]. $\square$

Отметим, что в предпоследнем предложении доказательства леммы 5 из [15] имеется опечатка (надо R заменить на S).

Из леммы 3.34 сразу же (как в [15]) выводится [15, лемма 6] с заменой в ней τ -замкнутости p на z -замкнутость. Далее доказательство теоремы 3.33 копирует доказательство теоремы 19 из [15]. Отметим еще, что как [15, следствие 9] доказывается следующее утверждение: $\tau(X \times Y) = \tau X \times \tau Y$, если проекция $p : X \times Y \rightarrow X$ является z -замкнутой.

Замечание 3.35. В условиях теоремы 3.33 и для тихоновского Y неравенство (+) было установлено в [69].

Перейдем к применениям теоремы 3.33.

Ниже *псевдокомпактным* будет называться такое (не обязательно тихоновское) пространство, из любого счетного функционально открытого покрытия которого можно выбрать конечное подпокрытие. Нетрудно показать, что из любого σ -локально конечного функционально открытого покрытия псевдокомпактного пространства также можно выбрать конечное подпокрытие.

Очевидно, все счетнокомпактные пространства псевдокомпактны в этом смысле, а псевдокомпактность в этом смысле вместе с тихоновостью эквивалентна псевдокомпактности в обычном смысле.

В связи с теоремой 3.33 интерес представляет следующее утверждение.

Теорема 3.36. Для псевдокомпактного пространства Y , произведения $X \times Y$ и проекции $p : X \times Y \rightarrow X$ следующие условия эквивалентны:

- (1) проекция p является z -замкнутой;
- (2) произведение $X \times Y$ прямоугольно.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) установлено в теореме 3.33.

Докажем импликацию (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть F — нуль-множество в произведении $X \times Y$. Тогда множество $O = X \times Y \setminus F$ функционально открыто. Поэтому существует σ -локально конечная в O система ω , состоящая из функционально открытых прямоугольников произведения $X \times Y$ и такая, что $\bigcup \omega = O$. Если $x \in X \setminus pF$, то $\Phi = p^{-1}x \subset O$. Из псевдокомпактности пространства Φ вытекает существование конечной подсистемы φ системы ω , покрывающей множество Φ . Так как φ состоит из функционально открытых прямоугольников, то существует такая функционально открытая окрестность V точки x , что $p^{-1}V \subset \bigcup \varphi \subset O$. $\square$

Заметим, что доказывая импликацию (2) $\Rightarrow$ (1), мы доказали, что множество pF не только замкнуто, но даже является пересечением нуль-множеств.

Установим теперь один случай, когда для псевдокомпактного пространства Y проекция $p : X \times Y \rightarrow X$ является z -замкнутой.

Лемма 3.37. Проекция $p : X \times Y \rightarrow X$ произведения псевдокомпактного пространства Y на бикompактное пространство X является z -замкнутой.

Доказательство. Пусть F является нуль-множеством в $X \times Y$ и $f : X \times Y \rightarrow I = [0, 1]$ — такая непрерывная функция, что $F = f^{-1}(0)$. В силу бикompактности пространства X проекция $q : X \times Y \rightarrow Y$ замкнута. Тогда по лемме 3.34 (или по [15, лемма 5]) существует такое метризуемое пространство S и такие непрерывные отображения $g : Y \rightarrow S$ и $h : X \times S \rightarrow I$, что g есть сюръекция и $f = h \circ (\text{id}_X \times g)$. Из псевдокомпактности Y и метризуемости S вытекает бикompактность S . Следовательно, проекция $\text{pr} : X \times S \rightarrow X$ замкнута. Поэтому из замкнутости множества $(\text{id}_X \times g)F = h^{-1}(0)$ в $X \times S$ вытекает замкнутость множества $pF = \text{pr} \circ (\text{id}_X \times g)F$ в X . $\square$

Из доказанной леммы сразу же вытекает следующая теорема.

Теорема 3.38. Для k -пространства X и псевдокомпактного пространства Y проекция $p : X \times Y \rightarrow X$ является z -замкнутой (а произведение $X \times Y$ — прямоугольным).

В классе тихоновских пространств это утверждение было указано в [94, замечание A.1] как неявно полученное в [88].

Псевдокомпактом будем называть псевдокомпактное тихоновское пространство.

Теорема 3.39. *Если тихоновское произведение $X = \prod\{X_i : i \in I\}$ является псевдокомпактом, то оно прямоугольно.*

Доказательство. По теореме Гликсберга (см. [26, 3.12.20(d)]), $\beta X = \prod\{\beta X_i : i \in I\}$. Поэтому X является C^* -вложенным (а значит, и d -расположенным) в $\prod\{\beta X_i : i \in I\}$. Остальное следует из предложения 2.31. $\square$

Для получения более общих, чем в теоремах 3.31 и 3.33, утверждений нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3.40. *Если подмножество Y пространства Z является C^* -вложенным (соответственно, C -вложенным), а ограничение p на подпроизведение $X \times Y$ проекции $q : X \times Z \rightarrow X$ является z -замкнутым, то подпроизведение $X \times Y$ является C^* -вложенным (соответственно, C -вложенным) в произведение $X \times Z$.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение $X \times Y$ в пространство R , являющееся отрезком или, соответственно, прямой.

Из C^* -вложенности (соответственно, C -вложенности) Y в Z следует, что $\tau_Z(Y) \equiv \tau Y$ и множество τY является C^* -вложенным (соответственно, C -вложенным) в τZ . Из z -замкнутости p вытекает z -замкнутость ограничения на $X \times \tau Y$ проекции произведения $X \times \tau Z$ на сомножитель X . Как уже отмечалось, из z -замкнутости p вытекает соотношение $\tau(X \times Y) = \tau X \times \tau Y$. Поэтому существует такое непрерывное отображение $\varphi : \tau X \times \tau Y \rightarrow R$, что $f = \varphi \circ (\tau_X \times \tau_Y)$. Следовательно, для $\psi = \varphi \circ (\tau_X \times \text{id}_{\tau Y})$ выполнено соотношение $f = \psi \circ (\text{id}_X \times \tau_Y)$. Если Ψ — непрерывное продолжение ψ на $X \times \tau Z$, то $\Psi \circ (\text{id}_X \times \tau_Z)$ — непрерывное продолжение f на $X \times Z$. Таким образом, наше утверждение осталось доказать в случае, когда Z является тихоновским пространством, что ниже будет предполагаться.

По лемме 3.34, существуют непрерывное продолжение F' отображения f на $X \times \beta Y$, метризуемое пространство S и непрерывные отображения $g : X \rightarrow S$ и $h : S \times \beta Y \rightarrow R$ такие, что $F' = h \circ (g \times \text{id}_{\beta Y})$. Из C^* -вложенности Y в Z следует, что $\text{cl}_{\beta Z} Y \equiv \beta Y$. Из паракомпактности пространства $S \times \beta Z$ и замкнутости множества $S \times \beta Y$ в нем вытекает существование непрерывного продолжения $H : S \times \beta Z \rightarrow R$ отображения h . Тогда $F = H \circ (g \times \text{id}_{\beta Z})$ — непрерывное продолжение F' на $X \times \beta Z$, а $F|_{X \times Z}$ — непрерывное продолжение f . $\square$

Заметим, что C -вложенность подмножества Y пространства Z обеспечивается, например, или нормальностью Z и замкнутостью Y в Z или тихоновостью Z и бикомпактностью Y .

Следствие 3.41. *Если тихоновское пространство Y является σ -бикомпактным, то для любого пространства X произведение $X \times Y$ является σ -прямоугольным и выполнено неравенство (+).*

Доказательство вытекает из леммы 3.40 и теорем 3.29 и 2.41.

Замечание 3.42. В условиях следствия 3.41 неравенство (+) установлено в [62]. Как уже отмечалось, в условиях этого следствия произведение $X \times Y$ не обязано быть прямоугольным.

Следствие 3.43. *Если нормальное пространство Y есть объединение счетной системы своих замкнутых псевдокомпактных (следовательно, счетно компактных) подмножеств, то для любого k -пространства X произведение $X \times Y$ является σ -прямоугольным и выполнено неравенство (+).*

Доказательство вытекает из леммы 3.40 и теорем 3.38 и 2.41.

Перейдем к дальнейшим обобщениям.

Из теоремы 3.31 вытекает очевидное следствие.

Следствие 3.44. *Если пространство Y обладает таким дискретным покрытием $\{Y_i : i \in I\}$, что ограничение на $X \times Y_i$ проекции $p : X \times Y \rightarrow X$ является z -замкнутым для любого i , то произведение $X \times Y$ прямоугольно и выполнено неравенство (+).*

Нам потребуется еще следующая лемма.

Лемма 3.45. Пусть подмножества Y_i , $i \in I$, пространства Y являются C^* -вложенными, а дискретная в Y система открытых множеств O_i такова, что Y_i функционально отделимо от $Y \setminus O_i$, $i \in I$. Если для пространства X ограничение на $X \times Y_i$ проекции $p : X \times Y \rightarrow X$ является z -замкнутым для каждого i , то множество $X \times \bigcup\{Y_i : i \in I\}$ является C^* -вложенным в $X \times Y$.

Доказательство. Пусть $T = \bigcup\{Y_i : i \in I\}$ и функция $f : X \times T \rightarrow [0, 1]$ непрерывна. Тогда по лемме 3.40 для каждого i функцию $f_i = f|_{X \times Y_i} : X \times Y_i \rightarrow [0, 1]$ можно непрерывно продолжить в функцию $g_i : X \times O_i \rightarrow [0, 1]$. По условию, для любого i существует непрерывная функция $h_i : Y \rightarrow [0, 1]$, обладающая свойством $h_i^{-1}(0) \supset Y \setminus O_i$, $h_i^{-1}(1) \supset Y_i$.

Для $(x, y) \in X \times Y$ положим $\varphi_i(x, y)$ равным нулю при $y \notin O_i$ и $g_i(x, y) \cdot h_i(y)$ при $y \in O_i$. Очевидно, функция φ_i непрерывна для любого i . Из дискретности системы множеств O_i вытекает непрерывность на $X \times Y$ функции $\varphi = \max\{\varphi_i : i \in I\}$. Из построения функции φ видно, что $\varphi|_{X \times T} = f$. $\square$

Следствие 3.46. Если коллективно нормальное (не обязательно хаусдорфово) пространство Y обладает таким замкнутым σ -дискретным покрытием Σ , что для пространства X и любого $T \in \Sigma$ проектирование произведения $X \times T$ на сомножитель X является z -замкнутым, то произведение $X \times Y$ является σ -прямоугольным и выполнено неравенство (+).

Доказательство вытекает из следствия 3.44, леммы 3.45 и теоремы 2.41.

Следствие 3.47. Если коллективно нормальное (не обязательно хаусдорфово) пространство Y есть счетное объединение своих замкнутых локально бикомпактных и паракомпактных подмножеств, то для любого пространства X произведение $X \times Y$ является σ -прямоугольным и выполняется неравенство (+).

Замечание 3.48. В условиях следствия 3.47 для хаусдорфова Y неравенство (+) было получено в [62, 63]. См. также теорему 3.29 и замечание 3.30.

Замечание 3.49. Относительно прямоугольности произведений, рассматриваемых в следствии 3.47, см. теорему 3.90.

Следствие 3.50. Если коллективно нормальное пространство Y обладает замкнутым σ -дискретным покрытием псевдокомпактными подмножествами, то произведение $X \times Y$ является σ -прямоугольным и неравенство (+) выполняется для любого k -пространства X .

Результаты этого пункта стоит дополнить двумя следующими, устанавливающими равенство

$$\dim X \times Y = \dim X + \dim Y. \quad (++)$$

Теорема 3.51 (см. [62, 63]). Равенство (++) верно, если

- (1) X есть паракомпакт, являющийся объединением счетной системы своих замкнутых локально бикомпактных подмножеств и $\dim Y = 1$;
- (2) X есть CW -комплекс, а пространство Y — любое.

Следствие 3.52 (см. [61, 63]). Для отрезка $I = [0, 1]$ и любого пространства X

$$\dim X \times I = \dim X + 1.$$

3.3. Случай, когда один из сомножителей метризуем или является совершенным прообразом метризуемого пространства. До этого момента мы получали достаточные условия для (кусочной) прямоугольности топологических произведений и для выполнения неравенств ($\boxtimes$) и (+), накладывая, в основном, ограничения только на сомножители (или одну из проекций). Однако имеется довольно много результатов о прямоугольности произведений и неравенстве (+), когда ограничения (типа той или иной отделимости или свойства типа компактности) накладываются на само произведение (хотя, разумеется, из них вытекают и результаты с ограничениями только на сомножители). Отправным результатом здесь было следующее утверждение Ю. Кодамы [50] (доказанное им в классе тихоновских пространств).

Теорема 3.53. *Если топологическое произведение метризуемого пространства X на пространство Y нормально и счетно паракомпактно (но не обязательно является T_1 -пространством), то выполняется неравенство $(+)$.*

Сформулированная теорема вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3.54. *Если топологическое произведение $X \times Y$ нормально и счетно паракомпактно (но не обязательно является T_1 -пространством), а сомножитель X метризуем, то это произведение $X \times Y$ прямоугольно.*

Доказательство. Рассмотрим функционально открытое в $X \times Y$ множество O . Фиксируем в X базу B , распадающуюся в объединение дискретных систем B_n , $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $U \in B$ в Y существует такое максимальное открытое в Y множество $V(U)$, что $U \times V(U) \subset O$. Очевидно, $O = \bigcup \{U \times V(U) : U \in B\}$. Пусть $O_n = \bigcup \{U \times V(U) : U \in B_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. В силу функциональной открытости O , а также нормальности и счетной паракомпактности $X \times Y$ в покрытие $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ множества O можно вписать его открытое счетное покрытие $\{O_{nk} : n, k \in \mathbb{N}\}$ такое, что $\text{cl}_{X \times Y} O_{nk} \subset O_n$, $n, k \in \mathbb{N}$. Для каждого $U \in B$ через $U_n(U)$ обозначим, если он существует, единственный элемент системы B_n , содержащий U . Для $U \in B$ и каждой пары (n, k) , $n, k \in \mathbb{N}$, если множество $U_n(U)$ существует, через $V_{nk}(U)$ обозначим максимальное открытое в Y множество, для которого $U \times V_{nk}(U) \subset O_{nk}$. Ясно, что

$$U \times \text{cl} V_{nk}(U) \subset (U \times Y) \cap \text{cl}(U \times V_{nk}(U)) \subset (U \times Y) \cap \text{cl} O_{nk} \subset (U \times Y) \cap O_n = U \times V(U_n(U)).$$

Следовательно, $\text{cl} V_{nk}(U) \subset V(U_n(U))$. Поэтому в Y существует такое функционально открытое множество $W_{nk}(U)$, что

$$\text{cl} V_{nk}(U) \subset W_{nk}(U) \subset V(U_n(U)).$$

Отсюда следует, что

$$U \times W_{nk}(U) \subset U_n(U) \times V(U_n(U)) \subset O_n \subset O.$$

Нетрудно усмотреть, что система $\omega = \{U \times W_{nk}(U) : U \in B, n, k \in \mathbb{N}\}$, состоит из функционально открытых прямоугольников, σ -дискретна в $X \times Y$ и $\bigcup \omega = O$. $\square$

Замечание 3.55. В классе тихоновских пространств теорема 3.54 установлена в [12], однако имевшееся в виду в [12] доказательство теоремы 3.54 только что воспроизведено, и оно аксиому T_1 в Y не использует.

Замечание 3.56. В [87] показано, что если произведение $X \times Y$ метризуемого пространства X на хаусдорфово пространство Y нормально, то или это произведение счетно паракомпактно, или пространство X дискретно. Следовательно, в классе хаусдорфовых пространств в теоремах 3.53 и 3.54 требование счетной паракомпактности произведения $X \times Y$ можно опустить.

Однако условие нормальности вместе с условием счётной паракомпактности в случае хаусдорфовости сомножителя Y в теоремах 3.53 и 3.54 отбросить нельзя (см. раздел 4).

Следствие 3.57 (см. [70]). *Произведение метризуемого пространства X на нормальное P -пространство (в смысле Мориты, [59]) Y прямоугольно.*

Следствие 3.58. *Произведение метризуемого пространства X на совершенно нормальное пространство Y прямоугольно.*

В [75] следующим образом дан полный ответ на вопрос, когда произведение двух пространств прямоугольно, если один из сомножителей метризуем, а второй является тихоновским.

Для кардинального числа λ подмножество пространства X называется λ -функционально открытым, если оно представляет собой объединение менее чем λ функционально открытых множеств. Замыкание λ -функционально открытого множества называется λ -замкнутым каноническим ($\equiv$ регулярным) множеством. Для $n \in \omega + 1$ пусть λ^n обозначает множество всех функций из n в λ . Для $f \in \lambda^n$ и $m \in n$ пусть $f|_m$ обозначает ограничение f на m ; если f — продолжение $g \in \lambda^m$, то будем писать $g \subset f$. Положим $\lambda^{<\omega} = \bigcup \{\lambda^n : n \in \omega\}$. Семейство $\{F(f) : f \in \lambda^{<\omega}\}$ подмножеств пространства называется монотонным, если $F(f') \subset F(f)$ при $f \subset f'$.

Определение 3.59 (см. [75]). Пространство Y называется R -пространством, если для каждого кардинального числа λ и каждого монотонного семейства $\{F(f) : f \in \lambda^{<\omega}\}$ канонических ($\equiv$ регулярных) замкнутых в Y множеств существует семейство $\{Z(f) : f \in \lambda^{<\omega}\}$, состоящее из 0-множеств пространства Y и удовлетворяющее следующим условиям:

- (O₁) $F(f) \subset Z(f)$ для каждого $f \in \lambda^{<\omega}$,
- (O₂) если $g \in \lambda^\omega$ и $\bigcap \{F(g|_n) : n \in \omega\} = \emptyset$, то $\bigcap \{Z(g|_n) : n \in \omega\} = \emptyset$.

Теорема 3.60 (см. [75]). Для тихоновского пространства Y следующие утверждения эквивалентны:

- (1) Y является R -пространством;
- (2) произведение $X \times Y$ прямоугольно для любого метризуемого пространства X ;
- (3) произведение $X \times Y$ является z -вложенным в произведение $X \times \beta Y$ для любого метризуемого пространства X .

В [75] указывается, что R -пространствами являются:

- (i) все тихоновские $0z$ -пространства [28] ($\equiv$ тихоновские совершенно $\mathcal{K}$ -нормальные пространства [24]) и, в частности, все совершенно нормальные и все экстемально несвязные пространства, а также все тихоновские произведения метризуемых пространств;
- (ii) все тихоновские прообразы при совершенных отображениях нормальных P -пространств в смысле Мориты [59];
- (iii) все M' -пространства в смысле Исиваты [45] (т.е. C -вложенные подпространства произведений бикомпактов на метризуемые пространства), в частности, псевдокомпактные пространства, а также тихоновские M -пространства в смысле Мориты, т.е. тихоновские квазисовершенные прообразы метризуемых пространств.

Напомним, что пространство называется σ -локально бикомпактным, если оно есть объединение счетной системы своих замкнутых локально бикомпактных подмножеств, и *слабым cb -пространством* [54], если для каждой убывающей с пустым пересечением последовательности канонических ($\equiv$ регулярных) замкнутых подмножеств F_n этого пространства существует последовательность с пустым пересечением нуль-множеств Z_n этого пространства такая, что $F_n \subset Z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Все R -пространства и все счетно паракомпактные нормальные хаусдорфовы пространства являются слабыми cb -пространствами.

Теорема 3.61 (см. [75]). Для тихоновского пространства Y следующие утверждения эквивалентны:

- (1) Y является слабым cb -пространством;
- (2) произведения $X \times Y$ являются прямоугольными для любого метризуемого σ -локально бикомпактного пространства X ;
- (3) произведение $X \times Y$ является z -вложенным в произведение $X \times \beta Y$ для любого метризуемого σ -локально бикомпактного пространства X .

Как уже отмечалось, существуют счетное метризуемое с одной неизолированной точкой пространство X и коллективно нормальное пространство Y , произведение которых не прямоугольно.

Задача 3.62. Дать внутреннюю характеристику тех (тихоновских, нормальных, паракомпактных и т. д.) пространств, произведения которых на любые метризуемые пространства (σ -)кусочно прямоугольны или σ -прямоугольны.

Перейдем к обобщениям теоремы 3.54.

Теорема 3.63 (см. [15, предложение 11]). Если произведение $X \times Y$ прямоугольно, то прямоугольно и произведение $X \times Y \times C$ для любого бикомпактного пространства C . (В частности, произведение $X \times Y \times C$ прямоугольно, если пространство X метризуемо, произведение $X \times Y$ нормально и счетно паракомпактно, а пространство C бикомпактно.)

Нам потребуются также следующие два утверждения.

Лемма 3.64. Пусть дано непрерывное отображение $f : X \times Y \rightarrow R$. Если множество S всюду плотно в X , а пространство R хаусдорфово, то для диагонального произведения $g : Y \rightarrow \Pi = \prod \{R_x = R : x \in S\}$ отображений $g_x : Y \rightarrow (R_x = R)$, определяемых равенствами $g_x y = f(x, y)$, $y \in Y$, и множества $T = (\text{id}_X \times g)X \times Y$ существует (не обязательно непрерывное) отображение $h : T \rightarrow R$ такое, что $f = h \circ (\text{id}_X \times g)$. Кроме того, $\text{pr}_X|_T = p \circ (\text{id}_X \times g)$, где pr_X — проекция произведения $X \times Y$ на сомножитель X , а p — ограничение на T проекции произведения $X \times \Pi$ на сомножитель X .

Доказательство. Соотношение $\text{pr}_X|_T = p \circ (\text{id}_X \times g)$ очевидно. Докажем существование отображения h .

Пусть $x_j \in X$, $y_j \in Y$, $j = 1, 2$, и

$$(\text{id}_X \times g)(x_1, y_1) = (\text{id}_X \times g)(x_2, y_2).$$

Тогда $x_1 = x_2$ и $gy_1 = gy_2$. Значит, $g_x y_1 = g_x y_2$ для всех $x \in S$. Пусть O_j — окрестность точки $f(x_j, y_j)$. Найдем окрестности U и V_j точек $x_1 = x_2$ и y_j соответственно так, что $f(U \times V_j) \subset O_j$, $j = 1, 2$. Возьмем $x \in U \cap S$. Тогда

$$O_1 \ni f(x, y_1) = g_x y_1 = g_x y_2 = f(x, y_2) \in O_2.$$

Следовательно, $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ и поэтому $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Отсюда следует существование нужного отображения h . $\square$

Лемма 3.65. Пусть отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : X \rightarrow Z$ непрерывны, отображение g квазисовершенно (соответственно, совершенно) и пространство Y хаусдорфово и наследственно паракомпактно (соответственно, хаусдорфово). Тогда диагональное произведение $\Delta = f \Delta g : X \rightarrow Y \times Z$ квазисовершенно (соответственно, совершенно).

Доказательство. Пусть множество F замкнуто в X и $t = (y, z) \in Y \times Z \setminus \Delta F$. Через p и q обозначим проекции произведения $Y \times Z$ на сомножители Y и Z соответственно.

Если $z = qt \notin q \circ \Delta F = gF$, то, силу замкнутости g , множество $O_z = Y \setminus gF$ является окрестностью точки z . Следовательно, $q^{-1}O_z$ есть окрестность точки t , не пересекающаяся с ΔF .

Пусть $z \in q \circ \Delta F = gF$. Тогда множества $g^{-1}z$ и $\Phi = \Delta(g^{-1}z) = q^{-1}z \cap \Delta X$ счетно компактны (бикомпактны) и $t \notin \Phi$. Из наследственной паракомпактности и хаусдорфовости (из хаусдорфовости) Y следует, что множество $p\Phi$ бикомпактно и замкнуто в X . Кроме того, так как $t \in q^{-1}z \supset \Phi$, то бикомпакт $p\Phi$ не содержит точку $y = pt$. Возьмем непересекающиеся окрестности O и U бикомпакта $p\Phi$ и точки y соответственно. Тогда

$$(\Delta F \cap p^{-1}O) \cap p^{-1}U = \emptyset, \quad (\Delta X \setminus p^{-1}O) \cap q^{-1}z = \emptyset.$$

Следовательно, множества

$$(F \setminus \Delta^{-1}p^{-1}O) = F \setminus f^{-1}O, \quad q(\Delta F \setminus p^{-1}O) = q\Delta(F \setminus f^{-1}O) = g(F \setminus f^{-1}O)$$

замкнуты в X и Z соответственно и $z \notin q(\Delta F \setminus p^{-1}O)$. Таким образом, $V = Z \setminus q(\Delta F \setminus p^{-1}O)$ — окрестность точки z , а $W = q^{-1}V \cap p^{-1}U$ — окрестность точки t такая, что

$$W \cap \Delta F = W \cap ((\Delta F \setminus p^{-1}O) \cup (\Delta F \cap p^{-1}O)) = \emptyset.$$

Замкнутость отображения Δ доказана. Докажем его послойную счетную компактность (бикомпактность).

Пусть $t = (y, z) \in \Delta F$. Тогда множество $g^{-1}z$ счетно компактно (бикомпактно). Так как отображение $p : q^{-1}z \rightarrow Y$ является гомеоморфизмом, то пространство $q^{-1}z$ хаусдорфово, множество $\{t\}$ замкнуто в нем, а множество $\Delta^{-1}t$ замкнуто в $g^{-1}z$ и поэтому счетно компактно (бикомпактно). $\square$

Напомним, что произведение нормального счетно паракомпактного (но не обязательно T_1 -) пространства на метризуемый компакт нормально и счетно паракомпактно.

Теорема 3.66. Пусть пространство X сепарабельно, а произведение $X \times Y_0$ нормально, счетно паракомпактно и прямоугольно. Тогда произведение $X \times Y$ также прямоугольно, если (1) существует совершенное отображение $\varphi : Y \rightarrow Y_0$ или (2) существует квазисовершенное отображение $\varphi : Y \rightarrow Y_0$ и пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Доказательство. Возьмем функционально открытое в $X \times Y$ множество O . Существует непрерывная функция $f : X \times Y \rightarrow I = [0, 1]$ такая, что $O = f^{-1}(0, 1]$. Фиксируем в X счетное всюду плотное множество S . По лемме 3.64 можно найти непрерывное отображение $g : Y \rightarrow Q = \prod \{I_x = I : x \in S\}$ и, для $T = (\text{id}_X \times g)X \times Y$, отображение $h' : T \rightarrow I$, такие, что

$$f = h' \circ (\text{id}_X \times g), \quad \text{pr}_X|_T = p \circ (\text{id}_X \times g),$$

где, соответственно, pr_X — проекция произведения $X \times Y$ на X , а p — ограничение на T проекции произведения $X \times Q$ на сомножитель X . Согласно лемме 3.65 отображение $\Delta = g\Delta\varphi : Y \rightarrow Q \times Y_0$ совершенно в случае (1) и квазисовершенно в случае (2). Отсюда вытекает в случае (1) совершенность, а в случае (2) (из первой аксиомы счетности в X) квазисовершенство отображения

$$\psi = \text{id}_X \times \Delta : X \times Y \rightarrow X \times Q \times Y_0$$

и, следовательно, замкнутость множества $Z = \psi(X \times Y) = X \times \Delta Y$ в $X \times Q \times Y_0$. Из счетной паракомпактности и нормальности произведения $X \times Y_0$ и метризуемости и бикompактности Q вытекает нормальность и счетная паракомпактность произведения $X \times Q \times Y_0$. Пусть π — проекция произведения $X \times Q \times Y_0$ на сомножитель $X \times Q$. Тогда для $h'' = h' \circ \pi$ имеем

$$h'' \circ \psi = h' \circ \pi \circ (\text{id}_X \times (g\Delta\varphi)) = h' \circ (\text{id}_X \times g) = f.$$

Из непрерывности f и замкнутости (следовательно, факторности) отображения $\psi : X \times Y \rightarrow Z$ вытекает непрерывность отображения $h''|_Z$. Нормальность пространства $X \times Q \times Y_0$ и замкнутость в нем множества Z позволяет найти непрерывное продолжение $h : X \times Q \times Y_0 \rightarrow I$ функции $h''|_Z$.

Множество $O' = h^{-1}(0, 1]$ функционально открыто в $X \times Q \times Y_0$ и $O = \psi^{-1}O'$. Согласно теореме 3.63 произведение $X \times Q \times Y_0$ прямоугольно. Поэтому существует σ -локально конечная в $X \times Q \times Y_0$ система λ , состоящая из функционально открытых прямоугольников вида $V \times W$, $V \subset X$, $W \subset Q \times Y_0$, такая, что $\bigcup \lambda = O'$. Тогда система $\psi^{-1}\lambda$ состоит из функционально открытых прямоугольников вида $\psi^{-1}(V \times W) = V \times (g\Delta\varphi)^{-1}W$. Эта система σ -локально конечна в $X \times Y$ и $\bigcup \psi^{-1}\lambda = O$. $\square$

Следствие 3.67. Пусть пространство X_0 метризуемо, а произведение $X_0 \times Y_0$ нормально и счетно паракомпактно. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) произведение $X_0 \times Y$ прямоугольно, если пространство X_0 сепарабельно и существует квазисовершенное отображение $\varphi : Y \rightarrow Y_0$;
- (2) произведение $X \times Y_0$ прямоугольно, если пространство Y_0 сепарабельно и существует совершенное (квазисовершенное, если Y_0 удовлетворяет первой аксиоме счетности) отображение $\varphi : X \rightarrow X_0$.

Замечание 3.68. Если в следствии 3.67 Y_0 является T_1 -пространством, то его утверждения верны и без требования счетной паракомпактности $X_0 \times Y_0$ (см. замечание 3.56).

Следствие 3.69. Если пространство X сепарабельно и метризуемо, а Y_0 является нормальным $P(2)$ -пространством (в частности, P -пространством) в смысле Мориты, то для любого квазисовершенного отображения $\varphi : Y \rightarrow Y_0$ произведение $X \times Y$ прямоугольно.

Усложнение доказательства теоремы 3.66 позволяет получить следующее ее частичное обобщение.

Напомним, что пространство X называется σ -пространством [76], если в нем существует σ -локально конечная сеть. В классе регулярных пространств σ -пространства характеризуются тем, что в них существует σ -дискретная сеть [71].

Теорема 3.70. Пусть X является хаусдорфовым паракомпактным σ -пространством. Если произведение $X \times Y_0$ нормально, счетно паракомпактно и прямоугольно, а отображение $\varphi : Y \rightarrow Y_0$ (1) совершенно или (2) квазисовершенно и в этом случае X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то произведение $X \times Y$ также прямоугольно.

Доказательство. Возьмем функционально открытое в $X \times Y$ множество G . Пусть непрерывная функция $f : X \times Y \rightarrow I = [0, 1]$ такова, что $G = f^{-1}(0, 1]$.

Возьмем в X сеть $\mathcal{B}'$, являющуюся объединением дискретных систем $\mathcal{B}'_i$, $i \in \mathbb{N}$. Для каждого $O' \in \mathcal{B}'$ возьмем точку $x_{O'} \in O'$ и функционально открытое множество O так, что $O' \subset O$ и для каждого i система $\mathcal{B}_i = \{O : O' \in \mathcal{B}'_i\}$ дискретна. Положим $g_O(y) = f(x_{O'}, y)$, $y \in Y$ и $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_i : i \in \mathbb{N}\}$. Через $g : Y \rightarrow \Pi = \prod \{I_O = I : O \in \mathcal{B}\}$ обозначим диагональное произведение отображений $g_O : Y \rightarrow I_O$. Пусть $T = (\text{id}_X \times g)X \times Y \subset X \times \Pi$.

Для каждого i возьмем непрерывную функцию $\psi_i : X \rightarrow I_i = [0, 1]$ с $\psi_i^{-1}(0, 1] = \bigcup \mathcal{B}_i$ и положим функцию $\chi_i(x, y)$ равной 0 при $x \notin \bigcup \mathcal{B}_i$ и равной $\psi_i(x) \cdot g_O(y)$ при $x \in O \in \mathcal{B}_i$. В силу дискретности систем $\mathcal{B}_i$ функции $\chi_i : X \times Y \rightarrow I_i$ непрерывны. Отображение $\chi : X \times Y \rightarrow X \times (Q = \prod \{I_i : i \in \mathbb{N}\})$, ставящее в соответствие точке (x, y) точку $(x, (\chi_i(x, y))_{i=1}^\infty)$, очевидно, непрерывно и $q \circ \chi = \text{pr}_X$, где q — проекция произведения $X \times Q$ на сомножитель X , а pr_X — проекция произведения $X \times Y$ на сомножитель X . Покажем, что для $T' = \chi(X \times Y)$ существует (не обязательно непрерывное) отображение $h : T' \rightarrow I$, такое, что

$$h \circ \chi = f.$$

Пусть $x_j \in X$, $y_j \in Y$, $j = 1, 2$, и $\chi(x_1, y_1) = \chi(x_2, y_2)$. Тогда $x_1 = x_2$ и $\chi_i(x_1, y_1) = \chi_i(x_2, y_2)$, $i \in \mathbb{N}$. Возьмем окрестность W_j точки $f(x_j, y_j)$. Существуют окрестности U точки $x_1 = x_2$ и V_j точки y_j , такие, что $f(U \times V_j) \subset W_j$, $j = 1, 2$. Если $O \in \mathcal{B}_i$ и $x_1 = x_2 \in O' \subset U$, то

$$W_1 \ni f(x_O, y_1) = g_O(y_1) = \frac{\chi_i(x_1, y_1)}{\psi_i(x_1)} = \frac{\chi_i(x_2, y_2)}{\psi_i(x_2)} = f(x_O, y_2) \in W_2.$$

Следовательно, $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Поэтому $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Отсюда следует существование требуемого отображения h . Для $(x, z = (z_O)_{O \in \mathcal{B}}) \in X \times \Pi$ положим $g'(x, z)$ равным $(x, (t_i)_{i=1}^\infty)$, где $t_i = 0$, если $x \notin \bigcup \mathcal{B}_i$, и $t_i = \psi_i(x) \cdot z_O$, если $x \in O \in \mathcal{B}_i$. Нетрудно усмотреть, что отображение $g' : X \times \Pi \rightarrow X \times Q$ непрерывно. Кроме того, для любой точки $(x, y) \in X \times Y$ имеем

$$g' \circ (\text{id}_X \times g)(x, y) = g'(x, gy) = g'(x, (g_O(y))_{O \in \mathcal{B}}) = (x, (\chi_i(x, y))_{i=1}^\infty) = \chi(x, y),$$

т.е.

$$g' \circ (\text{id}_X \times g) = \chi.$$

Поэтому

$$h \circ g' \circ (\text{id}_X \times g) = h \circ \chi = f.$$

Пусть отображение $k : X \times Y \rightarrow (X \times Q) \times Y_0$ определяется формулой

$$k(x, y) = (\chi(x, y), \varphi y) = (x, (\chi_i(x, y))_{i=1}^\infty, \varphi y)$$

и r — проекция произведения $X \times Q$ на сомножитель Q . Тогда k — диагональное произведение отображений $\text{id}_X \times \varphi$ и $r \circ \chi$. Из совершенности отображения φ (соответственно, квазисовершенности отображения φ и первой аксиомы счетности в X) вытекает совершенность (соответственно, квазисовершенность) отображения $\text{id}_X \times \varphi$. Тогда согласно лемме 3.65 отображение k также совершенно (соответственно, квазисовершенно). Следовательно, множество $F = k(X \times Y)$ замкнуто в $X \times Q \times Y_0$. Если s — проекция произведения $X \times Q \times Y_0$ на подпроизведение $X \times Q$, то $s \circ k = \chi$ и $h \circ s \circ k = h \circ \chi = f$. Так как отображение k замкнуто, а отображение f непрерывно, то отображение $h \circ s|_F$ также непрерывно. Так как пространство $X \times Y_0$ нормально и счетно паракомпактно, а Q — метризуемый бикомпакт, то пространство $X \times Q \times Y_0$ также нормально и счетно паракомпактно. Поэтому отображение $h \circ s$ допускает непрерывное продолжение $H' : X \times Q \times Y_0 \rightarrow I$.

Для $(x, y) \in X \times Y$ положим $l(x, y) = (x, gy, \varphi y)$, т.е.

$$l = \text{id}_X \times (g\Delta\varphi) : X \times Y \rightarrow X \times \Pi \times Y_0.$$

Если Pr есть проекция произведения $X \times \Pi \times Y_0$ на подпроизведение $X \times \Pi$, то, очевидно, $\text{Pr} \circ l = \text{id}_X \times g$. Для отображения $g' \times \text{id}_{Y_0} : (X \times \Pi) \times Y_0 \rightarrow (X \times Q) \times Y_0$ имеем:

$$h \circ s \circ (g' \times \text{id}_{Y_0}) \circ l = h \circ g' \circ \text{Pr} \circ l = h \circ g' \circ (\text{id}_X \times g) = h \circ \chi = f.$$

Ясно, что отображение $H = H' \circ (g' \times \text{id}_{Y_0})$ является непрерывным продолжением отображения $(h \circ s) \circ (g' \times \text{id}_{Y_0})$ и $H \times l = f$. Поэтому $G = l^{-1}G'$, где $G' = H^{-1}(0, 1]$. Множество G' функционально открыто в произведении $X \times \Pi \times Y_0$, а это произведение прямоугольно согласно теореме 3.63. Поэтому существует σ -локально конечная в $X \times \Pi \times Y_0$ система ν функционально открытых прямоугольников произведения $X \times \Pi \times Y_0$, такая, что $\bigcup \nu = G'$. Так как $l = \text{id}_X \times (g \Delta \phi)$, то прообразы при отображении l функционально открытых прямоугольников произведения $X \times \Pi \times Y_0$ являются функционально открытыми прямоугольниками произведения $X \times Y$. $\square$

Следствие 3.71. Пусть пространство X метризуемо, а произведение $X \times Y_0$ нормально и счетно паракомпактно. Тогда для любого квазисовершенного отображения $\varphi : Y \rightarrow Y_0$ произведение $X \times Y$ прямоугольно. Если Y_0 является T_1 -пространством, то требование счетной паракомпактности пространства $X \times Y_0$ можно опустить.

Следствие 3.72. Если пространство X метризуемо, а Y_0 является нормальным P -пространством в смысле Мориты, то для любого квазисовершенного отображения $\varphi : Y \rightarrow Y_0$ произведение $X \times Y$ прямоугольно.

Замечание 3.73. Следствие 3.71 установлено для совершенного отображения φ в классе тихоновских пространств в [12, 13], а в классе хаусдорфовых пространств для нормального пространства Y это следствие может быть извлечено из [43, следствие 1] (см. также [63]).

Со следствием 3.67 связана следующая теорема.

Теорема 3.74. Пусть пространство X_0 метризуемо, произведение $X_0 \times Y$ нормально и хаусдорфово и существует совершенное отображение $\varphi : X \rightarrow X_0$. Тогда произведение $X \times Y$ прямоугольно.

Замечание 3.75. В таком виде теорема установлена в [15], в классе хаусдорфовых пространств она установлена также в [43].

Следствие 3.76. Пусть пространство X_0 метризуемо, пространство Y_0 хаусдорфово, произведение $X_0 \times Y_0$ нормально и существуют совершенное отображение $\varphi : X \rightarrow X_0$ и квазисовершенное отображение $\psi : Y \rightarrow Y_0$ нормального хаусдорфова пространства Y . Тогда произведение $X \times Y$ прямоугольно и выполнено неравенство (+).

Доказательство. Доказательство копирует доказательство следствия 1 из [43]. Предположим, что пространство X_0 не дискретно. Тогда согласно теореме из [87] пространство $X_0 \times Y_0$ счетно паракомпактно. Из квазисовершенности произведения тождественного отображения пространства X_0 и отображения ψ вытекает счетная паракомпактность произведения $X_0 \times Y$. Тогда согласно теореме Мориты [59] это произведение нормально. Применение следствия 3.71 заканчивает доказательство. $\square$

Замечание 3.77. Для хаусдорфова пространства X следствие 3.76 установлено в [43]. В [14] неравенство (+) установлено даже для σ -совершенного отображения φ в следствии 3.76.

Вопрос 3.78. Можно ли в следствии 3.76: отбросить требование хаусдорфовости пространства Y ; считать Y тихоновским; считать Y произвольным? Те же вопросы можно сформулировать лишь относительно неравенства (+) (и для совершенного отображения ψ) (см. [14, вопрос 3]). Те же вопросы можно задать для сепарабельных X и Y .

Из следствия 3.76 очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.79 (см. [13]). Пусть X — паракомпактное p -пространство (или M -пространство), произведение $X \times Y_0$ нормально и счетно паракомпактно и существует совершенное отображение нормального хаусдорфова пространства Y на Y_0 . Тогда произведение $X \times Y$ прямоугольно.

Следствие 3.80. Если произведение $X \times Y$ хаусдорфово, нормально и счетно паракомпактно, а X — паракомпактное R -пространство, то оно прямоугольно и выполнено неравенство (+).

Замечание 3.81. Неравенство (+) в условиях следствия 3.80 установлено в [20, 21].

Из теоремы 3.74 вытекает также следующее утверждение.

Следствие 3.82. Если пространство X обладает совершенным отображением на метризуемое пространство, а Y является нормальным R -пространством, то произведение $X \times Y$ прямоугольно.

Отметим, что в классе хаусдорфовых пространств, т.е. для случая паракомпактного R -пространства X , следствие 3.82 установлено в [43].

3.4. Случай двух сомножителей, один из которых лашневский. Напомним, что T_1 -пространство называется *лашневским*, если оно является замкнутым образом метризуемого пространства. Лашневские пространства очень близки к метризуемым и поэтому казалось весьма вероятным, что на них может быть распространена теорема 3.54. Следующие два результата А. Одинокова (теорема и пример) из [7] дают достаточно точный ответ на это предположение.

Теорема 3.83. Если произведение паракомпакта на лашневское пространство нормально, то это произведение прямоугольно.

Пример 3.84. Существует не прямоугольное совершенно нормальное произведение двух пространств, одно из которых лашневское и σ -метризуемое ($\equiv F_\sigma$ -метризуемое).

Стоит отметить, что неравенство (+) для примера 3.84 выполнено.

Следующий результат также получен в [7].

Теорема 3.85 (см. [75]). Если X — паракомпакт, то произведение $X \times Y$ прямоугольно для любого лашневского пространства Y тогда и только тогда, когда X является R -пространством.

Стоит отметить, что существует не нормальное произведение паракомпактного R -пространства и метризуемого пространства.

3.5. Случай нульмерных сомножителей. В этом пункте под нульмерностью пространства понимается его нульмерность в смысле размерности $\dim$.

Как уже отмечалось в разделе 2 (следствие 2.34), тихоновское произведение нульмерных сомножителей нульмерно тогда и только тогда, когда это произведение кусочно прямоугольно.

С. Мрувка, П. Никош и П. Рой, Р. Хит и Д. Латцер (см. [27, 73]) установили, что $\dim S^2 = 0$ для топологического квадрата S^2 стрелки Зоргенфрея S . В. Золотарев указал [13], что топологический квадрат S^2 не прямоугольно. Поэтому *топологический квадрат стрелки Зоргенфрея кусочно прямоугольно, но не прямоугольно*.

Мрувка [64] и Терасава [90] доказали равенства $\dim S^n = 0$ в случае $1 \leq n \leq \omega$.

В [90] указано, что, как отметил К. Морита, из нульмерности счетной степени стрелки S вытекает нульмерность любой ее степени (так как в силу сепарабельности стрелки S любая непрерывная вещественнозначная функция на ней факторизуется через ее счетную грань). Итак, *любая степень стрелки Зоргенфрея нульмерна*.

В [41] показано, что *любое подмножество произведения $S^\omega \times Y$ счетной степени стрелки S^ω на нульмерное метризуемое пространство Y нульмерно и любая степень сепарабельного подмножества произведения $S^\omega \times Y$ также нульмерна (в частности, нульмерна любая степень любого подпространства стрелки)*. В то же время, для достаточно больших α в S^α существуют замкнутые не нульмерные $\mathbb{N}$ -компактные подмножества.

В [42] пространство X названо *пространством Зоргенфрея*, если на X можно ввести такой линейный порядок, что базу его топологии образуют полуинтервалы вида $(a, b]$, $a, b \in X$, $a < b$. Там же пространство X названо *S -метризуемым*, если в любой его базе можно найти такие покрывающие X локально конечные системы D_n , что D_{n+1} вписана в D_n , $n \in \mathbb{N}$, и для любых двух

различных точек $x, y \in X$ найдутся непересекающиеся окрестности, являющиеся элементами системы $D = \bigcup \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$. В [42] показано, что *произведение счетной системы S -метризуемых пространств Зоргенфрея и нульмерного метризуемого пространства нульмерно.*

В [90] показано, что *произведение прямой Майкла (см. [56]) на пространство иррациональных чисел нульмерно.* Более того, *если Z — совершенно нормальное пространство, Q — его нульмерное подпространство и X — пространство, совпадающее с Z как множество, а открытыми в X являются множества вида $U \cup K$, где U открыто в Z и $K \cap Q = \emptyset$, то для любого нульмерного метризуемого пространства Y произведение $X \times Y$ нульмерно.*

В [89] показано, что только что упомянутое произведение прямой Майкла на пространство иррациональных чисел не прямоугольно (но в силу нульмерности кусочно прямоугольно).

В [89] получен даже следующий более общий результат.

Для тихоновского пространства X и его подмножества A *ханнеризацией X_A* называется множество X с топологией, образованной всеми множествами вида $U \cup K$, где U открыто в пространстве X и $K \subset A$.

Теорема 3.86 (см. [89]). *Пусть пространство X метризуемо (соответственно, совершенно нормально и обладает уплотнением d на метризуемое пространство) и $A \subset X$. Тогда эквивалентны следующие условия:*

- (1) *произведение $A \times X_A$ (соответственно, $(dA) \times X_A$) прямоугольно;*
- (2) *A имеет тип F_σ в X ;*
- (3) *ханнеризация X_A метризуема (соответственно, совершенно нормальна);*
- (4) *произведение $A \times X_A$ (соответственно, $(dA) \times X_A$) нормально.*

В [89] указывается, что видоизмененный вариант прямой Майкла дает *пример линделефова пространства M , произведение которого на сепарабельное метризуемое пространство X не прямоугольно (и не нормально).* В то же время, произведение абсолюта πM пространства M и пространства X не нормально, но прямоугольно, пространство πM линделефово, а отображение $\pi_M \times \text{id}_X$ совершенно (здесь π_M — каноническое отображение π_M на M). Таким образом, образ прямоугольного произведения при произведении совершенных отображений сомножителей может не быть прямоугольным произведением.

3.6. Еще некоторые случаи и условия (не)прямоугольности топологических произведений.

В [43] установлена простая связь функтора Тихонова τ и прямоугольности.

Теорема 3.87. *Произведение $X \times Y$ прямоугольно тогда и только тогда, когда $\tau(X \times Y) = \tau(X) \times \tau(Y)$ и произведение $\tau(X) \times \tau(Y)$ прямоугольно.*

В той же статье [43] установлены взаимоотношения прямоугольности и операции перехода от тихоновского пространства X к его пополнению по Дьедонне (т.е. пополнению по максимальной равномерности на X) μX .

Теорема 3.88. *Произведение тихоновских пространств $X \times Y$ прямоугольно тогда и только тогда, когда $\mu(X \times Y) = \mu(X) \times \mu(Y)$ и произведение $\mu(X) \times \mu(Y)$ прямоугольно. Если X и Y — тихоновские M -пространства в смысле Мориты, то прямоугольность $X \times Y$ равносильна соотношению $\mu(X \times Y) = \mu(X) \times \mu(Y)$.*

В [43] в следующих трех утверждениях выявлены интересные связи прямоугольности и паракомпактности.

Теорема 3.89. *Тихоновское пространство X паракомпактно тогда и только тогда, когда прямоугольно произведение $X \times Y$ для любого хаусдорфова и имеющего не более одной неизолированной точки пространства Y .*

Теорема 3.90. *Для тихоновского M -пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (a) *X есть σ -локально бикомпактный (т.е. являющийся счетным объединением своих замкнутых локально бикомпактных подпространств) паракомпакт;*
- (b) *произведение $X \times Y$ прямоугольно для любого паракомпакта Y ;*

(с) произведение $X \times Y$ паракомпактно для любого паракомпакта Y .

Отметим, что импликация (а) $\Rightarrow$ (с) для любого хаусдорфова пространства X установлено в [58].

Теорема 3.91. *Если для тихоновского пространства X и любого паракомпакта Y произведение $X \times Y$ прямоугольно, то для любого паракомпакта Y произведение $X \times Y$ паракомпактно.*

В связи с теоремой 3.90 в [43] отмечено, что одноточечная линделефикация L дискретного пространства мощности ω_1 удовлетворяет условиям (b) и (согласно теореме 3.91) (с) этой теоремы, но, очевидно, не удовлетворяет условию (а). Пространство L является простейшим примером C -разреженного пространства. Напомним, что пространство X называется C -разреженным, или *приводимым* [2], если его можно исчерпать следующим образом: удаляются все точки локальной бикомпактности сначала из X , затем из того, что осталось после первого удаления, затем из того, что осталось после второго удаления и т. д. (при помощи, быть может, трансфинитного процесса).

В [43] отмечено, что *произведение C -разреженного паракомпакта на любой паракомпакт прямоугольно (и паракомпактно)*. В то же время пространство рациональных чисел не C -разрежено, хотя и удовлетворяет условиям (а)–(с) теоремы 3.90.

В связи со сказанным естественна следующая задача.

Задача 3.92. Охарактеризовать класс Π тех тихоновских пространств, для которых равносильны условия (b) и (с) теоремы 3.90. Равносильны ли эти условия для тихоновского Σ -пространства (в смысле Нагами) X ?

Непосредственное отношение к теоремам 3.90 и 3.91 имеет доказанная в [43] следующая теорема.

Теорема 3.93. *Для тихоновского пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (а) X есть локально бикомпактный паракомпакт;
- (b) произведение $X \times Y$ прямоугольно для любого тихоновского пространства Y ;
- (с) произведение $X \times Y$ прямоугольно для любого пространства Y .

Вопрос 3.94. Можно ли установить аналоги теорем 3.91, 3.93 для σ -прямоугольности и (σ -) кусочной прямоугольности?

В [100] дано следующее определение.

Определение 3.95. Топологическое произведение $X \times Y$ называется *сильно прямоугольным*, если в каждое его локально конечное (эквивалентно, конечное) открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие из функционально открытых прямоугольников.

Хаусдорфово произведение $X \times Y$ сильно прямоугольно в следующих случаях:

- (1) пространство X метризуемо, а пространство $X \times Y$ нормально;
- (2) X и Y паракомпактны и X является M -пространством, а Y — P -пространством;
- (3) пространство $X \times Y$ линделефово.

Теорема 3.96 (см. [100]). *Если X и Y — паракомпакты и пространство X обладает σ -консервативным покрытием бикомпактами, то произведение $X \times Y$ сильно прямоугольно.*

В [101] показано, что если в теореме 3.96 паракомпактность Y заменить на субпаракомпактность и потребовать нормальность пространства $X \times Y$, то выполняется неравенство (+).

В той же статье указаны примеры паракомпактов X и X' , обладающими консервативными покрытиями из бикомпактов, и субпаракомпактных тихоновских пространств Y и Y' , таких, что произведение $X \times Y$ нормально и не паракомпактно, а произведение $X' \times Y'$ не прямоугольно.

В [74] эти примеры дополнены следующим результатом.

Теорема 3.97. *Если хаусдорфово нормальное пространство X не паракомпактно, то существует такой σ -локально бикомпактный паракомпакт, обладающий консервативным покрытием из конечных множеств, что произведение $X \times Y$ нормально и не прямоугольно. Если, дополнительно, пространство X совершенно нормально или коллективно нормально, то пространство $X \times Y$ таково же.*

В [74] отмечено, что в качестве X в теореме 3.97 можно взять субпаракомпактное нормальное и не паракомпактное пространство.

Следствием теоремы 3.97 является следующее утверждение (см. теоремы 3.89–3.91) [74]: *нормальное хаусдорфово пространство X паракомпактно тогда и только тогда, когда произведение $X \times Y$ прямоугольно для любого σ -локально бикompактного паракомпакта Y .*

В [34] А. Чигогидзе также использовал термин «сильная прямоугольность» следующим образом:

Определение 3.98. Тихоновское произведение X тихоновских пространств X_α , $\alpha \in A$, называется *сильно прямоугольным*, если любое функционально открытое в произведении X множество есть объединение счетной системы функционально открытых прямоугольников.

В [33] получены следующие утверждения:

- (1) *произведение $\prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ является сильно прямоугольным тогда и только тогда, когда оно z -вложено в произведение $\prod\{\beta X_\alpha : \alpha \in A\}$;*
- (2) *произведение счетного тихоновского без счетной базы пространства на дискретное пространство мощности 2^ω прямоугольно, но не сильно прямоугольно.*

4. ПРИМЕРЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ, РАЗМЕРНОСТЬ КОТОРЫХ БОЛЬШЕ СУММЫ РАЗМЕРНОСТЕЙ СОМНОЖИТЕЛЕЙ

Задача построения пространств X и Y со свойством

$$\dim X \times Y > \dim X + \dim Y$$

возникает вместе с желанием доказать неравенство $\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y$.

Однако, как мы видели, эта задача не имеет решения в достаточно общих классах пространств: сепарабельных метризуемых, метризуемых, бикompактных, вполне паракомпактных, паракомпактных p - или даже паракомпактных Σ -. В классе паракомпактов вопрос пока открыт. А вот в классе тихоновских и даже нормальных пространств соответствующие пространства X и Y были построены. Первое решение сформулированной задачи было дано М. Ваге [98, 99]. В предположении континуум-гипотезы он построил такое сепарабельное и локально бикompактное пространство X , что $\dim X = 0$, $\dim X^2 > 0$ и пространство X^2 совершенно нормально. Позднее обнаружилось, что доказательство нормальности пространства X^2 в [98] требует некоторых усовершенствований (см. [83, 94]). Однако если отказаться от требования равенства сомножителей, то остается верным следующий результат.

Теорема 1 (СН). *Существуют сепарабельные, локально счетные и локально бикompактные пространства X и Y такие, что*

$$\dim X \times Y > \dim X + \dim Y$$

и пространство $X \times Y$ является совершенно нормальным.

В [99] М. Ваге построил также пример *нульмерного сепарабельного метрического пространства X и нульмерного, линделефова и с первой аксиомой счетности пространства Y таких, что их произведение не сильно нульмерно.*

Модифицируя первый пример М. Ваге [98, 99], Т. Пшимушинский [81] построил без использования каких-либо теоретико-множественных предположений пример *сепарабельного, с первой аксиомой счетности и линделефова пространства X такого, что $\dim X = 0$, пространство X^2 нормально и $\dim X^2 > 0$.*

В этой же статье Т. Пшимушинского сформулированы следующие результаты.

Теорема 2. *Для каждого $l \in \mathbb{N}$ существует сепарабельное и с первой аксиомой счетности пространство X такое, что*

- (1) *пространство X^l линделефова и $\dim X^l = 0$;*
- (2) *пространство X^{l+1} нормально и $\dim X^{l+1} > 0$.*

Теорема 3. *Для каждого $l \in \mathbb{N}$ существует сепарабельное, с первой аксиомой счетности, локально бикompактное и локально счетное пространство X такое, что*

- (1) $\dim X^l = 0$;

(2) пространство X^{l+1} нормально и $\dim X^{l+1} > 0$.

Наиболее сильные и точные результаты, касающиеся неравенства $\dim X \times Y > \dim X + \dim Y$, получил К. Тсуда [91–94].

Теорема 4. Для каждого $n = 1, 2, \dots, \infty$ существуют такие сепарабельные, с первой аксиомой счетности, локально бикомпактные и локально счетные пространства $X(n)$ и $Y(n)$ такие, что $\dim X(n) = \dim Y(n) = 0$, произведение $X(n) \times Y(n)$ коллективно нормально и счетно паракомпактно, $\dim X(n) \times Y(n) = \text{Ind } X(n) \times Y(n) = n$. При этом пространство $X(\infty) \times Y(\infty)$ не слабо счетномерно, т.е. не есть счетное объединение своих конечномерных замкнутых подмножеств.

Теорема 5. Для каждого $n = 1, 2, \dots, \infty$ и целого $l \geq 1$ существует сепарабельное и с первой аксиомой счетности пространство X такое, что

- (1) пространство X^l линделефово и $\dim X^l = 0$;
- (2) пространство X^{l+1} нормально (даже коллективно нормально и счетно паракомпактно) и $\dim X^{l+1} = n$. При этом пространство X^{l+1} не слабо счетномерно при $n = \infty$.

Теорема 6 (CH). Для каждого $n = 1, 2, \dots, \infty$ существует такое сепарабельное, с первой аксиомой счетности, локально бикомпактное и локально счетное пространство $X(n)$, что $\dim X(n) = 0$, произведение $X(n)^2$ совершенно нормально и $\dim(X(n))^2 = \text{Ind}(X(n))^2 = n$. При этом пространство $X(\infty)^2$ не слабо счетномерно.

Теорема 7. Существуют такие нульмерное наследственно сепарабельное, наследственно линделефово пространство X и сильно нульмерное локально бикомпактное, сепарабельное, с первой аксиомой счетности и псевдокомпактное пространство Y , что их произведение не сильно нульмерно.

Отметим, что Р. Энгелькинг и Э. Поль [39] приводят в общих чертах доказательство теорем 4 и 6 при $n = \infty$, а теоремы 5 — при $n = \infty$, $l = 1$.

В связи с теоремой 4 К. Тсуда поставил следующий вопрос (см. [94, Вопрос 10.1]): возможно ли равенство $X(n) = Y(n)$? В [39, 81] утверждается, что ответ на этот вопрос положителен.

Приведем описание примеров нормальных произведений, размерность которых больше суммы размерностей сомножителей.

Везде ниже рассматриваются только тихоновские пространства. Через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных чисел, $\mathbb{N}^+$ обозначает множество $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ω , $\mathfrak{c}$ — начальные ординалы счетной мощности и мощности континуум соответственно, ω_1 — наименьший несчетный ординал. Соответствующие кардинальные числа обозначаем так же. Не более чем счетные множества будем называть просто счетными. Топологическое пространство X с топологией τ будет также обозначаться (X, τ) , при этом cl_X или cl_τ (int_X или int_τ , bd_X или bd_τ) означает замыкание (внутренность, границу) множества в пространстве (X, τ) . Для семейства множеств $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ и множества F обозначим $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\mathcal{U} \wedge F = \{U_\alpha \cap F : \alpha \in A\}$. Необходимые сведения о размерности можно найти в [1, 26]. Отметим, что терминам «нульмерность» и «сильная нульмерность» в [26] соответствуют термины «индуктивная нульмерность» и «нульмерность» в [1], а термину «слабая счетномерность» в [1] — термин «сильная счетномерность» в [38].

4.1. Свойства типа нормальности и паракомпактности пространств согласованных семейств. Для $m \in \mathbb{N}$ через Σ_m обозначим семейство, состоящее из всех непустых подмножеств множества $\{1, \dots, m\}$. Само множество $\{1, \dots, m\}$ будем обозначать через M .

Пусть $X_j = X$, $j = 1, \dots, m$, — m экземпляров произвольного множества X . Если $a \in \Sigma_m$, то $X^a = \prod \{X_s : s \in a\}$ и $\text{pr}_a : X^M \rightarrow X^a$ — естественная проекция.

Через λ_a обозначим топологию (не обязательно связанную со структурой произведения) на множестве X^a , $a \in \Sigma_m$. Если проекции $\text{pr}_a : (X^M, \lambda_M) \rightarrow (X^a, \lambda_a)$ непрерывны, $a \in \Sigma_m$, то в этом случае семейство $\{(X^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$ топологических пространств (X^a, λ_a) и проекций pr_a , $a \in \Sigma_m$, будем называть согласованным.

Лемма 4.1. Пусть $\{(X^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$ — согласованное семейство, и на множестве X введены топологии τ_j , $j = 1, \dots, m$ такие, что

$$\tau_M = \tau_1 \times \dots \times \tau_m \succ \lambda_M. \quad (T)$$

Тогда $\tau_a = \prod\{\tau_j : j \in a\} \succ \lambda_a$ для любого $a \in \Sigma_m$.

Доказательство. Пусть O — открытое подмножество (X^a, λ_a) и $x \in O$. Множество $U = \text{pr}_a^{-1}O$ открыто в пространстве (X^M, λ_M) . Выберем такую точку $y \in U$, что $\text{pr}_a(y) = x$. Так как $\tau_M \succ \lambda_M$, то у y существует такая окрестность $V = \prod\{V_j : j = 1, \dots, m\}$ из канонической базы произведения (X^M, τ_M) , что $y \in V \subset U$. Очевидно, что $x \in \text{pr}_a V \subset O$ и множество $\text{pr}_a V$ является элементом канонической базы произведения (X^a, τ_a) . Значит $\tau_a \succ \lambda_a$. $\square$

Т. Пшимушинский [80] ввел понятие n -мощности подмножеств конечных произведений, являющееся распространением на произведения понятия мощности и оказавшееся весьма полезным. Заметим, что идея n -мощности впервые встречается в работе Э. ван Дауэна [95, определение 6.1]. Сформулируем его в соответствии с нашими обозначениями.

Определение 4.2 (см. [80]). Для подмножества A произведения X^a , $a \in \Sigma_m$, где X — произвольное несчетное множество, определим его $|a|$ -мощность $|A|_{|a|}$ следующим образом:

$$|A|_{|a|} = \min \left\{ |Y| : A \subset \bigcup \left\{ \prod\{X_s : s < j, s \in a\} \times Y \times \prod\{X_s : s > j, s \in a\} : j \in a \right\} \right\}.$$

Будем говорить, что множество A имеет счетную (несчетную) $|a|$ -мощность, если $|A|_{|a|} \leq \omega$ ($|A|_{|a|} > \omega$). Для точки $p = (p_{s_1}, \dots, p_{s_{|a|}})$ произведения X^a через $\hat{p}$ обозначим множество $\{p_{s_1}, \dots, p_{s_{|a|}}\}$ координат точки p .

Замечание 4.3. Если $|a|$ -мощность множества A бесконечна, то определение 4.2 совпадает с оригинальным определением Т. Пшимушинского [80, определение 1, лемма 1] ($|A|_{|a|} = \max\{|B| : B \subset A \text{ и } \hat{p} \cap \hat{q} = \emptyset, p, q \in B, p \neq q\}$).

Определение 4.4. Отображение топологических пространств $f : X \rightarrow Y$ назовем *открытым в точке* $x \in X$, если $f(x) \in \text{int } f(Ox)$ для любой окрестности Ox точки x .

Для проекции $\text{pr}_a : (X^M, \lambda_M) \rightarrow (X^a, \lambda_a)$ и точки $x \in X^a$, $a \in \Sigma_m$, положим

$$R_a(x) = \left\{ t \in X^M : \text{pr}_a(t) = x \text{ и } \text{pr}_a \text{ открыто в точке } t \right\}.$$

При естественном отождествлении множеств $\text{pr}_a^{-1}(x)$ и $X^{M \setminus a} = \prod\{X_s : s \in M \setminus a\}$ (забываем о координатах, проиндексированных элементами из a) множество $R_a(x)$ можно рассматривать как подмножество произведения $X^{M \setminus a}$.

Лемма 4.5. Пусть $\{(X^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$ — согласованное семейство и выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned} &\text{для любых } a \in \Sigma_m \setminus M \text{ и } x \in X^a \text{ } |M \setminus a| \text{-мощность множества } R_a(x) \text{ (считаем,} \\ &\text{что } R_a(x) \subset X^{M \setminus a}) \text{ несчетна.} \end{aligned} \quad (S)$$

Тогда для любых $a, b \in \Sigma_m$, $b \subset a$, естественная проекция $\text{pr}_b^a : (X^a, \lambda_a) \rightarrow (X^b, \lambda_b)$ непрерывна.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in X^a$ и произвольную окрестность O ее образа $\text{pr}_b^a(x)$ в (X^b, λ_b) . В силу условия (S) существует точка $t \in X^M$ такая, что $\text{pr}_a(t) = x$ и $t \in R_a(x)$. Отображение pr_b является непрерывным, поэтому существует такая окрестность U точки t , что $\text{pr}_b(U) \subset O$. Из условия $\text{pr}_b^a \circ \text{pr}_a = \text{pr}_b$ имеем $\text{pr}_b^a(\text{pr}_a(U)) \subset O$. Так как $t \in R_a(x)$, то множество $\text{int } \text{pr}_a(U)$ является окрестностью точки x , для которой $\text{pr}_b^a(\text{int } \text{pr}_a(U)) \subset O$. Тем самым доказана непрерывность проекции в произвольной точке, а значит и в целом. $\square$

Лемма 4.6. Пусть $\{(X^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$ — согласованное семейство, удовлетворяющее условию (S). Если на множестве X введены топологии τ_j , $j = 1, \dots, m$, удовлетворяющие одному из следующих условий:

(B₁) если A, B — дизъюнктные замкнутые подмножества (X^M, τ_M) , то $|\text{cl}_{\lambda_M} A \cap \text{cl}_{\lambda_M} B|_m \leq \omega$;

(B_2) если A, B — замкнутые подмножества (X^M, τ_M) и $|A \cap B|_m \leq \omega$, то $|\text{cl}_{\lambda_M} A \cap \text{cl}_{\lambda_M} B|_m \leq \omega$;
 (B_3) если A — замкнутое подмножество (X^M, τ_M) , то $|\text{cl}_{\lambda_M} A \setminus A|_m \leq \omega$,

то для любого $a \in \Sigma_m$ выполняется соответствующее условие (B_i), $i = 1, 2, 3$, с заменой M на a и m на $|a|$.

Доказательство. Пусть пространство (X^M, τ_M) удовлетворяет условию (B_2) и A, B — замкнутые подмножества (X^a, τ_a) такие, что $|A \cap B|_{|a|} \leq \omega$. Тогда существует счетное подмножество $Y \subset X$ такое, что

$$A \cap B \subset \bigcup \left\{ \prod \{X_s : s < j, s \in a\} \times Y \times \prod \{X_s : s > j, s \in a\} : j \in a \right\}.$$

Множества $A' = \text{pr}_a^{-1}(A)$ и $B' = \text{pr}_a^{-1}(B)$ являются замкнутыми подмножествами (X^M, τ_M) и

$$\begin{aligned} A' \cap B' = \text{pr}_a^{-1}(A \cap B) &\subset \bigcup \left\{ \prod \{X_s : s < j\} \times Y \times \prod \{X_s : s > j\} : j \in a \right\} \subset \\ &\subset \bigcup \left\{ \prod \{X_s : s < j\} \times Y \times \prod \{X_s : s > j\} : j \in M \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому $|A' \cap B'|_m \leq \omega$. По условию (B_2)

$$|F' = \text{cl}_{\lambda_M} A' \cap \text{cl}_{\lambda_M} B'|_m \leq \omega$$

и в X существует счетное подмножество Z такое, что

$$F' \subset D' = \bigcup \left\{ \prod \{X_s : s < j\} \times Z \times \prod \{X_s : s > j\} : j \in M \right\}.$$

Положим $F = \text{cl}_{\lambda_a} A \cap \text{cl}_{\lambda_a} B$. Для окончания доказательства достаточно показать, что

$$F \subset D = \bigcup \left\{ \prod \{X_s : s < j, s \in a\} \times Z \times \prod \{X_s : s > j, s \in a\} : j \in a \right\}.$$

Пусть $x \neq D$. При естественном отождествлении $\text{pr}_a^{-1}(x)$ и $X^{M \setminus a}$ множеству $\text{pr}_a^{-1}(x) \cap D'$ соответствует множество

$$\bigcup \left\{ \prod \{X_s : s < j, s \in M \setminus a\} \times Y \times \prod \{X_s : s > j, s \in M \setminus a\} : j \in M \setminus a \right\} \subset X^{M \setminus a},$$

$|M \setminus a|$ -мощность которого счетна. Из условия (S) вытекает существование точки

$$t \in R_a(x) \setminus (\text{pr}_a^{-1}(x) \cap D').$$

Так как $F' \subset D'$, то у точки t существует окрестность O_t в (X^M, λ_M) , которая может пересекаться лишь с одним из множеств A' или B' . Значит $\text{int pr}_a(O_t)$ — открытая в (X^a, λ_a) окрестность точки x , пересекающаяся лишь с одним из множеств A или B . Поэтому $x \notin F$. Для рассмотрения двух других случаев проводятся аналогичные рассуждения. $\square$

Замечание 4.7. Из условия (B_3) следует условие (B_2), из которого в свою очередь — условие (B_1).

И. Юхас, К. Кюнел и М. Е. Рудин [47] в предположении континуум гипотезы предложили метод построения более сильной топологии τ на хаусдорфовом пространстве (X, ρ) с первой аксиомой счетности и мощности $\mathfrak{c}$. Получаемое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме счетности, является локально компактным и локально счетным. Если пространство (X, ρ) является еще дополнительно наследственно сепарабельным, то $|\text{cl}_\rho A \setminus \text{cl}_\tau A| \leq \omega$ для любого подмножества $A \subset X$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.8 (см. [47]). Пусть (X, ρ) — совершенно нормальное (в частности, наследственно линделефово) пространство, пространство (X, τ) является локально компактным, локально счетным и выполнены следующие условия:

- (1) $\tau \succ \rho$;
- (2) $|\text{cl}_\rho A \setminus \text{cl}_\tau A| \leq \omega$ для любого подмножества $A \subset X$.

Тогда пространство (X, τ) совершенно нормально.

Э. ван Дауэн [95] (заметим, что препринт этой статьи был написан еще в середине 1970-х гг.) смог отказаться от каких-либо теоретико-множественных предположений в построении топологии, близкой по своим свойствам, к топологии, получаемой методом Юхаса—Кюнена—Рудин. Им доказана следующая теорема.

Теорема 4.9 (см. [95]). *Пусть (X, ρ) — совершенно нормальное (наследственно линделефово), наследственно сепарабельное, с первой аксиомой счетности, хаусдорфово пространство, пространство (X, τ) локально компактно, локально счетно (нульмерно) и выполнены следующие условия:*

- (1) $\tau \succ \rho$;
- (2) *если $A = \text{cl}_\tau A$, $B = \text{cl}_\tau B$ и $|A \cap B| \leq \omega$, то $|\text{cl}_\rho A \cap \text{cl}_\rho B| \leq \omega$.*

Тогда пространство (X, τ) нормально и счетно паракомпактно (а также ω_1 -компактно).

Напомним, что хаусдорфово пространство X называется ω_1 -компактным, если любое замкнутое дискретное подмножество является счетным. Легко проверить, что нормальное ω_1 -компактное пространство коллективно нормально.

М. Ваге [98, 99] модифицировал метод Юхаса—Кюнена—Рудин для случая произведений, а Т. Пшимушинский [83, 84] внес в него окончательные исправления.

Э. ван Дауэн [95] предложил подход к использованию своего метода в случае произведений. Развитие его идей было сделано Т. Пшимушинским [81–84]. Приведем возможности этих методов для исследования свойств типа нормальности и паракомпактности.

Предложение 4.10. *Пусть $\{(X^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$ — согласованное семейство, удовлетворяющее условию (S), пространство (X^M, λ_M) наследственно сепарабельно, наследственно линделефово и удовлетворяет первой аксиоме счетности, топологии τ_j , $j = 1, \dots, m$, на множестве X имеют в каждой точке счетную базу окрестностей из открыто-замкнутых множеств, и удовлетворяют условиям (T) и (B₂). Тогда для любого $a \in \Sigma_m$ пространство (X^a, τ_a) коллективно нормально и счетно паракомпактно (а также ω_1 -компактно).*

Доказательство. Так как пространство (X^a, λ_a) , $a \in \Sigma_m$, является непрерывным образом наследственно линделефова и наследственно сепарабельного пространства (X^M, λ_M) , то оно является наследственно линделефовым и наследственно сепарабельным. Из условия (S) имеем, что для любых $a \in \Sigma_m \setminus M$ и $x \in X^a$ множество $R_a(x)$ непусто. Тогда для $t \in R_a(x)$ и ее счетной базы окрестностей $\mathcal{B}(t)$ система множеств $\text{int pr}_a(Ot)$, $Ot \in \mathcal{B}(t)$, — база окрестностей пространства (X^a, λ_a) в точке x . Следовательно, пространства (X^a, λ_a) , $a \in \Sigma_m$, удовлетворяют первой аксиоме счетности.

Из регулярности пространств (X, λ_j) , $j \in M$, и леммы 4.1 следует, что пространства (X, τ_j) , $j \in M$, являются T_1 -пространствами. Так как пространства (X, τ_j) , $j \in M$, имеют в каждой точке базу окрестностей из открыто-замкнутых множеств, то они являются тихоновскими. Значит и пространства (X^a, τ_a) , $a \in \Sigma_m$, тихоновские.

Доказательство будем проводить индукцией по мощности множеств $a \in \Sigma_m$. При $|a| = 1$ для доказательства того, что каждое пространство (X, τ_j) , $j \in M$, коллективно нормально (ω_1 -компактно) и счетно паракомпактно, достаточно применить леммы 4.1 и 4.6 и сослаться на теорему 4.9.

Пусть утверждение предложения выполнено для всех $b \in \Sigma_m$, $|b| < k$. Докажем ее для $a \in \Sigma_m$, $|a| = k$. Зафиксируем произвольное $a \in \Sigma_m$, $|a| = k$.

Пусть A — замкнутое дискретное подмножество пространства (X^a, τ_a) и A^* — такое его счетное подмножество, что $A \subset \text{cl}_{\lambda_a} A^*$ (такое подмножество существует, так как пространство (X^a, λ_a) наследственно сепарабельно). Так как множество A^* замкнуто в (X^a, τ_a) и счетно, то в силу условия (B₂), примененного к двум экземплярам множества A^* , множество $\text{cl}_{\lambda_a} A^*$ счетно. Оно содержит A , которое, следовательно, также счетно. Следовательно, пространство (X^a, τ_a) ω_1 -компактно.

Пусть A и B — замкнутые дизъюнктные подмножества пространства (X^a, τ_a) . Из леммы 4.6 следует, что $|a|$ -мощность множества $F = \text{cl}_{\lambda_a} A \cap \text{cl}_{\lambda_a} B$ счетна. Для любой точки $x \in X^a \setminus F$ существует ее окрестность Ox , открытая в (X^a, λ_a) , а значит и в (X^a, τ_a) , такая, что

$$\text{или } \text{cl}_{\lambda_a} Ox \cap \text{cl}_{\lambda_a} A = \emptyset, \quad \text{или } \text{cl}_{\lambda_a} Ox \cap \text{cl}_{\lambda_a} B = \emptyset. \quad (N)$$

Так как пространство (X^a, λ_a) наследственно линделефово, то из покрытия $\{Ox : x \in X^a \setminus F\}$ подмножества $X^a \setminus F$ можно выбрать счетное подпокрытие Ω , для любого элемента которого выполнено условие (N).

Пусть Y — счетное подмножество X такое, что

$$F \subset \bigcup \left\{ \prod \{X^s : s < j, s \in a\} \times Y \times \prod \{X^s : s > j, s \in a\} : j \in a \right\}.$$

Найдем такую счетную систему $\mathcal{U}$ множеств, открытых в (X^a, τ_a) , покрывающую F , что для любого $U \in \mathcal{U}$ выполнено условие (N) с заменой cl_{λ_a} на cl_{τ_a} .

Для этого достаточно для любых $x \in Y$, $t \in a$ (в силу счетности Y и конечности a) найти такую счетную систему $\mathcal{U}_{xt}$ множеств, открытых в (X^a, τ_a) , покрывающую $\prod \{X^s : s < t, s \in a\} \times \{x\} \times \prod \{X^s : s > t, s \in a\}$, что для любого $U \in \mathcal{U}_{xt}$ выполнено условие (N) с заменой cl_{λ_a} на cl_{τ_a} . Без ограничения общности будем считать, что $t = \max\{s : s \in a\}$.

Пусть G_i , $i \in \mathbb{N}$, — счетная база в точке x из открыто-замкнутых в (X, τ_t) множеств. Положим

$$\begin{aligned} Z &= \left(\prod \{X^s : s \in a \setminus \{t\}\}, \tau_{a \setminus \{t\}} \right), \\ V_i(A) &= \bigcup \left\{ V : V \text{ открыто в } Z, (V \times G_i) \cap A = \emptyset \right\}, \\ V_i(B) &= \bigcup \left\{ V : V \text{ открыто в } Z, (V \times G_i) \cap B = \emptyset \right\} \end{aligned}$$

для любых $i \in \mathbb{N}$.

Семейство множеств $\{V_i(A) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{V_i(B) : i \in \mathbb{N}\}$ является счетным открытым покрытием пространства Z . По предположению индукции пространство Z нормально и счетно паракомпактно. Поэтому (см., например, [26, теорема 5.2.3]) существуют открытые в Z множества $W_i(A)$ и $W_i(B)$ такие, что

$$\begin{aligned} \text{cl}_Z W_i(A) &\subset V_i(A), \quad \text{cl}_Z W_i(B) \subset V_i(B), \quad i \in \mathbb{N}, \\ \bigcup \{W_i(A) : i \in \mathbb{N}\} \cup \bigcup \{W_i(B) : i \in \mathbb{N}\} &= Z. \end{aligned}$$

Легко проверить, что семейство множеств

$$\mathcal{U}_{xt} = \{W_i(A) \times G_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{W_i(B) \times G_i : i \in \mathbb{N}\}$$

является искомым.

Счетное семейство $\Omega \cup \bigcup \{\mathcal{U}_{xt} : x \in Y, t \in a\}$ открытых в (X^a, τ_a) множеств удовлетворяет условиям нормализующей леммы [1, гл. 1, § 5, лемма 2], из которой следует нормальность пространства (X^a, τ_a) .

Пусть $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ — убывающая последовательность замкнутых в пространстве (X^a, τ_a) множеств и $\bigcap \{F_i : i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Для доказательства счетной паракомпактности пространства (X^a, τ_a) достаточно доказать существование такой последовательности $\{O_i : i \in \mathbb{N}\}$ открытых в пространстве (X^a, τ_a) множеств, что $F_i \subset O_i$, $i \in \mathbb{N}$, и $\bigcap \{O_i : i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ (см., например, [26, следствие 5.2.2]).

Покажем, что $|a|$ -мощность множества $F = \bigcap \{\text{cl}_{\lambda_a} F_i : i \in \mathbb{N}\}$ счетна. Пусть $F^* = \{a_l : l \in \mathbb{N}\}$ — такое счетное подмножество F , что $F \subset \text{cl}_{\lambda_a} F^*$. Так как $\bigcap \{F_i : i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, то для любой точки $a_l \in F^*$, $l \in \mathbb{N}$, существует $k(l) \in \mathbb{N}$ такое, что $a_l \notin F_{k(l)}$. В силу убывания последовательности замкнутых множеств $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ можно считать, что последовательность чисел $k(l)$, $l \in \mathbb{N}$, строго возрастающая.

Для любого $l \in \mathbb{N}$ выберем последовательность точек $S_l \subset F_{k(l)}$, сходящуюся к точке a_l в пространстве (X^a, λ_a) (напомним, что пространство (X^a, λ_a) удовлетворяет первой аксиоме счетности). Множество S_l , $l \in \mathbb{N}$, замкнуто в пространстве (X^a, τ_a) (так как $\text{cl}_{\lambda_a} S_l = S_l \cup \{a_l\}$, а множество $F_{k(l)}$ замкнуто в (X^a, τ_a) и $S_l \subset F_{k(l)}$). Положим $S = \bigcup \{S_l : l \in \mathbb{N}\}$. Так как $\bigcap \{F_i : i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ и $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ — убывающая последовательность замкнутых в пространстве (X^a, τ_a) множеств, то для любой точки $x \in X^a \setminus S$ существуют ее окрестность Ox в (X^a, τ_a) и $s \in \mathbb{N}$ такие, что $Ox \cap F_i = \emptyset$ при $i \geq s$. Множество $S' = \bigcup \{S_l : k(l) \leq s\}$ замкнуто в (X^a, τ_a) и $x \notin S'$, поэтому

множество $Ox \setminus S'$ является окрестностью точки x в (X^a, τ_a) и $(Ox \setminus S') \cap S = \emptyset$. Следовательно, S замкнуто в (X^a, τ_a) . Множество S счетно, поэтому, в силу условия (B_2) , примененного к двум экземплярам множества S , $|a|$ -мощность множества $\text{cl}_{\lambda_a} S$ счетна. Так как $F \subset \text{cl}_{\lambda_a} S$, то и $|a|$ -мощность множества F счетна.

Множества $\text{cl}_{\lambda_a} F_i \setminus F$, $i \in \mathbb{N}$, образуют убывающую последовательность замкнутых множеств в открытом подмножестве $X^a \setminus F$ пространства (X^a, λ_a) , и их пересечение пусто. Поэтому существуют открытые подмножества V_i , $i \in \mathbb{N}$, в $X^a \setminus F$, а значит, и в пространстве (X^a, λ_a) такие, что $F_i \setminus F \subset \text{cl}_{\lambda_a} F_i \setminus F \subset V_i$, $i \in \mathbb{N}$, и $\bigcap \{V_i : i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ (напомним, что пространство (X^a, λ_a) наследственно линделефово, а значит и счетно паракомпактно [26, упражнение 3.8.А, следствие 5.2.5]).

Множества $F \cap F_i$, $i \in \mathbb{N}$, образуют убывающую последовательность замкнутых в пространстве (X^a, τ_a) множеств, пересечение которых пусто. Так как множество F имеет счетную $|a|$ -мощность, то существует счетное подмножество $Y \subset X$ такое, что

$$F \subset \bigcup \left\{ \prod \{X^s : s < j, s \in a\} \times Y \times \prod \{X^s : s > j, s \in a\} : j \in a \right\}.$$

Для любых $x \in Y$, $t \in a$ найдем такую счетную систему $\mathcal{U}_{xt}$ открытых в (X^a, τ_a) множеств, что она покрывает $\prod \{X^s : s < t, s \in a\} \times \{x\} \times \prod \{X^s : s > t, s \in a\}$, и для любого $U \in \mathcal{U}_{xt}$ существует $k(U, x, t) \in \mathbb{N}$ такое, что $\text{cl}_{\tau_a} U \cap F_{k(U, x, t)} = \emptyset$. Без ограничения общности будем считать, что $t = \max\{s : s \in a\}$.

Пусть G_i , $i \in \mathbb{N}$, — счетная база в точке x из открыто-замкнутых в (X, τ_t) множеств. Положим

$$Z = \left(\prod \{X^s : s \in a \setminus \{t\}\}, \tau_{a \setminus \{t\}} \right),$$

$$V_i(l) = \bigcup \left\{ V : V \text{ открыто в } Z, (V \times G_i) \cap F_l = \emptyset \right\}$$

для $l, i \in \mathbb{N}$.

Семейство множеств $\{V_i(l) : l, i \in \mathbb{N}\}$ является счетным открытым покрытием пространства Z . По предположению индукции пространство Z нормально и счетно паракомпактно. Следовательно, существуют открытые в Z множества $W_i(l)$ такие, что

$$\text{cl}_Z W_i(l) \subset V_i(l), \quad \bigcup \{W_i(l) : l, i \in \mathbb{N}\} = Z.$$

Для счетной системы $\mathcal{U}_{xt} = \{W_i(l) \times G_i, l, i \in \mathbb{N}\}$ открытых множеств имеем

$$\bigcup \{W_i(l) \times G_i : l, i \in \mathbb{N}\} \supset Z \times \{x\}, \quad (\text{cl}_Z W_i(l) \times G_i) \cap F_l = \emptyset.$$

Поэтому для $U = W_i(l) \times G_i$, $l, i \in \mathbb{N}$, положим $k(U, x, t) = l$.

Семейство открытых в (X^a, τ_a) множеств $\mathcal{U} = \bigcup \{\mathcal{U}_{xt} : x \in Y, t \in a\}$ является счетным, покрывает F и для любого $U \in \mathcal{U}$ существует $k(U) \in \mathbb{N}$ такое, что $\text{cl}_{\tau_a} U \cap F_{k(U)} = \emptyset$. Упорядочим $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ семейство $\mathcal{U}$ по типу ω . При этом каждому $i \in \mathbb{N}$ можно поставить в соответствие $k(i) \in \mathbb{N}$ по следующему правилу:

$$\text{cl}_{\tau_a} U_i \cap F_{k(i)} = \emptyset, \quad k(i) > k(j) \quad \text{при } i > j.$$

Положим $O = \bigcup \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$. Для $s < k(1)$, $s \in \mathbb{N}$, положим $O_s = O$. Для $k(l) \leq s < k(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$, положим $O_s = O \setminus \bigcup \{\text{cl}_{\tau_a} U_i : i \leq l, i \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что множества O_s открыты в (X^a, τ_a) , $F \cap F_s \subset O_s$, $s \in \mathbb{N}$, и $\bigcap \{O_s : s \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.

Легко проверить, что для последовательности открытых в (X^a, τ_a) множеств $V_i \cup O_i$, $i \in \mathbb{N}$, имеем $F_i \subset V_i \cup O_i$, $i \in \mathbb{N}$, и $\bigcap \{V_i \cup O_i : i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. (Если $x \in F$, то $x \notin V_i$, $i \in \mathbb{N}$, и существует $s(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $x \notin O_i$, при $i > s(x)$, $i \in \mathbb{N}$. Поэтому $x \notin V_i \cup O_i$, при $i > s(x)$, $i \in \mathbb{N}$. Если $x \in X^a \setminus F$, то существуют $s_1(x), s_2(x) \in \mathbb{N}$ такие, что $x \notin O_i$, при $i > s_1(x)$, $i \in \mathbb{N}$, и $x \notin V_i$, при $i > s_2(x)$, $i \in \mathbb{N}$. Значит, $x \notin V_i \cup O_i$, при $i > \max\{s_1(x), s_2(x)\}$, $i \in \mathbb{N}$.) Тем самым счетная паракомпактность пространства (X^a, τ_a) доказана.

В силу произвольности выбора $a \in \Sigma_m$, $|a| = k$, проведен шаг индукции и доказана коллективная нормальность (напомним, что нормальное ω_1 -компактное пространство коллективно нормально) и счетная паракомпактность пространств (X_a, τ_a) , $a \in \Sigma_m$, $|a| = k$. $\square$

Замечание 4.11. Предложение 4.10 является распространением на согласованные семейства результатов, полученных Т. Пшимушинским [82] в случае произведений.

Предложение 4.12. Если в посылках предложения 4.10 условие (B_2) заменить на (B_3) , то для любого $a \in \Sigma_m$ пространство (X^a, τ_a) совершенно нормально.

Доказательство. Из замечания 4.7 и предложения 4.10 вытекает, что для любого $a \in \Sigma_m$ пространство (X^a, τ_a) нормально. Остается только проверить, что любое замкнутое подмножество пространства (X^a, τ_a) , $a \in \Sigma_m$, является G_δ -множеством.

Доказательство будем проводить индукцией по мощности множеств $a \in \Sigma_m$. Пусть $|a| = 1$. Тогда для доказательства того, что любое замкнутое подмножество пространства (X, τ_j) , $j \in M$, является G_δ -множеством, достаточно применить леммы 4.1 и 4.6 и сослаться на теорему 4.8.

Пусть утверждение верно для всех $b \in \Sigma_m$, $|b| < k$. Докажем его для $a \in \Sigma_m$, $|a| = k$. Зафиксируем произвольное $a \in \Sigma_m$, $|a| = k$.

Пусть F — замкнутое подмножество (X^a, τ_a) . Тогда $|a|$ -мощность множества $H = \text{cl}_{\lambda_a} F \setminus F$ счетна по лемме 4.6 и множество $\text{cl}_{\lambda_a} F$ является G_δ -множеством в (X^a, λ_a) , а значит, и в (X^a, τ_a) . Если доказать, что множество H содержится в F_σ -множестве пространства (X^a, τ_a) , не пересекающемся с F , то шаг индукции будет проведен.

Пусть Y — счетное подмножество X такое, что

$$H \subset \bigcup \left\{ \prod \{X^s : s < j, s \in a\} \times Y \times \prod \{X^s : s > j, s \in a\} : j \in a \right\}.$$

Для доказательства того, что H содержится в F_σ -множестве пространства (X^a, τ_a) , не пересекающемся с F , достаточно проверить, что для любых $x \in Y$, $t \in a$ множество

$$H \cap \left(\prod \{X^s : s < t, s \in a\} \times \{x\} \times \prod \{X^s : s > t, s \in a\} \right)$$

содержится в F_σ -множестве пространства (X^a, τ_a) , не пересекающемся с F . Без ограничения общности будем считать, что $t = \max\{s : s \in a\}$.

При естественном отождествлении пространства $Z = (\prod \{X^s : s \in a \setminus \{t\}\}, \tau_{a \setminus \{t\}})$ и замкнутого подмножества $\prod \{X^s : s \in a \setminus \{t\}\} \times \{x\}$ пространства (X^a, τ_a) , множеству $F \cap (\prod \{X^s : s \in a \setminus \{t\}\} \times \{x\})$ соответствует замкнутое множество $F(x, t) \subset Z$. По предположению индукции множество $F(x, t)$ является G_δ -подмножеством Z , а его дополнение является F_σ -подмножеством Z , а значит, и F_σ -подмножеством (X^a, τ_a) (пространства (X, τ_j) , $j \in M$, удовлетворяют первой аксиоме счетности), не пересекающемся с F . Тем самым шаг индукции проведен. $\square$

4.2. Размерность пространств согласованных семейств. В. В. Федорчук исследовал размерностные свойства пространств, полученных методом Юхаса—Кюнена—Рудин. Им получен следующий результат.

Теорема 4.13 (см. [40]). Пусть пространства (X, ρ) и (X, τ) удовлетворяют условиям теоремы 4.8. Тогда для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливы следующие утверждения:

- если $\dim(X, \rho) \leq n$, то $\dim(X, \tau) \leq n$;
- если $\dim(X, \rho) \geq n$, то $\dim(X, \tau) \geq n - 1$;
- если $\text{Ind}(X, \rho) \leq n$, то $\text{Ind}(X, \tau) \leq n$;
- если $\text{Ind}(X, \rho) \geq n$, то $\text{Ind}(X, \tau) \geq n - 1$.

Э. ван Дауэн исследовал размерностные свойства пространств, полученных его методом, и доказал следующую теорему.

Теорема 4.14 (см. [95]). Пусть пространства (X, ρ) и (X, τ) удовлетворяют условиям теоремы 4.9. Тогда

$$\dim(X, \tau) = \text{Ind}(X, \tau) = \min \left\{ \dim(X \setminus K, \rho|_{X \setminus K}) : K \subset X \text{ счетно} \right\}.$$

При использовании модифицированных М. Ваге и Т. Пшимушинским методов Юхаса—Кюнена—Рудин и Э. ван Дауэна в случае произведений наиболее точные оценки размерностей получены К. Тсудой [91, 94]. Представим результаты о размерностных свойствах пространств согласованных семейств.

Лемма 4.15. Пусть пространства Z_j , $j = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, удовлетворяют первой аксиоме счетности и произведения $Z(s) = \prod\{Z_j : j = 1, \dots, k, j \neq s\}$, $s = 1, \dots, k$, нормальны, счетно паракомпактны и сильно нульмерны. Тогда для любого функционально открытого множества $U \subset Z = \prod\{Z_j : j = 1, \dots, k\}$ и любых $t \in \{1, \dots, k\}$, $y \in Z_t$ существует такое счетное семейство $\mathcal{U}_{yt}$ открыто-замкнутых подмножеств Z , что $\bigcup \mathcal{U}_{yt} \subset U$ и

$$U \cap \left(\prod\{Z_j : j = 1, \dots, k, j < t\} \times \{y\} \times \prod\{Z_j : j = 1, \dots, k, j > t\} \right) \subset \bigcup \mathcal{U}_{yt}.$$

Доказательство. Каждое Z_j , $j = 1, \dots, k$, является сильно нульмерным, а значит и нульмерным, как пространство гомеоморфное замкнутому подмножеству сильно нульмерного нормального пространства $Z(s)$ при $s \neq j$.

Без ограничения общности будем считать, что $t = k$, $y \in Z_k$. Пусть O_i , $i \in \mathbb{N}$, — счетная база в точке y из открыто-замкнутых в пространстве Z_k множеств. Пространство $Z(k)$ естественно гомеоморфно подпространству $\prod\{Z_j : j = 1, \dots, k-1\} \times \{y\} \subset Z$. Через $U' \subset Z(k)$ обозначим множество, гомеоморфное функционально открытому подмножеству $U \cap (\prod\{Z_j : j = 1, \dots, k-1\} \times \{y\})$.

Для любого $i \in \mathbb{N}$ положим:

$$V_i = \bigcup \{V : V \text{ открыто в } Z(k), (V \times O_i) \subset U\}.$$

Ясно, что семейство множеств $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ является счетным открытым покрытием множества U' . Множество U' является функционально открытым и, следовательно, счетно паракомпактным подпространством $Z(k)$ (см., например, [26, задача 5.5.16]). Поэтому существуют открытые в $Z(k)$ множества W'_i такие, что

$$\text{cl}_{Z(k)} W'_i \subset V_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \bigcup \{W'_i : i \in \mathbb{N}\} = U'.$$

Так как пространство $Z(k)$ сильно нульмерно, то существуют (см., например, [26, лемма 6.2.2]) открыто-замкнутые в $Z(k)$ множества W_i такие, что $\text{cl}_{Z(k)} W'_i \subset W_i \subset V_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Тогда семейство $\mathcal{U}_{yt} = \{W_i \times O_i : i \in \mathbb{N}\}$ будет искомым. $\square$

Лемма 4.16. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и на множестве Z^k (k -я степень множества Z) заданы топологии τ и λ такие, что $\tau \succ \lambda$, и выполнено условие (B_1) с заменой (X^M, τ_M) на (Z^k, τ) и λ_M на λ . Тогда, если F — функционально замкнутое подмножество (Z^k, τ) , то $|\text{cl}_\lambda F \setminus F|_k \leq \omega$.

Доказательство. Множество $U = Z^k \setminus F$ функционально открыто в (Z^k, τ) и $U = \bigcup \{F_i : i \in \mathbb{N}\}$, где множества F_i , $i \in \mathbb{N}$, функционально замкнуты в (Z^k, τ) и $F \cap F_i = \emptyset$, $i \in \mathbb{N}$.

Имеем

$$\text{cl}_\lambda F \setminus F = U \cap \text{cl}_\lambda F = \bigcup \{F_i : i \in \mathbb{N}\} \cap \text{cl}_\lambda F = \bigcup \{F_i \cap \text{cl}_\lambda F : i \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup \{\text{cl}_\lambda F_i \cap \text{cl}_\lambda F : i \in \mathbb{N}\}.$$

По условию (B_1) множества $\text{cl}_\lambda F_i \cap \text{cl}_\lambda F$, $i \in \mathbb{N}$, имеют счетную k -мощность. Поэтому и k -мощность множества $\text{cl}_\lambda F \setminus F$ счетна. $\square$

Предложение 4.17. Если в условиях предложения 4.10 дополнительно считать пространства (X^a, λ_a) , $a \in \Sigma_m \setminus M$, нульмерными, то пространства (X^a, τ_a) , $a \in \Sigma_m \setminus M$, сильно нульмерны.

Доказательство. Согласно предложению 4.10 пространства (X^a, τ_a) , $a \in \Sigma_m$, являются нормальными и счетно паракомпактными.

Доказательство сильной нульмерности пространств (X^a, τ_a) , $a \in \Sigma_m \setminus M$, будем проводить индукцией по мощности множеств $a \in \Sigma_m \setminus M$. Так как доказательства базы и шага индукции идейно не отличаются, то будем проводить их одновременно, указывая там, где это будет необходимо, на различия.

Пусть сильная нульмерность пространств (X^b, τ_b) доказана для всех $b \in \Sigma_m \setminus M$, $|b| < k$. Докажем ее для $a \in \Sigma_m \setminus M$, $|a| = k$. Зафиксируем произвольное $a \in \Sigma_m \setminus M$, $|a| = k$. Для доказательства сильной нульмерности пространства (X^a, τ_a) достаточно доказать, что любое функционально открытое подмножество U пространства (X^a, τ_a) есть счетное объединение открыто-замкнутых подмножеств [90].

Множество $U \setminus \text{cl}_{\lambda_a}(X^a \setminus U)$ открыто в наследственно линделефовом нульмерном пространстве (X^a, λ_a) . Поэтому существует такое счетное семейство $\{G_i : i \in \mathbb{N}\}$ открыто-замкнутых в (X^a, λ_a) (а значит, и в (X^a, τ_a)) подмножеств, что

$$U \setminus \text{cl}_{\lambda_a}(X^a \setminus U) = \bigcup \{G_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

По лемме 4.16 $|a|$ -мощность множества $F = U \cap \text{cl}_{\lambda_a}(X^a \setminus U)$ счетна. Поэтому существует счетное подмножество Y множества X такое, что

$$F \subset \bigcup \left\{ \prod \{X^s : s < j, s \in a\} \times Y \times \prod \{X^s : s > j, s \in a\} : j \in a \right\}$$

при $|a| > 1$, и $|F| \leq \omega$ при $|a| = 1$. Если $|a| = 1$, то, поскольку в каждой точке пространства (X, τ_a) базу окрестностей образуют открыто-замкнутые множества, существует счетное семейство $\{V_x : x \in F\}$ открыто-замкнутых в (X, τ_a) множеств таких, что $x \in V_x \subset U$, $x \in F$. Тогда семейство открыто-замкнутых множеств $\{G_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{V_x : x \in F\}$ будет искомым.

При $|a| > 1$, принимая во внимание лемму 4.15, имеем, что для любых $x \in Y$, $t \in a$ существует счетная система $\mathcal{U}_{xt}$ из открыто-замкнутых в (X^a, τ_a) множеств, покрывающая множество $U \cap \prod \{X^s : s < t, s \in a\} \times \{x\} \times \prod \{X^s : s > t, s \in a\}$ и $\bigcup \mathcal{U}_{xt} \subset U$.

Тогда счетное семейство открыто-замкнутых множеств

$$\{G_i, i \in \mathbb{N}\} \cup \bigcup \{\mathcal{U}_{xt} : x \in Y, t \in a\}$$

будет искомым счетным покрытием U .

Проверена база и проведен шаг индукции. Предложение доказано. $\square$

Следующее замечание следует из теорем о счетной сумме и монотонности для размерности $\dim$ (см., например, [26, теорема 7.2.1, теорема 7.1.3]).

Замечание 4.18. Пусть пространство $(Z^k, \tau = \tau_1 \times \dots \times \tau_k)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, нормально, пространства (Z, τ_j) , $j = 1, \dots, k$, удовлетворяют первой аксиоме счетности и произведения $\prod \{(Z, \tau_j) : j = 1, \dots, k, j \neq s\}$, $s = 1, \dots, k$, счетно паракомпактны и сильно нульмерны. Тогда любое замкнутое подмножество $F \subset (Z^k, \tau)$ счетной k -мощности является сильно нульмерным.

Лемма 4.19. Пусть в условиях замечания 4.18 на множестве Z^k задана топология λ такая, что $\tau \succ \lambda$, и выполнено условие (B_1) с заменой (X^M, τ_M) на (Z^k, τ) и λ_M на λ . Тогда, если замкнутое множество F пространства (Z^k, τ) можно представить в виде $F = T \cup R$, где $\text{Ind}(R, \lambda|_R) \leq n$, $n = \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, а множество T является замкнутым в (Z^k, τ) и $|T|_k \leq \omega$, то $\text{Ind}(F, \tau|_F) \leq \max\{0, n\}$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n . При $n = -1$ множество R пусто и неравенство $\text{Ind}(F, \tau|_F) \leq 0$ следует из замечания 4.18.

Пусть для всех $i < n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, утверждение леммы выполнено. Докажем его при $i = n$. Пусть A, B — дизъюнктные замкнутые подмножества $(F, \tau|_F)$, A', B' — такие дизъюнктные замкнутые подмножества $(F, \tau|_F)$ (а значит, и (Y, τ)), что $A \subset \text{int}_{\tau|_F} A'$, $B \subset \text{int}_{\tau|_F} B'$ (напомним, что F — замкнутое подмножество нормального пространства (Y, τ)).

Положим $T' = \text{cl}_\lambda A' \cap \text{cl}_\lambda B'$. Множество T' замкнуто в (Z^k, λ) , а значит, и в (Z^k, τ) . По условию (B_1) имеем $|T'|_k \leq \omega$. Тогда множество $T \cup T'$ замкнуто в (Z^k, τ) и $|T \cup T'|_k \leq \omega$. Так как $\text{Ind}(R, \lambda|_R) \leq n$ и пространство (Z^k, λ) совершенно нормально, то существует $(n-1)$ -мерная перегородка S' между множествами $R \cap (\text{cl}_\lambda A' \setminus (T \cup T'))$ и $R \cap (\text{cl}_\lambda B' \setminus (T \cup T'))$ в $(R \setminus (T \cup T'), \lambda|_{R \setminus (T \cup T')})$, т.е. $(R \setminus (T \cup T')) \setminus S' = U \cup V$, где U и V — дизъюнктные открытые подмножества $(R \setminus (T \cup T'), \lambda|_{R \setminus (T \cup T')})$, а значит и $(F, \tau|_F)$ (так как $\tau \succ \lambda$ и $T \cup T'$ замкнуто в (Z^k, τ)), и $A' \cap (R \setminus (T \cup T')) \subset U$, $B' \cap (R \setminus (T \cup T')) \subset V$.

Положим $S = S' \cup ((T \cup T') \setminus (\text{int}_{\tau|_F} A' \cup \text{int}_{\tau|_F} B'))$. Тогда S — замкнутая перегородка в $(F, \tau|_F)$ между A и B (так как $F \setminus S = (U \cup \text{int}_{\tau|_F} A') \cup (V \cup \text{int}_{\tau|_F} B')$, $(U \cup \text{int}_{\tau|_F} A') \cap (V \cup \text{int}_{\tau|_F} B') = \emptyset$ и $A \subset (U \cup \text{int}_{\tau|_F} A')$, $B \subset (V \cup \text{int}_{\tau|_F} B')$).

Множество S имеет вид $S = S' \cup T''$, где $T'' = ((T \cup T') \setminus (\text{int}_{\tau|_F} A' \cup \text{int}_{\tau|_F} B'))$ замкнуто в (Z^k, τ) , $|T''|_k \leq \omega$ и $\text{Ind}(S', \lambda|_{S'}) \leq n - 1$. По предположению индукции $\text{Ind}(S, \tau|_S) \leq \max\{0, n - 1\}$. Следовательно, $\text{Ind}(F, \tau|_F) \leq n$. Лемма доказана. $\square$

Предложение 4.20. Если в условиях предложения 4.10 дополнительно считать, что пространства (X^a, λ_a) , $a \in \Sigma_m \setminus M$, нульмерны, и $\text{Ind}(X^M, \lambda_M) = n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то $\text{Ind}(X^M, \tau_M) \leq n$.

Доказательство. По предложению 4.17 пространства (X^a, τ_a) , $a \in \Sigma_m \setminus M$, сильно нульмерны. Теперь доказательство сразу следует из леммы 4.19, если в качестве множества F взять все множество X^M , а T считать пустым. $\square$

Лемма 4.21. Пусть в условиях леммы 4.16 A и B — дизъюнктные замкнутые подмножества пространства (Z^k, λ) (а значит, и (Z^k, τ)) и F — функционально замкнутая перегородка между A и B в (Z^k, τ) (т.е. $Z^k \setminus F = U \cup V$, $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$) такая, что $A \cap \text{cl}_\lambda(F \cup V) = \emptyset$ и $B \cap \text{cl}_\lambda(T \cup U) = \emptyset$. Тогда существует замкнутая перегородка F' между A и B в (Z^k, λ) такая, что $|F' \setminus F|_k \leq \omega$.

Доказательство. Так как множества U и V являются функционально открытыми в (Z^k, τ) , то множества $U \cup F$ и $V \cup F$ функционально замкнуты в (Z^k, τ) . По лемме 4.16 k -мощности множеств

$$\text{cl}_\lambda(U \cup F) \setminus (U \cup F) = \text{cl}_\lambda(U \cup F) \cap V, \quad \text{cl}_\lambda(V \cup F) \setminus (V \cup F) = \text{cl}_\lambda(V \cup F) \cap U$$

счетны. Положим $V' = V \setminus \text{cl}_\lambda(U \cup F)$. Тогда V' — открытое множество в (Z^k, λ) , $V' \subset V$ и $B \subset V'$ (так как $B \cap \text{cl}_\lambda(F \cup U) = \emptyset$). Так как

$$\text{cl}_\lambda V' \subset \text{cl}_\lambda(F \cup V), \quad A \cap \text{cl}_\lambda(F \cup V) = \emptyset,$$

то $\text{cl}_\lambda V' \cap A = \emptyset$. Положим $F' = \text{bd } V'$.

Множество F' — замкнутая перегородка между A и B в (Z^k, λ) ,

$$\begin{aligned} F' &= \text{cl}_\lambda V' \setminus V' \subset \text{cl}_\lambda(V \cup F) \setminus V' = (\text{cl}_\lambda(V \cup F) \cap U) \cup F \cup (\text{cl}_\lambda(U \cup F) \cap V) = \\ &= (\text{cl}_\lambda(V \cup F) \setminus (V \cup F)) \cup F \cup (\text{cl}_\lambda(U \cup F) \setminus (U \cup F)). \end{aligned}$$

k -мощности множеств

$$\text{cl}_\lambda(V \cup F) \setminus (V \cup F), \quad \text{cl}_\lambda(U \cup F) \setminus (U \cup F)$$

счетны по лемме 4.16. Поэтому и $|F' \setminus F|_k \leq \omega$. $\square$

Предложение 4.22. Если в условиях леммы 4.16 дополнительно считать, что $\dim(Z^k, \lambda) = n$, $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$, и в (Z^k, λ) существуют n пар дизъюнктных замкнутых множеств (A_i, B_i) таких, что для любых замкнутых перегородок L_i между A_i , B_i , $i = 1, \dots, n$, $|\bigcap\{L_i : i = 1, \dots, n\}|_k > \omega$, то $\dim Z^k \geq n$, а при $n = \infty$ пространство Y является A -сильно бесконечномерным, не слабо счетномерным (см., например, [1, гл. 10]).

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Так как пространство (Z^k, λ) нормально, то существуют n пар дизъюнктных замкнутых множеств (A'_i, B'_i) таких, что $A_i \in \text{int}_\lambda A'_i$, $B_i \in \text{int}_\lambda B'_i$, $i = 1, \dots, n$ (заметим, что, так как $\tau \succ \lambda$, то множества A'_i , B'_i , $i = 1, \dots, n$, замкнуты и в (Z^k, τ)).

По предположению $\dim(Z^k, \tau) < n$. Поэтому (см., например, [26, теорема 7.2.15]) существуют замкнутые в (Z^k, τ) перегородки F_i между A'_i , B'_i , $i = 1, \dots, n$, такие, что $\bigcap\{F_i : i = 1, \dots, n\} = \emptyset$. Перегородки, в силу нормальности пространства (Z^k, τ) , можно считать функционально замкнутыми множествами (см., например, [26, теорема 7.1.4]). Тогда по лемме 4.21 существуют перегородки

F'_i между A_i, B_i в (Z^k, λ) такие, что $|F'_i \setminus F_i|_k \leq \omega, i = 1, \dots, n$. Положим $F'_i = F_i \cup T_i$, где $|T_i|_k \leq \omega, i = 1, \dots, n, T = \bigcup \{T_i : i = 1, \dots, n\}$. Очевидно, что $|T|_k \leq \omega$. Имеем

$$\begin{aligned} \bigcap \{F'_i : i = 1, \dots, n\} &= \bigcap \{F_i \cup T_i : i = 1, \dots, n\} \subset \\ &\subset \bigcap \{F_i \cup T : i = 1, \dots, n\} = T \cup \bigcap \{F_i : i = 1, \dots, n\} = T. \end{aligned}$$

Получено противоречие с условием предложения. Значит $\dim Z^k \geq n$.

При $n = \infty$ доказано, что пространство (Z^k, τ) является A -сильно бесконечномерным. Так как нормальное пространство представимое в виде счетной суммы замкнутых A -слабо бесконечномерных (в частности, конечномерных) подпространств является A -слабо бесконечномерным [96, теорема 3.4] и нормальное слабо счетномерное пространство является A -слабо бесконечномерным [39], то (Z^k, τ) не слабо счетномерно. $\square$

Из предложений 4.17, 4.20, 4.22 и неравенства $\dim X \leq \text{Ind } X$ для нормальных пространств (см., например, [26, теорема 7.2.8]) вытекает следующая теорема.

Теорема 4.23. Пусть $\{(X^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$ — согласованное семейство, удовлетворяющее условию (S); пространство (X^M, λ_M) наследственно сепарабельно, наследственно линделефово, удовлетворяет первой аксиоме счетности; пространства $(X^a, \lambda_a), a \in \Sigma_m \setminus M$, нульмерны; $\text{Ind}(X^M, \lambda_M) = \dim(X^M, \lambda_M) = n, n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ и в (X^M, λ_M) существуют n пар дизъюнктивных замкнутых множеств (A_i, B_i) таких, что для любых замкнутых перегородок L_i между $A_i, B_i, i = 1, \dots, n, |\bigcap \{L_i : i = 1, \dots, n\}|_m > \omega$. Если на множестве X введены топологии $\tau_j, j = 1, \dots, t$, имеющие в каждой точке счетную базу окрестностей из открыто-замкнутых множеств, и удовлетворяющие условиям (T) и (B₂), то $\dim(X^M, \tau_M) = \text{Ind}(X^M, \tau_M) = n$ при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а при $n = \infty$ пространство (X^M, τ_M) является A -сильно бесконечномерным, не слабо счетномерным.

Кроме того, пространства $(X^a, \tau_a), a \in \Sigma_m \setminus M$, сильно нульмерны.

Замечание 4.24. Идеи доказательств лемм 4.19 и 4.21 принадлежат К. Тсуде (см. [91, 94]).

4.3. n -Мерные вполне несвязные топологии на произведениях множеств. Для пространства X через $\exp(X)$ обозначим его экспоненциальное пространство (см., например, [26, задача 2.7.20]). Пусть (I, ϵ) — отрезок $I = [0, 1]$ с естественной топологией замкнутого интервала, (C, ϵ) — канторово множество $C \subset I$ с топологией подпространства. Метрику, индуцирующую эти топологии, также будем обозначать через ϵ . Если $a, b \in I (a, b \in C), a < b$, где $<$ — естественный порядок на $I (C)$, то $(a, b) = \{x \in I(C) : a < x < b\}$ — интервал с концами в точках a и b . Топология ϵ^m на $I^m (C^m)$ индуцируется естественной метрикой ϵ^m на $I^m (C^m), m \in \mathbb{N}$. Следующая лемма доказана С. Мазуркевичем.

Лемма 4.25 (см. [55]). Существует отображение $\nu : \exp(I^n) \rightarrow I^n, n \in \mathbb{N}^+$, такое, что

- (1) $\nu(A) \in A$ для любого $A \in \exp(I^n)$;
- (2) если $A_i \in \exp(I^n), A_{i+1} \subset A_i, i \in \mathbb{N}$, и $\bigcap \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \nu(A_i) = \nu \left(\bigcap \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \right)$$

(сходимость рассматривается в пространстве I^n).

Доказательство. По теореме Александрова существует непрерывное сюръективное отображение $\phi : C \rightarrow I^n$ (см., например, [26, задача 4.5.9(b)]). Для любого $A \in \exp(I^n)$ положим $\nu(A) = \phi(\min(\phi^{-1}(A)))$, где минимум берется в соответствии с естественным порядком на C (корректность следует из совершенности ϕ).

Выполнение п. (1) следует из включения $\min(\phi^{-1}(A)) \in \phi^{-1}(A)$ для любого $A \in \exp(I^n)$.

Пусть последовательность множеств $A_i, i \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условиям п. (2). Тогда последовательность $\{\min(\phi^{-1}(A_i)) : i \in \mathbb{N}\}$ является монотонно возрастающей в C ($\phi^{-1}(A_{i+1}) \subset \phi^{-1}(A_i), i \in \mathbb{N}$). Значит, у нее существует предел. Покажем, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \min(\phi^{-1}(A_i)) = \min \left(\phi^{-1} \left(\bigcap \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \right) \right).$$

Для любого $\delta > 0$ полуинтервал $U = (\min(\phi^{-1}(\bigcap\{A_i : i \in \mathbb{N}\})) - \delta, 1]$ является открытым в C . Из замкнутости отображения ϕ и включения $\phi^{-1}(\bigcap\{A_i : i \in \mathbb{N}\}) \subset U$ вытекает существование такого открытого подмножества $V \subset I^n$, что $\bigcap\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subset V$ и $\phi^{-1}V \subset U$ (см., например, [26, теорема 1.4.12]). Из компактности I^n вытекает существование $k \in \mathbb{N}$ такого, что $A_i \subset V$ при $i > k$. Значит $\phi^{-1}(A_i) \subset U$ и

$$\min(\phi^{-1}(A_i)) > \min(\phi^{-1}(\bigcap\{A_i : i \in \mathbb{N}\})) - \delta, \quad i > k.$$

В силу произвольности выбора $\delta > 0$ и неравенства

$$\min(\phi^{-1}(A_i)) = \min(\phi^{-1}(\bigcap\{A_i : i \in \mathbb{N}\}))$$

для любого $i \in \mathbb{N}$ вытекает доказываемое равенство. Теперь утверждение п. (2) следует из непрерывности отображения ϕ и хаусдорфовости пространства I^n . $\square$

Замечание 4.26. Легко видеть, что при $n = 1$ отображение $\nu : \exp(I) \rightarrow I$ можно определить как $\nu(A) = \min(A)$.

С. Мазуркевич [55] построил для любого $n \in \mathbb{N}^+$ примеры вполне несвязных, сепарабельных, полных метрических n -мерных пространств. А. Лелек [53], а также Л. Рубин, Р. Шори и Д. Волш [86] предложили упрощенную конструкцию таких пространств. Используем ее и изложение К. Тсуды [91, теорема 2.1], [94, теорема 4.1] для построения такого вида пространств с дополнительным свойством (P) . Отметим, что вместо леммы С. Мазуркевича можно использовать теорему о селекции Куратовского и Рыль-Нардзевского [52] или применить конструкцию из [53, пример, с. 80] (см. также [97, гл. 4, § 7]).

Предложение 4.27. Для любых $n \in \mathbb{N}^+$ существует сепарабельное, метризуемое полной метрикой, n -мерное пространство (C, ρ_n) (пространство (C, ρ_∞) A -сильно бесконечномерно) такое, что

$$\begin{aligned} &\text{существуют такие } n \text{ пар дизъюнктивных замкнутых множеств } (A_i, B_i), \text{ что} \\ &\text{для любых замкнутых перегородок } L_i \text{ между } A_i, B_i, \quad i = 1, \dots, n, \text{ в } (C, \rho_n) \quad (P) \\ &|\bigcap\{L_i : i = 1, \dots, n\}| = c. \end{aligned}$$

Доказательство. В произведении $\Pi = I \times I^n$ через π_0 и π обозначим проекцию Π на первый I и второй сомножитель I^n соответственно. Пусть $\mathcal{T} \subset \exp(\Pi)$ — семейство всех континуумов, пересекающих как $\pi_0^{-1}(0)$, так и $\pi_0^{-1}(1)$. Тогда $\mathcal{T}$ является компактом как замкнутое подмножество компакта $\exp(\Pi)$ (см., например, [26, задача 4.5.22(a)] и [97, теоремы 4.7.2, 4.7.10]), и существует непрерывное отображение $g : (C, \epsilon) \rightarrow \mathcal{T}$ такое, что $|g^{-1}(T)| = c$ для любого $T \in \mathcal{T}$ (напомним, что каждый компакт по теореме Александера является непрерывным образом канторова множества C при отображении ϕ (см., например, [26, задача 4.5.9(b)]) и g можно рассматривать как композицию проекции C^2 на C и отображения ϕ).

Определим отображение $h : C \rightarrow I^n$ следующим образом:

$$h(t) = \nu(\pi(g(t) \cap \pi_0^{-1}(t))), \quad t \in C.$$

Оно корректно определено, так как $T \cap \pi_0^{-1}t \neq \emptyset$ для любого $T \in \mathcal{T}$ и $t \in C$. Покажем, что h является измеримым отображением класса 1 (см., например, [26, задача 1.7.5(b)]).

Пусть $\mathcal{B}_i$ — семейство таких дизъюнктивных конечных открыто-замкнутых покрытий пространства (C, ϵ) множествами диаметра меньше $1/i$, что $\mathcal{B}_{i+1} \succ \mathcal{B}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Определим отображения $h_i : C \rightarrow I^n$ следующим образом:

$$h_i(t) = \nu\left(\pi\left(\bigcup\{g(p) \cap \pi_0^{-1}(p) : p \in B\}\right)\right), \quad t \in B \in \mathcal{B}_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Проверим, что оно корректно определено.

Произведение $\Pi' = C \times I^n$ будем считать естественно вложенным в Π и ограничение проекций π_0 и π на Π' будем обозначать так же. Множество $F(B, i) = \bigcup\{g(p) \cap \pi_0^{-1}(p) : p \in B\}$, $B \in \mathcal{B}_i$, $i \in \mathbb{N}$, является замкнутым в Π' . Действительно, если $x \in \Pi' \setminus F(B, i)$ и $\pi_0(x) \notin B$, то $\pi_0^{-1}(C \setminus B)$ является открыто-замкнутой окрестностью точки x в $C \times I^n$, не пересекающейся с $F(B, i)$. Если

же $\pi_0(x) \in B$, то рассмотрим дизъюнктные открытые окрестности U и $O' \times V$, $O' \in I$, $V \in I^n$, континуума $g(\pi_0(x))$ и точки x в Π соответственно. Так как отображение $g : (C, \epsilon) \rightarrow T$ является непрерывным, то существует окрестность O'' точки $\pi_0(x)$ в (C, ϵ) такая, что $g(p) \in U$ для любой точки $p \in O''$. Тогда $O \times V$, где $O = (O' \cap C) \cap O''$, является окрестностью точки x в $C \times I^n$ и $V \cap \pi(g(p) \cap \pi_0^{-1}(p)) = \emptyset$ при $p \in O$ (так как $g(p) \in U$ при $p \in O$) и, следовательно, $O \times V \cap F(B, i) = \emptyset$. Показано, что дополнение до множества $F(B, i)$, $B \in \mathcal{B}_i$, $i \in \mathbb{N}$, является открытым в Π' . Поэтому множества $F(B, i)$, $B \in \mathcal{B}_i$, $i \in \mathbb{N}$, замкнуты и отображения h_i корректно определены (принимая во внимание замкнутость проекции π).

Непрерывность отображений $h_i : C \rightarrow I^n$, $i \in \mathbb{N}$, следует из их локальной постоянности (т.е. для каждой точки $x \in C$ существует окрестность, на которой отображение постоянно).

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} h_i(t) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \nu \left(\pi \left(\bigcup \left\{ g(p) \cap \pi_0^{-1}(p) : p \in B \in \mathcal{B}_i; t \in B \right\} \right) \right) = \\ & \text{(по лемме 4.25(2))} \\ &= \nu \left(\bigcap \left\{ \pi \left(\bigcup \left\{ g(p) \cap \pi_0^{-1}(p) : p \in B \in \mathcal{B}_i, t \in B \right\} \right) : i \in \mathbb{N} \right\} \right) = \\ &= \nu \left(\pi(g(t) \cap \pi_0^{-1}(t)) \right) = h(t) \end{aligned}$$

для любой точки $t \in C$, то h является измеримым отображением класса 1 как предел непрерывных отображений h_i , $i \in \mathbb{N}$, (см., например, [4, гл. 2, § 31, VIII, теорема 1]).

График $G(h)$ отображения h является G_δ -подмножеством Π' (см., например, [4, гл. 2, § 31, VII, теорема 1]). Положим $(C, \rho_n) = (G(h), \epsilon^{n+1}|_{G(h)})$. При этом метрику и индуцируемую ей топологию на C будем обозначать через ρ_n . Тогда пространство (C, ρ_n) является сепарабельным пространством, метризуемым полной метрикой (см., например, [26, теорема 4.3.23]). Из монотонности размерности по подмножествам метризуемого пространства (см., например, [26, теорема 7.3.4]) имеем $\dim(C, \rho_n) \leq n$.

Остается проверить выполнение свойства (P) . Оно даст неравенство $\dim(C, \rho_n) \geq n$ (см., например, [26, теорема 7.2.15]), а значит, и равенство $\dim(C, \rho_n) = n$. Через π_i обозначим проекцию $\Pi = I \times I^n$ на i -сомножитель пространства I^n , $i = 1, \dots, n$. Семейство дизъюнктных пар замкнутых множеств $(A_i = \pi_i^{-1}(0), B_i = \pi_i^{-1}(1))$, $i = 1, \dots, n$, является существенным (см., например, [97, гл. 4, § 1] или [86]), т.е. для любых замкнутых перегородок L_i между множествами A_i , B_i , $i = 1, \dots, n$, соответственно, $\bigcap \{L_i : i = 1, \dots, n\} \neq \emptyset$. Так как континуумы A_i , B_i пересекают как $\pi_0^{-1}(0)$, так и $\pi_0^{-1}(1)$, то $A_i \cap G(h) \neq \emptyset$ и $B_i \cap G(h) \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть (A'_i, B'_i) — дизъюнктные пары замкнутых множеств в Π такие, что $A_i \in \text{int}_\Pi A'_i$, $B_i \in \text{int}_\Pi B'_i$, $i = 1, \dots, n$, и L'_i — замкнутые перегородки между множествами $A'_i \cap G(h)$, $B'_i \cap G(h)$ в $G(h)$, $i = 1, \dots, n$. Согласно [97, лемма 4.1.5] существуют замкнутые перегородки L_i между множествами A_i , B_i в Π такие, что $L_i \cap G(h) = L'_i$, $i = 1, \dots, n$. Согласно [97, предложение 4.7.8] или [86] из существенности пар (A_i, B_i) , $i = 1, \dots, n$, вытекает существование континуума $T \subset \bigcap \{L_i : i = 1, \dots, n\}$, и $T \in \mathcal{T}$. Из построения имеем, что $|T \cap G(h)| = \mathfrak{c}$. Поэтому $|\bigcap \{L'_i : i = 1, \dots, n\}| = \mathfrak{c}$ (так как $T \cap G(h) \subset \bigcap \{L'_i : i = 1, \dots, n\}$). Выполнение свойства (P) проверено. $\square$

Замечание 4.28. Так как пространство (C, ρ_n) было построено как подмножество произведения $C \times I^n$, то базу топологии в (C, ρ_n) образуют множества вида $U \cap h^{-1}V$, где U открыто в (C, ϵ) , V открыто в I^n , $n \in \mathbb{N}^+$. Отметим, что $\rho_n \succ \epsilon$, и отображение $h : (C, \rho_n) \rightarrow I^n$ является непрерывным, $n \in \mathbb{N}^+$.

Замечание 4.29. При $n = 1$ пространство (C, ρ_1) было построено М. Ваге [98]. Он определял функцию h следующим образом. Пусть $f : C \rightarrow \Pi = \prod \{ \{0, 1\}_q : q \in Q \}$ — гомеоморфизм канторова множества на тихоновское произведение счетного числа двухточечных дискретных пространств, индексированных точками из $Q = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, $\pi_t : \Pi \rightarrow \{0, 1\}_t$, $t \in Q$, — проекция произведения на

сомножитель с индексом t . Определим функцию $h : C \rightarrow I$ следующим образом:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{t : \pi_t(f(x)) = 1\} = \emptyset, \\ \sup\{t : \pi_t(f(x)) = 1\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Можно проверить, что функция h полунепрерывна снизу и является измеримым отображением класса 1.

Определим на множестве C^m , $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, такую сепарабельную, метризуемую полной метрикой топологию $\rho_{m,n} \succ \epsilon^m$, чтобы пространство (C, ρ_n) было гомеоморфно подпространству $(\Delta, \rho_{m,n}|_\Delta)$, где Δ — диагональ произведения C^m . Снова через $\rho_{m,n}$ будем обозначать как метрику, так и индуцируемую ею топологию. Идея следующего построения при $m = 2$ принадлежит М. Ваге [98] и упрощена Т. Пшимушинским [81], а при $m > 2$ построение проводилось К. Тсудой [94].

Пусть отображения $h : C \rightarrow I^n$ и $h_i : C \rightarrow I^n$, $i \in \mathbb{N}$, и покрытия $\mathcal{B}_i$ пространства (C, ϵ) , $i \in \mathbb{N}$, такие же, как в предложении 4.27. Определим отображение $H : C^m \rightarrow I^n$ следующим образом. Пусть $x = (x^1, \dots, x^m) \in C^m$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$H(x) = \begin{cases} h(x^1), & \text{если } x \in \Delta, \\ 0, & \text{если } x \notin \bigcup\{B^m : B \in \mathcal{B}_1\}, \\ h_i(x^1), & \text{если } x \in \bigcup\{B^m : B \in \mathcal{B}_i\} \setminus \bigcup\{B^m : B \in \mathcal{B}_{i+1}\}. \end{cases}$$

Заметим, что так как $h_i|_B$, $B \in \mathcal{B}_i$, $i \in \mathbb{N}$, постоянно, то определяя отображение H в третьем случае можно брать значение h_i на любой из координат точки x .

Пространство $(C^m, \rho_{m,n})$ есть подпространство $C^m \times I^n$, являющееся графиком отображения H . Базу топологии в $(C^m, \rho_{m,n})$ образуют множества вида $U \cap H^{-1}V$, где U открыто в (C^m, ϵ^m) , V открыто в I^n . Отображение $H : (C^m, \rho_{m,n}) \rightarrow I^n$ является непрерывным. Пусть $\text{pr}_j : C^m \rightarrow C$ — проекция произведения на j -й сомножитель, $j = 1, \dots, m$.

Предложение 4.30. Пространство $(C^m, \rho_{m,n})$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $n \in \mathbb{N}^+$, является сепарабельным, метризуемым полной метрикой, n -мерным (пространство $(C^m, \rho_{m,\infty})$ A -сильно бесконечномерно), обладающим следующими свойствами:

- (P₀) $\rho_{m,n} \succ \epsilon^m$;
- (P₁) пространства $(\Delta, \rho_{m,n}|_\Delta)$ и (C, ρ_n) гомеоморфны;
- (P₂) пространства $(C^m \setminus \Delta, \rho_{m,n}|_{C^m \setminus \Delta})$ и $(C^m \setminus \Delta, \epsilon^m|_{C^m \setminus \Delta})$ гомеоморфны;
- (P₃) для любых $t \in C$, $j = 1, \dots, m$ пространства $(\text{pr}_j^{-1}(t), \rho_{m,n}|_{\text{pr}_j^{-1}(t)})$ и $(\text{pr}_j^{-1}(t), \epsilon^m|_{\text{pr}_j^{-1}(t)})$ гомеоморфны;
- (P₄) $\epsilon^{j-1} \times \rho_1 \times \epsilon^{m-j} \succ \rho_{m,1}$ для любого $j = 1, \dots, m$;
- (P₅) существуют такие n пар дизъюнктивных замкнутых множеств (A_i, B_i) в $(C^m, \rho_{m,n})$, что для любых замкнутых перегородок L_i между A_i , B_i , $i = 1, \dots, n$, в $(C^m, \rho_{m,n})$ $|\bigcap\{L_i : i = 1, \dots, n\}|_m = \mathfrak{c}$;
- (P₆) для любого борелевского, в частности замкнутого, подмножества $F \subset (C^m, \rho_{m,n})$ несчетной m -мощности $|F|_m = \mathfrak{c}$.

Доказательство. Построим следующие отображения при $i \in \mathbb{N}$:

$$H_i(x) = \begin{cases} h_i(x^1), & \text{если } x = (x^1, \dots, x^m) \in \bigcup\{B^m : B \in \mathcal{B}_i\}, \\ H(x), & \text{если } x \in C^m \setminus \bigcup\{B^m : B \in \mathcal{B}_i\}. \end{cases}$$

Легко проверить, что они являются непрерывными, и в каждой точке $x \in C^m$ имеет место соотношение $\lim_{i \rightarrow \infty} H_i(x) = H(x)$. Поэтому H является измеримым отображением класса 1, а график отображения H является G_δ -подмножеством $C^m \times I^n$. Следовательно, пространство $(C^m, \rho_{m,n})$ является сепарабельным, метризуемым полной метрикой и $\dim(C^m, \rho_{m,n}) \leq n$.

Так как $\Delta \cap H^{-1}U = h^{-1}U$ для любого открытого подмножества $U \subset I^n$ и семейство множеств $\Delta \cap V$, где $V \in \epsilon^m$, совпадает с семейством множеств, открытых в топологии ϵ , то пространства $(\Delta, \rho_{m,n}|_\Delta)$ и (C, ρ_n) имеют одинаковые базы топологий. Значит, их естественное биективное отображение будет гомеоморфизмом.

Из непрерывности (в силу локальной постоянности) отображения H на $C^m \setminus \Delta$ вытекает гомеоморфизм пространств $(C^m \setminus \Delta, \rho_{m,n}|_{C^m \setminus \Delta})$ и $(C^m \setminus \Delta, \epsilon^m|_{C^m \setminus \Delta})$.

Так как топология $\rho_{m,n}$ является наименьшей из топологий, которые сильнее топологии ϵ^m (что обеспечивает выполнение свойства (P_0)), и в которых непрерывно отображение H , то для проверки свойства (P_3) достаточно доказать непрерывность ограничения отображения H на подпространстве $(\text{pr}_j^{-1}(t), \epsilon^m|_{\text{pr}_j^{-1}(t)})$, $t \in C$, $j = 1, \dots, m$. Зафиксируем $t \in C$ и $j = 1, \dots, m$. Отображение $H|_{\text{pr}_j^{-1}(t)}$ является локально постоянным на подмножестве $\text{pr}_j^{-1}(t) \setminus \{(t, \dots, t)\}$. Из сходимости отображений h_i , $i \in \mathbb{N}$, к отображению h , вытекает непрерывность $H|_{\text{pr}_j^{-1}(t)}$ в точке $\{(t, \dots, t)\}$.

Воспользуемся соображением, приведенным при проверке свойства (P_3) , для проверки свойства (P_4) . Докажем непрерывность отображения H в топологии $\epsilon^{j-1} \times \rho_1 \times \epsilon^{m-j}$, $j = 1, \dots, m$. Без ограничения общности будем считать $j = 1$. Так как $\rho_1 \times \epsilon^{m-1} \succ \epsilon^m$, то непрерывность отображения H достаточно проверить только в точках Δ .

Пусть $x = (t, \dots, t)$ и $U \subset I$ — окрестность точки $H(x) = h(t) =$ (с учетом замечания 4.26) $= \min(\pi(g(t) \cap \pi_0^{-1}(t)))$. Полагаем $O = U \cup (h(t), 1]$, $F = I \setminus O$. Тогда $\pi(g(t) \cap \pi_0^{-1}(t)) \cap F = \emptyset$. Пусть W — такое открытое в I множество, что $F \subset W$ и $\text{cl}_I W \cap \pi(g(t) \cap \pi_0^{-1}(t)) = \emptyset$. Тогда в произведении $I \times \text{cl}_I W \subset \Pi = I \times I$ имеем

$$g(t) \cap (I \times \text{cl}_I W) \cap (\{t\} \times \text{cl}_I W) = \emptyset.$$

Поэтому в силу замкнутости ограничения проекции π_O на $I \times \text{cl}_I W$ существует окрестность V точки t такая, что

$$(\text{cl}_I V \times \text{cl}_I W) \cap (g(t) \cap (I \times \text{cl}_I W)) = \emptyset.$$

Значит, $V \times W \subset \Pi$ является окрестностью множества $\{t\} \times F$ и $\text{cl}_\Pi(V \times W) \cap g(t) = \emptyset$. Легко проверить, что открытые в Π множества $G_1 = \pi^{-1}O$, $G_2 = \pi^{-1}U$ и $G_3 = \pi_0^{-1}(I \setminus \text{cl}_I V)$ покрывают континуум $g(t)$, который пересекается с каждым из них.

Из определения топологии в $\mathcal{T}$ и непрерывности отображения $g : (C, \epsilon) \rightarrow \mathcal{T}$ следует существование открыто-замкнутой в (C, ϵ) окрестности Vt точки t такой, что $g(p) \subset \bigcup \{G_i : i = 1, 2, 3\}$ и $g(p) \cap G_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, 3$, для любых $p \in Vt$. Можно считать, что $Vt \subset V \cap C$ (считаем C подмножеством I).

Так как последовательность $h_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$, сходится к $h(t)$, то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $h_i(t) \in U$ при $i > k$. Для любого $i > k$ из определения отображений h_i следует существование $B \in \mathcal{B}_i$ такого, что $t \in B$ и $h_i(p) = h_i(t)$ для любой точки $p \in B$. Можно считать (взяв достаточное большое $i > k$), что $B \in Vt$ и $B \in \mathcal{B}_{i_0}$, где $i_0 > k$.

Так как отображение h непрерывно на пространстве (C, ρ_1) , то существует окрестность $W \subset B$ точки t в (C, ρ_1) такая, что $h(p) \in U$ для любых $p \in W$. Положим $G = W \times B^{m-1}$. Покажем, что $H(y) \in U$ для любой точки $y = (y_1, \dots, y_m) \in G$.

Если $y \in \Delta$, то $y_1 \in W$ и $H(y) = h(y_1) \in U$. Иначе (так как $y \in B^m$) из определения отображения H имеем $H(y) = h_l(y_1)$, где $l \geq i_0$, $l \in \mathbb{N}$, $y_1 \in B'$, $B' \in \mathcal{B}_l$. Из определения отображения h_l имеем

$$h_l(y_1) = \min \left(\pi \left(P = \bigcup \left\{ g(p) \cap \pi_0^{-1}(p) : p \in B' \right\} \right) \right).$$

Так как $B' \subset B \subset Vt$, то $g(p) \cap \pi_0^{-1}(p) \subset G_1 \cup G_2$ при $p \in B'$ (так как $\pi_0^{-1}(p) \cap G_3 = \emptyset$). Поэтому $P \in G_1 \cup G_2$. Так как $y_1 \in W$, то $h(y_1) = \min \pi(g(y_1) \cap \pi_0(y_1)) \in U$. В силу того, что $g(y_1) \cap \pi_0^{-1}(y_1) \subset P$ (так как $y_1 \in B'$), имеем $P \cap G_2 \neq \emptyset$. Следовательно, $\pi(P) \subset U \cup O$, $\pi(P) \cap U \neq \emptyset$ и, значит, $\min(\pi(P)) \in U$. Поэтому $H(y) = h_l(y_1) \in U$.

Выполнение свойства (P_5) следует из свойства (P) , предложения 4.27 и очевидного соображения, что мощность любого подмножества диагонали Δ совпадает с его m -мощностью. Из свойства (P_5) следует, что $\dim(C^m, \rho_{m,n}) \geq n$, а значит, и n -мерность пространства $(C^m, \rho_{m,n})$, $n \in \mathbb{N}$. При $n = \infty$ из свойства (P_5) вытекает A -сильная бесконечномерность пространства $(C^m, \rho_{m,n})$.

Для проверки свойства (P_6) достаточно заметить, что если m -мощность борелевского подмножества F пространства $(C^m, \rho_{m,n})$ несчетна и $F \cap \Delta$ несчетно, то можно воспользоваться теоремой Александрова—Хаусдорфа (см., например, [4, гл. 3, § 37, I, теорема 3]) о том, что любое

несчетное борелевское подмножество сепарабельного, полного метрического пространства имеет мощность континуум (напомним, что мощность подмножества Δ совпадает с его m -мощностью). Иначе, множество $F \setminus \Delta$ является борелевским подмножеством (C^m, ϵ^m) несчетной m -мощности. По [80, теорема 1] его m -мощность равна $\mathfrak{c}$. $\square$

Вопрос 4.31. Выполнено ли свойство (P_4) для любых $n \in \mathbb{N}^+$? Если нет, то можно ли добиться его выполнения, видоизменив конструкцию?

Замечание 4.32. Легко видеть, что семейства $\{(X^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$, где $X = C$, а $\lambda_a = \epsilon^{|a|}$, $a \in \Sigma_m$, или $\lambda_a = \epsilon^{|a|}$, $a \in \Sigma_m \setminus M$ и $\lambda_M = \rho_{m,n}$ являются согласованными семействами, удовлетворяющими условию (S) .

Лемма 4.33. Пусть G — произвольная открытая окрестность точки $p = (y, \dots, y) \in \Delta$ в пространстве $(C^m, \rho_{m,n})$, O — открытая окрестность точки y в пространстве (C, ϵ) такая, что

$$\bigcup \{O^{j-1} \times \{y\} \times O^{m-j} : j \in M\} \subset G$$

(напомним про свойство (P_3) предложения 4.30) и

$$x = (x^1, \dots, x^m) \in O^m \setminus \bigcup \{C^{j-1} \times \{y\} \times C^{m-j} : j \in M\}.$$

Тогда существуют открытые в (C, ϵ) окрестности $U^j \subset O$ точек x^j , $j \in M$, соответственно и открытая в (C, ϵ) окрестность $H \subset O$ точки y такие, что для любого $a \in \Sigma_m \setminus M$ имеем

$$\prod \{T^j : j \in M\} \subset G,$$

где $T^j = U^j$ при $j \in a$, $T^j = H$ при $j \in M \setminus a$.

Кроме того, если у точки x некоторые координаты совпадают, то окрестности точек им соответствующих одинаковы.

Доказательство. Пусть T — множество точек $t(a) = (t^1, \dots, t^m)$, $a \in \Sigma_m \setminus M$, таких, что $t^j = x^j$ при $j \in a$, $t^j = y$ при $j \in M \setminus a$. Если $j_0 \in M \setminus a$, то

$$t(a) \in O^{j_0-1} \times \{y\} \times O^{m-j_0} \subset G.$$

Из свойства (P_2) предложения 4.30 и того, что $t(a) \in C^m \setminus \Delta$ (напомним, что $x \notin \bigcup \{C^{j-1} \times \{y\} \times C^{m-j} : j \in M\}$), $a \in \Sigma_m \setminus M$, следует существование открытых окрестностей $V^j(t(a)) \subset O$, точек t^j в (C, ϵ) , $j \in M$, таких, что $\prod \{V^j(t(a)) : j \in M\} \subset G$. Положим

$$H(t(a)) = \bigcap \{V^j(t(a)) : j \in M \setminus a\},$$

$$U^j(t(a)) = \begin{cases} \bigcap \{V^s(t(a)) : t^s = x^j, s \in a\}, & \text{если оно не пусто,} \\ C & \text{иначе,} \end{cases} \quad j \in M.$$

Тогда

$$H = \bigcap \{H(t(a)) : a \in \Sigma_m \setminus M\}, \quad U^j = \bigcap \{U^j(t(a)) : a \in \Sigma_m \setminus M\}, \quad j \in M.$$

Очевидно, что они являются искомыми. $\square$

Лемма 4.34. Пусть точки $p = (y, \dots, y)$, $x = (x^1, \dots, x^m)$ и окрестности G точки p , O точки y такие же, как в лемме 4.33, $a \in \Sigma_m \setminus M$. Тогда существуют открытые в (C, ϵ) окрестности $U^j \subset O$ точек x^j , $j \in M$, соответственно, и открытая в (C, ϵ) окрестность $H \subset O$ точки y такие, что $\prod \{T^j : j \in M\} \subset G$, где $T^j \in \{U^1, \dots, U^m\}$ или $T^j = H$ при $j \in a$, причем $\{j \in a : T^j \in \{U^1, \dots, U^m\}\} \neq \emptyset$, и $T^j = H$ при $j \in M \setminus a$.

Кроме того, если у точки x некоторые координаты совпадают, то окрестности точек им соответствующих одинаковы.

Доказательство. Пусть T — множество точек $t = (t^1, \dots, t^m)$ таких, что $t^j \in \{x^1, \dots, x^m\}$ или $t^j = y$ при $j \in a$, причем $\{j \in a : t^j \in \{x^1, \dots, x^m\}\} \neq \emptyset$, и $t^j = y$ при $j \in M \setminus a$.

Отметим, что количество различных точек множества T конечно и $t \in G \setminus \Delta$ для любой точки $t \in T$. Из свойства (P_2) предложения 4.30 следует, что для любой точки $t \in T$ существуют открытые окрестности $V^j(t) \subset O$, точек t^j в (C, ϵ) , $j \in M$, такие, что $\prod\{V^j(t) : j \in M\} \subset G$. Положим

$$H(t) = \bigcap \{V^j(t) : t^j = y, j \in M\},$$

$$U^j(t) = \begin{cases} \bigcap_C \{V^s(t) : t^s = x^j, s \in a\}, & \text{если оно не пусто,} \\ & \text{иначе,} \end{cases} \quad j \in M.$$

Тогда

$$H = \bigcap \{H(t) : t \in T\}, \quad U^j = \bigcap \{U^j(t) : t \in T\}, \quad j \in M.$$

Очевидно, что они являются искомыми. $\square$

Утверждения следующей леммы вытекают из построения, проводимого при ее доказательстве.

Лемма 4.35. Пусть G_k , $k \in \mathbb{N}$, — семейство $1/k$ -шаров метрического пространства $(C^m, \rho_{m,n})$ с центром в точке $p = (y, \dots, y) \in \Delta$, $\mathcal{A}$ — счетное семейство последовательностей, сходящихся к p в пространстве $(C^m, \rho_{m,n})$, $\mathcal{B}$ — счетное семейство последовательностей, сходящихся к p в пространстве (C^m, ϵ^m) , причем никакие элементы последовательностей из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не принадлежат множеству $\bigcup \{C^{j-1} \times \{y\} \times C^{m-j} : j \in M\} \subset C^m$. Тогда любой последовательности $\xi \in \mathcal{A}$ можно поставить в соответствие бесконечное множество $N(\xi) \subset \mathbb{N}$, любой последовательности $\xi \in \mathcal{B}$ и индексу $j \in M$ можно поставить в соответствие множество $N(\xi, j) = \bigcup \{N_s(\xi, j) : s \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, являющееся объединением бесконечного числа попарно дизъюнктивных наборов $N_s(\xi, j)$, $s \in \mathbb{N}$, из m подряд идущих натуральных чисел, и существуют:

- (ρ_a) m последовательностей точек $\{x_i^j : i \in \mathbb{N}\}$, $j \in M$, сходящихся к y в пространстве (C, ϵ) ;
- (ρ_b) m последовательностей открытых в пространстве (C, ϵ) интервалов $\{I_i^j : i \in \mathbb{N}\}$, $j \in M$;
- (ρ_c) убывающая последовательность $\{H_i : i \in \mathbb{N}\}$ открытых в пространстве (C, ϵ) интервалов, содержащих точку y , и диаметр множества H_i меньше $1/i$, $i \in \mathbb{N}$,

такие, что для любого $j \in M$, имеем

- (ρ_0) $\mathbb{N} = \bigcup \{N(\xi) : \xi \in \mathcal{A}\} \cup \bigcup \{N_s(\xi, j) : \xi \in \mathcal{B}, j \in M\}$, где все элементы объединения попарно дизъюнктивны;
- (ρ_1) $x_i^j \in I_i^j$, $i \in \mathbb{N}$;
- (ρ_2) если $i \in N(\xi)$ для некоторого $\xi \in \mathcal{A}$, то $I_i^j \subset H_{i-1}$;
если $i \in N_s(\xi, k)$ для некоторых $\xi \in \mathcal{B}$, $k \in M$, $s \in \mathbb{N}$, то $I_i^j \subset H_{\min\{N_s(\xi, k)\}-1}$;
- (ρ_3) если $i \in N(\xi)$ для некоторого $\xi \in \mathcal{A}$, то для любого $a \in \Sigma_m \setminus M$ имеем $\prod\{T^j : j \in M\} \subset G_i$, где $T^j = I_i^j$ при $j \in a$, и $T^j = H_i$ при $j \in M \setminus a$;
если $i \in N_s(\xi, k)$ для некоторых $\xi \in \mathcal{B}$, $k \in M$, $s \in \mathbb{N}$, то $\prod\{T^j : j \in M\} \subset G_{\max\{N_s(\xi, k)\}}$, где $T^j = I_{i(j)}^j$, $i(j) \in N_s(\xi, k)$, или $T^j = H_{\max\{N_s(\xi, k)\}}$, $j \in M$, причем $\{j \in M : T^j = H_{\max\{N_s(\xi, k)\}}\} \neq M$;
- (ρ_4) $\left| \left\{ i \in \mathbb{N} : (x_i^1, \dots, x_i^m) \in \xi \right\} \right| = \omega$ для любого $\xi \in \mathcal{A}$;
- (ρ_5) $\left| \left\{ i \in \mathbb{N} : X_i^{j_1} \times \dots \times X_i^{j_m} \cap \xi \neq \emptyset \right\} \right| = \omega$ для любых $\xi \in \mathcal{B}$, $a \in \Sigma_m \setminus M$, где $X_i^{j_k} = \bigcup \{x_l^{j_k} : l \geq i\}$ и $j_k \in a$, $k \in M$.

Доказательство. Пусть $\{\xi_i : i \in \mathbb{N}\}$ — упорядочение счетного семейства экземпляров множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ по типу ω . Тогда для любой последовательности $\xi \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ имеем $|\{i \in \mathbb{N} : \xi_i = \xi\}| = \omega$.

По индукции для каждой последовательности ξ_i , $i \in \mathbb{N}$, построим конечное число элементов последовательностей из пп. (ρ_a) – (ρ_c) .

Пусть по последовательностям ξ_i , $i < k$, последовательности точек $\{x_i^j : i < l(k)\}$, открытых интервалов $\{I_i^j : i < l(k)\}$, $j \in M$, и интервалов $\{H_i : i < l(k)\}$, удовлетворяющих свойствам (ρ_1) – (ρ_3) , построены.

Если $\xi_k \in \mathcal{A}$, то к последовательностям добавим по одному элементу следующим образом. По свойству (P_3) предложения 4.30 существует открытая окрестность H' точки y в пространстве (C, ϵ) такая, что

$$\bigcup \{ (H')^{j-1} \times \{y\} \times (H')^{m-j} : j \in M \} \subset G_{l(k)}.$$

Также можно считать, что $H' \cap \bigcup \{x_i^j : i < l(k), j \in M\} = \emptyset$, $H' \subset H_{l(k)-1}$ и диаметр множества H' в пространстве (C, ϵ) меньше $1/l(k)$. Так как последовательность ξ_k сходится к точке p в пространстве $(C^m, \rho_{m,n})$ и $\rho_{m,n} \succ \epsilon^m$ по свойству (P_0) , то существует ее элемент $t = (t^1, \dots, t^m)$ такой, что $t \in G_{l(k)} \cap (H')^m$ (естественно $t^j \neq x_i^j$, $i < l(k)$, $j \in M$). Положим $x_{l(k)}^j = t^j$.

По лемме 4.33 существуют такие открытые в пространстве (C, ϵ) окрестности (естественно их можно считать интервалами) $H_{l(k)} \subset H'$ и $I_{l(k)}^j \subset H'$ (значит выполнено свойство (ρ_2)) точек y и $x_{l(k)}^j$, $j \in M$, соответственно, что выполнено свойство (ρ_3) с заменой i на $l(k)$. Число $l(k) \in N(\xi)$, где $\xi \in \mathcal{A}$ и $\xi = \xi_k$. Очевидно выполнение свойств (ρ_1) – (ρ_3) при $i \leq l(k) = l(k+1) - 1$.

Если $\xi_k \in \mathcal{B}$, то положим $a(s) = M \setminus \{s\}$, $s \in M$. Пусть для любого $a(s')$, $s' < s \leq m$, построены m элементов соответствующих последовательностей, удовлетворяющих свойствам (ρ_1) – (ρ_3) . Проведем построение для $s' = s$. Считаем, что построены последовательности из пунктов (ρ_a) – (ρ_c) при $i \leq l(k, s)$.

По свойству (P_3) предложения 4.30 существует открытая окрестность H' точки y в пространстве (C, ϵ) такая, что

$$\begin{aligned} \bigcup \{ (H')^{j-1} \times \{y\} \times (H')^{m-j} : j \in M \} &\subset G_{l(k,s)+m}, \\ H' \cap \bigcup \{ x_i^j : i \leq l(k, s), j \in M \} &= \emptyset, \quad H' \subset H_{l(k,s)} \end{aligned}$$

и диаметр множества H' в пространстве (C, ϵ) меньше $1/(l(k, s) + m)$. Так как ξ_k сходится к p в пространстве (C^m, ϵ^m) , то существует ее элемент $t = (t^1, \dots, t^m)$ такой, что $t \in (H')^m$ (естественно $t^j \neq x_i^j$, $j \in M$, $i \leq l(k, s)$). Для любого $r \in a(s)$ положим $x_{l(k,s)+j}^r = t^j$, $j \in M$. По лемме 4.34 существуют такие открытые в пространстве (C, ϵ) окрестности $U^j \subset H'$ точек t^j , $j \in M$, соответственно и окрестность $H'' \subset H'$ точки y , что $\prod \{T^j : j \in M\} \subset G_{l(k,s)+m}$, где $T^j \in \{U^1, \dots, U^m\}$ или $T^j = H''$ при $j \in a(s)$, причем $\{j \in a(s) : T^j \in \{U^1, \dots, U^m\}\} \neq \emptyset$, и $T^s = H''$. При этом если у точки t есть совпадающие координаты, то окрестности точек им соответствующих одинаковы.

Выберем точку $z \in H''$, ее окрестность $Oz \subset H''$ и окрестность $H \subset H''$ точки y (можем считать их интервалами) такие, что $y \notin Oz$, $\prod \{T^j : j \in M\} \subset G_{l(k,s)+m}$, где $T^j = Oz$ или H , $j \in M$, причем $\{j \in M : T^j = Oz\} \neq \emptyset$ и $\{j \in M : T^j = H\} \neq \emptyset$. Это можно сделать, так как множество точек $t = (t^1, \dots, t^m)$ таких, что $t^j = z$ или y , $j \in M$, и $\{j \in M : T^j = z\} \neq \emptyset$, $\{j \in M : T^j = y\} \neq \emptyset$, конечно, и они содержатся в $G_{l(k,s)+m} \setminus \Delta$.

Для любого $j \in M$ положим $H_{l(k,s)+j} = H$, $I_{l(k,s)+j}^r = U^j$ при $r \in a(s)$, $x_{l(k,s)+j}^s = z$, $I_{l(k,s)+j}^s = Oz$. Числа $l(k, s) + 1, \dots, l(k, s) + m$ являются одним из наборов множества $N(\xi, s)$, где $\xi \in \mathcal{B}$ и $\xi = \xi_k$. Из построения видно, что свойства (ρ_1) – (ρ_3) выполнены при $i \leq l(k, s) + m = l(k, s + 1)$.

Шаг индукции проведен в обоих возможных случаях. Выполнение свойств (ρ_4) и (ρ_5) следует из того, что каждая последовательность встречается счетное число раз в нашем упорядочении (при проверке свойства (ρ_5) также надо принять во внимание, что любое $a \in \Sigma_m \setminus M$ является подмножеством некоторого $a(s)$, $s \in M$). Выполнение свойства (ρ_0) следует из построения. $\square$

Замечание 4.36. Лемма 4.35 является видоизменением утверждений из [92] и [94, лемма 6.1].

4.4. Совершенно нормальные произведения, размерность которых больше суммы размерностей сомножителей. Построение примера проводится методом Юхаса—Кюнена—Рудин, модифицированным для случая произведений М. Ваге [98, 99] и исправленным Т. Пшимушинским [83, 84].

Пусть множество X имеет мощность ω_1 . Упорядочим $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ произвольным образом и положим $X_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, $\alpha \leq \omega_1$.

Лемма 4.37 (СН). Для любого $m \in \mathbb{N}$ семейство $\mathcal{S}$ всех счетных подмножеств X^m (очевидно, что в предположении континуум гипотезы его мощность ω_1) можно упорядочить таким образом $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, что

$$A_\alpha \subset X_\alpha^m, \alpha < \omega_1. \quad (O)$$

Доказательство. Упорядочим семейство $\mathcal{S}$ произвольным образом $\{A_\beta : \beta < \omega_1\}$ по типу ω_1 . Каждому ординалу $\beta < \omega_1$ поставим в соответствие ординал $\alpha(\beta) < \omega_1$ по следующему правилу:

$$\alpha(\beta) = \min \left\{ \alpha < \omega_1 : \alpha \neq \alpha(\gamma) \text{ при } \gamma < \beta, \text{ и } A_\beta \subset X_\alpha^m \right\}.$$

Данное соответствие корректно определено (так как множество $\bigcup \{\alpha(\gamma) : \gamma < \beta\}$ счетно) и является биективным (его инъективность очевидна, а сюръективность следует из того, что для произвольного ординала $\alpha < \omega_1$ счетное множество $A_\beta = X_\alpha^m$ не может соответствовать никакому $\gamma < \alpha$ и оно, по определению соответствия, должно соответствовать α , если ему ничто еще не поставлено в соответствие). Тогда упорядочение $\{A_{\alpha(\beta)} : \alpha(\beta) < \omega_1\}$ является искомым. $\square$

Предложение 4.38 (СН). Пусть $\{(X^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$ — согласованное семейство, удовлетворяющее условию (S), пространство (X^M, λ_M) является сепарабельным метризуемым пространством. Для $j \in M$ на множестве X заданы топологии τ_j , удовлетворяющие условию (T). Упорядочения на $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ и семействе $\mathcal{S} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ всех счетных подмножеств X^m удовлетворяют условию (O).

Пусть для любых $\gamma \leq \alpha$, где $\gamma, \alpha < \omega_1$, и любой точки $x = (x^1, \dots, x^m)$ такой, что $x^j \leq x_\alpha$, $j \in M$, и $a = \{j \in M : x^j = x_\alpha\} \in \Sigma_m$ выполнены следующие условия:

(cl₁) если $a = M$ и $x \in \text{cl}_{\lambda_M} A_\gamma$, то $x \in \text{cl}_{\tau_M} A_\gamma$;

(cl₂) если $a \neq M$ и $x \in \text{cl}_{\lambda_a \times \tau_{M \setminus a}} A_\gamma$, то $x \in \text{cl}_{\tau_M} A_\gamma$.

Тогда пространство (X^M, τ_M) удовлетворяет условию (B₃).

Доказательство. Проводя рассуждения, аналогичные проводимым в начале доказательства предложения 4.10, легко показать, что пространства (X^a, λ_a) , $a \in \Sigma_m$, являются сепарабельными метризуемыми пространствами. Заметим, что по лемме 4.5 проекции $\text{pr}_b^a(X^a, \lambda_a) \rightarrow (X^b, \lambda_b)$, $a, b \in \Sigma_m$, $b \subset a$, являются непрерывными.

Рассмотрим два утверждения.

Утверждение A(k). Для любого $a = \{j_1, \dots, j_{|a|}\} \in \Sigma_m$, $|a| \leq k$, и любого подмножества $A \subset X^a$ существует $\gamma < \omega_1$ такое, что из $x = (x^{j_1}, \dots, x^{j_{|a|}}) \in \text{cl}_{\lambda_a} A$, где $x^{j_s} > x_\gamma$, $j_s \in a$, следует, что $x \in \text{cl}_{\tau_a} A$.

Утверждение B(k). Для любых $a = \{j_1, \dots, j_{|a|}\} \in \Sigma_m$, где $|a| = k \geq 2$, и $b \in \Sigma_m \setminus M$, $b \subset a$, $b \neq a$, и любого подмножества $A \subset X^a$ существует $\gamma < \omega_1$ такое, что из $x = (x^{j_1}, \dots, x^{j_{|a|}}) \in \text{cl}_{\lambda_a} A$, где $x^{j_s} > x_\gamma$ при $j_s \in b$ следует, что $x \in \text{cl}_{\tau_b \times \lambda_{a \setminus b}} A$.

Предложение будет доказано, если сможем показать выполнение утверждения A(m). Для этого достаточно показать, что выполняется утверждение A(1), из утверждения A(k) следует выполнение утверждения B(k+1), $k = 1, \dots, m-1$, а из утверждения B(k) следует выполнение утверждения A(k), $k = 2, \dots, m$.

Проверка выполнения утверждения $A(1)$. Пусть $a \in \Sigma_m$, $|a| = 1$, $A \subset X$ — произвольное подмножество. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $a = \{1\}$. Из наследственной сепарабельности пространства (X, λ_a) следует существование такого счетного подмножества $A^* \subset A$, что $A \subset \text{cl}_{\lambda_a} A^*$. Зафиксируем произвольную точку $x_\beta \in X$ и рассмотрим множество $A^* \times \{x_\beta\} \times \dots \times \{x_\beta\} \subset X^M$ (количество одноточечных сомножителей равно $m - 1$). Тогда существует $\gamma < \omega_1$ такое, что $A_\gamma = A^* \times \{x_\beta\} \times \dots \times \{x_\beta\}$. При этом $\beta < \gamma$ по условию (O). Пусть $x \in \text{cl}_{\lambda_a} A$ и $x > x_\gamma$. Тогда $x \in \text{cl}_{\lambda_a} A^*$, и поэтому $x' = (x, x_\beta, \dots, x_\beta) \in \text{cl}_{\lambda_a} A^* \times \{x_\beta\} \times \dots \times \{x_\beta\} = \text{cl}_{\lambda_a \times \tau_{M \setminus a}} A_\gamma$. Из условия (cl_2) следует, что $x' \in \text{cl}_{\tau_M} A_\gamma = \text{cl}_{\tau_1} A^* \times \{x_\beta\} \times \dots \times \{x_\beta\}$. Значит, $x \in \text{cl}_{\tau_1} A^* \subset \text{cl}_{\tau_1} A$. $\square$

Проверка импликации $A(k) \implies B(k+1)$, $k = 1, \dots, m-1$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $a = \{1, \dots, k+1\}$, $k+1 \leq m$, $b = \{1, \dots, l\}$, $l \leq k$, и $A \subset X^a$. Пусть $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ — счетная база топологии пространства $(X^{a \setminus b}, \lambda_{a \setminus b})$, и $A_i = \text{pr}_b^a(A \cap (X^b \times V_i)) \subset X^b$. По утверждению $A(k)$ для любого $i \in \mathbb{N}$ существует $\gamma_i < \omega_1$ такое, что из $x' = (x^1, \dots, x^l) \in \text{cl}_{\lambda_b} A_i$, где $x^j > x_{\gamma_i}$, $j \in b$, следует, что $x' \in \text{cl}_{\tau_b} A_i$. Положим $\gamma = \sup\{\gamma_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Пусть $x = (x^1, \dots, x^{k+1}) \in \text{cl}_{\lambda_a} A$ и $x^j > x_\gamma$ при $j \in b$. Возьмем окрестность точки x в $(X^b, \tau_b) \times (X^{a \setminus b}, \lambda_{a \setminus b})$ вида $U \times V$, где $U \in \tau_b$, $V \in \lambda_{a \setminus b}$ и $V = V_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Тогда $x' = (x^1, \dots, x^l) \in \text{cl}_{\lambda_b} \text{pr}_b^a(A \cap (X^b \times V)) = \text{cl}_{\lambda_b} A_i$. (Действительно, если бы $x' \notin \text{cl}_{\lambda_b} A_i$, то из непрерывности отображений pr_b^a и $\text{pr}_{a \setminus b}^a$ вытекало бы существование окрестности точки x , не пересекающейся с A .) Из выполнения утверждения $A(k)$ имеем $x' \in \text{cl}_{\tau_b} A_i$. Поэтому существуют точки $(y^1, \dots, y^l) \in A_i \cap U \subset X^b$ и $(y^{l+1}, \dots, y^{k+1}) \in V \subset X^{a \setminus b}$ такие, что точка $y = (y^1, \dots, y^l, y^{l+1}, \dots, y^{k+1}) \in A$. Значит $A \cap (U \times V) \neq \emptyset$ для любой окрестности точки x вида $U \times V$, где $U \in \tau_b$, $V \in \lambda_{a \setminus b}$, которые образуют базу топологии в пространстве $(X^b, \tau_b) \times (X^{a \setminus b}, \lambda_{a \setminus b})$. Поэтому $x \in \text{cl}_{\tau_b \times \lambda_{a \setminus b}} A$. $\square$

Проверка импликации $B(k) \implies A(k)$, $k = 2, \dots, m$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $a = \{1, \dots, k\} \in \Sigma_m$, и $A \subset X^a$. По утверждению $B(k)$ для любого $b \in \Sigma_m \setminus M$, $b \subset a$, $b \neq a$, существует $\gamma(b) < \omega_1$ такое, что из $x = (x^1, \dots, x^k) \in \text{cl}_{\lambda_a} A$, $x^j > x_{\gamma(b)}$ при $j \in b$ следует, что $x \in \text{cl}_{\tau_b \times \lambda_{a \setminus b}} A$. Положим $\gamma_0 = \max\{\gamma(b) : b \in \Sigma_m \setminus M, b \subset a, b \neq a\}$.

Существует такое счетное подмножество $A^* \subset A$, что $A \subset \text{cl}_{\lambda_a} A^*$. Зафиксируем произвольную точку $x_\beta \in X$ и рассмотрим множество $A^* \times \{x_\beta\} \times \dots \times \{x_\beta\} \subset X^m$ (количество одноточечных сомножителей равно $m - k$). Тогда существует $\gamma_1 < \omega_1$ такое, что $A_{\gamma_1} = A^* \times \{x_\beta\} \times \dots \times \{x_\beta\}$. При этом $\beta < \gamma$ по условию (O). Положим $\gamma = \max\{\gamma_0, \gamma_1\}$.

Пусть $x = (x^1, \dots, x^k) \in \text{cl}_{\lambda_a} A$ и $x^j > x_\gamma$, $j \in a$. Тогда $x \in \text{cl}_{\lambda_a} A^*$, и поэтому точка

$$x' = (x^1, \dots, x^k, x_\beta, \dots, x_\beta) \in \text{cl}_{\lambda_a} A^* \times \{x_\beta\} \times \dots \times \{x_\beta\} = \text{cl}_{\lambda_a \times \tau_{M \setminus a}} A_{\gamma_1}.$$

Если все x^j , $j \in a$, равны, то по условию (cl_2) $x' \in \text{cl}_{\tau_M} A_{\gamma_1}$ (если $m = k$ и все x^j , $j \in M$, равны, то следует воспользоваться условием (cl_1)). Значит, $x \in \text{cl}_{\tau_a} A^* \subset \text{cl}_{\tau_a} A$.

Иначе, не ограничивая общности рассуждений, будем считать $x^1 = \max\{x^j : j \in a\}$, $c = \{j \in a : x^j = x^1\} \subset \Sigma_m \setminus M$. При этом $c \subset a$, $c \neq a$. Тогда по утверждению $B(k)$, примененного к a и $a \setminus c$, имеем $x \in \text{cl}_{\tau_{a \setminus c} \times \lambda_c} A^*$ (напомним, что $x^j > x_{\gamma(a \setminus c)}$ при $j \in a \setminus c$), и

$$x' \in \text{cl}_{\tau_{a \setminus c} \times \lambda_c} A^* \times \{x_\beta\} \times \dots \times \{x_\beta\} = \text{cl}_{\lambda_c \times \tau_{M \setminus c}} A_{\gamma_1}.$$

Теперь можно воспользоваться условием (cl_2) . Значит, $x' \in \text{cl}_{\tau_M} A_{\gamma_1}$. Поэтому $x \in \text{cl}_{\tau_a} A^* \subset \text{cl}_{\tau_a} A$. $\square$

Предложение 4.38 доказано. $\square$

Замечание 4.39. Отметим, что в предложении 4.38 доказано (утверждение $A(k)$, $k \in M$), что пространства (X^a, τ_a) , $a \in \Sigma_m$, удовлетворяют условию (B_3) (см. также лемму 4.6).

Замечание 4.40. Предложение 4.38 является распространением идей Т. Пшимушиньского [84] на случай согласованных семейств.

Теорема 4.41 (CH). Для любых $n \in \mathbb{N}^+$, $m \in \mathbb{N}$ существует такое сепарабельное, локально бикомпактное, локально счетное пространство $X = X(m, n)$, что пространство X^m совершенно нормально, и $\dim X^m = \text{Ind } X^m = n$ при $n \in \mathbb{N}$, а при $n = \infty$ пространство X^m A -сильно бесконечномерно, не слабо счетномерно. Кроме того, пространства X^s сильно нульмерны при $s < m$.

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}^+$, $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим пространство $(C^m, \rho_{m,n})$. Упорядочим $C = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ и семейство всех счетных подмножеств C^m таким образом $\mathcal{S} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, чтобы было выполнено условие (O). Положим $C_x = \{x_\beta : x_\beta < x\}$, $x \in C$. Топологии τ_j на множестве C определим, задавая семейства

$$\mathcal{B}_j = \left\{ \mathcal{B}_j(x) = \{B_i^j(x) : i \in \mathbb{N}\} : x \in C \right\}, \quad j \in M,$$

баз окрестностей точек $x \in C$. Базы окрестностей $\mathcal{B}_j(x)$, $j \in M$, точек $x \in C$ построим трансфинитной индукцией по введенному на C упорядочению.

Точки $x < x_\omega$ считаем изолированными во всех топологиях τ_j , $j \in M$. Пусть для $x < x_\alpha$ множества $B_i^j(x)$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in M$, построены, и выполнены условия:

- (1_x) $B_{i+1}^j(x) \subset B_i^j(x)$ и множества $B_i^j(x) \subset \{x\} \cup C_x$ (в введенном на C упорядочении) счетны и замкнуты в пространстве (C, ϵ) ;
- (2_x(a)) для любой открытой в (C, ϵ) окрестности U точки x существует $i \in \mathbb{N}$ такое, что $B_i^j(x) \subset U$;
- (2_x(b)) для любой открытой в $(C^m, \rho_{m,n})$ окрестности G точки $(x, \dots, x)$ существует $i \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\prod \{B_i^j(x) : j \in M\} \subset G;$$

- (3_x(a)) если $(x, \dots, x) \in \text{cl}_{\rho_{m,n}} A_\gamma$ и $\gamma < \omega_1$ таково, что $x_\gamma \leq x$, то

$$\prod \{B_i^j(x) : j \in M\} \cap A_\gamma \neq \emptyset$$

для любого $i \in \mathbb{N}$;

- (3_x(b)) если $(x, \dots, x) \in \text{cl}_{\epsilon^m} A_\gamma$ и $\gamma < \omega_1$ таково, что $x_\gamma \leq x$, то для любого $a \in \Sigma_m \setminus M$ и любых $j_k \in a$, $k \in M$, имеем

$$\prod \{B_i^{j_k}(x) : k \in M\} \cap A_\gamma \neq \emptyset$$

для любого $i \in \mathbb{N}$;

- (3_x(c)) пусть даны точка $t = (x^1, \dots, x^m)$, где $x = \max\{x^1, \dots, x^m\}$, $a = \{j \in M : x^j = x\} \subset \Sigma_m \setminus M$, набор $k(j) \in M$ при $j \in M \setminus a$, и $\gamma < \omega_1$ такое, что $x_\gamma \leq x$. Если $t \in \text{cl}_{\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m} A_\gamma$, где $\sigma_j = \tau_{k(j)}|_{C_x}$ при $j \in M \setminus a$ и $\sigma_j = \epsilon$ при $j \in a$, то для $l(j) = k(j)$ при $j \in M \setminus a$ и любых $l(j) \in M$ при $j \in a$ имеем

$$\prod \{B_i^{l(j)}(x^j) : j \in M\} \cap A_\gamma \neq \emptyset$$

для любого $i \in \mathbb{N}$.

Определим базы окрестностей $\mathcal{B}_j(x_\alpha)$ точки x_α , $j \in M$, удовлетворяющие условиям (1 _{x_α})-(3 _{x_α} (c)).

Пусть $R_\alpha(\rho_{m,n})$ — семейство всех таких A_γ , $\gamma \leq \alpha$, что $(x_\alpha, \dots, x_\alpha) \in \text{cl}_{\rho_{m,n}} A_\gamma$; $R_\alpha(\epsilon^m)$ — семейство всех таких A_γ , $\gamma \leq \alpha$, что $(x_\alpha, \dots, x_\alpha) \in \text{cl}_{\epsilon^m} A_\gamma$. Из свойства (P₀) предложения 4.30 имеем $R_\alpha(\rho_{m,n}) \subset R_\alpha(\epsilon^m)$ (К. Тсуда [94] вместо семейства $R_\alpha(\epsilon^m)$ рассматривал семейство $R_\alpha(\epsilon^m) \setminus R_\alpha(\rho_{m,n})$).

Для $a \in \Sigma_m \setminus M$ через $K(a, k(j))$ обозначим набор $k(j) \in M$ при $j \in M \setminus a$. Пусть $S_\alpha(K(a, k(j)))$ — семейство всех таких A_γ , $\gamma \leq \alpha$, что $x' = (x^1, \dots, x^m) \in \text{cl}_{\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m} A_\gamma$, где $x_\alpha = \max\{x^1, \dots, x^m\}$, $a = \{j \in M : x^j = x_\alpha\} \subset \Sigma_m \setminus M$, $\sigma_j = \tau_{k(j)}|_{C_{x_\alpha}}$ при $j \in M \setminus a$, и $\sigma_j = \epsilon$ при $j \in a$. Очевидна счетность каждого из семейств $R_\alpha(\rho_{m,n})$, $R_\alpha(\epsilon^m)$, $S_\alpha(K(a, k(j)))$ при $a \in \Sigma_m \setminus M$, и $k(j) \in M$, $j \in M \setminus a$. Всего таких семейств конечное число.

Для любого $A \in R_\alpha(\rho_{m,n})$ ($A \in R_\alpha(\epsilon^m)$) выберем последовательность

$$\lambda(A) = \{(x_i^1, \dots, x_i^m) : i \in \mathbb{N}\}$$

точек из A , сходящуюся к точке $(x_\alpha, \dots, x_\alpha)$ в пространстве $(C^m, \rho_{m,n})$ $((C^m, \epsilon^m))$. Для $A \in S_\alpha(K(a, k(j)))$ выберем последовательность $\{(y_i^1, \dots, y_i^m) : i \in \mathbb{N}\}$ точек из A , сходящуюся к точке $(x^1, \dots, x^m)$, где $x^j \leq x_\alpha$, $j \in M$, и $x^j = x_\alpha$ в том и только том случае, когда $j \in a$, в пространстве $(Y_1 \times \dots \times Y_m, \sigma_1 \times \dots \times \sigma_m)$, где $Y_j = C_{x_\alpha}$, $\sigma_j = \tau_{k(j)}|_{C_{x_\alpha}}$ при $j \in M \setminus a$, и $Y_j = C$, $\sigma_j = \epsilon$ при $j \in a$. Можно считать, что $y_i^j \in B_i^{k(j)}(x^j)$ при $j \in M \setminus a$. Зафиксируем произвольное $j_0 \in a$ и положим $\lambda(A) = \{(x_i^1, \dots, x_i^m) : i \in \mathbb{N}\}$, где $x_i^j = y_i^j$ при $j \in a$, и $x_i^j = y_i^{j_0}$, при $j \in M \setminus a$, $i \in \mathbb{N}$. Ясно, что последовательность $\lambda(A)$ сходится к точке $(x_\alpha, \dots, x_\alpha)$ в пространстве (C^m, ϵ^m) .

Семейство всех последовательностей $\lambda(A)$, где

$$A \in R_\alpha(\rho_{m,n}) \cup R_\alpha(\epsilon^m) \cup \bigcup \{S_\alpha(K(a, k(j))) : a \in \Sigma_m \setminus M, k(j) \in M \text{ при } j \in M \setminus a\}$$

не более чем счетно. Если оно пусто, то точку x_α считаем изолированной во всех топологиях. Иначе, для любой последовательности $\lambda(A)$ данного семейства имеем $\lambda(A) \subset C_{x_\alpha}^m$. По лемме 4.35, примененной к последовательностям $\lambda(A)$, $A \in R_\alpha(\rho_{m,n})$ (сходящимся к $(x_\alpha, \dots, x_\alpha)$ в $(C^m, \rho_{m,n})$), и последовательностям $\lambda(A)$, $A \in R_\alpha(\epsilon^m) \cup \bigcup \{S_\alpha(K(a, k(j))) : a \in \Sigma_m \setminus M, k(j) \in M, j \in M \setminus a\}$ (сходящимся к $(x_\alpha, \dots, x_\alpha)$ в (C^m, ϵ^m)), имеем m последовательностей точек $\{t_i^j : i \in \mathbb{N}\}$, сходящихся к x_α в (C, ϵ) , m последовательностей интервалов I_i^j , $i \in \mathbb{N}$, открытых в (C, ϵ) , $j \in M$, и убывающую последовательность интервалов H_i , открытых в (C, ϵ) , удовлетворяющих свойствам (ρ_0) – (ρ_5) .

Так как $t_i^j < x_\alpha$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in M$, то по предположению индукции для этих точек уже построены соответствующие базы окрестностей $B^j(t_i^j)$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in M$, удовлетворяющие условиям $(1_{t_i^j})$ – $(3_{t_i^j}(c))$. Поэтому для любых $i \in \mathbb{N}$, $j \in M$ существуют такие окрестности $B_{s(j,i)}^j(t_i^j)$ точек t_i^j , что $B_{s(j,i)}^j(t_i^j) \subset I_i^j$ (условие $(2_{t_i^j}(a))$), и $\prod \{B_{s(j,i)}^j(t_i^j) : j \in M\} \subset G_i$ (условие $(2_{t_i^j}(b))$), если $t_i^{j'} = t_i^{j''}$ для любых $j' \neq j''$, и условие $(2_{t_i^j}(a))$ и свойство (P_2) предложения 4.30 иначе.

Положим

$$B_i^j(x_\alpha) = \{x_\alpha\} \cup \bigcup \{B_{s(j,l)}^j(t_l^j) : l \geq i\},$$

$i \in \mathbb{N}$, $j \in M$.

Очевидно, что $B_{i+1}^j(x_\alpha) \subset B_i^j(x_\alpha)$, множества $B_i^j(x_\alpha)$ счетны и $B_i^j(x_\alpha) \subset \{x_\alpha\} \cup C_{x_\alpha}$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in M$. Замкнутость (а значит и бикомпактность) множеств $B_i^j(x_\alpha)$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in M$, в пространстве (C, ϵ) следует из того, что оно является объединением замкнутых множеств $B_{s(j,l)}^j(t_l^j)$, $l \in \mathbb{N}$, и, по свойству (ρ_2) леммы 4.35, дополнение до любой окрестности точки x_α в (C, ϵ) может пересекать лишь их конечное число.

Условие $(2_{x_\alpha}(a))$ вытекает из свойств (ρ_c) и (ρ_2) леммы 4.35.

Для проверки выполнения условия $(2_{x_\alpha}(b))$ достаточно для любого $i \in \mathbb{N}$ доказать включение

$$\prod \{B_i^j(x_\alpha) : j \in M\} \subset G_i.$$

Множество $\prod \{B_i^j(x_\alpha) : j \in M\}$ является объединением по всем возможным $a \in \{\emptyset\} \cup \Sigma_m$, и $l_j \geq i$ при $j \in M \setminus a$ множеств вида $\prod \{T^j : j \in M\}$, где $T^j = \{x_\alpha\}$ при $j \in a$, и $T^j = B_{s(j,l_j)}^j(t_{l_j}^j)$ при $j \in M \setminus a$.

При $a = M$ имеем $(x_\alpha, \dots, x_\alpha) \in G_i$. Остается показать, что для любых $a \in \{\emptyset\} \cup (\Sigma_m \setminus M)$, и $l_j \geq i$ при $j \in M \setminus a$ имеем $\prod \{T^j : j \in M\} \subset G_i$, где $T^j = \{x_\alpha\}$ при $j \in a$, и $T^j = B_{s(j,l_j)}^j(t_{l_j}^j)$ при $j \in M \setminus a$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $a = \{1, \dots, k\}$ и $i \leq l_1 \leq \dots \leq l_k$. Имеются две возможности: $l_1 \in N(\lambda(A))$, где $A \in R_\alpha(\rho_{m,n})$ и $l_1 \in N(\lambda(A), j)$, где $A \in R_\alpha(\epsilon^m) \cup \bigcup \{S_\alpha(K(a, k(j))) : a \in \Sigma_m \setminus M, k(j) \in M, j \in M \setminus a\}$. Можем считать, что во втором случае $l_1 \in N_q(\lambda(A), j)$ (см. обозначения леммы 4.35). Пусть в первом (втором) случае $r \in \mathbb{N}$ таково, что $l_1 = \dots = l_r$ ($l_1, \dots, l_r \in N_q(\lambda(A), j)$), и $r = k$ или $l_1 < l_{r+1}$ ($l_{r+1} \notin N_q(\lambda(A), j)$). Тогда, если $r < k$, то по свойствам (ρ_c) и (ρ_2) леммы 4.35 $I_{l_s}^j \subset H_{l_1}$ для $r < s \leq k$ и любых $j \in M$.

Поэтому из включений $B_{s(j,i)}^j(t_i^j) \subset I_i^j$ и $x_\alpha \in H_{l_1}$ имеем

$$\begin{aligned} & \prod \left\{ B_{s(j,l_j)}^j(t_{l_j}^j) : j = 1, \dots, k \right\} \times \{x_\alpha\} \times \dots \times \{x_\alpha\} \subset \\ & \subset \prod \left\{ B_{s(j,l_j)}^j(t_{l_j}^j) : j = 1, \dots, r \right\} \times H_{l_1}^{m-r} \subset \\ & \subset \prod \left\{ I_{l_j}^j : j = 1, \dots, r \right\} \times H_{l_1}^{m-r}. \end{aligned}$$

По свойствам (ρ_c) и (ρ_3) леммы 4.35

$$\prod \{I_{l_j}^j : j = 1, \dots, r\} \times H_{l_1}^{m-r} \subset G_{l_1} \subset G_i.$$

Тем самым нужное нам включение показано.

Выполнение условий $(3_{x_\alpha}(a))$ и $(3_{x_\alpha}(b))$ следует из свойств (ρ_4) и (ρ_5) леммы 4.35 соответственно.

Проверим выполнение условия $(3_{x_\alpha}(c))$. Пусть точка $t = (x^1, \dots, x^m)$, где $x_\alpha = \max\{x^1, \dots, x^m\}$, $a = \{j \in M : x^j = x_\alpha\} \subset \Sigma_m \setminus M$, набор $k(j) \in M$ при $j \in M \setminus a$, и $\gamma < \alpha$ таковы, что $t \in \text{cl}_{\sigma_1 \times \dots \times \sigma_m} A_\gamma$, где $\sigma_j = \tau_{k(j)}|_{C_{x_\alpha}}$ при $j \in M \setminus a$, и $\sigma_j = \epsilon$ при $j \in a$. Покажем, что

$$\prod \{B_i^{l(j)}(x^j) : j \in M\} \cap A_\gamma \neq \emptyset,$$

где $l(j) = k(j)$ при $j \in M \setminus a$, и $l(j) \in M$ при $j \in a$, для любого $i \in \mathbb{N}$. Зафиксируем произвольный набор $l(j)$, $j \in a$. Так как $|a| < m$, то существует такое $b \in \Sigma_m \setminus M$, что $l(j) \in b$ при $j \in a$. По условию (ρ_5) леммы 4.35 для последовательности $\lambda(A_\gamma)$, $A_\gamma \in S_\alpha(K(a, k(j)))$, и любого $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} T_i^{j_1} \times \dots \times T_i^{j_m} \cap \lambda(A_\gamma) & \neq \emptyset, \quad j_k \in b, \\ T_i^{j_k} & = \bigcup \left\{ t_l^{j_k} : l \geq i \right\}, \quad k \in M. \end{aligned}$$

Последовательность $\lambda(A_\gamma)$ была построена по последовательности $\{(y_l^1, \dots, y_l^m) : l \in \mathbb{N}\}$ точек из A_γ и $y_l^j \in B_l^{k(j)}(x^j)$ при $j \in M \setminus a$, $l \in \mathbb{N}$. Поэтому существует $k > i$ такое, что

$$(y_k^{j_1}, \dots, y_k^{j_{|a|}}) \in T_k^{j_1} \times \dots \times T_k^{j_{|a|}},$$

$j_s \in b$, $s = 1, \dots, |a|$. Тогда

$$\begin{aligned} (y_k^1, \dots, y_k^m) & \in A_\gamma \cap \prod \left\{ B_i^{l(j)}(x^j) : j \in M \right\}, \\ \prod \left\{ B_i^{l(j)}(x^j) : j \in M \right\} & \cap A_\gamma \neq \emptyset \end{aligned}$$

для любого $i \in \mathbb{N}$.

Легко проверить, что базы окрестностей корректно определены, пространства $X_j = (C, \tau_j)$, $j \in M$, являются локально бикompактными и локально счетными (а значит, имеют в каждой точке счетную базу из открыто-замкнутых множеств и являются тихоновскими). Положим

$$X = \bigoplus_{j=1}^k X_j.$$

Ясно, что X — тихоновское пространство, являющееся локально бикompактным и локально счетным.

Произведение X^m является дизъюнктивным объединением конечного числа произведений вида $\prod \{X_{j(k)} : k \in M\}$, где $j(k) \in M$, $k \in M$. Если все $j(k)$, $k \in M$, различны, то произведение $\prod \{X_{j(k)} : k \in M\}$ гомеоморфно произведению $(C^m, \tau_M) = \prod \{X_j : j \in M\}$.

По замечанию 4.32 семейство $\{(X^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$, где $X = C$, $\lambda_a = \epsilon^{|a|}$, $a \in \Sigma_m \setminus M$ и $\lambda_M = \rho_{m,n}$, является согласованным семейством, удовлетворяющим условию (S) . Топологии τ_j , $j \in M$, на множестве C удовлетворяют условию (T) (в силу условия $(2_{x_{\omega_1}}(a))$) и выполнены условия (cl_1) и (cl_2)

предложения 4.38 (в силу условий $(3_{x_{\omega_1}}(a))$ и $(3_{x_{\omega_1}}(c))$). Поэтому пространство (C^m, τ_M) удовлетворяет условию (B_3) . Согласно предложению 4.12 пространство (C^m, τ_M) совершенно нормально. Согласно теореме 4.23 $\dim(C^m, \tau_M) = \text{Ind}(C^m, \tau_M) = n$ при $n \in \mathbb{N}$, а при $n = \infty$ пространство (C^m, τ_M) A -сильно бесконечномерно, не слабо счетномерно. Сепарабельность пространств X_j , $j \in M$, следует из леммы 4.6 и [47, теорема]. Действительно, согласно лемме 4.6 пространство X_j , $j \in M$, удовлетворяет условию (B_3) . Пусть A — счетное всюду плотное подмножество пространства (C, ϵ) . Тогда по условию (B_3) множество $A' = \text{cl}_\epsilon A \setminus \text{cl}_{\tau_j} A$ счетно. Значит, счетное множество $A \cup A'$ всюду плотно в X_j , $j \in M$.

Пусть не все $j(k)$, $k \in M$, различны. По замечанию 4.32 семейство $\{(X^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$, где $X = C$, и $\lambda_a = \epsilon^{|a|}$, $a \in \Sigma_m$, является согласованным семейством, удовлетворяющим условию (S) . Топологии $\tau_{j(k)}$, $k \in M$, на множестве C удовлетворяют условию (T) (в силу условия $(2_{x_{\omega_1}}(a))$) и выполнены условия (cl_1) и (cl_2) предложения 4.38 (в силу условий $(3_{x_{\omega_1}}(b))$ и $(3_{x_{\omega_1}}(c))$). Поэтому пространство $\prod\{X_{j(k)} : k \in M\}$ удовлетворяет условию (B_3) . По предложению 4.12 оно совершенно нормально. По теореме 4.23

$$\dim \prod\{X_{j(k)} : k \in M\} = \text{Ind} \prod\{X_{j(k)} : k \in M\} = 0.$$

Отметим, что К. Тсуда [94], рассматривая семейство $R_\alpha(\epsilon^m) \setminus R_\alpha(\rho_{m,n})$ вместо семейства $R_\alpha(\epsilon^m)$, не может добиться выполнения условий (cl_1) и (cl_2) предложения 4.38, а значит, и условия (B_3) , которое играет основную роль при доказательстве совершенной нормальности и вычислении размерностей.

Очевидно, что пространство X сепарабельно и $\dim X^m = \text{Ind} X^m = n$ при $n \in \mathbb{N}$, а при $n = \infty$ пространство X^m A -сильно бесконечномерно, не слабо счетномерно.

Последнее утверждение теоремы вытекает из предложения 4.17. $\square$

Замечание 4.42. Теорема 4.41 обобщает теорему 6. Отметим также, что в доказательстве теоремы 6 имеется недочет (отмеченный в доказательстве теоремы 4.41), который не позволяет считать сомножители одинаковыми.

Из доказательства теоремы 4.41 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.43 (CH). Для любых $n \in \mathbb{N}^+$, $m \in \mathbb{N}$ существуют такие сепарабельные, локально бикомпактные и локально счетные пространства X_j , $j \in M$, что пространство $Y = \prod\{X_j : j \in M\}$ совершенно нормально, и $\dim Y = \text{Ind} Y = n$ при $n \in \mathbb{N}$, а при $n = \infty$ пространство Y A -сильно бесконечномерно, не слабо счетномерно.

Замечание 4.44. Следствие 4.43 обобщает результаты М. Ваге и К. Тсуды [92, пример 2].

Так как произведение совершенно нормального пространства на метризуемое пространство совершенно нормально (см., например, [26, задача 4.5.16]), при умножении пространства на отрезок размерность $\dim$ произведения становится на единицу больше размерности $\dim$ пространства [61, 62] (см. также [63, теоремы 6.6 и 8.3]), неравенства $\dim X \leq \text{Ind} X$ для нормальных пространств (см., например, [26, теорема 7.2.8]) и неравенства $\text{Ind} X \times Y \leq \text{Ind} X + \text{Ind} Y$, если X — совершенно нормальное, а Y — метризуемое непустые пространства (см., например, [38, теорема 2.4.12]) то, как заметил К. Тсуда [94], справедливы следующие утверждения.

Следствие 4.45 (CH). Для любых $n \in \mathbb{N}^+$, $m \in \mathbb{N}$ и любых $l_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существуют локально бикомпактные и сепарабельные пространства X_j такие, что $\text{Ind} X_j = \dim X_j = l_j$, $j \in M$, а их произведение $Y = \prod\{X_j : j \in M\}$ совершенно нормально и $\text{Ind} Y = \dim Y = \sum\{l_j : j \in M\} + n$ при $n \in \mathbb{N}$, а при $n = \infty$ пространство Y A -сильно бесконечномерно, не слабо счетномерно.

Следствие 4.46 (CH). Для любых $n \in \mathbb{N}^+$, $m \in \mathbb{N}$ и любого $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует локально бикомпактное и сепарабельное пространство $X = X(m, n, l)$ такое, что $\text{Ind} X = \dim X = l$, и произведение X^m совершенно нормально и $\text{Ind} X^m = \dim X^m = l \cdot m + n$ при $n \in \mathbb{N}$, а при $n = \infty$ пространство X^m A -сильно бесконечномерно, не слабо счетномерно.

Несложно видеть, что в следствии 4.46

$$\text{Ind} X(m, n, l)^k = \dim X(m, n, l)^k = l \cdot k$$

при $k = 1, \dots, m-1$. В связи с этим следующий вопрос задан Е. А. Резниченко.

Вопрос 4.47. Для любой ли неубывающей конечной последовательности $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_m$ неотрицательных целых чисел существует такое пространство X , что X^m совершенно нормально и $\dim X^j = \text{Ind } X^j = l_j$, $j = 1, \dots, m$?

4.5. Нормальные произведения, размерность которых больше суммы размерностей сомножителей. Построение примеров проводится методом, предложенным Э. ван Дауэном [95], и получившим свое развитие в работах Т. Пшимушиньского [81–84].

Теорема 4.48. Для любых $k, m \in \mathbb{N}$, $k < m$, $n \in \mathbb{N}^+$ существует пространство $X = X(k, m, n)$ с первой аксиомой счетности такое, что

- (a) пространство X^s линделефово тогда и только тогда, когда $s < k$;
- (b) пространство X^s нормально, когда $s \leq m$;
- (c) $\dim X^s = 0$ при $s < m$;
- (d) $\dim X^m = \text{Ind } X^m = n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Дополнительно заметим, что при $s \leq m$ пространство X^s является коллективно нормальным и счетно паракомпактным, а при $n = \infty$ пространство X^m является A -сильно бесконечномерным и не слабо счетномерным. Если $k = 1$, то пространство X является локально бикомпактным и локально счетным. Если $n = 1$, то пространство X является сепарабельным.

Доказательство. Пусть Q — счетное всюду плотное подмножество пространства (C, ρ_n) (так как $\rho_n \succ \epsilon$, то Q всюду плотно и в (C, ϵ)). Введем на C линейный порядок таким образом, что $q < p$ для любых $q \in Q$, $p \in C \setminus Q$ и положим $C_x = \{t \in C : t < x\}$, $x \in C$.

Пусть $\mathcal{B}_{\rho_{m,n}}$ — семейство всех различных пар (A, B) счетных подмножеств $(C^m, \rho_{m,n})$ таких, что $|\text{cl}_{\rho_{m,n}} A \cap \text{cl}_{\rho_{m,n}} B|_m > \omega$ (следовательно, по свойству (P_6) предложения 4.30 $|\text{cl}_{\rho_{m,n}} A \cap \text{cl}_{\rho_{m,n}} B|_m = \mathfrak{c}$); $\mathcal{B}_{\epsilon^m}$ — семейство всех различных пар (A, B) счетных подмножеств (C^m, ϵ^m) таких, что $|\text{cl}_{\epsilon^m} A \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B|_m > \omega$ (следовательно, согласно [80, теорема 1] $|\text{cl}_{\epsilon^m} A \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B|_m = \mathfrak{c}$). Заметим, что семейства $\mathcal{B}_{\rho_{m,n}}$ и $\mathcal{B}_{\epsilon^m}$ непусты (пространства $(C^m, \rho_{m,n})$ и (C^m, ϵ^m) сепарабельны), и легко проверить, что $|\mathcal{B}_{\rho_{m,n}}|, |\mathcal{B}_{\epsilon^m}| \leq \mathfrak{c}$. Пусть $\{(A_\alpha, B_\alpha) : \alpha < \mathfrak{c}\}$ — упорядочение семейства $\mathfrak{c}$ экземпляров множества $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\rho_{m,n}} \cup \mathcal{B}_{\epsilon^m}$ по типу $\mathfrak{c}$. Тогда для любой пары (A, B) из $\mathcal{B}$ имеем $|\{\alpha < \mathfrak{c} : (A_\alpha, B_\alpha) = (A, B)\}| = \mathfrak{c}$. Положим

$$B_\epsilon = \{\alpha < \mathfrak{c} : (A_\alpha, B_\alpha) \in \mathcal{B}_{\epsilon^m}\}, \quad B_\rho = \{\alpha < \mathfrak{c} : (A_\alpha, B_\alpha) \in \mathcal{B}_{\rho_{m,n}}\}.$$

Любой паре (A_α, B_α) , $\alpha < \mathfrak{c}$, поставим в соответствие точку $x_\alpha \in C$ такую, что $Q^m \cup (A_\alpha \cup B_\alpha) \subset C_{x_\alpha}^m$ (это можно сделать, так как множества из пары (A_α, B_α) счетны).

По трансфинитной индукции для любого $\alpha < \mathfrak{c}$, выберем $k+m$ точек $p(\alpha, i) \in \text{cl}_{\epsilon^m} A_\alpha \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B_\alpha$, $i = 1, \dots, k+m$, если $\alpha \in B_\epsilon$, и одну точку $r(\alpha) \in \text{cl}_{\rho_{m,n}} A_\alpha \cap \text{cl}_{\rho_{m,n}} B_\alpha$, если $\alpha \in B_\rho$ таким образом, что для любых $\alpha, \alpha' \in B_\epsilon$, $i, i' \in \{1, \dots, k+m\}$, $\beta, \beta' \in B_\rho$ выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \hat{p}(\alpha, i) \cap \hat{p}(\alpha', i') &= \emptyset, \text{ если } (\alpha, i) \neq (\alpha', i'), \\ \hat{p}(\alpha, i) \cap \hat{r}(\beta) &= \emptyset, \\ \hat{r}(\beta) \cap \hat{r}(\beta') &= \emptyset, \text{ если } \beta \neq \beta'; \end{aligned} \tag{d_1}$$

$$\hat{p}(\alpha, i) \cap C_{x_\alpha} = \emptyset, \quad \hat{r}(\beta) \cap C_{x_\beta} = \emptyset \tag{d_2}$$

(напомним, что $\hat{p}$ — множество координат точки p).

Проверим лишь возможность сделать шаг индукции. Пусть $\gamma < \mathfrak{c}$ и для любого $\alpha < \gamma$, если $\alpha \in B_\epsilon$, то выбраны $k+m$ точек $p(\alpha, i) \in \text{cl}_{\epsilon^m} A_\alpha \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B_\alpha$, $i = 1, \dots, k+m$, а если $\beta \in B_\rho$, то выбрана точка $r(\beta)$, для которых выполнены условия (d_1) , (d_2) при $\alpha, \alpha', \beta, \beta' < \gamma$. Множество

$$Y = C_{x_\gamma} \cup \bigcup \{\hat{p}(\alpha, i) : \alpha < \gamma, \alpha \in B_\epsilon, i = 1, \dots, k+m\} \cup \bigcup \{r(\beta) : \beta < \gamma, \beta \in B_\rho\}$$

имеет мощность $< \mathfrak{c}$. Поэтому, если $\gamma \in B_\epsilon$, то множество

$$F = (\text{cl}_{\epsilon^m} A_\gamma \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B_\gamma) \setminus \bigcup \{C^{j-1} \times Y \times C^{m-j} : j = 1, \dots, m\}$$

имеет согласно [80, теорема 1] m -мощность континуум. Согласно [80, лемма 1] можно найти точки $p(\gamma, i) \in F$, $i = 1, \dots, k+m$, такие, что $\hat{p}(\gamma, i) \cap \hat{p}(\gamma, i') = \emptyset$, если $i \neq i'$. Если $\gamma \in B_\rho$, то рассуждения аналогичны. Легко видеть, что условия (d_1) , (d_2) выполняются для $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \leq \gamma$.

Из процесса выбора точек следует, что множества Q ,

$$D = \bigcup \left\{ \hat{r}(\alpha) : \alpha < \mathfrak{c}, \alpha \in B_\rho \right\},$$

$$D_i = \bigcup \left\{ \hat{p}(\alpha, i) : \alpha < \mathfrak{c}, \alpha \in B_\epsilon \right\}, \quad i = 1, \dots, k+m,$$

попарно дизъюнкты. Кроме того, для любых $(A, B) \in B_\epsilon$ и $i = 1, \dots, k+m$, $((A, B) \in B_\rho)$ выполняется условие

$$\left| D_i^m \cap \left(\text{cl}_{\epsilon^m} A \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B \right) \right|_m = \mathfrak{c}, \quad \left| D^m \cap \left(\text{cl}_{\rho_{m,n}} A \cap \text{cl}_{\rho_{m,n}} B \right) \right|_m = \mathfrak{c}. \quad (d_3)$$

Действительно, если $(A, B) \in B_\epsilon$, то множество $L = \{\alpha < \mathfrak{c} : (A_\alpha, B_\alpha) = (A, B)\}$ имеет мощность $\mathfrak{c}$. Для любого $i = 1, \dots, k+m$, $p(\alpha, i) \in \text{cl}_{\epsilon^m} A_\alpha \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B_\alpha$, $\alpha \in L$. Так как $\hat{p}(\alpha, i) \in D_i$, то $p(\alpha, i) \in D_i^m$. Теперь условие (d_3) следует из условия (d_1) и определения m -мощности. Рассуждение в случае, если $(A, B) \in B_\rho$, аналогично.

Множество $E = C \setminus (Q \cup D \cup \bigcup \{D_i : i = 1, \dots, k+m\})$ добавим к множеству D и в дальнейшем множество $D \cup E$ будем также обозначать через D . Тогда

$$D \cup \bigcup \{D_i : i = 1, \dots, k+m\} = C \setminus Q.$$

Для любой точки $x \in C \setminus Q$ существует последовательность $\{q_s(x) : s \in \mathbb{N}\}$ точек из Q , сходящаяся к x в пространстве (C, ρ_n) (напомним, что Q всюду плотно в (C, ρ_n)). Заметим что, так как $\rho_n \succ \epsilon$, и пространство (C, ϵ) хаусдорфово, то $\lim_{s \rightarrow \infty} q_s(x) = x$ и в (C, ϵ) . В силу выбора порядка на C имеем

$$q_s(x) < x, s \in \mathbb{N}. \quad (s_q)$$

Для точки $p(\alpha, i) = (p^1(\alpha, i), \dots, p^m(\alpha, i)) \in \text{cl}_{\epsilon^m} A_\alpha \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B_\alpha$, $\alpha \in B_\epsilon$, $i = 1, \dots, k+m$ ($r(\alpha) = (r^1(\alpha), \dots, r^m(\alpha)) \in \text{cl}_{\rho_{m,n}} A_\alpha \cap \text{cl}_{\rho_{m,n}} B_\alpha$, $\alpha \in B_\rho$), существуют последовательности $\{v_s(\alpha, i) = (v_s^1(\alpha, i), \dots, v_s^m(\alpha, i)) : s \in \mathbb{N}\}$ и $\{w_s(\alpha, i) = (w_s^1(\alpha, i), \dots, w_s^m(\alpha, i)) : s \in \mathbb{N}\}$ точек из A_α и B_α соответственно, сходящиеся к точке $p(\alpha, i)$ ($r(\alpha)$) в пространстве (C^m, ϵ^m) ($(C^m, \rho_{m,n})$). Из условий $A_\alpha \cup B_\alpha \subset C_{x_\alpha}^m$ и (d_2) следует, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \dots, m$

$$v_s^j(\alpha, i), w_s^j(\alpha, i) < \min\{\hat{p}(\alpha, i)\} \text{ при } \alpha \in B_\epsilon, i = 1, \dots, k+m,$$

$$v_s^j(\alpha) < \min\{\hat{r}(\alpha)\}, w_s^j(\alpha) < \min\{\hat{r}(\alpha)\} \text{ при } \alpha \in B_\rho \quad (s_{vw})$$

(минимум берется по введенному на C порядку).

Из свойства (P_0) предложения 4.30 имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} v_s^j(\alpha, i) = p^j(\alpha, i) = \lim_{s \rightarrow \infty} w_s^j(\alpha, i) \text{ при } \alpha \in B_\epsilon, i = 1, \dots, k+m,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} v_s^j(\alpha) = r^j(\alpha) = \lim_{s \rightarrow \infty} w_s^j(\alpha) \text{ при } \alpha \in B_\rho, \quad (sl_{vw})$$

для любого $j = 1, \dots, m$, где сходимости рассматривается в пространстве (C, ϵ) .

Каждой точке $x \in \bigcup \{D_i : i = 1, \dots, k+m\}$ поставим в соответствие последовательность $\{t_s(x) : s \in \mathbb{N}\}$, сходящуюся к x в (C, ϵ) , и удовлетворяющую условию

$$t_s(x) < x, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (s_x)$$

Если $x \in \bigcup \{D_i : i = 1, \dots, k\}$, то $t_s(x) = q_s(x)$, $s \in \mathbb{N}$. Из определения последовательности $\{q_s(x) : s \in \mathbb{N}\}$ имеем $\lim_{s \rightarrow \infty} t_s(x) = x$, а условие (s_x) следует из (s_q) . Пусть $x \in D_i$, где $i \in \{k+1, \dots, k+m\}$. Существует $\alpha \in B_\epsilon$ (единственное в силу условия (d_1)) такое, что $x \in \hat{p}(\alpha, i)$, $p(\alpha, i) \in \text{cl}_{\epsilon^m} A_\alpha \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B_\alpha$. Положим $J = \{j \in \{1, \dots, m\} : x = p^j(\alpha, i)\}$, $r = |J|$,

$J = \{j(1), \dots, j(r)\}$, и

$$t_s(x) = \begin{cases} q_l(x), & \text{если } s = 1 + (l-1)(2r+1), \\ v_l^{j(u)}(\alpha, i), & \text{если } s = 1 + (l-1)(2r+1) + u, \\ w_l^{j(u)}(\alpha, i), & \text{если } s = 1 + (l-1)(2r+1) + r + u, \end{cases}$$

где $u = 1, \dots, r$, $l \in \mathbb{N}$. (Последовательность $\{t_s(x) : s \in \mathbb{N}\}$ является объединением последовательностей $\{q_s(x) : s \in \mathbb{N}\}$, $\{v_s^j(\alpha, i) : s \in \mathbb{N}\}$ и $\{w_s^j(\alpha, i) : s \in \mathbb{N}\}$, $j \in J$.) Она сходится к x в (C, ϵ) в силу условия (sl_{vw}) и того, что $\lim_{s \rightarrow \infty} q_s(x) = x$. Выполнение условия (s_x) вытекает из (s_q) и (s_{vw}) .

Легко видеть, что для каждой точки $x \in \bigcup \{D_i : i = k+1, \dots, k+m\}$ можно зафиксировать такую последовательность $I_s(x)$ открытых в пространстве (C, ϵ) интервалов диаметра $< 1/s$, $s \in \mathbb{N}$, что

$$t_s(x) \in I_s(x), \quad x \neq I_s(x), \quad (o_1)$$

$$I_s(x) \cap I_{s'}(x) = \emptyset, \quad \text{если } t_s(x) \neq t_{s'}(x). \quad (o_2)$$

Перейдем к построению последовательностей точек и интервалов, открытых в пространстве (C, ϵ) , для точек из D . Рассмотрим следующие возможные три случая.

Если $x \notin \hat{r}(\alpha)$ для любых $\alpha \in B_\rho$, то построим только одну последовательность точек $\{t_s(x) = q_s(x) : s \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что она сходится к x в (C, ϵ) и удовлетворяет условию (s_x) . Этот случай будем обозначать $x \in \mathcal{A}$.

Если $x \in \{\hat{r}(\alpha) : \alpha \in B_\rho\}$, то существует такое $\alpha \in B_\rho$ (единственное в силу условия (d_1)), что $x \in \hat{r}(\alpha)$, и $r(\alpha) = (r^1(\alpha), \dots, r^m(\alpha)) \in \text{cl}_{\rho_{m,n}} A_\alpha \cap \text{cl}_{\rho_{m,n}} B_\alpha$.

Если $\hat{r}(\alpha) \neq \{x\}$, то построим две последовательности точек и одну последовательность открытых в (C, ϵ) интервалов. Положим $J = \{j \in \{1, \dots, m\} : x = r^j(\alpha)\}$. Тогда последовательность точек $\{t_s^1(x) : s \in \mathbb{N}\}$ является объединением последовательностей $\{q_s(x) : s \in \mathbb{N}\}$ и $\{v_s^j(\alpha) : s \in \mathbb{N}\}$, $\{w_s^j(\alpha), s \in \mathbb{N}\}$, $j \in J$, тем же методом, который применялся для точек из D_i , $i = k+1, \dots, k+m$. Положим $\{t_s^2(x) = q_s(x) : s \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что они сходятся к x в (C, ϵ) и удовлетворяет условию (s_x) . По последовательности $\{t_s^1(x) : s \in \mathbb{N}\}$ построим, также как и для точек из D_i , $i = k+1, \dots, k+m$, последовательность интервалов $I_s(x)$, $s \in \mathbb{N}$, открытых в (C, ϵ) и удовлетворяющих условиям (o_1) , (o_2) . Этот случай обозначим $x \in \mathcal{B}$.

Если $\hat{r}(\alpha) = \{x\}$, то по лемме 4.35, примененной к двум последовательностям $\{v_s(\alpha) : s \in \mathbb{N}\}$, $\{w_s(\alpha), s \in \mathbb{N}\}$, сходящимся к $r(\alpha)$ в $(C^m, \rho_{m,n})$, и одной последовательности $\{(q_s(x), \dots, q_s(x)) : s \in \mathbb{N}\}$, сходящейся к $r(\alpha)$ в (C^m, ϵ^m) (при $n = 1$, в силу свойства (P_4)) предложения 4.30 все три последовательности сходятся к $r(\alpha)$ в $(C^m, \rho_{m,n})$, имеем m последовательностей точек $\{t_s^j(x) : s \in \mathbb{N}\}$, $j = 1, \dots, m$, сходящихся к x в (C, ϵ) и m последовательностей интервалов $I_s^j(x)$, $s \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m$, открытых в (C, ϵ) , удовлетворяющих свойствам (ρ_0) – (ρ_5) . Они и будут искомыми. Отметим, что из алгоритма построения последовательностей в лемме 4.35 и условий (s_q) и (s_{vw}) следует выполнение условия (s_x) для последовательностей $\{t_s^j(x) : s \in \mathbb{N}\}$, $j = 1, \dots, m$. Этот случай обозначим $x \in \mathcal{C}$.

Теперь для $\nu = 1, \dots, k$, $\mu = 1, \dots, m$, определим такие топологии $\mathcal{T}_{\nu, \mu}$ на C , более сильные чем ϵ , что пространство $X_{\nu, \mu} = (C, \mathcal{T}_{\nu, \mu})$ удовлетворяет первой аксиоме счетности и выполнены следующие условия, где для последовательности $\{t_s^j(x) : s \in \mathbb{N}\}$ обозначим $T_l^j(x) = \bigcup \{t_s^j(x) : s \geq l\}$, $l \in \mathbb{N}$:

- (1_τ) любая точка $x \in \bigcup \{D_i : i = 1, \dots, k\} \setminus D_\nu$ имеет базу окрестностей из открытых в (C, ϵ) множеств;
- (2_τ) для любых точки $x \in \bigcup \{D_i : i = k+1, \dots, k+m\} \setminus D_{\mu+k}$ и ее окрестности O в $X_{\nu, \mu}$ существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что $T_l^j(x) \subset O$;
- (3_τ) если $x \in D$ и $x \in \mathcal{A}$, то любая окрестность точки x в $X_{\nu, \mu}$ содержится в $\{x\} \cup Q$;
- (4_τ) если $x \in D$, $x \in \mathcal{B}$ и $\mu \in J$ (см. обозначение выше), то для любой окрестности O точки x в $X_{\nu, \mu}$ существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что $T_l^1(x) \subset O$, если $\mu \notin J$, то любая окрестность точки x в $X_{\nu, \mu}$ содержится в $\{x\} \cup Q$;

(5_τ) если $x \in D$, $x \in C$, то для любых $\nu(j) \in \{1, \dots, k\}$, $j = 1, \dots, m$, и любой окрестности W точки $(x, \dots, x)$ в $\prod\{X_{\nu(j),j} : j = 1, \dots, m\}$ существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\prod\{T_l^j(x) : j = 1, \dots, m\} \subset W;$$

(6_τ) окрестность любой точки $x \in Q \cup D_\nu \cup D_{\mu+k}$ в $X_{\nu,\mu}$ содержится в $\{x\} \cup Q$.

Топологии $\mathcal{T}_{\nu,\mu}$, $\nu = 1, \dots, k$, $\mu = 1, \dots, m$, будем определять, задавая семейства $\mathcal{B}_{\nu,\mu} = \{\mathcal{B}_{\nu,\mu}(x) = \{B_i^{\nu,\mu}(x) : i \in \mathbb{N}\} : x \in C\}$ баз окрестностей точек $x \in C$. Базы окрестностей $\mathcal{B}_{\nu,\mu}(x)$ точек $x \in C$ построим индукцией по введенному на C упорядочению. Пусть для $y < x$, $i \in \mathbb{N}$ множества $B_i^{\nu,\mu}(y)$, $\nu = 1, \dots, k$, $\mu = 1, \dots, m$, построены, и выполнены условия:

- (1_y) $B_{i+1}^{\nu,\mu}(y) \subset B_i^{\nu,\mu}(y)$, и $B_i^{\nu,\mu}(y)$ замкнуты в (C, ϵ) ;
- (2_y) для любой открытой в (C, ϵ) окрестности U точки y существует $i \in \mathbb{N}$ такое, что $B_i^{\nu,\mu}(y) \subset U$;
- (3_y) для любой открытой в $(C^m, \rho_{m,n})$ окрестности G точки $(y, \dots, y)$ и любых таких $\nu(j) \in \{1, \dots, k\}$, $j = 1, \dots, m$, где $\{\nu(j) : j = 1, \dots, m\} = \{1, \dots, k\}$ (попарно различных элементов множества $\{\nu(j) : j = 1, \dots, m\}$ равно k), существует $i \in \mathbb{N}$ такое, что $\prod\{B_i^{\nu(j),j}(y) : j = 1, \dots, m\} \subset G$.

Построим множества $B_i^{\nu,\mu}(x)$, $\nu = 1, \dots, k$, $\mu = 1, \dots, m$, $i \in \mathbb{N}$, являющиеся базами окрестностей точки x , и удовлетворяющие условиям (1_x)–(3_x):

- (1_b) если $x \in Q$, то $B_i^{\nu,\mu}(x) = \{x\}$;
- (2_b) если $x \in D_\nu \cup D_{\mu+k}$, то $B_i^{\nu,\mu}(x) = \{x\}$;
- (3_b) если $x \in \bigcup\{D_j : j = 1, \dots, k\} \setminus D_\nu$, то $B_i^{\nu,\mu}(x)$ — произвольный замкнутый в (C, ϵ) интервал длины $< 1/i$ с концами в точках из Q , содержащий x и содержащийся в $B_{i-1}^{\nu,\mu}(x)$, при $i > 2$;
- (4_b) если $x \in \bigcup\{D_j : j = k+1, \dots, k+m\} \setminus D_{\mu+k}$, то для любого $s \in \mathbb{N}$ выбираем окрестности $B_{l(s)}^{\nu,\mu}(t_s(x))$ точек $t_s(x) < x$, содержащиеся в $I_s(x)$, и полагаем $B_i^{\nu,\mu}(x) = \{x\} \cup \bigcup\{B_{l(s)}^{\nu,\mu}(t_s(x)) : s \geq i\}$;
- (5_b) если $x \in D$ и $x \in \mathcal{A}$, то $B_i^{\nu,\mu}(x) = \{x\}$;
- (6_b) если $x \in D$, $x \in \mathcal{B}$ и $\mu \in J$, то выбираем окрестности $B_{l(s)}^{\nu,\mu}(t_s^1(x))$ точек $t_s^1(x) < x$, содержащиеся в $I_s(x)$, и полагаем $B_i^{\nu,\mu}(x) = \{x\} \cup \bigcup\{B_{l(s)}^{\nu,\mu}(t_s^1(x)) : s \geq i\}$, если $\mu \notin J$, то $B_i^{\nu,\mu}(x) = \{x\}$;
- (7_b) если $x \in D$, $x \in \mathcal{C}$, то для любого $s \in \mathbb{N}$ выбираем такие окрестности $B_{l(s)}^{\nu,\mu}(t_s^\mu(x))$ точек $t_s^\mu(x) < x$, содержащиеся в $I_s^\mu(x)$, что для любых таких $\nu(j) \in \{1, \dots, k\}$, $j = 1, \dots, m$, где $\{\nu(j) : j = 1, \dots, m\} = \{1, \dots, k\}$, множество $\prod\{B_{l(s)}^{\nu(j),j}(t_s^j(x)) : j = 1, \dots, m\}$ содержится в шаре пространства $(C^m, \rho_{m,n})$ с центром в точке $(t_s^1, \dots, t_s^m)$ и диаметра $< 1/s$, и полагаем $B_i^{\nu,\mu}(x) = \{x\} \cup \bigcup\{B_{l(s)}^{\nu,\mu}(t_s^\mu(x)) : s \geq i\}$.

При $n = 1$ вместо условий (2_b), (5_b), (6_b) будем использовать условия

- (2'_b) $B_i^{\nu,\mu}(x) = \{x\} \cup \{q_s(x) : s \geq i\}$;
- (5'_b) $B_i^{\nu,\mu}(x) = \{x\} \cup \{q_s(x) : s \geq i\}$;
- (6'_b) условие (6_b), отличается от (6_b) тем, что если $\mu \notin J$, то $B_i^{\nu,\mu}(x) = \{x\} \cup \{q_s(x) : s \geq i\}$.

Легко проверить, что из определения интервалов $I_s(x)$ и $I_s^\mu(x)$, условий (1_y), (2_y), (1_b)–(7_b) вытекает выполнение условий (1_x), (2_x). Проверим выполнение условия (3_x). Если $x \in Q$, то его выполнение следует из (1_b). Пусть $x \in \bigcup\{D_j : j = 1, \dots, k+m\}$ и, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $x \in D_s$, где $s \in \{1, \dots, k\}$ ($s \in \{k+1, \dots, k+m\}$). В произведении $\prod\{B_{l(s)}^{\nu(j),j}(t_s(x)) : j = 1, \dots, m\}$, где $\{\nu(j) : j = 1, \dots, m\} = \{1, \dots, k\}$, существует $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ такое, что $\nu(j_0) = s$ ($j_0 = s - k$). Тогда $B_i^{\nu(j_0),j_0}(x) = \{x\}$ в силу условия (2_b). Остается воспользоваться свойством (P₂) предложения 4.30 (при $n = 1$ надо воспользоваться условием (2'_b) и свойством (P₄) предложения 4.30). Если $x \in D$, то рассуждения аналогичны, с использованием условий (5_b), (6_b), (7_b) или (5'_b), (6'_b), (7_b) и соответствующих свойств предложения 4.30.

Легко проверить, что базы окрестностей корректно определены, пространства $X_{\nu,\mu}$ удовлетворяют первой аксиоме счетности, $\mathcal{T}_{\nu,\mu} \succ \epsilon$, и выполняются условия (1_t)–(6_t), $\nu = 1, \dots, k$, $\mu = 1, \dots, m$. Кроме того, пространства $X_{\nu,\mu}$, $\nu = 1, \dots, k$, $\mu = 1, \dots, m$, тихоновские (множества $B_i^{\nu,\mu}(x)$, $x \in C$,

замкнуты в евклидовой топологии и значит открыто-замкнуты в $X_{\nu,\mu}$, т.е. пространства $X_{\nu,\mu}$ нульмерны). При $k = 1$ пространства $X_{\nu,\mu}$, $\nu = 1, \dots, k$, $\mu = 1, \dots, m$, локально бикомпактны и локально счетны. При $n = 1$ множество Q всюду плотно в $X_{\nu,\mu}$, $\nu = 1, \dots, k$, $\mu = 1, \dots, m$. Положим

$$X = \bigoplus_{\nu=1}^k \bigoplus_{\mu=1}^m X_{\nu,\mu}.$$

Ясно, что X тихоновское пространство, удовлетворяет первой аксиоме счетности и сепарабельно при $n = 1$.

Для окончания доказательства нам понадобятся следующие утверждения.

Утверждение 1. $\prod\{\mathcal{T}_{\nu(j),j} : j = 1, \dots, m\} \succ \rho_{m,n}$, где $\{\nu(j) : j = 1, \dots, m\} = \{1, \dots, k\}$.

Доказательство. В силу свойств $\mathcal{T}_{\nu,\mu} \succ \epsilon$, $\nu = 1, \dots, k$, $\mu = 1, \dots, m$, и (P_1) предложения 4.30 условие вписанности топологий остается проверить только для точек диагонали $\Delta \subset C^m$. Но для них утверждение выполнено в силу условия (3_x) , $x \in C$. $\square$

Утверждение 2. Для согласованного семейства $\{(C^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$, где $\lambda_a = \epsilon^{|a|}$, $a \in \Sigma_m$, из замечания 4.32, и m топологий $\mathcal{T}_{\nu(j),\mu(j)}$ на C , где $\nu(j) \in \{1, \dots, k\}$, $\mu(j) \in \{k+1, \dots, k+m\}$, $j = 1, \dots, m$, выполняется условие (T) . Кроме того, если $\{\nu(j) : j = 1, \dots, m\} \neq \{1, \dots, k\}$, или $\{\mu(j) : j = 1, \dots, m\} \neq \{1, \dots, m\}$, то выполнено условие (B_2) с заменой (X^M, τ_M) на $(C^m, \prod\{\mathcal{T}_{\nu(j),\mu(j)} : j = 1, \dots, m\})$ и λ_M на ϵ^m .

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна. Перейдем к проверке выполнения условия (B_2) . Не ограничивая общности рассуждений, пусть $\nu(j) \neq 1$ ($\mu(j) \neq 1$), $j = 1, \dots, m$, и положим $s = 1$ ($s = k+1$).

Предположим, что существуют замкнутые подмножества A, B произведения

$$\prod\{X_{\nu(j),\mu(j)} : j = 1, \dots, m\}$$

такие, что $|A \cap B|_m \leq \omega$, но $|\text{cl}_{\epsilon^m} A \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B|_m > \omega$. Так как пространство (C^m, ϵ^m) наследственно сепарабельно, то существуют счетные подмножества A^*, B^* множеств A и B соответственно, такие, что $A \in \text{cl}_{\epsilon^m} A^*$, $B \in \text{cl}_{\epsilon^m} B^*$. Пара $(A^*, B^*) \in B_\epsilon$, так как $|\text{cl}_{\epsilon^m} A^* \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B^*|_m > \omega$ (как уже было отмечено выше, в этом случае выполнено равенство $|\text{cl}_{\epsilon^m} A^* \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B^*|_m = \mathfrak{c}$). Поэтому из условия (d_3) имеем $|D_1^m \cap (\text{cl}_{\epsilon^m} A^* \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B^*)|_m = \mathfrak{c}$ ($|D_{k+1}^m \cap (\text{cl}_{\epsilon^m} A^* \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B^*)|_m = \mathfrak{c}$). В точках $D_1^m \subset C^m$ топология $\prod\{\mathcal{T}_{\nu(j),\mu(j)} : j = 1, \dots, m\}$ совпадает с топологией ϵ^m по условию (1_τ) . Поэтому $|D_1^m \cap (\text{cl}_{\prod\{\mathcal{T}_{\nu(j),\mu(j)} : j=1,\dots,m\}} A^* \cap \text{cl}_{\prod\{\mathcal{T}_{\nu(j),\mu(j)} : j=1,\dots,m\}} B^*)|_m = \mathfrak{c}$, и значит $|D_1^m \cap (A \cap B)|_m = \mathfrak{c}$. (Пусть $L = \{\alpha < \mathfrak{c} : (A_\alpha, B_\alpha) = (A^*, B^*)\}$, $|L| = \mathfrak{c}$. Тогда $p(\alpha, k+1) \in \text{cl}_{\epsilon^m} A^* \cap \text{cl}_{\epsilon^m} B^*$, $\alpha \in L$. Из условия (2_τ) имеем $p(\alpha, k+1) \in \text{cl}_{\prod\{\mathcal{T}_{\nu(j),\mu(j)} : j=1,\dots,m\}} A^* \cap \text{cl}_{\prod\{\mathcal{T}_{\nu(j),\mu(j)} : j=1,\dots,m\}} B^* \subset A \cap B$. Значит, $|A \cap B|_m = \mathfrak{c}$.) Полученное противоречие и доказывает утверждение. $\square$

Утверждение 3. Для согласованного семейства $\{(C^a, \lambda_a), \text{pr}_a, \Sigma_m\}$, где $\lambda_a = \epsilon^{|a|}$, $a \in \Sigma_m \setminus M$, $\lambda_M = \rho_{m,n}$ из замечания 4.32, и m топологий $\mathcal{T}_{\nu(j),j}$ на C , где $\nu(j) \in \{1, \dots, k\}$, $j = 1, \dots, m$, выполняются условия (T) и (B_2) , с соответствующей заменой.

Доказательство. Выполнение условия (T) доказано в утверждении 1. Перейдем к проверке выполнения условия (B_2) .

Предположим, что существуют замкнутые подмножества A, B произведения

$$\prod\{X_{\nu(j),j} : j = 1, \dots, m\}$$

такие, что $|A \cap B|_m \leq \omega$, но $|\text{cl}_{\rho_{m,n}} A \cap \text{cl}_{\rho_{m,n}} B|_m > \omega$. Так как пространство $(C^m, \rho_{m,n})$ наследственно сепарабельно, то существуют счетные подмножества A^*, B^* множеств A и B соответственно, такие, что $A \in \text{cl}_{\rho_{m,n}} A^*$, $B \in \text{cl}_{\rho_{m,n}} B^*$. Пара $(A^*, B^*) \in B_\rho$, так как $|\text{cl}_{\rho_{m,n}} A^* \cap \text{cl}_{\rho_{m,n}} B^*|_m > \omega$ (как уже было отмечено выше, в этом случае выполнено равенство $|\text{cl}_{\rho_{m,n}} A^* \cap \text{cl}_{\rho_{m,n}} B^*|_m = \mathfrak{c}$). Пусть $L = \{\alpha < \mathfrak{c} : (A_\alpha, B_\alpha) = (A^*, B^*)\}$, $|L| = \mathfrak{c}$. Тогда $r(\alpha) \in \text{cl}_{\rho_{m,n}} A^* \cap \text{cl}_{\rho_{m,n}} B^*$ при $\alpha \in L$. По условиям (4_τ) и (5_τ) имеем $r(\alpha) \in A \cap B$. Значит $|A \cap B|_m = \mathfrak{c}$. Полученное противоречие и доказывает утверждение. $\square$

Утверждение 4. Для произведения

$$\prod \{X_{\nu(j), \mu(j)} : j = 1, \dots, m\},$$

где

$$\{\nu(j) : j = 1, \dots, m\} \neq \{1, \dots, k\},$$

существует $s \in \{1, \dots, k\}$ такое, что любое замкнутое подмножество A произведения, для которого $A \cap D_s^m = \emptyset$, имеет счетную m -мощность.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, пусть $\nu(j) \neq 1$, $j = 1, \dots, m$. Положим $s = 1$.

Пусть m -мощность замкнутого множества A несчетна, но $A \cap D_1^m = \emptyset$. Так как пространство (C^m, ϵ^m) наследственно сепарабельно, то существует счетное подмножество A^* множеств A такое, что $A \in \text{cl}_{\epsilon^m} A^*$. Так как $A \subset \text{cl}_{\epsilon^m} A^*$, и значит $|\text{cl}_{\epsilon^m} A^*|_m > \omega$, то пара $(A^*, A^*) \in B_\epsilon$. Поэтому из условия (d_3) имеем $|D_1^m \cap \text{cl}_{\epsilon^m} A^*|_m > \omega$. В точках D_1^m топология $\prod \{\mathcal{T}_{\nu(j), \mu(j)} : j = 1, \dots, m\}$ совпадает с топологией ϵ^m по условию (1_τ) . Поэтому $|D_1^m \cap \text{cl}_{\prod \{X_{\nu(j), \mu(j)} : j=1, \dots, m\}} A^*|_m > \omega$, и значит $|D_1^m \cap A|_m > \omega$. Полученное противоречие и доказывает утверждение. $\square$

В утверждении 4 фактически доказано, что если $s \notin \bigcup \{\nu(j) : j = 1, \dots, m\}$, то любое замкнутое подмножество A , для которого $A \cap D_s^m = \emptyset$, имеет счетную m -мощность.

Утверждение 5. Пространство

$$\prod \{X_{\nu(j), \mu(j)} : j = 1, \dots, m\},$$

где

$$\{\nu(j) : j = 1, \dots, m\} \neq \{1, \dots, k\},$$

является линделефовым.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, пусть $\nu(j) \neq 1$, $j = 1, \dots, m$. Положим $\Pi_a = \prod \{X_{\nu(j), \mu(j)} : j \in a\}$, где $a \in \Sigma_m$ (всевозможные конечные подмножества множества $M = \{1, \dots, m\}$). Покажем, что для любого $a \in \Sigma_m$ произведение Π_a линделефово. Доказательство проведем индукцией по мощности множеств a .

При $|a| = 1$, не ограничивая общности рассуждений, считаем $a = \{1\}$. Докажем линделефовость пространства $X_{\nu(1), \mu(1)}$. Пусть Ω — произвольное открытое покрытие пространства $X_{\nu(1), \mu(1)}$. Так как любая точка подмножества $D_1 \subset C$ имеет в $X_{\nu(1), \mu(1)}$ базу окрестностей из открытых в (C, ϵ) множеств (условие (1_τ)), и пространство (C, ϵ) наследственно линделефово, то существует счетное подсемейство $\Omega_1 \subset \Omega$ открытых в $X_{\nu(1), \mu(1)}$ множеств, покрывающих D_1 . Линделефовость пространства $X_{\nu(1), \mu(1)}$ будет доказана, если установить, что множество $A = C \setminus \bigcup \Omega_1$ счетно.

Множество A замкнуто в $X_{\nu(1), \mu(1)}$ и $A \cap D_1 = \emptyset$. Прообраз A' множества A при естественной проекции произведения Π_M на $X_{\nu(1), \mu(1)}$ замкнут в Π_M . Значит замкнуто и множество $A' \cap \Delta$, где Δ диагональ произведения Π_M . Оно не пересекается с подмножеством D_1^m , и поэтому в силу утверждения 4 имеет счетную m -мощность. Тем самым счетно и множество A (в силу естественной биекции C и $\Delta \subset C^m$, и равенства $|A' \cap \Delta|_m = |A' \cap \Delta|$).

Пусть для всех $a \in \Sigma_m$, $|a| < l$, утверждение доказано. Докажем его для $a \in \Sigma_m$, $|a| = l$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $a = \{1, \dots, l\}$. Пусть Ω — произвольное открытое покрытие пространства Π_a . Так как любая точка подмножества $D_1^l \subset \Pi_a$ имеет базу окрестностей из открытых в (C^l, ϵ^l) (условие (1_τ)) множеств, и пространство (C^l, ϵ^l) наследственно линделефово, то существует счетное подсемейство $\Omega_1 \subset \Omega$, покрывающее подмножество D_1^l . Линделефовость пространства Π_a будет доказана, если установить, что l -мощность множества $A = C^l \setminus \bigcup \Omega_1$ счетна (т.е. A является счетным объединением линделефовых, по предположению индукции, пространств).

Если $l = m$, то надо воспользоваться утверждением 4. Иначе множество A замкнуто в Π_a и $A \cap D_1^l = \emptyset$. Прообраз A' множества A при естественной проекции пространства Π_M на Π_a замкнут в Π_M . Зафиксируем произвольный элемент $j_0 \in a$, например $j_0 = l$, и положим $b = (M \setminus a) \cup j_0$. Пусть Δ' — диагональ Π_b . Тогда ее прообраз $\Delta'' = \{(x^1, \dots, x^m) \in \Pi_M : x^l = x^{l+1} = \dots = x^m\}$

при естественной проекции пространства Π_M на Π_b замкнут в Π_M . Значит замкнуто и множество $A' \cap \Delta''$. Кроме того $(A' \cap \Delta'') \cap D_1^m = \emptyset$ (координаты точек из $A' \cap \Delta''$ с индексами из $b \setminus \{l\}$ равны координате с индексом l). По утверждению 4 множество $A' \cap \Delta''$ имеет счетную m -мощность. Существует естественная биекция между Δ'' и Π_M (забываем у точек Δ'' координаты, с индексами $\geq l + 1$). Легко проверить, что m -мощность подмножества Δ'' и l -мощность подмножества Π_a , естественно ему соответствующего совпадают. Множеству $A' \cap \Delta''$ соответствует множество A . Значит $|A|_l \leq \omega$. Утверждение доказано. $\square$

В утверждении 5 фактически доказано, что произведение $\prod\{X_{\nu(j),\mu(j)} : j = 1, \dots, l\}$, где $l \leq m$, и $\{\nu(j) : j = 1, \dots, l\} \neq \{1, \dots, k\}$, является линделефовым.

Теперь покажем, что если $k > 1$, то произведение X^{k-1} линделефово, а значит и произведения X^s , $s < k$, линделефовы (как непрерывные образы линделефова пространства). Произведение X^{k-1} является дизъюнктивным объединением конечного числа произведений вида $\prod\{X_{\nu(i),\mu(i)} : i = 1, \dots, k-1\}$, $\nu(i) \in \{1, \dots, k\}$, $\mu(i) \in \{1, \dots, m\}$, $i = 1, \dots, k-1$, в которых количество попарно различных элементов $\nu(i) \in \{1, \dots, k\}$, $i = 1, \dots, k-1$, меньше k . По утверждению 5 они линделефовы. Значит линделефово и пространство X^{k-1} .

Проверим оставшиеся утверждения теоремы. Произведение X^m является дизъюнктивным объединением конечного числа произведений вида $\prod\{X_{\nu(j),\mu(j)} : j = 1, \dots, m\}$, $\nu(j) \in \{1, \dots, k\}$, $\mu(j) \in \{1, \dots, m\}$, $j = 1, \dots, m$. Если $\{\nu(j) : j = 1, \dots, m\} \neq \{1, \dots, k\}$, то по утверждению 5 произведение вида $\prod\{X_{\nu(j),\mu(j)} : j = 1, \dots, m\}$, $\nu(j) \in \{1, \dots, k\}$, $\mu(j) \in \{1, \dots, m\}$, $j = 1, \dots, m$, линделефово, а значит паракомпактно и сильно нульмерно (напомним, что пространства $X_{\nu(j),\mu(j)}$ нульмерны при $\nu(j) \in \{1, \dots, k\}$, $\mu(j) \in \{1, \dots, m\}$, $j = 1, \dots, m$). Если $\{\mu(j) : j = 1, \dots, m\} \neq \{1, \dots, m\}$, то для доказательства коллективной нормальности и счетной паракомпактности произведений вида $\prod\{X_{\nu(j),\mu(j)} : j = 1, \dots, m\}$, $\nu(j) \in \{1, \dots, k\}$, $\mu(j) \in \{1, \dots, m\}$, $j = 1, \dots, m$, надо воспользоваться утверждением 2 и предложением 4.10, а для установления размерностных свойств — теоремой 4.23. Для произведений $\prod\{X_{\nu(j),j} : j = 1, \dots, m\}$, $\nu(j) \in \{1, \dots, k\}$, $j = 1, \dots, m$, надо воспользоваться утверждением 3, предложением 4.10 и теоремой 4.23. $\square$

Из доказательства теоремы 4.48 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.49. Для каждого $n \in \mathbb{N}^+$, $m \in \mathbb{N}$ существуют такие локально бикомпактные, локально счетные и сильно нульмерные пространства X_j , $j = 1, \dots, m$, что пространство $Y = \prod\{X_j : j = 1, \dots, m\}$ коллективно нормально, счетно паракомпактно, и $\dim Y = \text{Ind } Y = n$ при $n \in \mathbb{N}$, при $n = \infty$ пространство Y A -сильно бесконечномерно, не слабо счетномерно, а при $n = 1$ пространства X_j , $j = 1, \dots, m$, можно дополнительно считать сепарабельными.

Замечание 4.50. При $k = m = l + 1$, $n = 1$ из теоремы 4.48 вытекает теорема 2.

При $k = 1$, $m = l + 1$, $n = 1$ из теоремы 4.48 вытекает теорема 3.

При $k = m = l + 1$, $n \in \mathbb{N}^+$ из теоремы 4.48 вытекает теорема 5, но без условия сепарабельности пространства X (сепарабельность получена только при $n = 1$).

При $k = 1$, $m = 2$, $n \in \mathbb{N}^+$ из следствия 4.49 вытекает теорема 4, но без выполнения условия сепарабельности сомножителей (сепарабельность получена только при $n = 1$).

При $k = 1$, $m = 2$, $n \in \mathbb{N}^+$ теорема 4.48 дает ответ на вопрос К. Тсуды о равенстве сомножителей, но без выполнения условия сепарабельности сомножителей (сепарабельность получена только при $n = 1$).

Вопрос 4.51. Можно ли добиться того, чтобы пространство $X(k, m, n)$ было сепарабельным при $n > 1$?

К. Тсуда [91, 94], а также Р. Энгелькинг и Э. Поль [39] в случае $n = \infty$ утверждают, что да, но доказательства не приводят. Заметим, что из положительного ответа на вопрос 4.31 следовал бы и положительный ответ на данный вопрос.

Замечание 4.52. В доказательстве теоремы 4.48 применена техника, аналогичная используемой Т. Пшимушинским [82] для доказательства следующего утверждения.

Для любых k и m таких, что $1 \leq k \leq m \leq \omega_0$, существует сепарабельное и с первой аксиомой счетности пространство $X = X(k, m)$ такое, что

- (а) пространство X^n линделефово тогда и только тогда, когда $n < k$;
- (б) пространство X^n нормально тогда и только тогда, когда $n < m$.

В связи с этим замечанием возникает вопрос.

Вопрос 4.53. Будет ли пространство X^s нормальным и счетно паракомпактным при $s > m$?

Так как произведение коллективно нормального и счетно паракомпактного пространства на отрезок коллективно нормально и счетно паракомпактно (см., например, [26, задачи 5.2.G.(b), 5.5.19.(d)]), и при умножении пространства на отрезок размерность $\dim$ произведения становится на единицу больше размерности $\dim$ пространства [61, 62] (см. также [63, теоремы 6.6 и 8.3]), то, как заметил К. Тсуда [94], справедливы следующие утверждения.

Следствие 4.54. Для любых $n \in \mathbb{N}^+$, $m \in \mathbb{N}$ и любых $l_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существуют локально бикомпактные пространства X_j такие, что $\dim X_j = l_j$, $j = 1, \dots, m$, а их произведение $Y = \prod\{X_j : j = 1, \dots, m\}$ коллективно нормально, счетно паракомпактно и $\dim Y = \sum\{l_j : j = 1, \dots, m\} + n$ при $n \in \mathbb{N}$, при $n = \infty$ пространство Y A -сильно бесконечномерно, не слабо счетномерно, а при $n = 1$ пространства X_j , $j = 1, \dots, m$, можно дополнительно считать сепарабельными.

Следствие 4.55. Для любых $n \in \mathbb{N}^+$, $m \in \mathbb{N}$ и любого $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует локально бикомпактное пространство X такое, что $\dim X = l$, и произведение X^m коллективно нормально, счетно паракомпактно и $\dim X^m = l \cdot m + n$ при $n \in \mathbb{N}$, при $n = \infty$ пространство X^m A -сильно бесконечномерно, не слабо счетномерно, а при $n = 1$ пространства X_j , $j = 1, \dots, m$, можно дополнительно считать сепарабельными.

Несложно видеть, что в следствии 4.55 $\dim X^k = l \cdot k$ при $k = 1, \dots, m - 1$. В связи с этим следующий вопрос, аналогичный вопросу 4.47, задан Е. А. Резниченко.

Вопрос 4.56. Для любой ли неубывающей конечной последовательности $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_m$ неотрицательных целых чисел существует такое пространство X , что X^m нормально и $\dim X^j = l_j$, $j = 1, \dots, m$?

С вопросом 4.56 связан и вопрос К. Тсуды [94, вопрос 11.1].

Вопрос 4.57. Для любых ли $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^+$ существует такое пространство X , что $\dim X^j = k$, и пространство X^j линделефово при $j = 1, \dots, m$, а пространство X^{m+1} нормально и $\dim X^j = k + n$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1973.
2. Александров П. С., Проскуряков И. В. О приводимых множествах// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1941. — 5, № 3. — С. 217–224.
3. Зарелуа А. В. О теореме Гуревича// Мат. сб. — 1963. — 60, № 1. — С. 17–28.
4. Куратовский К. Топология. — М.: Мир, 1966.
5. Клебанов Б. С. О факторизации непрерывных отображений произведений топологических пространств// IV Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям/ Тез. докл. — Кишинев, 1979. — С. 60–62.
6. Клебанов Б. С. Непрерывные образы тихоновских произведений метрических пространств// Дисс. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1980.
7. Одинокоев А. В. О размерности и прямоугольности произведений с лашневским сомножителем// Вестн. МГУ. — 1999. — 1. — С. 59–62.
8. Пасынков Б. А. Об универсальных бикомпактах данного веса и данной размерности// Докл. АН СССР. — 1964. — 154, № 5. — С. 1042–1043.
9. Пасынков Б. А. Об одном классе отображений и о размерности нормальных пространств// Сиб. мат. ж. — 1964. — 5, № 2. — С. 356–376.

10. Пасынков Б. А. Частичные топологические произведения// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1965. — 13. — С. 136–245.
11. Пасынков Б. А. Об универсальных пространствах// Fund. Math. — 1968. — 60, № 3. — С. 285–308.
12. Пасынков Б. А. О размерности произведений нормальных пространств// Докл. АН СССР. — 1973. — 209, № 4. — С. 792–794.
13. Пасынков Б. А. Размерность прямоугольных произведений// Докл. АН СССР. — 1975. — 221, № 2. — С. 291–294.
14. Пасынков Б. А. О размерности топологических произведений и пределов обратных спектров// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6, — С. 1332–1336.
15. Пасынков Б. А. Факторизационные теоремы в теории размерности// Усп. мат. наук. — 1981. — 36, № 3. — С. 147–175.
16. Пасынков Б. А. О монотонности размерности// Докл. АН СССР. — 1982. — 267, № 3. — С. 548–552.
17. Пасынков Б. А. Факторизационная теорема для размерности Δ // Геометрия погруженных многообразий. — М.: МГПУ, 1986. — С. 70–75.
18. Пасынков Б. А. Монотонность размерности и открытые отображения, повышающие размерность// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2004. — 247. — С. 202–213.
19. Проселкова Т. В. О взаимоотношениях различных типов расположений пространств// Общая топология. Пространства, отображения и функторы. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — С. 111–125.
20. Филиппов В. В. О размерности нормальных пространств// Докл. АН СССР. — 1973. — 209, № 4. — С. 805–807.
21. Филиппов В. В. // Междунар. топол. конф./ Тез. докл. — М.: 1980. — С. 90.
22. Филиппов В. В. О размерности произведений топологических пространств// Fund. Math. — 1980. — 106, № 3. — С. 181–212.
23. Филиппов В. В. Нормально расположенные подмножества// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1983. — 154. — С. 239–251.
24. Щепин Е. В. Вещественные функции и канонические множества в тихоновских произведениях и топологических группах// Усп. мат. наук. — 1976. — 31, № 6. — С. 17–27.
25. Щепин Е. В. О топологических произведениях, группах и новом классе пространств, более общем чем метрические// Докл. АН СССР. — 1976. — 226, № 3. — С. 527–529.
26. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986).
27. Bade W. G. Two properties of the Sorgenfrey plane// Pac. J. Math. — 1974. — 51, № 2. — С. 349–354.
28. Blair R. L. Spaces in which special sets are z -embedded// Can. J. Math. — 1976. — 28, № 4. — С. 673–690.
29. Charalambous M. G. The dimension of inverse limits// Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — 58, № 2. — С. 289–295.
30. Charalambous M. G. An example concerning inverse limit sequences of normal spaces// Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — 78, № 4. — С. 605–607.
31. Charalambous M. G. The dimension of inverse limit and N -compact spaces// Proc. Amer. Math. Soc. — 1982. — 85, № 4. — С. 648–652.
32. Charalambous M. G. Further theory and applications of covering dimension of uniform spaces// Czechosl. Math. J. — 1991. — 41, № 3. — С. 378–394.
33. Chigogidze A. On some questions in Dimension theory// Topology. Coll. Math. Soc. J. Bolyai. — 1980. — 23. — С. 273–286.
34. Chigogidze A. On the dimension of increments of Tychonoff spaces// Fund. Math. — 1981. — 111, № 1. — С. 25–36.
35. Chigogidze A. Zero-dimensional open mappings which increase dimension// Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1983. — 24, № 4. — С. 571–579.
36. Dowker C. H. Inductive dimension of completely normal spaces// Quart. J. Math. Oxford, Ser 2. — 1953. — 4, № 16. — С. 267–281.
37. Engelking R. On functions defined on Cartesian products// Fund. Math. — 1966. — 59, № 2. — С. 221–231.
38. Engelking R. Theory of dimensions. Finite and infinite/ Sigma Ser. Pure Math. — Heldermann-Verlag, 1995. — 10.
39. Engelking R., Pol E. Countable-dimensional spaces, a survey// Dissert. Math. — 1983. — 216. — С. 1–45.
40. Fedorchuk V. V. On the dimension of hereditarily normal spaces// Proc. London Math. Soc. — 1978. — 36, № 3. — С. 163–175.
41. Forst A. A. On the covering dimension of subspaces of products of Sorgenfrey lines// Proc. Amer. Math. Soc. — 1978. — 72, № 3. — С. 601–606.

42. *Fora A. A.* The covering dimension of product of generalized Sorgenfrey lines// *Mat. Vesn.* — 1981. — 5 (18), № 1. — С. 33–41.
43. *Hoshina T., Morita K.* On rectangular products of topological spaces// *Topology Appl.* — 1980. — 11, № 1. — С. 47–57.
44. *Hušek M.* Mappings from products// *Topological structures II.* — *Math. Centre Tracts*, 1979. — 115. — С. 131–145.
45. *Isiwata T.* Generalizations of M -spaces I, II// *Proc. Jpn. Acad.* — 1969. — 45. — С. 359–363, 364–367.
46. *Isiwata T.* Z -mappings and C^* -embeddings// *Proc. Jpn. Acad.* — 1969. — 45. — С. 889–893.
47. *Juhász I., Kunen K., Rudin M. E.* Two more hereditarily separable non-Lindelöf spaces// *Can. J. Math.* — 1976. — 28, № 5. — С. 998–1005.
48. *Katětov M.* A theorem on the Lebesgue dimension// *Časopis Pěst. Mat. Fys.* — 1950. — 75. — С. 79–87.
49. *Katuta Y.* On the covering dimension of inverse limits// *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1982. — 84, № 4. — С. 588–592.
50. *Kodama Y.* On subset theorems and the dimension of products// *Amer. J. Math.* — 1969. — 91, № 4. — С. 486–498.
51. *Kozlov K. L., Pasynkov B. A.* Dimension of subsets of topological products// *Proc. Second Soviet–Japan Symposium of Topology/ Khabarovsk*, 1989. — *Q.A. Gen. Topology.* — 1990. — 8, № 1. — С. 227–250.
52. *Kuratowski K., Ryll-Nardzewski C.* A general theorem on selectors// *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* — 1965. — 13. — С. 397–403.
53. *Lelek A.* Dimension inequalities for unions and mappings of separable metric spaces// *Coll. Math.* — 1971. — 23, № 2. — С. 69–91.
54. *Mack J. E., Jonson D. G.* The Dedekind completion of $C(X)$ // *Pac. J. Math.* — 1967. — 20, № 2. — С. 231–243.
55. *Mazurkiewicz S.* Sur les problèmes κ et λ de Urysohn// *Fund. Math.* — 1927. — 10. — С. 311–319.
56. *Michael E.* The product of a normal space and a separable metric space need not be normal// *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1963. — 69, № 3. — С. 375–376.
57. *Morita K.* On the dimension of product spaces// *Amer. J. Math.* — 1953. — 75, № 2. — С. 205–223.
58. *Morita K.* On the product of paracompact spaces// *Proc. Jpn. Acad.* — 1963. — 39, № 8. — С. 559–563.
59. *Morita K.* Products of normal spaces with metric spaces// *Math. Ann.* — 1964. — 154, № 4. — С. 365–382.
60. *Morita K.* On the dimension of the product of Tychonoff spaces// *Gen. Topol. Appl.* — 1973. — 3, № 2. — С. 125–133.
61. *Morita K.* Čech cohomology and covering dimension for topological spaces// *Fund. Math.* — 1975. — 87, № 1. — С. 31–52.
62. *Morita K.* On the dimension of the product of topological spaces// *Tsukuba J. Math.* — 1977. — 1. — С. 1–6.
63. *Morita K.* Dimension of general topological spaces// *Surveys in General Topology.* — New York–London–Toronto: Academic Press, 1980. — С. 297–336.
64. *Mrówka S.* Recent results on E -compact spaces and structures of continuous functions// *Proc. Topology Conf.*, 1972. — Univ. of Oklahoma, Norman, 1972. — С. 168–221.
65. *Nagami K.* Finite-to-one closed mappings and dimension, II// *Proc. Jpn. Acad.* — 1959. — 35. — С. 437–439.
66. *Nagami K.* Σ -spaces// *Fund. Math.* — 1969. — 65, № 2. — С. 169–192.
67. *Nagami K.* A note on the large inductive dimension of totally normal spaces// *J. Math. Soc. Jpn.* — 1969. — 21, № 2. — С. 282–290.
68. *Nagami K.* Countable paracompactness of inverse limits and products// *Fund. Math.* — 1972. — 73, № 3. — С. 261–270.
69. *Nagami K.* Dimension of non-normal spaces// *Fund. Math.* — 1980. — 109, № 2. — С. 113–121.
70. *Nagata J.* Product theorems in dimension theory// *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys.* — 1967. — 15, № 7. — С. 439–448.
71. *Nagata J., Siwiec F.* A note on nets and metrization// *Proc. Jpn. Acad.* — 1968. — 44. — С. 623–627.
72. *Nishiura T.* A subset theorem in dimension theory// *Fund. Math.* — 1977. — 95, № 2. — С. 105–109.
73. *Nyikos P.* The Sorgenfrey plane in dimension theory// *Fund. Math.* — 1973. — 79, № 2. — С. 131–139.
74. *Ohta H.* On normal nonrectangular products// *Quart. J. Math. Oxford., Ser. 2.* — 1981. — 32, № 127. — С. 339–344.
75. *Ohta H.* Extensions of zero-sets in the products of topological spaces// *Topology Appl.* — 1990. — 35, № 1. — С. 21–39.
76. *Okuyama A.* Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product theorems// *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. Sec. A.* — 1967. — 9. — С. 236–254.

77. *Pasynkov B. A.* On dimension theory// Aspects of topology/ London Math. Soc. Lect. Note Ser. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. — 93. — С. 227–250.
78. *Pears A. R., Mack J.* Closed covers, dimension and quasi-ordered spaces// Proc. London Math. Soc. — 1974. — 29, № 3. — С. 289–316.
79. *Pol E.* On the dimension of the product of metrizable spaces// Bull. Acad. Polon. Sci. — 1978. — 26, № 6. — С. 525–534.
80. *Przymusiński T.* On the notion of n -cardinality// Proc. Amer. Math. Soc. — 1978 — 69, № 2. — С. 333–338.
81. *Przymusiński T.* On the dimension of normal spaces and an example of M. Wage// Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — 76, № 2. — С. 315–321.
82. *Przymusiński T.* Normality and paracompactness in finite and countable Cartesian products// Fund. Math. — 1980. — 105, № 2. — С. 87–104.
83. *Przymusiński T.* Product spaces// Surveys in General Topology/ Reed G. M., ed. — New York: Academic Press, 1980. — С. 399–429.
84. *Przymusiński T.* Products of perfectly normal spaces// Fund. Math. — 1980. — 108, № 2. — С. 129–136.
85. *Przymusiński T.* A solution of a problem of E. Michael// Pac. J. Math. — 1984. — 114, № 1. — С. 235–242.
86. *Rubin L. R., Schori R. M., Walsh J. J.* New dimension-theory techniques for constructing infinite-dimensional examples// Gen. Topology Appl. — 1979. — 10. — № 1. — С. 93–102.
87. *Rudin M. E., Starbird M.* Products with a metric factor// Gen. Topology Appl. — 1975. — 5. — С. 235–248.
88. *Tamano H.* A note on the pseudocompactness of product of two spaces// Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math. — 1960. — 33. — С. 225–230.
89. *Tamano K.* A note on E. Michael's example and rectangular products// J. Math. Soc. Jpn. — 1982. — 34, № 2. — С. 187–190.
90. *Terasawa J.* On the zero-dimensionality of some non-normal product spaces// Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. Sec. A. — 1972. — 11. — С. 167–174.
91. *Tsuda K.* Some examples concerning the dimension of product spaces// Math. Japonica. — 1982. — 27, № 2. — С. 177–195.
92. *Tsuda K.* An n -dimensional version of Wage's example// Colloq. Math. — 1984. — 49, № 1. — С. 15–19.
93. *Tsuda K.* A Wage-type example with a pseudocompact factor// Topology Appl. — 1985. — 20, № 2. — С. 191–200.
94. *Tsuda K.* Dimension theory of general spaces/ Doctoral dissertation. — Univ. Tsukuba, 1985.
95. *van Douwen E.* A technique for constructing honest locally compact submetrizable examples// Topology Appl. — 1992. — 47, № 3. — С. 179–201.
96. *van Douwen E.* Mild infinite dimensionality of βX and $\beta X \setminus X$ for metrizable X // Topology Appl. — 1993. — 51, № 2. — С. 93–108.
97. *van Mill J.* Infinite-dimensional topology/ North-Holland Math. Library. — Amsterdam: North-Holland, 1989. — 43.
98. *Wage M.* The dimension of product spaces/ Preprint. — Department of Math., Yale University, 1976.
99. *Wage M.* On the dimension of product spaces// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1978. — 75, № 10. — С. 4671–4672.
100. *Yajima Y.* Topological games and products, I// Fund. Math. — 1981. — 113, № 2. — С. 141–153.
101. *Yajima Y.* Topological games and products, II// Fund. Math. — 1983. — 117, № 1. — С. 47–60.
102. *Yajima Y.* On the dimension of limits of inverse systems// Proc. Amer. Math. Soc. — 1984. — 91, № 3. — С. 461–466.
103. *Yajima Y.* On Σ -products of Σ -spaces// Fund. Math. — 1984. — 123, № 1. — С. 49–57.

К. Л. Козлов

Кафедра общей топологии и геометрии,

Механико-математический факультет,

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: kkozlov@mech.math.msu.su

Б. А. Пасынков

Кафедра общей топологии и геометрии,

Механико-математический факультет,

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: pasynkov@mech.math.msu.su

РАВНОМЕРНО СУПЕРПАРАКОМПАКТНЫЕ, ВПОЛНЕ ПАРАКОМПАКТНЫЕ И СИЛЬНО ПАРАКОМПАКТНЫЕ РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

© 2005 г. Д. К. МУСАЕВ

Хотя теория равномерных пространств строится независимо от других разделов общей топологии, она тесно связана с теорией топологических пространств и между этими теориями существуют глубокие аналогии. Поэтому проблема нахождения и исследования этих аналогий является актуальной.

Паракомпактные пространства являются одним из важнейших классов топологических пространств. Было несколько попыток определить паракомпактность равномерных пространств ($\equiv$ равномерную паракомпактность).

М. Д. Райс [1] ввел и исследовал класс равномерно R -паракомпактных пространств, З. Фролик [2] ввел и исследовал класс равномерно F -паракомпактных пространств, А. А. Борубаев [3] предложил и изучил класс равномерно B -паракомпактных пространств, в работе [4] Б. А. Пасынковым и Д. Бухаджиром введены классы равномерно счетно P -паракомпактных и равномерно паракомпактных пространств, обобщающие, соответственно, B -паракомпактные и F -паракомпактные равномерные пространства, и изучены взаимосвязи между ними и уже существующими исследованиями.

В этой работе вводятся и исследуются равномерные аналоги вполне паракомпактности, сильной паракомпактности и суперпаракомпактности [5].

Начнем с необходимых определений.

Для системы α , состоящей из подмножеств множества X , и $x \in X$, $W \subset X$, положим

$$\begin{aligned} \text{St}(x, \alpha) &= \{A \in \alpha : x \in A\}, & \alpha(x) &= \bigcup \text{St}(x, \alpha), \\ \text{St}(W, \alpha) &= \{A \in \alpha : W \cap A \neq \emptyset\}, & \alpha(W) &= \bigcup \text{St}(W, \alpha). \end{aligned}$$

Для покрытий α и β множества X символы $\beta > \alpha$ и $\beta^* > \alpha$ означают, что β вписано в α и, соответственно, $\{\beta(B) : B \in \beta\} > \alpha$. Под телом $\tilde{\alpha}$ системы α понимается объединение $\bigcup \alpha$ ее элементов. Для системы α подмножеств множества X и бесконечного кардинального числа τ положим

$$\alpha_\tau = \left\{ \bigcup \beta : \beta \subset \alpha, |\beta| < \tau \right\}.$$

Система α называется τ -аддитивной [4], если $\alpha_\tau = \alpha$ и ω -аддитивные (соответственно, ω_1 -аддитивные) системы называются конечно-аддитивными (соответственно, счетно-аддитивными).

Для подмножества M и системы подмножеств $\lambda = \{O_a : a \in A\}$ множества X полагаем

$$M\lambda = \{M \cap O_a : a \in A\}.$$

При этом для кардинала $\tau \geq \omega$ систему λ назовем τ -системой, если $|\lambda| \leq \tau$.

Всюду ниже под равномерностью понимается равномерность, определяемая при помощи покрытий. Для равномерности U через τ_u обозначим топологию, порожденную этой равномерностью, и для равномерного пространства (X, U) топологическое пространство (X, τ_u) называется его пространством.

Система λ подмножеств равномерного пространства (X, U) называется равномерно локально конечной, или U -локально конечной [1, 4] (соответственно, равномерно дискретной, или U -дискретной), если существует такое $\alpha \in U$, что $|\text{St}(A, \lambda)| < \omega$ (соответственно, $|\text{St}(A, \lambda)| \leq 1$) для любого $A \in \alpha$.

Теперь сформулируем определения равномерной паракомпактности, принадлежащие Б. А. Пасынкову, М. Д. Райсу, А. А. Борубаеву и З. Фролику.

Определение 1 (см. [4]). а) Покрытие λ (псевдо) равномерного пространства (X, U) будем называть слабо равномерным, если существует последовательность $\alpha_n \in U$, $n \in N$, удовлетворяющая следующим условиям (*) и (**):

(*) для любого $x \in X$ существуют $n \in N$ и $L \in \lambda$ такие, что $\alpha_n(x) \subset L$;

(**) $\alpha_{n+1}^* > \alpha_n$ для любого $n \in N$;

- б) (псевдо) равномерное пространство (X, U) называется P -паракомпактным, если любое его открытое покрытие слабо равномерно;
- в) (псевдо) равномерное пространство (X, U) называется τ - P -паракомпактным, если для любого открытого покрытия λ пространства (X, U) покрытие λ_τ слабо равномерно;
- г) (псевдо) равномерное пространство (X, U) называется равномерно паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать σ -равномерно локально конечное (σ - U -локально конечное) открытое покрытие.

Ниже ω_1 - P -паракомпактные равномерные пространства называются [4] счетно P -паракомпактными.

Определение 2 (М. Д. Райс [1]). Равномерное пространство (X, U) называется R -паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать U -локально конечное открытое покрытие.

М. Д. Райс показал [1], что все R -паракомпактные пространства полны. Отсюда следует, что все метризуемые, с неполной метрикой равномерные пространства не R -паракомпактны. Таким образом, класс R -паракомпактных равномерных пространств является слишком узким.

Определение 3 (А. А. Борубаев [3]). Равномерное пространство (X, U) называется B -паракомпактным, если любое конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) слабо равномерно.

Заметим, что ω - P -паракомпактные равномерные пространства совпадают с B -паракомпактными пространствами. Ясно, что любое B -паракомпактное пространство счетно P -паракомпактно.

Определение 4 (З. Фролик [2]). Равномерное пространство (X, U) называется F -паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать σ - U -дискретное (т.е. распадающееся в сумму счетного числа U -дискретных подсистем) открытое покрытие.

Отметим, что [4] все метризуемые и все R -паракомпактные пространства являются B -паракомпактными и все B -паракомпактные пространства являются [4] F -паракомпактными и класс F -паракомпактных пространств существенно шире, чем класс R -паракомпактных и B -паракомпактных пространств.

Лемма 1. Пусть Ω есть звездно конечное (в частности, конечно-компонентное [5]) покрытие равномерного пространства (X, U) и α — такое U -локально конечное покрытие пространства (X, U) , что $\alpha > \Omega$. Тогда Ω также является U -локально конечным покрытием пространства (X, U) .

Доказательство. Поскольку покрытие α пространства (X, U) равномерно локально конечно, то существует такое $\gamma \in U$, что

$$|\text{St}(A, \alpha)| < \omega \quad \text{для любого} \quad A \in \gamma. \quad (1)$$

Фиксируем $A \in \gamma$. Пусть $B \in \text{St}(A, \alpha)$. Так как $\alpha > \Omega$, то для $B \in \alpha$ выбираем содержащее его множество $V(B) \in \Omega$. В силу звездной конечности покрытия Ω имеем, что $|\text{St}(V(B), \Omega)| < \omega$, и, тем более,

$$|\text{St}(B, \Omega)| < \omega \quad \text{для любого} \quad B \in \text{St}(A, \alpha). \quad (2)$$

Тогда из соотношений (1) и (2) следует, что $|\text{St}(\alpha(A), \Omega)| < \omega$ и тем более $|\text{St}(A, \Omega)| < \omega$ для любого $A \in \gamma$. Поэтому покрытие Ω является U -локально конечным. Лемма 1 доказана. $\square$

Известно (см. [3, предложение 0.3.4], что семейство всех открытых покрытий псевдоравномерности U является базой для U . Поэтому из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Звездно конечное (в частности, конечнокомпонентное) равномерное покрытие R -паракомпактного пространства (X, U) является его U -локально конечным покрытием.

- Определение 5.** 1) Звездно конечное (конечнокомпонентное) U -локально конечное покрытие ω равномерного пространства (X, U) назовем равномерно звездно конечным (соответственно, равномерно конечнокомпонентным);
- 2) σ -звездно конечное [5] (в частности, σ -конечнокомпонентное [5]) U -локально конечное покрытие λ равномерного пространства (X, U) назовем равномерно σ -звездно конечным (соответственно, равномерно σ -конечнокомпонентным);
- 3) покрытие равномерного пространства (X, U) , распадающееся в сумму счетного числа равномерно звездно конечных (соответственно, равномерно конечнокомпонентных) покрытий, назовем σ -равномерно звездно конечным (соответственно, σ -равномерно конечнокомпонентным).

Пусть (X, U) — произвольное равномерное пространство. Через Π_2 , Π_ω , Π_{ω_1} , Π_τ обозначим, соответственно, системы всех открытых, всех открытых конечно аддитивных, всех открытых счетно аддитивных, всех открытых τ -аддитивных покрытий пространства (X, U) и через MP , SMP , CMP , BMP , соответственно, классы всех метризуемых равномерных, суперпаракомпактных метризуемых равномерных, сильно паракомпактных метризуемых равномерных и вполне паракомпактных метризуемых равномерных пространств. Естественно возникает следующий вопрос: каждое ли равномерное пространство (X, U) для любого $\lambda \in \Pi_2$ обладает равномерно непрерывным λ -отображением на какое-то равномерное пространство $(Y, V) \in MP$?

На этот вопрос отрицательный ответ дает теорема 1.9 из работы [4] Б. А. Пасынкова и Д. Бухаджира, утверждающая, что существует такое равномерное пространство (например, произведения $I^\tau \times D(\tau)$, $\tau > \omega$, тихоновского куба I^τ на дискретное равномерное пространство $D(\tau)$), которое не обладает равномерно непрерывным λ -отображением для любого $\lambda \in \Pi_2$ на некоторое равномерное пространство $(Y, V) \in MP$, тем более на некоторое равномерное пространство $(Y, V) \in SMP$, так как $SMP \subseteq MP$.

Поскольку равномерное пространство $I^\tau \times D(\tau)$, $\tau > \omega$, является R -суперпаракомпактным согласно следствию 8 (см. ниже), то данная теорема дополнительно еще дает отрицательный ответ на следующий вопрос: Каждое ли R -суперпаракомпактное пространство для любого $\lambda \in \Pi_2$ обладает равномерно непрерывным λ -отображением на некоторое равномерное пространство $(Y, V) \in MP$, в частности, на некоторое равномерное пространство $(Y, V) \in SMP$? Поэтому представляет особый интерес в теории равномерных пространств выделить и исследовать те равномерные пространства, которые обладают равномерно непрерывным λ -отображением на

- 1) равномерное метризуемое пространство
 - а) для любого $\lambda \in \Pi_2$;
 - б) для любого $\lambda \in \Pi_\omega$;
 - в) для любого $\lambda \in \Pi_{\omega_1}$;
 - г) для любого $\lambda \in \Pi_\tau$;
- 2) суперпаракомпактное равномерное метризуемое пространство
 - а) для любого $\lambda \in \Pi_2$;
 - б) для любого $\lambda \in \Pi_\omega$;
 - в) для любого $\lambda \in \Pi_{\omega_1}$;
 - г) для любого $\lambda \in \Pi_\tau$;
- 3) сильно паракомпактное равномерное метризуемое пространство
 - а) для любого $\lambda \in \Pi_2$;
 - б) для любого $\lambda \in \Pi_\tau$;
 - в) для любого $\lambda \in \Pi_{\omega_1}$;
 - г) для любого $\lambda \in \Pi_\tau$;
- 4) вполне паракомпактное равномерное метризуемое пространство
 - а) для любого $\lambda \in \Pi_2$;
 - б) для любого $\lambda \in \Pi_\tau$;
 - в) для любого $\lambda \in \Pi_{\omega_1}$;
 - г) для любого $\lambda \in \Pi_\tau$.

Случай 1) исследован полностью, при этом пункты а) и в) Б. А. Пасынковым совместно с Д. Бухаджиром [4], а пункт б) — А. А. Борубаевым [3].

Результаты данных исследований заключены в следующих теоремах.

Теорема (см. [4, теорема 1.6]). *Равномерное пространство (X, U) (счетно) P -паракомпактно тогда и только тогда, когда пространство (X, U) для любого $(\lambda \in \Pi_{\omega_1}) \lambda \in \Pi_2$ обладает равномерно непрерывным λ -отображением на равномерное метризуемое пространство.*

Теорема (см. [3, теорема 1.3.5]). *Равномерное пространство (X, U) равномерно B -паракомпактно тогда и только тогда, когда пространство (X, U) для любого $\lambda \in \Pi_\omega$ обладает равномерно непрерывным λ -отображением на равномерное метризуемое пространство.*

Для решения вопроса в случаях 2), 3) и 4) введем следующие определения.

Определение 6. Метризуемое равномерное пространство (X, U) назовем, соответственно, суперпаракомпактным метризуемым равномерным, сильно паракомпактным метризуемым равномерным, вполне паракомпактным метризуемым равномерным, если его топологическое пространство (X, τ_u) , соответственно, суперпаракомпактно, сильно паракомпактно, вполне паракомпактно.

Определение 7. Равномерное пространство (X, U) назовем:

- а) R -суперпаракомпактным (R -сильно паракомпактным), если в любое его открытое покрытие можно вписать открытое равномерно конечнокомпонентное (равномерно звездно конечное) покрытие пространства (X, U) ;
- б) R -вполне паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно слабо [7] вписать открытое равномерно σ -звездно конечное покрытие пространства (X, U) ;
- в) P -суперпаракомпактным, P -сильно паракомпактным, P -вполне паракомпактным, если пространство (X, U) для любого $\lambda \in \Pi_2$ обладает, соответственно, равномерно непрерывным λ -отображением на суперпаракомпактное, на сильно паракомпактное, на вполне паракомпактное метризуемое равномерное пространство;
- г) B -суперпаракомпактным, B -сильно паракомпактным, B -вполне паракомпактным, если пространство (X, U) для любого $\lambda \in \Pi_\omega$ обладает, соответственно, равномерно непрерывным λ -отображением на суперпаракомпактное, на сильно паракомпактное, на вполне паракомпактное метризуемое равномерное пространство;
- д) счетно P -суперпаракомпактным, счетно P -сильно паракомпактным, счетно P -вполне паракомпактным, если пространство (X, U) для любого $\lambda \in \Pi_{\omega_1}$ обладает, соответственно, равномерно непрерывным λ -отображением на суперпаракомпактное, на сильно паракомпактное, на вполне паракомпактное метризуемое равномерное пространство;
- е) τ - P -суперпаракомпактным, τ - P -сильно паракомпактным, τ - P -вполне паракомпактным, если пространство (X, U) для любого $\lambda \in \Pi_\tau$ обладает, соответственно, равномерно непрерывным λ -отображением на суперпаракомпактное, на сильно паракомпактное, на вполне паракомпактное метризуемое равномерное пространство;
- ж) равномерно суперпаракомпактным (равномерно сильно паракомпактным), если в любое его открытое покрытие можно вписать открытое σ -равномерно конечнокомпонентное (σ -равномерно звездно конечное) покрытие пространства (X, U) .

Из определения 7 следует, что любое P -суперпаракомпактное, P -сильно паракомпактное, P -вполне паракомпактное пространство (X, U) является, соответственно, B -суперпаракомпактным, B -сильно паракомпактным, B -вполне паракомпактным, любое B -суперпаракомпактное, B -сильно паракомпактное, B -вполне паракомпактное пространство является, соответственно, счетно P -суперпаракомпактным, счетно P -сильно паракомпактным, P -вполне паракомпактным.

А также из определения 7, согласно [4, теорема 1.6] и [3, теорема 1.3.5], следует, что любое P -вполне паракомпактное, в частности, любое P -сильно паракомпактное и любое P -суперпаракомпактное пространство (X, U) является P -паракомпактным, любое B -вполне паракомпактное, в частности, любое B -сильно паракомпактное и любое B -суперпаракомпактное пространство (X, U) является B -паракомпактным, любое счетно P -вполне паракомпактное, в частности, любое счетно P -сильно паракомпактное и любое счетно P -суперпаракомпактное пространство (X, U) является

счетно P -паракомпактным и, наконец, любое τ - P -вполне паракомпактное, в частности, любое τ - P -сильно паракомпактное и любое τ - P -суперпаракомпактное пространство (X, U) является τ - P -паракомпактным при $\tau \geq \omega$.

Если равномерное пространство (X, U) R -суперпаракомпактно (соответственно, R -сильно паракомпактно), то очевидно, что равномерное пространство (X, U) R -паракомпактно и его топологическое пространство (X, τ_u) суперпаракомпактно (соответственно, сильно паракомпактно). При этом, если X — суперпаракомпакт (соответственно, сильно паракомпактное хаусдорфово пространство), а U^* — его универсальная равномерность, то равномерное пространство (X, U^*) является R -суперпаракомпактным (соответственно, R -сильно паракомпактным).

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. Если равномерное пространство (X, U) , соответственно, R -суперпаракомпактно, R -сильно паракомпактно, R -вполне паракомпактно, то пространство (X, U) R -паракомпактно и его топологическое пространство (X, τ_u) , соответственно, суперпаракомпактно, сильно паракомпактно, вполне паракомпактно. При этом, если X — суперпаракомпакт (соответственно, сильно паракомпактное хаусдорфово пространство), а U^* — его универсальная равномерность, то равномерное пространство (X, U^*) R -суперпаракомпактно (соответственно, R -сильно паракомпактно).

Поскольку, как доказал М. Д. Райс [1], все R -паракомпактные пространства являются полными и любое R -вполне паракомпактное пространство R -паракомпактно, согласно предложению 1, имеем следующее утверждение.

Предложение 2. Любое R -вполне паракомпактное (в частности, любое R -сильно паракомпактное и любое R -суперпаракомпактное) пространство полно.

Предложение 3. Замкнутое подпространство (Φ, U_Φ) R -паракомпактного, R -вполне паракомпактного, R -сильно паракомпактного, R -суперпаракомпактного пространства (X, U) является соответственно таким же.

Доказательство. Доказательства всех четырех утверждений аналогичны, поэтому мы рассмотрим только случай, когда пространство (X, U) R -суперпаракомпактно. Пусть $\lambda = \{O_a, a \in A\}$ — произвольное открытое покрытие подпространства (Φ, U_Φ) . Для каждого $O_a \in \lambda$ возьмем открытое в (X, U) множество V_a с условием $\Phi \cap V_a = O_a$. Тогда система $\Omega = \{V_a, O = X \setminus \Phi, a \in A\}$ является открытым покрытием R -суперпаракомпактного пространства (X, U) . В покрытие Ω впишем равномерно конечнокомпонентное открытое покрытие γ пространства (X, U) . Следовательно, существует такое $\alpha \in U$, что $|\text{St}(W, \gamma)| < \omega$ для любого $W \in \alpha$. Поскольку $\gamma > \Omega$, то

$$\gamma \wedge \Phi = \gamma_\Phi > \lambda = \Omega \wedge \Phi$$

и очевидно, что система γ_Φ является конечнокомпонентным открытым покрытием подпространства (Φ, U_Φ) . В силу того, что $|\text{St}(W_\Phi, \gamma_\Phi)| < \omega$ для любого $W_\Phi \in \alpha_\Phi = \alpha \wedge \Phi$ и $\alpha_\Phi \in U_\Phi$, то покрытие γ_Φ равномерно локально конечно.

Таким образом, γ_Φ есть такое равномерно конечнокомпонентное открытое покрытие подпространства (Φ, U_Φ) , что $\gamma_\Phi > \lambda$. Поэтому подпространство (Φ, U_Φ) R -суперпаракомпактно. Предложение 3 доказано. $\square$

В дальнейшем нам потребуются следующие две очевидные леммы.

Лемма 2. Если $\omega = \{O_a, a \in A\}$ является равномерно конечнокомпонентным, соответственно, равномерно звездно конечным открытым покрытием пространства (X, U) и если система ω^* получается из покрытия ω заменой каждого множества O_a конечным набором открытых множеств, в сумме дающих O_a , то система ω^* также является равномерно конечнокомпонентным, соответственно, равномерно звездно конечным открытым покрытием пространства (X, U) .

Лемма 3. Если отображение f пространства (X, U) в пространство (Y, V) равномерно непрерывно и $\omega = \{O_a, a \in A\}$ — открытое U -локально конечное и равномерно звездно конечное

(равномерно конечнокомпонентное) покрытие пространства (Y, V) , то открытое покрытие $f^{-1}\omega = \{f^{-1}O_a, a \in A\}$ пространства (X, U) является, соответственно, таким же.

Следующее предложение дает характеристики, соответственно, R -паракомпактных, R -вполне паракомпактных, R -сильно паракомпактных, R -суперпаракомпактных пространств при помощи открытых конечно аддитивных покрытий.

Предложение 4. Для равномерного пространства (X, U) утверждения каждой из пар а1) и а2), б1) и б2), в1) и в2), г1) и г2) равносильны:

- а1) (X, U) R -паракомпактно;
- а2) в любое конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) можно вписать U -локально конечное открытое покрытие;
- б1) (X, U) R -вполне паракомпактно;
- б2) в любое конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) можно слабо вписать равномерное σ -звездно конечное открытое покрытие;
- в1) (X, U) R -сильно паракомпактно;
- в2) в любое конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) можно вписать равномерное звездно конечное открытое покрытие;
- г1) (X, U) R -суперпаракомпактно;
- г2) в любое конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) можно вписать равномерное конечнокомпонентное открытое покрытие.

Доказательство. Доказательства равносильности для разных пар аналогичны, поэтому рассмотрим только четвертый случай.

Импликация г1) $\Rightarrow$ г2) очевидна. Докажем г2) $\Rightarrow$ г1). Пусть λ — произвольное открытое покрытие пространства (X, U) . Тогда открытое покрытие λ_ω пространства (X, U) конечно аддитивно. Пусть $\gamma = \{V_b \in B\}$ — такое равномерно конечнокомпонентное открытое покрытие пространства (X, U) , что $\gamma > \lambda_\omega$. Для каждого $V_b \in \gamma$ выбираем такой элемент $\Gamma_b \in \lambda_\omega$, что $V_b \subseteq \Gamma_b$. Пусть $\Gamma_b = \bigcup_{i=1}^s \Gamma_i$, где $\Gamma_i \in \lambda$, $i = 1, 2, \dots, s$. Положим

$$\lambda^b = \{\Gamma_i, i = 1, 2, \dots, s\}, \quad \gamma_b = V_b \lambda^b, \quad b \in B, \quad \gamma^* = \bigcup \{\gamma_b, b \in B\}.$$

Ясно, что $\tilde{\gamma}_b = V_b$, $b \in B$, и система γ^* является таким открытым покрытием пространства (X, U) , что $\gamma^* > \lambda$. Поскольку покрытие γ равномерно конечнокомпонентно, то γ^* также является равномерно конечнокомпонентным покрытием пространства (X, U) , согласно лемме 2. Предложение 4 доказано. $\square$

Предложение 5. Для равномерного пространства (X, U) утверждения каждой из пар а1) и а2), б1) и б2), в1) и в2), г1) и г2) равносильны:

- а1) (X, U) является, соответственно, R -суперпаракомпактным, R -сильно паракомпактным, R -вполне паракомпактным;
- а2) для любого $\lambda \in \Pi_2$ существует равномерно непрерывное λ -отображение пространства (X, U) , соответственно, на R -суперпаракомпактное, на R -сильно паракомпактное, на R -вполне паракомпактное пространство;
- б1) (X, U) является, соответственно, B -суперпаракомпактным, B -сильно паракомпактным, B -вполне паракомпактным;
- б2) для любого $\lambda \in \Pi_\omega$ существует равномерно непрерывное λ -отображение пространства (X, U) , соответственно, на B -суперпаракомпактное, на B -сильно паракомпактное, на B -вполне паракомпактное пространство;
- в1) (X, U) является, соответственно, счетно R -суперпаракомпактным, счетно R -сильно паракомпактным, счетно R -вполне паракомпактным;
- в2) для $\lambda \in \Pi_{\omega_1}$ существует равномерно непрерывное λ -отображение пространства (X, U) , соответственно, на счетно R -суперпаракомпактное, на счетно R -сильно паракомпактное, на счетно R -вполне паракомпактное пространство;

- г1) (X, U) является, соответственно, τ - P -суперпаракомпактным, τ - P -сильно паракомпактным, τ - P -вполне паракомпактным;
 г2) для любого $\lambda \in \Pi_\tau$ существует равномерно непрерывное λ -отображение пространства (X, U) , соответственно, на τ - P -суперпаракомпактное, на τ - P -сильно паракомпактное, на τ - P -вполне паракомпактное пространство.

Доказательство. Доказательства равносильности утверждения во всех четырех случаях аналогичны, поэтому рассмотрим четвертый случай.

Докажем г1) $\Rightarrow$ г2). Если (X, U) является, соответственно, τ - P -суперпаракомпактным, τ - P -сильно паракомпактным, τ - P -вполне паракомпактным и λ — его произвольное τ -аддитивное открытое покрытие, то тождественное отображение пространства X является искомым равномерно непрерывным λ -отображением пространства X , соответственно, на τ - P -суперпаракомпактное, на τ - P -сильно паракомпактное, на τ - P -вполне паракомпактное пространство.

Докажем г2) $\Rightarrow$ г1). Пусть теперь λ — произвольное τ -аддитивное открытое покрытие пространства X и f является равномерно непрерывным λ -отображением пространства X , соответственно, на τ - P -суперпаракомпактное, на τ - P -сильно паракомпактное, на τ - P -вполне паракомпактное пространство (Y, V) . Тогда для каждой точки $y \in Y$ существует такая ее окрестность O_y , что $f^{-1}O_y \subseteq \Gamma_y \in \lambda$.

Положим $\gamma = \{O_y, y \in Y\}$. Ясно, что $f^{-1}\gamma > \lambda$, и покрытие γ_τ пространства (Y, V) является его открытым τ -аддитивным покрытием. Поскольку равномерно пространство (Y, V) является, соответственно, τ - P -суперпаракомпактным, τ - P -сильно паракомпактным, τ - P -вполне паракомпактным, то для покрытия γ_τ существует равномерно непрерывное γ_τ -отображение φ пространства (Y, V) , соответственно, на суперпаракомпактное равномерно метризуемое, на сильно паракомпактное равномерно метризуемое, на вполне паракомпактное равномерно метризуемое пространство (Z, W) . Отображение $\psi = \varphi \circ f$ равномерно пространства (X, U) , соответственно, на суперпаракомпактное равномерно метризуемое, на сильно паракомпактное равномерно метризуемое, на вполне паракомпактное равномерно метризуемое пространство (Z, W) равномерно непрерывно, как композиция равномерных непрерывных отображений $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$ и $\varphi: (Y, V) \rightarrow (Z, W)$. Поскольку равномерно непрерывное отображение $\varphi: (Y, V) \rightarrow (Z, W)$ является γ_τ -отображением, то у каждой точки $z \in Z$ существует такая окрестность O_z , что $\varphi^{-1}O_z \subseteq V_z \in \gamma_\tau$. Положим $\eta = \{O_z, z \in Z\}$. Так как

$$f^{-1}\gamma_\tau = (f^{-1}\gamma)_\tau, \quad \varphi^{-1}\eta > \gamma_\tau,$$

то

$$\psi^{-1}\eta = (\varphi f)^{-1}\eta = f^{-1}\varphi^{-1}\eta > f^{-1}\gamma_\tau = (f^{-1}\gamma)_\tau > \lambda_\tau = \lambda,$$

т.е. $\psi^{-1}\eta > \lambda$. Поэтому равномерно непрерывное отображение ψ пространства (X, U) , соответственно, на суперпаракомпактное равномерно метризуемое, на сильно паракомпактное равномерно метризуемое, на вполне паракомпактное равномерно метризуемое пространство (Z, W) является λ -отображением. Так как λ есть произвольное τ -аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) , то равномерно пространство (X, U) является, соответственно, τ - P -суперпаракомпактным, τ - P -сильно паракомпактным, τ - P -вполне паракомпактным пространством, согласно определению 7. Предложение 5 доказано. $\square$

- Определение 8.** а) Для кардинального числа $\tau \geq \omega$ покрытие λ топологического пространства X назовем τ -звездным, если $|\text{St}(A, \lambda)| < \tau$ для любого $A \in \lambda$.
 б) Топологическое пространство X назовем τ -сильно паракомпактным, если в его любое открытое покрытие можно вписать открытое τ -звездное покрытие.
 в) Топологическое пространство X назовем τ -вполне паракомпактным, если в его любое открытое покрытие можно слабо вписать σ - τ -звездное (т.е. распадающееся в сумму счетного числа τ -звездных покрытий) открытое покрытие.

Ниже ω_1 -вполне паракомпактные пространства будут называться счетно вполне паракомпактными и ω_1 -сильно паракомпактные пространства совпадают со счетно сильно паракомпактными [8] пространствами, а ω -вполне паракомпактные, соответственно, ω -сильно паракомпактные пространства с вполне паракомпактными, соответственно, с сильно паракомпактными пространствами.

Ясно, что любое вполне паракомпактное пространство счетно вполне паракомпактно и любое τ -сильно паракомпактное пространство является τ -вполне паракомпактным.

Предложение 6. Если равномерное пространство (X, U) является, соответственно, τ - P -суперпаракомпактным, τ - P -сильно паракомпактным, τ - P -вполне паракомпактным, то его топологическое пространство (X, τ_u) является, соответственно:

- а) суперпаракомпактным, сильно паракомпактным, вполне паракомпактным при $\tau = \omega$;
- б) сильно паракомпактным при $\tau = \omega_1$, когда пространство (X, U) является τ - P -суперпаракомпактным и τ - P -сильно паракомпактным; счетно вполне паракомпактным при $\tau = \omega_1$, когда пространство (X, U) является τ - P -вполне паракомпактным;
- в) τ -сильно паракомпактно при $\tau > \omega_1$, когда пространство (X, U) является τ - P -суперпаракомпактным и τ - P -сильно паракомпактным; τ -вполне паракомпактно при $\tau > \omega_1$, когда пространство (X, U) является τ - P -вполне паракомпактным.

Доказательство. Пусть пространство (X, U) является, соответственно, τ - P -суперпаракомпактным, τ - P -сильно паракомпактным, τ - P -вполне паракомпактным и λ — его произвольное открытое покрытие. Тогда открытое покрытие λ_τ пространства (X, U) является τ -аддитивным и, поскольку пространство (X, U) есть τ - P -суперпаракомпактное, τ - P -сильно паракомпактное, τ -вполне паракомпактное пространство, то для покрытия λ_τ существует равномерно непрерывное λ -отображение f пространства (X, U) , соответственно, на суперпаракомпактное равномерно метризуемое, на сильно паракомпактное равномерно метризуемое, на вполне паракомпактное равномерно метризуемое пространство (Y, V) . Следовательно, для каждой точки $y \in Y$ существует такая ее окрестность O_y , что $f^{-1}O_y \subseteq \Gamma_y \in \lambda_\tau$.

Положим $\gamma = \{O_y, y \in Y\}$ и $\nu = f^{-1}\gamma$. В силу, соответственно, суперпаракомпактности, сильной паракомпактности (вполне паракомпактности) пространства (Y, τ_y) в его открытое покрытие γ впишем (слабо впишем), соответственно, конечнокомпонентное, звездно конечное (σ -звездно конечное) открытое покрытие η пространства (Y, τ_y) . Так как $\eta > \gamma$ (η слабо вписано в γ), то

$$f^{-1}\eta > f^{-1}\gamma = \nu > \lambda_\tau$$

($f^{-1}\eta$ слабо вписано в λ_τ) и очевидно, что открытое покрытие $f^{-1}\eta$ пространства (X, U) конечнокомпонентно, звездно конечно (σ -звездно конечно). Пусть λ_0 — такое открытое подпокрытие покрытия $f^{-1}\eta$, что $\lambda_0 > \lambda_\tau$. Поскольку $f^{-1}\eta > \lambda_\tau$ ($f^{-1}\eta$ слабо вписано в λ_τ), то для каждого $V \in f^{-1}\eta$ ($V_0 \in \lambda_0$) выбираем такой элемент $\Gamma_V \in \lambda_\tau$ ($\Gamma_{V_0} \in \lambda_\tau$), что $V \subseteq \Gamma_V$ ($V_0 \subseteq \Gamma_{V_0}$). Пусть

$$\Gamma_V = \bigcup \{H_\alpha, \alpha \in A, |A| < \tau\}, \quad \Gamma_{V_0} = \bigcup \{H_\alpha^0, \alpha \in A_0, |A_0| < \tau\},$$

где $H_\alpha \in \lambda$, $H_\alpha^0 \in \lambda$, для любого $\alpha \in A$ ($\alpha \in A_0$). Положим

$$\begin{aligned} \mu_V &= \{H_\alpha \cap V, \alpha \in A\}, & \mu_{V_0} &= \{H_\alpha^0 \cap V_0, \alpha \in A_0\}, \\ \mu &= \bigcup \{\mu_V : V \in f^{-1}\eta\}, & \mu_0 &= \bigcup \{\mu_{V_0} : V_0 \in \lambda_0\}. \end{aligned}$$

Так как $\tilde{\mu}_V = V(\tilde{\mu}_{V_0} = V_0)$ и множества $L_\alpha = H_\alpha \cap V$, $\alpha \in A$ ($L_\alpha^0 = H_\alpha^0 \cap V_0$, $\alpha \in A_0$) открыты,

$$\begin{aligned} L_\alpha &\subseteq H_\alpha, & L_\alpha^0 &\subseteq H_\alpha^0, \\ |\text{St}(L_\alpha, \mu)| &< \tau, & |\text{St}(L_\alpha^0, \mu_0)| &< \tau, \end{aligned}$$

то $(f^{-1}\eta)\mu$ является (σ - τ -звездным) τ -звездным покрытием пространства (X, U) , (слабо) вписанным в открытое покрытие λ пространства (X, U) . Поэтому топологическое пространство (X, τ_u) является, соответственно, τ -сильно паракомпактным при $\tau > \omega_1$, когда пространство (X, U) является τ - P -суперпаракомпактным и τ - P -сильно паракомпактным, и τ -вполне паракомпактным при $\tau > \omega_1$, когда пространство (X, U) является τ - P -вполне паракомпактным. При этом, если:

- а) $\tau = \omega$, то согласно предложению 4 пространство (X, τ_u) , соответственно, ω - P -суперпаракомпактного, ω - P -сильно паракомпактного, ω - P -вполне паракомпактного пространства (X, U) является, соответственно, таким же;

- б) $\tau = \omega_1$, то пространство (X, τ_u) ω_1 - P -суперпаракомпактного и ω_1 - P -сильно паракомпактного пространства (X, U) является счетно сильно паракомпактным пространством и в силу регулярности пространства (X, τ_u) они являются сильно паракомпактными пространствами, согласно теореме 1 из [8].

Счетная вполне паракомпактность пространства (X, τ_u) τ - P -вполне паракомпактного пространства (X, U) при $\tau = \omega_1$ очевидна. Предложение 6 доказано. $\square$

Поскольку любое, соответственно, P -суперпаракомпактное, P -сильно паракомпактное, P -вполне паракомпактное пространство является, соответственно, ω - P -суперпаракомпактным, ω - P -сильно паракомпактным, ω - P -вполне паракомпактным, то из предложения 6 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Если равномерное пространство (X, U) является, соответственно, P -суперпаракомпактным, P -сильно паракомпактным, P -вполне паракомпактным, то его топологическое пространство (X, τ_u) является, соответственно, суперпаракомпактным, сильно паракомпактным, вполне паракомпактным.

- Определение 9.** а) Равномерное пространство (X, U) называется равномерно локально линделефовым [4], если существует такое $\alpha \in U$, что замыкание каждого элемента α есть линделефово пространство.
б) Равномерное пространство (X, U) называется равномерно локально бикompактным [3], если существует покрытие $\alpha \in U$, состоящее из бикompактных подмножеств.

Предложение 7. Равномерная дискретная сумма [3] (X, U) системы $\Omega = \{(X_\lambda, U_\lambda), \lambda \in L\}$:

- а) равномерно R -суперпаракомпактных, P -суперпаракомпактных, B -суперпаракомпактных пространств является, соответственно, такой же;
б) равномерно R -сильно паракомпактных, P -сильно паракомпактных, B -сильно паракомпактных пространств является, соответственно, такой же;
в) равномерно R -вполне паракомпактных, P -вполне паракомпактных, B -вполне паракомпактных пространств является, соответственно, такой же;
г) равномерно локально линделефовых, равномерно локально бикompактных пространств является, соответственно, такой же.

Доказательство. Доказательства в четырех случаях всех трех утверждений аналогичны, поэтому рассмотрим только случай а), когда пространства (X_λ, U_λ) , $\lambda \in L$ равномерно R -суперпаракомпактны.

Пусть ν — произвольное открытое покрытие равномерного пространства (X, U) . Тогда системы $\nu_\lambda = \nu \wedge X_\lambda$, $\lambda \in L$, являются открытыми покрытиями R -суперпаракомпактных пространств (X_λ, U_λ) соответственно. Поэтому в каждое покрытие ν_λ , $\lambda \in L$, впишем равномерно конечнокомпонентное открытое покрытие γ_λ , $\lambda \in L$. Следовательно, для каждого $\lambda \in L$ существует такое $\alpha_\lambda \in U_\lambda$, что $|\text{St}(A_\lambda, \gamma_\lambda)| < \omega$ для любого $A_\lambda \in \alpha_\lambda$. Положим

$$\alpha = \bigcup \{\alpha_\lambda, \lambda \in L\}, \quad \gamma = \bigcup \{\gamma_\lambda, \lambda \in L\}.$$

Поскольку пространства (X_λ, U_λ) , $\lambda \in L$, попарно дизъюнкты и открыты в пространстве (X, U) , то система γ является конечнокомпонентным открытым и вписанным в ν покрытием пространства (X, U) . Согласно определению дискретной суммы равномерных пространств имеем $\alpha \in U$ и, очевидно, $|\text{St}(A, \gamma)| < \omega$ для любого $A \in \alpha$. Следовательно, покрытие γ равномерно локально конечно. Поэтому равномерное пространство (X, U) R -суперпаракомпактно. Предложение 7 доказано. $\square$

Замечание 1. Пусть $\Omega = \{X_\lambda, \lambda \in L\}$ является дизъюнктым открытым покрытием равномерного пространства (X, U) . Для каждого $\lambda \in L$ положим

$$U_\lambda = \{\alpha \wedge X_\lambda : \alpha \in U\},$$

$$(X, U^*) = \left(\bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda, \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda \right).$$

Тогда легко видеть, что равномерные пространства (X, U) и (X, U^*) равномерно изоморфны [6]. Отсюда следует, что равномерное пространство (X, U) можно рассматривать как дискретную сумму своих открытых дизъюнктивных подпространств (X_λ, U_λ) , $\lambda \in L$.

Из предложения 7 и замечания 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Равномерная дискретная сумма равномерно бикомпактных пространств является R -суперпаракомпактным пространством.*

Определение 10. Равномерное пространство (X, U) , являющееся равномерной дискретной суммой счетного числа равномерно бикомпактных пространств, назовем равномерно σ -бикомпактным.

Теорема 1. *Для равномерного пространства (X, U) утверждения а1)–а2) равносильны и утверждения б1)–б2) равносильны:*

- а1) *пространство (X, U) равномерно R -суперпаракомпактно;*
- а2) *пространство (X, U) равномерно R -паракомпактно и пространство (X, τ_u) суперпаракомпактно;*
- б1) *пространство (X, U) равномерно R -сильно паракомпактно;*
- б2) *пространство (X, U) равномерно R -паракомпактно и пространство (X, τ_u) сильно паракомпактно.*

Доказательство. Импликация а1) $\Rightarrow$ а2) очевидна. Докажем а2) $\Rightarrow$ а1). Пусть ω — произвольное открытое покрытие равномерно R -паракомпактного пространства (X, U) , топологическое пространство (X, τ_u) которого суперпаракомпактно. Впишем соответственно в ω конечнокомпонентное открытое покрытие γ пространства (X, τ_u) , а в γ — равномерно локально конечное открытое покрытие η пространства (X, U) . Тогда, согласно лемме 1, покрытие γ является равномерно конечнокомпонентным и вписанным в ω покрытием равномерного пространства (X, U) . Поэтому равномерное пространство (X, U) R -суперпаракомпактно.

Доказательство равносильности утверждений б1) и б2) производится аналогичным образом. Теорема 1 доказана. $\square$

М. Д. Райсом [1] было доказано, что любое равномерное локально бикомпактное пространство является равномерно R -паракомпактным. Тогда, в силу теоремы Райса, из теоремы 1 вытекают следующие утверждения.

Следствие 4. *Любое равномерно локально бикомпактное пространство (X, U) , для которого пространство (X, τ_u) суперпаракомпактно (соответственно, сильно паракомпактно), является R -суперпаракомпактным (соответственно, R -сильно паракомпактным).*

Следствие 5. *Любое равномерно бикомпактное (σ -бикомпактное) пространство R -суперпаракомпактно (R -сильно паракомпактно).*

Любое равномерно бикомпактное пространство R -суперпаракомпактно (см. следствие 5), а любое R -суперпаракомпактное пространство R -сильно паракомпактно, и любое R -сильно паракомпактное пространство R -паракомпактно.

Следующая лемма с использованием леммы 1 доказывается стандартным образом.

Лемма 4. *Пусть Ω — равномерно звездно конечное открытое покрытие равномерного пространства (X, U) . Тогда система $\Omega^* = \{\tilde{\Omega}_\lambda, \lambda \in L\}$, состоящая из тел $\tilde{\Omega}_\lambda$, $\lambda \in L$, компонент Ω_λ покрытия Ω , является дизъюнктивным открыто-замкнутым U -локально конечным покрытием пространства (X, U) .*

Теорема 2. *Для равномерного пространства (X, U) утверждения каждой из пар а1) и а2), б1) и б2), в1) и в2) равносильны:*

- а1) *пространство (X, U) — равномерно локально линделефовый R -суперпаракомпакт;*
- а2) *пространство (X, U) является равномерно дискретной суммой линделефовых R -суперпаракомпактных пространств;*
- б1) *пространство (X, U) — равномерно локально бикомпактный R -суперпаракомпакт;*

- б2) пространство (X, U) является равномерно дискретной суммой бикомпактных пространств;
 в1) пространство (X, U) равномерно локально бикомпактно;
 в2) пространство (X, U) является равномерно дискретной суммой равномерно локально бикомпактных равномерно σ -бикомпактных пространств.

Доказательство. Доказательства равносильности утверждения в трех случаях аналогичны, поэтому рассмотрим первый случай.

Докажем $a1) \Rightarrow a2)$. Возьмем такое открытое покрытие $\eta \in U$ пространства (X, U) , что $[A]$ линделефово для любого $A \in \eta$. Поскольку пространство (X, U) R -суперпаракомпактно, то в покрытие η впишем равномерное конечнокомпонентное открытое покрытие $\Omega = \{V_b, b \in B\}$ пространства (X, U) . Тогда согласно лемме 4 система $\Omega^* = \{\tilde{\Omega}_\lambda, \lambda \in L\}$ является дизъюнктным открыто-замкнутым U -локально конечным покрытием пространства (X, U) . Возьмем какую-нибудь компоненту Ω_λ покрытия Ω ; пусть она имеет вид $\{V_{b_i}, b_i \in B, i = 1, 2, \dots, s\}$. Так как $\Omega > \eta$, то для каждого $V_{b_i}, i = 1, 2, \dots, s$, существует содержащий его элемент $A_i \in \eta$. Тогда, очевидно,

$$\bigcup \{V_{b_i}, i = 1, 2, \dots, s\} = \tilde{\Omega}_\lambda \subseteq \bigcup_{i=1}^s A_i \subseteq \left[\bigcup_{i=1}^s A_i \right] = \bigcup_{i=1}^s [A_i]$$

и множество $\bigcup_{i=1}^s [A_i]$ линделефово. Как замкнутое подмножество линделефового пространства, множество $\tilde{\Omega}_\lambda$ линделефово. Поскольку компонента Ω_λ выбрана произвольно, то пространство (X, τ_u) является телом равномерно локально конечного дизъюнктного открытого покрытия Ω^* , состоящего из линделефовых пространств $\tilde{\Omega}_\lambda, \lambda \in L$. Тогда согласно предложению 3 и замечанию 1 равномерное пространство (X, U) является равномерно дискретной суммой линделефовых R -суперпаракомпактных подпространств $(X_\lambda, U_\lambda), \lambda \in L$. Импликация $a2) \Rightarrow a1)$ вытекает из определения равномерно локально линделефового пространства и из предложения 7. Теорема 2 доказана. $\square$

Из теоремы 2 и предложения 7 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. Если для равномерного пространства (X, U) пространство (X, τ_u) локально бикомпактно, то пространство (X, U) равномерно R -суперпаракомпактно тогда и только тогда, когда пространство (X, τ_u) является равномерным дискретным объединением бикомпактов.

Напомним [9], что для системы $\omega = \{O_a, a \in A\}$ подмножеств пространства X считается $[\omega] = [\omega]_X = \{[O_a]_X : a \in A\}$. Также для пространства X , его подпространства W и множества $B \subset X \setminus W$ (точки $x \in X \setminus W$) будем говорить, что покрытие λ пространства W выкалывает множество B (точку x) в X , если

$$B \cap \left(\bigcup [\lambda]_X \right) = \emptyset, \quad x \notin \bigcup [\lambda]_X.$$

Теорема 3. Пусть (X, U) — равномерное пространство, а bX — его некоторое бикомпактное хаусдорфово расширение. Тогда для пространства (X, U) равносильны следующие условия:

- а) (X, U) R -суперпаракомпактно;
 б) для любого бикомпакта $K \subseteq bX \setminus X$ существует дизъюнктное открытое U -локально конечное покрытие λ пространства (X, U) , выкалывающее бикомпакт K в bX .

Доказательство. Докажем $a) \Rightarrow б)$. Пусть (X, U) — R -суперпаракомпактно и K — произвольный бикомпакт, лежащий в $bX \setminus X$. Обозначим через β множество всех таких открытых подмножеств B бикомпакта bX , что $[B]_{bx} \cap K = \emptyset$. Положим $\gamma = \{B \cap X : B \in \beta\}$. Легко видеть, что γ — конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) . Пусть λ — такое равномерно конечнокомпонентное открытое покрытие пространства (X, U) , что $\lambda > \gamma$. Тогда согласно лемме 4 система $\lambda^* = \{\tilde{\lambda}_a, a \in A\}$, состоящая из тел $\tilde{\lambda}_a, a \in A$, компонент λ_a покрытия λ , является дизъюнктным открытым U -локально конечным покрытием, следовательно, равномерно конечнокомпонентным покрытием пространства (X, U) . Поскольку $\lambda > \gamma$, то $\lambda_\omega > \gamma_\omega$, и в силу конечности компонент λ_a ,

$a \in A$, покрытия λ имеем

$$\lambda^* \subseteq \lambda_\omega, \quad \lambda^* > \gamma_\omega = \gamma.$$

Поэтому для любого $\tilde{\lambda}_a \in \lambda^*$ существует такой $B(a) \in \beta$, что $\tilde{\lambda}_a \subseteq B(a)$. Тогда $[\tilde{\lambda}_a]_{bX} \cap K = \emptyset$ для любого $a \in A$, т.е. покрытие λ^* выкалывает бикомпакт $K \subseteq bX \setminus X$ в bX . Импликация а) $\Rightarrow$ б) доказана.

Докажем б) $\Rightarrow$ а). Пусть η — произвольное конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) . Тогда в bX существует такое семейство β открытых подмножеств бикомпакта bX , что $\eta = \beta \Lambda X$. Положим $K = bX \setminus \tilde{\beta}$. Поскольку K — бикомпакт и $K = bX \setminus \tilde{\beta} \subseteq bX \setminus X$, то существует дизъюнктное открытое U -локально конечное покрытие λ пространства (X, U) , выкалывающее бикомпакт K . Поэтому покрытие $\tilde{\lambda} = [\lambda]_{bX}$ пространства (X, U) вписано в β_ω , т.е. $\tilde{\lambda} > \beta_\omega$. Тогда, очевидно,

$$\beta_\omega \Lambda X = \eta_\omega, \quad \lambda > \eta_\omega = \eta.$$

Так как λ есть равномерно конечнокомпонентное открытое покрытие пространства (X, U) , то пространство (X, U) является R -суперпаракомпактным согласно предложению 4. Теорема 3 доказана. $\square$

Теорема 4. Пусть f — совершенное равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X, U) на равномерное пространство (Y, V) . Тогда, если пространство (Y, V) является, соответственно, R -паракомпактным, R -вполне паракомпактным, R -сильно паракомпактным, R -суперпаракомпактным, то пространство (X, U) является соответственно таким же.

Доказательство. Доказательства всех четырех утверждений аналогичны, поэтому рассмотрим только случай, когда пространство (Y, V) является R -суперпаракомпактным.

Пусть λ — произвольное конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X, U) . Тогда отображение $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$ является λ -отображением согласно следствию 8. Следовательно, существует такое открытое покрытие $\eta = \{O_y, y \in Y\}$ пространства (Y, V) , что $f^{-1}\eta > \lambda$. В открытое покрытие η равномерно R -суперпаракомпактного пространства (Y, V) впишем равномерно конечнокомпонентное открытое покрытие γ пространства (Y, V) . Тогда открытое покрытие $f^{-1}\gamma$ пространства (X, U) вписано в λ и равномерно конечнокомпонентно согласно лемме 3. Следовательно, пространство (X, U) является R -суперпаракомпактным согласно предложению 4. Теорема 4 доказана. $\square$

Поскольку любое равномерно совершенное [10] отображение равномерных пространств является совершенно равномерно непрерывным, то из теоремы 4 вытекают следующие утверждения.

Следствие 7. Равномерно совершенный прообраз R -паракомпактного, R -вполне паракомпактного, R -сильно паракомпактного, R -суперпаракомпактного пространства является соответственно таким же.

Следствие 8. Равномерное произведение $I^\Gamma \times D(\tau)$ тихоновского куба I^Γ и дискретного равномерного пространства $D(\tau)$ является R -суперпаракомпактным пространством.

Напомним [3, 10], что равномерное пространство называется нульмерным, если оно имеет базу, состоящую из дизъюнктивных покрытий.

Предложение 8. Равномерно нульмерный R -паракомпакт является R -суперпаракомпактным.

Доказательство. Пусть λ — произвольное конечно аддитивное открытое покрытие равномерно нульмерного R -паракомпактного пространства (X, U) . Тогда согласно теореме 1.6.10 из [10], $\lambda \in U$ и в покрытие λ пространства (X, U) , согласно предложению 4, можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие γ пространства (X, U) . Следовательно, существует такое открытое покрытие $\alpha \in U$, что $\alpha > \gamma_\omega > \lambda_\omega = \lambda$, т.е. $\alpha > \lambda$. Кроме того, пространство (X, U) еще нульмерно, поэтому существует такое дизъюнктное открытое покрытие $\eta \in U$, что $\eta > \alpha$. Следовательно, $\eta > \lambda$. Поскольку любое равномерное дизъюнктное открытое покрытие равномерного пространства

(X, U) равномерно конечнокомпонентно и $\eta > \lambda$, то пространство (X, U) R -суперпаракомпактно согласно предложению 4. Предложение 8 доказано. $\square$

Из предложения 8 и следствия 7 вытекает следующее утверждение.

Следствие 9. *Равномерное произведение равномерно нульмерного R -паракомпактного пространства на бикompактное равномерное пространство является R -суперпаракомпактным.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rice M. D. A note on uniform paracompactness// Proc. Amer. Math. Soc. — 1977. — 62, № 2. — С. 359–392.
2. Frolic Z. On paracompact uniform spaces// Czech. Math. J. — 1983. — 33. — С. 476–484.
3. Борубаев А. А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. — Фрунзе: Илим, 1990.
4. Pasyukov B. A., Buhağier D. On uniform paracompactness// Czech. Math. J. — 1996. — 46 (121). — С. 577–581.
5. Мусаев Д. К., Пасынков Б. А. О свойствах компактности полноты топологических пространств и непрерывных отображений. — Ташкент: ФАН, 1994.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
7. Зарелуа А. В. О теореме Гуревича// Мат. сб. — 1963. — 60 (102), № 1. — С. 17–28.
8. Смирнов Ю. М. О сильно паракомпактных пространствах// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1956. — 20, № 2. — С. 253–274.
9. Musaev D. K. Tubular (weakly) Π -complete and (weakly) Π -complete continuous mappings, their properties and characterizations by the use of morphisms// Meth. Funct. Anal. Topology. — 2003. — 9, № 3. — С. 241–247.
10. Борубаев А. А., Чекеев А. А. Равномерные пространства. — Бишкек, 2003.

Д. К. Мусаев

Узбекистан, Ташкент, Институт математики Академии наук Узбекистана

E-mail: mathinst@uzsci.net

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВЕННО-ОТКРЫТЫХ ТОПОЛОГИЙ

© 2005 г. С. Э. НОХРИН

Аннотация. В работе изучается пространство $C^\lambda(X)$ непрерывных вещественнозначных функций, наделённое множественно-открытой топологией. Рассматриваются вопросы совпадения множественно-открытых топологий для различных семейств λ , ищутся условия, при которых множественно-открытая топология будет совпадать с равномерной. Изучаются вопросы, связанные с аксиомами отделимости в таких пространствах. Приведены критерии локальной компактности и σ -компактности пространства $C^\lambda(X)$.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Различные топологии на пространствах непрерывных функций	100
2. Сравнение множественно-открытых топологий	104
3. Отображение вычисления	109
4. Аксиомы отделимости в $C^\lambda(X)$	110
5. Локальная компактность и σ -компактность пространства $C^\lambda(X)$	116
6. Модификация множественно-открытой топологии	122
Список литературы	128

Настоящая статья посвящена пространству $C^\lambda(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций на X , наделенному множественно-открытой топологией. Пространство X полагается тихоновским; λ предполагается непустым. Обозначения в основном стандартны, их можно найти, например, в [4]. Часто используется обозначение $\langle F, U \rangle$ — это множество всех непрерывных на X функций, образ F при которых содержится в U . Замыкание множества обозначается через $[A]$, $\text{int } A$ — внутренность множества A . Равномерности всегда задаются через окружение диагонали. Через $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ обозначаются соответственно числовая прямая и натуральный ряд. Буквами f, g, h, ϕ с индексами или без них задаются непрерывные вещественнозначные функции, символ f_0 зарезервирован для функции, тождественно равной нулю.

1. РАЗЛИЧНЫЕ ТОПОЛОГИИ НА ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть X — тихоновское топологическое пространство. На множестве $C(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций можно ввести несколько естественных топологий. Наиболее известны три из них: топология равномерной сходимости на всем пространстве X , топология поточечной сходимости и компактно-открытая. Определяются эти топологии следующим образом.

Базу равномерной топологии на X образуют все множества вида

$$A(f, \varepsilon) = \{g \in C(X) : \sup\{|g(x) - f(x)| < \varepsilon : x \in X\}\}.$$

Эта топология метризуема; множество $A(f, \varepsilon)$ представляет из себя шар с центром в точке f радиуса ε .

В 1906 г. Фреше [9] ввел следующее обобщение этой топологии. Пусть ρ — произвольная ограниченная метрика, совместимая с топологией числовой прямой. Тогда на $C(X)$ индуцируется метрика $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho}(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\} \quad \text{для всех } f \text{ и } g \in C(X).$$

Пространство $C(X)$, наделенное соответствующей топологией, обозначается через $C_\rho(X)$. Заметим, что при различных ρ получаются различные топологии (соответствующий пример приведен в [19]), однако не известно, будут ли такие топологии гомеоморфны.

Базу топологии поточечной (или простой) сходимости (соответствующее пространство обозначается через $C_p(X)$) образуют все множества вида

$$A(f, \varepsilon, B) = \{g \in C(X) : |g(x) - f(x)| < \varepsilon, x \in B, B - \text{конечное множество}\}.$$

Именно при изучении этой топологии получены наиболее интересные и глубокие результаты (см., например, [1]). Топологию поточечной сходимости можно определить по-другому. Пусть p — семейство всех одноточечных подмножеств пространства X . Тогда семейство $\{\langle F, U \rangle : F \in p, U \text{ открыто в } \mathbb{R}\}$ — предбаза пространства $C_p(X)$. (Напомним, что $\langle A, B \rangle = \{f \in C(X) : f(A) \subseteq B\}$).

Аналогичным образом определяется компактно-открытая топология, впервые введенная в 1945 г. Фоксом [8]. Пусть $K(X)$ — семейство всех компактных подмножеств X . Предбазу компактно-открытой топологии образуют все множества вида $\langle F, U \rangle$, где $F \in K(X)$, U открыто в $\mathbb{R}$. Семейство множеств вида

$$A(f, \varepsilon, K) = \{g \in C(X) : |g(x) - f(x)| < \varepsilon, x \in K \in K(X)\}$$

образует базу компактно-открытой топологии. В силу этого компактно-открытую топологию иногда называют топологией равномерной сходимости на компактах. Пространство $C(X)$, наделенное компактно-открытой топологией, обозначается через $C_K(X)$.

Как $C_p(X)$, так и $C_K(X)$ в общем случае неметризуемы, однако однородны, более того, являются линейными топологическими пространствами.

Обобщить компактно-открытую топологию и топологию поточечной сходимости можно двумя способами. Соответственно возникают два класса топологий (см. [19]).

1.1. Равномерные топологии. Пусть μ — некоторая равномерность на $\mathbb{R}$ (задаваемая через окружения диагонали), λ — непустое семейство подмножеств X . Для каждого $F \in \lambda$ и $M \in \mu$ положим

$$\hat{M}(F) = \{(f, g) \in C(X) \times C(X) \mid \forall x \in F (f(x), g(x)) \in M\}.$$

Семейство $\{\hat{M}(F) : M \in \mu, F \in \lambda\}$ является предбазой некоторой равномерности на $C(X)$ и поэтому порождает на нем некоторую топологию, называемую топологией равномерной сходимости на элементах семейства λ по отношению к μ . Пространство $C(X)$ с этой топологией обозначается через $C_{\lambda, \mu}(X)$. Если равномерность μ порождена метрикой ρ , то этому случаю соответствует обозначение $C_{\lambda, \rho}(X)$. В случае обычной метрики числовой прямой ($\rho(x, y) = |x - y|$) символ ρ просто опускают и пишут $C_\lambda(X)$, а топологию называют просто λ -топологией. Стандартную базу λ -топологии образуют множества вида

$$A(F, f, \varepsilon) = \{g \in C(X) : \sup\{|g(x) - f(x)| < \varepsilon\}\},$$

где $F \in \lambda, \varepsilon > 0$.

Как и любая топология, порожденная равномерностью, топология $C_{\lambda, \mu}(X)$ всегда вполне регулярна. Необходимым и достаточным условием выполнения аксиомы T_1 является плотность тела λ в пространстве X , т.е.

$$\left[\bigcup_{F \in \lambda} F \right]_X = X.$$

Отметим, что в случае, когда семейство λ состоит из единственного элемента — всего пространства X , а равномерность порождена метрикой ρ , топология равномерной сходимости на λ совпадает с топологией, введенной Фреше [9] ($C_{\lambda, \rho}(X) = C_\rho(X)$). В случае $\lambda = p$ или $\lambda = K(X)$ независимо от выбранной равномерности на $\mathbb{R}$ получаются соответственно топологии поточечной сходимости и компактно-открытая топология [19].

1.2. Множественно-открытые топологии. Снова пусть λ — непустое семейство подмножеств X . Топология, предбазу которой образуют все множества вида $\langle F, U \rangle$, где $F \in \lambda$, U — открытое подмножество $\mathbb{R}$, называется множественно-открытой (точнее, λ -открытой топологией). Впервые такие топологии были введены в 1951 г. Аренсом и Дугунджи [5]. Пространство всех непрерывных вещественных функций на X , наделенное λ -открытой топологией, будем обозначать через $C^\lambda(X)$. Как видно из вышеизложенного, $C^p(X) = C_p(X)$ и $C^K(X) = C_K(X)$. Однако в общем случае λ -открытая топология сильно отличается от топологии равномерной сходимости на элементах λ . Например, λ -открытая топология редко бывает регулярной, почти никогда не бывает однородной и т. д. В [19] приведен следующий результат.

Теорема 1.1. *Если λ — сеть, состоящая из компактных множеств, а μ — равномерность, совместимая с топологией числовой прямой, то λ -открытая топология не сильнее топологии равномерной сходимости на элементах λ по отношению к μ . Если, кроме того, λ наследственно замкнуто (т.е. для любого элемента λ его произвольное замкнутое подмножество также есть элемент λ), то эти топологии совпадают.*

Теорему 1.1 нетрудно обобщить. Для этого потребуется понятие R -компактности, введенное М. О. Асановым.

Определение (см. [3]). Подмножество A топологического пространства X называется R -компактным, если для любой непрерывной вещественной функции f множество $f(A)$ компактно в R .

С учетом этого определения и без изменения доказательства теоремы 1.1, приведенного в [19], получаем следующий результат.

Теорема 1.2. *Если λ состоит из R -компактных множеств, то для любой равномерности μ , совместимой с топологией числовой прямой, λ -открытая топология не сильнее топологии равномерной сходимости на элементах λ по отношению к μ . В случае наследственной замкнутости λ топологии совпадают.*

Неизвестно, является ли условие R -компактности всех элементов λ необходимым для того, чтобы λ -открытая топология была не сильнее топологии равномерной сходимости на элементах λ по отношению к μ для всякой равномерности μ . Однако в следующем случае это так.

Теорема 1.3. *Если семейство λ подмножеств X таково, что λ -топология сильнее λ -открытой топологии, то семейство λ состоит из R -компактных множеств.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть найдутся такие $F \in \lambda$ и $f \in C(X)$, что $f(F)$ не компактно. Можно полагать, что $f(F)$ не замкнуто (в противном случае рассмотрим вместо f функцию $f_1(x) = \arctg(f(x))$). Пусть $a \in [f(F)] \setminus f(F)$. Тогда $f \in \langle F, R \setminus a \rangle$, а значит, у f найдется равномерная окрестность Of , содержащаяся в $\langle F, R \setminus a \rangle$. Пусть

$$Of = \langle f, \Phi_0, \varepsilon_0 \rangle = \left\{ g \in C(X) : \exists a < \varepsilon_0 : \forall x \in \Phi_0 |f(x) - g(x)| < a \right\},$$

где $\Phi_0 \in \lambda$, $\varepsilon_0 > 0$. Очевидно, что для любого числа $b < \varepsilon_0$ функции $f + b$ и $f - b$ принадлежат Of . С другой стороны, так как $a \in [f(F)]$, множество $F \cap f^{-1}(a - \varepsilon_0; a + \varepsilon_0)$ непусто. Положим

$$x_0 \in F \cap f^{-1}(a - \varepsilon_0; a + \varepsilon_0), \quad b = |f(x_0) - a|.$$

Ясно, что $b_0 < \varepsilon_0$, но какая-либо из двух функций $f + b$ и $f - b$ в точке x_0 принимает значение a , поэтому не принадлежит Of . Противоречие. $\square$

Для формулировки условий, при которых λ -открытая топология сильнее λ -топологии полезно следующее определение.

Определение. Пусть μ — равномерность на R , порождающая ее топологию. Будем говорить, что семейство подмножеств X λ -функционально вписано в μ , если для любого $F \in \lambda$, любого $M \in \mu$ и любой функции $f \in C(X)$ найдется конечное число элементов $F_1, F_2, \dots, F_n$ семейства λ таких, что

- 1) $\bigcup_{i=1}^n F_i \supseteq F$,
- 2) семейство $\{f(F_i)\}_{i=1}^n$ вписано в покрытие R , порожденное элементом равномерности M .

Теорема 1.4. Если семейство λ функционально вписано в совместимую с топологией числовой прямой равномерность μ , то λ -открытая топология не слабее топологии равномерной сходимости на элементах λ по отношению к μ .

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f \in C(X)$ и любую ее предбазисную окрестность в $C_{\lambda, \mu}(X)$:

$$M(F)[f] = \{g \in C(X) : x \in F \Rightarrow (f(x), g(x)) \in M\}$$

(здесь F — элемент λ , $M \in \mu$). Пусть $N \in \mu$ таково, что $N \circ N \subseteq M$. Обозначим через Ω покрытие $\mathbb{R}$, порожденное N , т.е. $\Omega = \{Oy : y \in \mathbb{R}\}$, где $Oy = \{z \in \mathbb{R} : (y, z) \in N\}$. Найдем $F_1, F_2, \dots, F_n$ из условия функциональной вписанности λ в μ . Тогда для любого $i \leq n$ найдется $y_i \in \mathbb{R}$ такое, что $f(F_i) \subseteq Oy_i$. Искомой окрестностью f в λ -открытой топологии будет множество $A = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, Oy_i \rangle$. В самом деле, для любого $g \in A$ и любого $x \in F$ найдется номер $i_0 \leq n$ такой, что $x \in F_{i_0}$. Но тогда $g(x) \in Oy_{i_0}$, откуда $(y_{i_0}, g(x)) \in N$. Аналогично, $(y_{i_0}, f(x)) \in N$, поэтому $(f(x), g(x)) \in N \circ N \subseteq M$, т.е., $g \in M(F)[f]$. $\square$

Следствие 1.5. Если семейство λ состоит из R -компактных множеств и функционально вписано в совместимую с топологией числовой прямой равномерность μ , то λ -открытая топология совпадает с топологией равномерной сходимости на элементах λ по отношению к μ .

Следствие 1.6. Если для любого $F \in \lambda$ и для любого его открытого покрытия U найдется конечное число элементов $F_1, F_2, \dots, F_n$ семейства λ таких, что $\bigcup_{i=1}^n F_i \supseteq F$, и семейство $\{F_i\}$ вписано в U , то для любой равномерности μ , совместимой с топологией числовой прямой, λ -открытая топология совпадает с топологией равномерной сходимости на элементах λ по отношению к μ .

Доказательство. Возьмем любые $f \in C(X)$ и $M \in \mu$, и пусть Ω — открытое покрытие $\mathbb{R}$, порожденное элементом равномерности M . Тогда $\{f^{-1}(U) : U \in \Omega\}$ — открытое покрытие X . Для любого $F \in \lambda$ найдем семейство $\{F_i\}_{i=1}^n$, вписанное в данное покрытие и покрывающее F . Тогда $\{f(F_i)\}_{i=1}^n$ вписано в Ω , что обеспечивает функциональную вписанность λ в μ . С другой стороны, любое $F \in \lambda$ компактно, так как для всякого его открытого покрытия Ω найдется семейство $\{F_i\}_{i=1}^n$, вписанное в Ω и покрывающее F , а тогда семейство $\{U_i\}_{i=1}^n$, где $F_i \subseteq U_i \in \Omega$ — конечное подпокрытие F . Остается применить следствие 1.5. $\square$

Рассмотрим еще несколько топологий, активно изучаемых в последние годы.

1.3. Тонкая топология.

Тонкая топология введена Э. Хьюиттом [11] в 1948 г. Пусть $C^+(X) = \{f \in C(X) : x \in X \Rightarrow f(x) > 0\}$ — множество непрерывных на X положительных функций, ρ — метрика на $\mathbb{R}$ (совместимая с топологией числовой прямой). Базу тонкой топологии образуют все множества вида

$$B_\rho(f, \phi) = \left\{ g \in C(X) : x \in X \Rightarrow \rho(f(x), g(x)) < \phi(x) \right\},$$

где $f \in C(X)$, $\phi \in C^+(X)$. Пространство $C(X)$ с такой топологией обозначают через $C_{f_\rho}(X)$. Тонкая топология, очевидно, сильнее топологии равномерной сходимости на всем X . Совпадение этих двух топологий имеет место тогда и только тогда, когда X псевдокомпактно (см. [19]). Кроме того, в [19] доказано, что $C_{f_\rho}(X)$ всегда является топологической группой, а топологическим векторным пространством будет только в случае псевдокомпактного пространства X .

1.4. Топология графика.

Топология графика введена С. Нэймпалли [21] в 1966 г.

Пусть $\Gamma(f)$ — график функции f , т.е. $\Gamma(f) = \{(x, f(x)), x \in X\}$. Базу топологии графика в точке f образуют все множества вида $\{f \in C(X) : \Gamma(f) \in G\}$, где G — открытое подмножество $X \times \mathbb{R}$. Получающееся пространство обозначают через $C_\gamma(X)$. Эта топология более сильная, чем тонкая (и тем более, она сильнее топологии равномерной сходимости на X). В [19] указано, что совпадение топологии графика и равномерной топологии на $C(X)$ эквивалентно счетной компактности X , а равенство $C_\gamma(X) = C_K(X)$ выполняется тогда и только тогда, когда X — компакт. В [18] доказано, что если X нормально и счетно паракомпактно, то топология графика совпадает с тонкой топологией (откуда немедленно следует, что для таких пространств тонкая топология $C_{f_\rho}(X)$ не зависит от выбора метрики ρ).

1.5. Топология Крикоряна.

Эта топология введена Н. Крикоряном [16] в 1969 г.

Пусть $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — локально конечное покрытие пространства X , состоящее из замкнутых множеств, $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ — открытое покрытие $\mathbb{R}$ и ϕ — отображение из A в B . Тогда семейство множеств

$$A(\{C_\alpha\}, \{U_\beta\}, \phi) = \bigcap_{\alpha \in A} \langle C_\alpha, U_{\phi(\alpha)} \rangle$$

по всем $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ и $\phi : A \rightarrow B$ образуют базу топологии Крикоряна.

В случае паракомпактного пространства X топология Крикоряна совпадает с тонкой топологией (см. [16]). Для любого пространства X топология Крикоряна не сильнее топологии графика (см. [14]). Там же доказано, что топология Крикоряна сильнее компактно-открытой. Сравнение топологии Крикоряна с топологией равномерной сходимости приводится в [18].

2. СРАВНЕНИЕ МНОЖЕСТВЕННО-ОТКРЫТЫХ ТОПОЛОГИЙ

Напомним, что стандартной предбазой λ -открытой топологии является семейство

$$\{\langle F, U \rangle : F \in \lambda, U \text{ открыто в } \mathbb{R}\}.$$

В первую очередь возникает вопрос: изменится ли топология, если в определении предбазы вместо всех открытых множеств числовой прямой брать только интервалы (или, более общий случай, элементы фиксированной базы). Хорошо известно, что для топологий поточечной сходимости и компактно-открытой топологии не меняется. Как указано в [19], не меняется топология и в случае, когда семейство λ является сетью из компактов такой, что вместе с каждым своим элементом λ содержит и все его замкнутые подмножества. В общем случае это не так.

Пример. Пусть $X = I$. В качестве λ возьмем все конечные объединения одноточечных множеств и множеств вида $[0; \alpha] \cup [1 - \alpha; 1]$, где $0 < \alpha < 1/2$. Рассмотрим топологию, предбазу которой образует множество

$$\{\langle F, (\alpha; \beta) \rangle : F \in \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Такая топология строго слабее λ -открытой, так как в ней не открыто множество $A = \langle [0; 0, 25] \cup [0, 75; 1], \mathbb{R} \setminus [0; 0, 3] \cup [0, 7; 1] \rangle$. В самом деле, рассмотрим функцию $f(x) \equiv x$; пусть $Of = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$ — ее произвольная базисная окрестность в новой топологии (т.е. все U_i — интервалы). Тогда если для какого-либо номера i множество F_i бесконечно, то оно содержит одновременно точки 0 и 1, поэтому U_i содержит $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, а будучи интервалом, содержит и весь образ $f(X)$. В интервале $(0; 0, 25)$ найдется точка $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^n \{F_i | F_i \text{ конечно}\}$. Тогда любая непрерывная функция g , удовлетворяющая условиям $g|_{F_i} \equiv f|_{F_i}$ для всех конечных F_i , $g(X) \subseteq [0; 1]$ и $g(x_0) = 0, 5$ лежит в $Of \setminus A$, т.е. A не открыто.

Теперь рассмотрим вопрос о совпадении λ -топологий для различных семейств λ . Прежде всего отметим, что в силу очевидного соотношения

$$\langle F_1 \cup F_2, U \rangle = \langle F_1, U \rangle \cap \langle F_2, U \rangle$$

семейство λ можно всегда полагать замкнутым относительно конечных объединений.

Следующие определение и теорема принадлежат М. О. Асанову.

Определение (см. [3]). Семейство $\lambda_1 \subseteq \lambda$ называется *базисом* λ , если для всякого элемента $F \in \lambda$ и любой его окрестности OF найдется конечный набор $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_n$ элементов семейства λ_1 с условием

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Phi_i \subseteq OF.$$

Теорема 2.1 (см. [3]). Если λ_1 является базисом λ , то для любого семейства τ топологии пространств $C_\tau^\lambda(X)$ и $C_\tau^{\lambda_1}(X)$ совпадают.

Доказательство. Пусть λ_1 является базисом λ . Выберем произвольное множество $F \in \lambda$, произвольное открытое в $\mathbb{R}$ множество U и покажем, что множество $\langle F, U \rangle$ открыто в λ_1 -открытой топологии. Для любой функции $f \in \langle F, U \rangle$ множество $f^{-1}(U)$ является окрестностью множества F . Так как λ_1 — базис λ , то найдется конечное семейство элементов $F_1, F_2, \dots, F_n$ семейства λ_1 такое, что

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^n F_i \subseteq f^{-1}(U).$$

Множество $\bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U \rangle$ открыто в λ_1 -открытой топологии и содержит f . Остается показать, что

$$\bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U \rangle \subseteq \langle F, U \rangle.$$

Но это очевидно, так как для любого $x \in F$ найдется номер i_0 такой, что $x \in F_{i_0}$, поэтому для любой функции $g \in \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U \rangle$ выполнено соотношение $g(x) \in U$. $\square$

Возникает вопрос о справедливости обратной теоремы. В двух следующих случаях она оказывается верной.

Теорема 2.2. Пусть λ состоит из связных компактных множеств и $\lambda_1 \subseteq \lambda$. Тогда $C^{\lambda_1}(X) = C^\lambda(X)$ тогда и только тогда, когда λ_1 — базис λ .

Доказательство. Достаточно доказать только необходимость. Пусть $C^{\lambda_1}(X) = C^\lambda(X)$. Зафиксируем любое $F \in \lambda$ и любую его окрестность OF . Пусть U — произвольное открытое в $\mathbb{R}$ и не равное ему множество. Без ограничения общности можно считать, что $U \not\ni \{0\}$ и $U \ni \{1\}$. Рассмотрим функцию $f \in C(X)$ такую, что $f|_F \equiv 1$, $f(X \setminus U) = 0$ и $0 \leq f(x) \leq 1$ для всех $x \in X$. Тогда $\langle F, U \rangle$ — окрестность f в $C^\lambda(X)$. В силу совпадения топологий в λ_1 найдутся такие элементы $F_1, F_2, \dots, F_n$ и такие открытые в $\mathbb{R}$ множества $U_1, U_2, \dots, U_n$, что

$$f \in \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle \subseteq \langle F, U \rangle.$$

Покажем, что

$$\bigcup_{i=1}^n F_i \supseteq F.$$

Пусть это не так, т.е. существует точка $x_0 \in F \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i$. Рассмотрим какую-либо функцию $g \in C(X)$,

совпадающую с f на $\bigcup_{i=1}^n F_i$ и равную 0 в точке x_0 (такая функция существует ввиду полной

регулярности X и компактности всех F_i). Ясно, что $g \in \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$, но $g \notin \langle F, U \rangle$; противоречие.

Введем обозначение $A = \{i \mid F_i \subseteq OF\}$. Тогда для всех $i \notin A$ множество U_i содержит 0.

Покажем, что $\bigcup_{i \in A} F_i \supseteq F$; этого достаточно. Пусть найдется $x_0 \in F \setminus \bigcup_{i \in A} F_i$ и пусть $B = \{i \mid F_i \ni x_0\}$. По доказанному выше $B \neq \emptyset$ и $A \cap B = \emptyset$. Тогда для всех $i \in B$ имеем $U_i \ni \{0, 1\}$, а в силу

связности F_i имеем $U_i \supseteq [0; 1]$. Рассмотрим функцию $g \in C(X)$, удовлетворяющую следующему условию:

$$g|_{\bigcup_{i \notin B} F_i} \equiv f|_{\bigcup_{i \notin B} F_i}, \quad 0 \leq g(x) \leq 1,$$

для всех $x \in X$ и $g(x_0) = 0$. Тогда функция $\tilde{g} = gf$ не принадлежит $\langle F, U \rangle$, так как $\tilde{g}(x_0) = 0$. Но $\tilde{g} \in \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$, так как при $i \notin B$ функции f и $\tilde{g}$ совпадают на F_i , а при $i \in B$ выполнено соотношение $\tilde{g}(F_i) \subseteq [0; 1] \subseteq U_i$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Теорема 2.3. Пусть λ состоит из нульмерных компактов и $\lambda_1 \subseteq \lambda$. Тогда $C^{\lambda_1}(X) = C^\lambda(X)$ в том и только том случае, когда λ_1 — базис λ .

Доказательство. Возьмем любое $F \in \lambda$ и его окрестность OF . Как и в предыдущем случае, рассмотрим функцию $f \in C(X)$ такую, что $f|_F \equiv 1$, $f(X \setminus U) = 0$ и $0 \leq f(x) \leq 1$ для всех $x \in X$, ее окрестность $\langle F, U \rangle$ и такие семейства множеств $F_1, F_2, \dots, F_n \in \lambda_1$ и $U_1, U_2, \dots, U_n$ (U_i открыты в $\mathbb{R}$), что

$$f \in \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle \subseteq \langle F, U \rangle.$$

Докажем, что $\bigcup_{i=1}^n F_i \supseteq F$. Введем обозначение $A = \{i | F_i \subseteq OF\}$. Тогда $U_i \ni 0$ при всех $i \notin A$. Покажем, что $F \subseteq \bigcup_{i \in A} F_i$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что найдется точка $x_0 \in F \setminus \bigcup_{i \in A} F_i$. Тогда $x_0 \in \bigcup_{i=1}^n F_i$, а множество $\bigcup_{i=1}^n F_i$, будучи конечным объединением нульмерных компактов, само есть нульмерный компакт. Пусть V — его открыто-замкнутое подмножество, содержащее x_0 и не пересекающееся с $\bigcup_{i \in A} F_i$. Рассмотрим функцию $\tilde{g} : \bigcup_{i=1}^n F_i \rightarrow \mathbb{R}$, равную 0 на множестве V и 1 на его дополнении. Очевидно, что она непрерывна. Пусть g — ее непрерывное продолжение на все пространство X и $h = fg$. Тогда при всех $i \in A$ функции f и h совпадают на F_i , а при $i \notin A$ имеем:

$$h(F_i) = \{h(x) | x \in F_i\} = \{h(x) | x \in F_i \setminus V\} \cup \{0\} \subseteq f(F_i).$$

Во всех случаях $h \in \langle F_i, U_i \rangle$, поэтому $h \in \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$. Но $h(x_0) = 0$, поэтому $h \notin \langle F, U \rangle$; противоречие. $\square$

Однако в общем случае обращение теоремы М. О. Асанова оказывается неверным. Не удастся ее обратить даже в случае, когда каждый элемент семейства λ является конечным объединением связных компактов, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, λ состоит из всех конечных подмножеств $\mathbb{R}$, двух отрезков $[0; 1/2]$ и $[0; 1]$ и множества $[1/2; 1] \cup \{2\}$. Пусть также $\lambda_1 = \lambda \setminus \{[0; 1]\}$. Тогда λ_1 не будет базисом λ , так как в окрестности $(-1/2; 3/2)$ отрезка $[0; 1]$ невозможно найти конечное число элементов λ_1 , его покрывающих. Однако $C^{\lambda_1}(X) = C^\lambda(X)$. Покажем это. Достаточно доказать, что для любого открытого $U \in \mathcal{R}$ множество $T = \langle [0; 1], U \rangle$ открыто в λ_1 -открытой топологии. Возьмем любую функцию $f \in T$. Если $f(2) \in U$, то

$$f \in \langle [0; 1/2], U \rangle \cap \langle [1/2; 1] \cup \{2\}, U \rangle,$$

и все доказано. Если же $f(2) \notin U$, то, поскольку $f([0; 1])$ — компакт, найдутся непересекающиеся окрестности $U_1 \subseteq U$ и U_2 множества $f([0; 1])$ и точки $f(2)$ соответственно. Тогда

$$f \in \langle [0; 1/2], U_1 \rangle \cap (\langle [1/2; 1] \cup \{2\} \rangle \cup \langle [0; 1/2], U_1 \cup U_2 \rangle) \subseteq \langle F, U \rangle,$$

что завершает доказательство.

Вообще, проблема нахождения критерия совпадения двух λ -открытых топологий, по-видимому, весьма трудна. Следующая теорема приводит такой критерий для весьма частного случая, когда семейства λ состоят из конечного числа компактов.

Теорема 2.4. Пусть $\lambda_1 \subseteq K(X)$, $\lambda_2 \subseteq K(X)$ и оба семейства состоят из конечного числа множеств. Тогда λ_1 -топология сильнее λ_2 -топологии в том и только том случае, когда для любого $F \in \lambda_2$ найдутся Φ_1, Φ_2 из λ_1 такие, что выполнены следующие три условия:

- 1) $\Phi_1 \subseteq F \subseteq \Phi_1 \cup \Phi_2$;
- 2) $\Phi_2 \setminus F$ разрежено;
- 3) Для любой точки из $F \setminus \Phi_1$ ее компонента связности в Φ_2 пересекается с Φ_1 .

Доказательство. Достаточность. Выберем произвольно $F \in \lambda_2$, открытое множество U в R и покажем, что множество $\langle F, U \rangle$ открыто в λ_1 -открытой топологии. Возьмем Φ_1 и Φ_2 из условия теоремы и некоторую функцию f из $\langle F, U \rangle$. Множество $f(\Phi_2 \setminus F)$ счетно как непрерывный образ разреженного пространства. Выберем непересекающиеся открытые в R множества V_1 и V_2 такие, что $f(F) \subseteq V_1 \subseteq U$, $f(\Phi_2 \setminus F) \subseteq V_1 \cup V_2$. Такие множества существуют. В самом деле, множество $f(F)$ — компакт, а поэтому найдется конечное число непересекающихся интервалов $(\alpha_i; \beta_i)$ таких, что $f(F) \subseteq \bigcup_i (\alpha_i; \beta_i) \subseteq U$. Выберем для каждого i числа a_i и b_i так, чтобы

$$f(F) \cap (\alpha_i; \beta_i) \subseteq [a_i; b_i] \subseteq (\alpha_i; \beta_i)$$

(это возможно в силу компактности $f(F)$). В силу счетности множества $f(\Phi_2 \setminus F)$ существуют числа t_i и r_i , удовлетворяющие следующим условиям:

$$t_i \in (\alpha_i; a_i) \setminus f(\Phi_2 \setminus F), \quad r_i \in (b_i; \beta_i) \setminus f(\Phi_2 \setminus F).$$

Положим

$$V_1 = \bigcup_i (t_i; r_i), \quad V_2 = R \setminus [V_1].$$

Очевидно, что они искомые.

В качестве окрестности f рассмотрим открытое в λ_1 -открытой топологии множество $A = \langle \Phi_1, V_1 \rangle \cap \langle \Phi_2, V_1 \cup V_2 \rangle$. A содержится в $\langle F, U \rangle$. Действительно, если существует функция $g \in A \setminus \langle F, U \rangle$, то для нее найдется точка $x_g \in F$ такая, что $g(x_g) \notin U$. Тогда $g(x_g) \notin V_1$ и $x_g \notin \Phi_1$. Отсюда $x_g \in F \setminus \Phi_1$ и $g(x_g) \in V_2$. Пусть K — компонента связности точки x_g в Φ_2 . Согласно условию 3), она пересекается с Φ_1 . Но тогда $g(K)$ пересекается как с V_1 , так и с V_2 и лежит в объединении этих множеств. Это невозможно, так как множество $g(K)$ связно, а V_1 и V_2 не пересекаются. Итак, $f \in A \subseteq \langle F, U \rangle$, и достаточность доказана.

Необходимость. Пусть λ_1 -открытая топология сильнее λ_2 -открытой топологии. Возьмем любое $F \in \lambda_2$. Покажем сначала, что найдется элемент из λ_1 , содержащийся в F . Допустим, что это не так. Выберем для каждого $\Phi \in \lambda_1$ точку $x_\Phi \in \Phi \setminus F$. В силу конечности λ_1 найдется функция $f \in C(X)$, равная нулю во всех точках x_Φ и тождественно равная единице на F . Тогда $f \in \langle F, (1/2; 3/2) \rangle$, поэтому некоторая ее окрестность Of в λ_1 -открытой топологии содержится в $\langle F, (1/2; 3/2) \rangle$. Но для любого $\Phi \in \lambda_1$ множество $f(\Phi)$ содержит точку $f(x_\Phi) = 0$, поэтому $f_0 \equiv 0 \in Of$; противоречие.

Положим

$$\Phi_1 = \bigcup \{ \Phi \in \lambda_1 \mid \Phi \subseteq F \}, \quad \Phi_2 = \bigcup \{ \Phi \in \lambda_1 \mid \Phi \setminus F \text{ разрежено и не пусто} \}.$$

В силу только что доказанного Φ_1 не пусто. $\Phi_2 \setminus F$ разрежено как конечное объединение разреженных пространств. Покажем, что $F \subseteq \Phi_1 \cup \Phi_2$. Допустим, что это не так и существует точка $x_0 \in F \setminus (\Phi_1 \cup \Phi_2)$. Для всякого $\Phi \in \lambda_1$, содержащего x_0 , множество $\Phi \setminus F$ не разрежено, локально компактно, а значит, содержит некоторый неразрезанный компакт $\hat{\Phi}$. Пусть $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}$ — семейство всех элементов λ_1 , которые содержат точку x_0 . Покажем, что найдется непрерывная на X функция g_1 такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ функция $g_1(\hat{\Phi}_n) \supseteq [0; 1]$. Можно полагать компакт $\hat{\Phi}_i$ попарно непересекающимися. Действительно, если, например, $\hat{\Phi}_1 \cap \hat{\Phi}_2 \neq \emptyset$, то в случае, когда это пересечение содержит неразрезанный компакт T , вместо семейства $\{\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \dots, \hat{\Phi}_n\}$

рассмотрим семейство $\{T, \widehat{\Phi}_3, \dots, \widehat{\Phi}_n\}$, а если в пересечении $\widehat{\Phi}_1 \cap \widehat{\Phi}_2$ неразрезанных компактов нет, то неразрезанный компакт имеется как в $\widehat{\Phi}_1 \setminus \widehat{\Phi}_2$, так и в $\widehat{\Phi}_2 \setminus \widehat{\Phi}_1$. Обозначим эти компакты T_1 и T_2 соответственно и вместо семейства $\{\widehat{\Phi}_1, \widehat{\Phi}_2, \dots, \widehat{\Phi}_n\}$ будем рассматривать семейство $\{T_1, T_2, \widehat{\Phi}_3, \dots, \widehat{\Phi}_n\}$. Итак, множества $\widehat{\Phi}_i$ не пересекаются, поэтому для каждого номера $i \leq n$ найдется непрерывная функция h_i , удовлетворяющая условиям $h_i(\Phi_i) = 1$, $h_i(\Phi_j) = 0$ при $i \neq j$. В силу неразрезанности каждого Φ_i существуют непрерывные функции φ_i такие, что $\varphi_i(\widehat{\Phi}_i) \supseteq [0; 1]$. Тогда функция $g_1 = \sum_{i=1}^n h_i \varphi_i$ является искомой.

Пусть функция $g_2 \in C(X)$ такова, что $g_2(F) = 0$ и $g_2|_{\widehat{\Phi}} \equiv 1$ при всех $\Phi \ni x_0$. Функция $g = 1 - g_1 g_2$ на F тождественно равна 1, и для всех $\Phi \ni x_0$ выполняется $g(\widehat{\Phi}) \supseteq [0; 1]$. Без ограничения общности положим $0 \leq g(x) \leq 1$ при всех $x \in X$. Тогда $g(\Phi) = [0; 1]$ при всех $\Phi \ni x_0$. $g \in \langle F, (1/2; 3/2) \rangle$, поэтому у g имеется окрестность $Og = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$ в λ_1 -открытой топологии такая, что $Og \subseteq \langle F, (1/2; 3/2) \rangle$. Пусть функция $h \in C(X, I)$ такова, что $h(x_0) = 0$, h тождественно равна 1 на всех F_i ($1 \leq i \leq n$), содержащих x_0 . Тогда функция hg не содержится в $\langle F, (1/2; 3/2) \rangle$, так как она равна 0 в точке x_0 . С другой стороны, $hg \in Og$, так как если $F_i \not\ni x_0$, то на этом F_i функции g и hg совпадают, а если $F_i \ni x_0$, то $U_i \supseteq g(F_i) = [0; 1] \supseteq hg(F_i)$; противоречие.

Остается показать справедливость условия 3). Рассуждая от противного, предположим, что в $F \setminus \Phi_1$ существует точка x_0 , компонента связности K которой в Φ_2 не пересекается с Φ_1 . Для каждого $\Phi \in \lambda_1$ такого, что $\Phi \setminus F$ разрежено и не пусто, выберем точку $x_\Phi \in \Phi \setminus F$, и пусть $A = \bigcup \{x_\Phi\}$. Для каждого $\Phi \in \lambda_1$ такого, что $\Phi \setminus F$ не разрежено, выберем неразрезанный компакт $\widehat{\Phi}$, лежащий в $\Phi \setminus (F \cup A)$. Найдем функцию $g_1 \in C(X, I)$ такую, что для всех таких Φ множество $g_1(\widehat{\Phi})$ содержит целиком отрезок $[0; 1]$, функцию $g_2 \in C(X, I)$, равную 0 на $F \cup A$ и 1 на всех $\widehat{\Phi}$, и функцию, $g_3 \in C(X, I)$ равную 0 на A и 1 на всех $\widehat{\Phi} \cup F$. Функция $g = g_3(1 - g_1 g_2)$ непрерывна и обладает свойствами: $g(A) = 0$, $g(F) = 1$, $g(\widehat{\Phi}) = [0; 1]$ для всех $\widehat{\Phi}$. $g \in \langle F, (1/2; 3/2) \rangle$, поэтому найдутся $F_1, \dots, F_n \in \lambda_1$ и $U_1, \dots, U_n$, открытые в R и такие, что

$$g \in \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle \subseteq \langle F, (1/2; 3/2) \rangle.$$

Заметим, что если $F_i \subseteq F$, то $U_i \ni 1$, если $F_i \setminus F$ разрежено и не пусто, то $U_i \supseteq \{0, 1\}$, а если $F_i \setminus F$ не разрежено, то $U_i \supseteq [0; 1]$. С другой стороны, так как $K \cap \Phi_1 = \emptyset$, а $K \cap F \neq \emptyset$, и $\Phi_1 \subseteq F \subseteq \Phi_1 \cup \Phi_2$, найдутся непересекающиеся открыто-замкнутые множества B и C такие, что $B \cup C = \Phi_1 \cup \Phi_2$, $B \supseteq \Phi_1$, $C \supseteq K$, а потому найдется функция $f \in C(X, I)$, равная 1 на B и 0 на C . Так как $f(x_0) = 0$, $f \notin \langle F, (1/2; 3/2) \rangle$. Но $f \in \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$. В самом деле, если $F_i \subseteq F$, то $F_i \subseteq \Phi_1 \subseteq B$ и $f(F_i) = 1$. Если $F_i \setminus F$ разрежено и не пусто, то $F_i \subseteq B \cup C$ и $f(F_i) \subseteq \{0, 1\}$. Наконец, если $F_i \setminus F$ не разрежено, то $U_i \supseteq [0; 1] \supseteq f(F_i)$. Получили противоречие с тем, что

$$\bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle \subseteq \langle F, (1/2; 3/2) \rangle.$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 2.5. Пусть семейства λ_1 и λ_2 состоят из конечного числа компактных множеств, причем $\lambda_1 \subseteq \lambda_2$. Тогда λ_1 -открытая топология совпадает с λ_2 -открытой топологией в том и только том случае, когда для любого $F \in \lambda_2$ найдутся $\Phi_1, \Phi_2 \in \lambda_1$ такие, что выполнены следующие три условия:

- 1) $\Phi_1 \subseteq F \subseteq \Phi_1 \cup \Phi_2$;
- 2) $\Phi_2 \setminus F$ разрежено;
- 3) для любой точки из $F \setminus \Phi_1$ ее компонента связности в Φ_2 пересекается с Φ_1 .

Следующий пример показывает, что теорема 2.4 (и следствие 2.5) не могут быть распространены на случай бесконечных семейств λ даже в компактном случае.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, семейство λ_1 состоит из отрезка $[0; 1]$ и всевозможных множеств вида $[1; 2 + 1/n] \cup [3; 3 + 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$ (а также всех конечных объединений указанных множеств). Семейство λ_2 получается из семейства λ_1 добавлением отрезка $[0; 2]$. В этом случае условия 1)–3) следствия не выполнены (в качестве F достаточно взять отрезок $[0; 2]$), однако λ_1 -открытая топология и λ_2 -открытая топология совпадают. Для доказательства этого факта достаточно показать, что для любого открытого в $\mathbb{R}$ множества U множество $\langle F, U \rangle$, где $F = [0; 2]$, открыто в λ_1 -открытой топологии. Возьмем произвольно функцию $f \in \langle F, U \rangle$. Теперь, если $f(3) \in U$, то $f^{-1}(U)$ является окрестностью как точки 3, так и отрезка $[0; 2]$, а поэтому существует номер n_0 такой, что $f([0; 2 + 1/n_0] \cup [3; 3 + 1/n_0]) \subseteq U$, т.е.

$$f \in \left\langle \left[0; 2 + \frac{1}{n_0}\right] \cup \left[3; 3 + \frac{1}{n_0}\right], U \right\rangle \subseteq \langle F, U \rangle.$$

Если же $f(3) \notin U$, то пусть V_1 и V_2 — не пересекающиеся открытые в $\mathbb{R}$ множества, содержащие $f(F)$ и $f(3)$ соответственно. Выберем n_0 так, чтобы $f([0; 2 + 1/n_0]) \subseteq V_1 \cap U$, а $f([3; 3 + 1/n_0]) \subseteq V_2$. Тогда

$$f \in \left\langle \left[0; 2 + \frac{1}{n_0}\right], V_1 \cap U \right\rangle \cap \left\langle \left[3; 3 + \frac{1}{n_0}\right], V_2 \right\rangle \subseteq \langle F, U \rangle.$$

Открытость множества $\langle F, U \rangle$ в λ_1 -открытой топологии тем самым доказана.

3. ОТОБРАЖЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Среди отображений, естественным образом возникающих при изучении различных топологий на $C(X)$, особую роль играет отображение вычисления. Напомним, что это отображение ϕ действует из произведения $C(X) \times X$ в числовую прямую по следующему правилу: $\phi(f, x) = f(x)$ для всех $f \in C(X)$ и всех $x \in X$. В настоящем параграфе мы будем исследовать отображение вычисления на предмет непрерывности и раздельной непрерывности в зависимости от семейства λ . Всюду на протяжении параграфа отображение вычисления будем обозначать буквой ϕ . Кроме того, для всех $x \in X$ через ϕ_x обозначим отображение $\phi_x : C^\lambda(X) \rightarrow R$ такое, что $\phi_x(f) = f(x)$ для всех $f \in C^\lambda(X)$. Очевидно, что раздельная непрерывность отображения вычисления ϕ эквивалентна непрерывности всех функций ϕ_x , $x \in X$.

Теорема 3.1. Пусть семейство λ и точка $x_0 \in X$ таковы, что в любой окрестности x_0 содержится некоторый элемент семейства λ , содержащий x_0 . Тогда отображение ϕ_{x_0} непрерывно.

Доказательство. Пусть U — произвольное открытое в $\mathbb{R}$ множество. Для любой функции $g \in \phi_{x_0}^{-1}(U)$ найдем $V \in \tau$ такое, что $g(x_0) \in V \subseteq U$. Тогда $x_0 \in g^{-1}(V)$, поэтому найдется $F \in \lambda$ такой, что $x_0 \in F \subseteq g^{-1}(V)$. Очевидно, что $\langle F, V \rangle$ — окрестность g , содержащаяся в $\phi_{x_0}^{-1}(U)$. $\square$

Следствие 3.2. Если x_0 — изолированная точка в X , то отображение ϕ_{x_0} непрерывно.

Следствие 3.3. Пусть λ — сеть X . Тогда отображение вычисления ϕ раздельно непрерывно.

Как показывает следующий пример, обратить следствие 3.3 нельзя.

Пример. Пусть $X = I = [0; 1]$, λ — семейство всех компактных подмножеств X , либо не содержащих 0, либо одновременно содержащих точки 0 и 1. Ясно, что λ — не сеть, так как в окрестности нуля $[0; 1/2)$ не лежит никакой элемент λ , содержащий 0. Однако отображение вычисления раздельно непрерывно. Действительно, при $x \neq 0$ непрерывность функции ϕ_x очевидна. Пусть $x = 0$. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}$ — произвольное открытое множество и $g \in \phi_x^{-1}(U)$ — произвольная функция. Если $g(1) \notin U$, то найдем открытые непересекающиеся множества V_1 и V_2 такие, что $g(0) \in V_1 \subseteq U$, $g(1) \in V_2$, выберем число a , удовлетворяющее условию $[0; a] \subseteq g^{-1}(V_1)$, и положим

$$Og = \langle [0; a] \cup \{1\}, V_1 \cup V_2 \rangle \cap \langle \{a\}, V_1 \rangle.$$

Покажем, что $Og \subseteq \phi_x^{-1}(U)$. В самом деле, для всех $h \in Og$ имеем $h([0; a]) \subseteq V_1 \cup V_2$ и $h(a) \in V_1$. Так как V_1 и V_2 не пересекаются, то $h([0; a]) \subseteq V_1$, в частности, $h(0) \in V_1 \subseteq U$. Если же $g(1) \in U$, то в качестве Og достаточно взять множество $\langle \{0, 1\}, U \rangle$.

Легко видеть, что если для какого-либо $x \in X$ функция ϕ_x непрерывна, то добавив $\{x\}$ в качестве еще одного элемента λ , мы не изменим топологии пространства $C^\lambda(X)$. Ввиду этого и с учетом следствия 3.3, получаем следующую теорему.

Теорема 3.4. *Если семейство λ максимально по включению среди всех семейств, порождающих одну и ту же множественно-открытую топологию на $C(X)$, то отображение вычисления $\phi : C^\lambda_\tau(X) \times X \rightarrow \mathbb{R}$ раздельно непрерывно тогда и только тогда, когда λ содержит все точки X .*

Перейдем к исследованию непрерывности отображения вычисления.

Теорема 3.5. *Пусть семейство λ таково, что для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ox найдется элемент F семейства λ , содержащийся в Ox и такой, что x — его внутренняя точка. Тогда отображение вычисления $\phi : C^\lambda(X) \times X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно.*

Доказательство. Зафиксируем произвольно $x_0 \in X$, открытое в $\mathbb{R}$ множество V и функцию $f \in C(X)$ такую, что $f(x_0) \in V$. Для окрестности $f^{-1}(V)$ точки x_0 найдем элемент F семейства λ , удовлетворяющий условию теоремы. Положим $O(x_0) = \text{int } F$, $O(f) = \langle F, V \rangle$. Тогда $\phi(O(x_0) \times O(f)) \subseteq V$. В самом деле, для любого x из $O(x_0)$ следует, что $x \in F$, поэтому для всех $g \in O(f) = \langle F, V \rangle$ выполнено $\phi(g, x) = g(x) \in V$. $\square$

Следствие 3.6. *Если λ — база пространства X , то отображение вычисления $\phi : C^\lambda(X) \times X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно.*

Обратить теорему 3.5 нельзя, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = I$, λ состоит из точки $x = 0$, всевозможных отрезков $[a; b]$, где $0 < a < b \leq 1$, и всевозможных множеств вида $[0; a] \cup \{1\}$. Очевидно, что условие теоремы 3.5 не выполняется: в окрестности нуля $[0; 1/2)$ не лежит никакой элемент λ , содержащий 0 в своей внутренности. Однако заключение теоремы верно, т.е. отображение вычисления $\phi : C^\lambda(X) \times X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Чтобы показать это, докажем, что добавив к семейству λ все отрезки вида $[0; a]$, $a > 0$, мы не изменим топологию $C^\lambda(X)$, после чего воспользуемся теоремой 3.5. Итак, пусть U — произвольное открытое в $\mathbb{R}$ множество, a — любое число из полуинтервала $(0; 1]$, f — произвольная функция из $\langle [0; a], U \rangle$. Если $f(1) \in U$, то имеет место включение $f \in \langle [0; a] \cup \{1\}, U \rangle \subseteq \langle [0; a], U \rangle$. Предположим, что $f(1) \notin U$. Тогда в силу компактности и связности множества $f([0; a])$ найдем непресекающиеся интервалы $(\alpha_1; \beta_1)$ и $(\alpha_2; \beta_2)$ такие, что $f(1) \in (\alpha_2; \beta_2)$, $f([0; a]) \subseteq (\alpha_1; \beta_1) \subseteq U$. Окрестность $\langle [0; a] \cup \{1\}, (\alpha_1; \beta_1) \cup (\alpha_2; \beta_2) \rangle \cap \langle \{0\}, (\alpha_1; \beta_1) \rangle$ точки f лежит в множестве $\langle [0; a], U \rangle$, так как для любого $x \in [0; a]$ выполняется $f(x) \in (\alpha_1; \beta_1)$ в силу связности отрезка $[0, a]$. Доказательство завершено.

Заметим еще, что в условии теоремы 3.5 недостаточно полагать одновременного выполнения двух условий:

- 1) λ — сеть X ,
- 2) внутренности элементов λ образуют базу X .

4. Аксиомы отделимости в $C^\lambda(X)$

Хорошо известно (см., например, [4]), что $C(X)$ всегда вполне регулярно как в топологии поточечной сходимости, так и в компактно открытой топологии. Для пространства $C^\lambda(X)$ такое утверждение места не имеет: как будет показано ниже, указанное пространство даже не всегда удовлетворяет более слабым аксиомам отделимости. Начнем с аксиомы Хаусдорфа. Оказывается, для пространства $C^\lambda(X)$ она эквивалентна аксиоме T_1 и для нее имеется простой критерий.

Теорема 4.1. *Для любого пространства X и любого семейства его подмножеств λ следующие условия эквивалентны:*

- а) $C^\lambda(X)$ — T_2 -пространство;
- б) $C^\lambda(X)$ — T_1 -пространство;

в) λ — π -сеть (т.е. для любого непустого открытого множества $U \subseteq X$ найдется элемент $F \in \lambda$, содержащийся в U).

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б) — очевидно.

б) $\Rightarrow$ в) Возьмем любое открытое множество V из X и непрерывную функцию f , равную нулю на дополнении до множества V , но не равную нулю тождественно. В силу T_1 -аксиомы, у функции f есть окрестность Of , не содержащая точку $f_0 \equiv 0$. Пусть $Of = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$, где все множества F_i принадлежат λ . Тогда найдется номер i_0 такой, что f_0 не содержится в $\langle F_{i_0}, U_{i_0} \rangle$; следовательно $U_{i_0} \not\supseteq 0$. Но $U_{i_0} \supseteq f(F_{i_0})$, поэтому $F_{i_0} \subseteq V$.

в) $\Rightarrow$ а) Возьмем любые не равные между собой непрерывные функции f и g , и пусть $x \in X$ таково, что $f(x) \neq g(x)$. Пусть U_1 и U_2 — непересекающиеся окрестности $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Положим $Ox = f^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(U_2)$. Найдется элемент $F \in \lambda$, содержащийся в Ox . Тогда $\langle F, U_1 \rangle$ и $\langle F, U_2 \rangle$ — непересекающиеся окрестности функций f и g . $\square$

Следствие 4.2. Пусть P — любое свойство, которое сильнее T_1 , но слабее T_2 . Тогда $C^\lambda(X)$ обладает свойством P тогда и только тогда, когда λ — π -сеть.

Заметим, что из доказательства теоремы 4.1 следует, что для хаусдорфовости пространства $C^\lambda(X)$ достаточно замкнутости всего одной его точки — функции f_0 (напомним, что $f_0 \equiv 0$), или любой другой постоянной функции. Однако, как показывает следующий пример, замкнутости одной любой функции для хаусдорфовости может оказаться не достаточно. Так проявляется неоднородность пространства $C^\lambda(X)$.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, λ состоит из всех конечных множеств, содержащих хотя бы одну из точек 0 или 1. Так как λ не является π -сетью, $C^\lambda(X)$ не будет ни T_2 -, ни T_1 -пространством. Однако в точке $f(x) \equiv x$ обе аксиомы отделимости имеют место. В самом деле, пусть $g \in C^\lambda(X)$ и $g \neq f$. Если $f(0) \neq g(0)$, то найдутся открытые непересекающиеся множества V_1 и V_2 такие, что $V_1 \ni f(0)$, $V_2 \ni g(0)$. Тогда $\langle \{0\}, V_1 \rangle$ и $\langle \{0\}, V_2 \rangle$ — непересекающиеся окрестности функций f и g . Аналогично рассматривается случай $f(1) \neq g(1)$. Пусть теперь $f(0) = g(0)$ и $f(1) = g(1)$. Пусть точка $x \in X$ такова, что $f(x) \neq g(x)$. Если $g(x) = 0$, то найдутся открытые непересекающиеся множества V_1 и V_2 такие, что $0 \in V_1$, $f(x) \in V_2$, $1 \in V_2$, и тогда $\langle \{0\}, V_1 \rangle$ и $\langle \{x, 1\}, V_2 \rangle$ — непересекающиеся окрестности g и f соответственно. Если $g(x) \neq 0$, то в качестве V_1 и V_2 следует взять такие открытые непересекающиеся множества, что $0 \in V_2$, $f(x) \in V_2$, $g(x) \in V_1$, а непересекающимися окрестностями f и g будут соответственно $\langle \{0, x\}, V_2 \rangle$ и $\langle \{x\}, V_1 \rangle$.

Аксиома T_0 отличается от аксиом T_1 и T_2 в классе пространств $C^\lambda(X)$. Сначала укажем критерий выполнимости аксиомы T_0 , затем приведем пример T_0 -, но не T_1 -пространства $C^\lambda(X)$.

Теорема 4.3. $C^\lambda(X)$ является T_0 -пространством тогда и только тогда, когда для любых двух различных непрерывных функций f и g найдется элемент $F \in \lambda$ такой, что множества $f(F)$ и $g(F)$ различны.

Доказательство. Необходимость. Возьмем любые не равные между собой непрерывные функции f и g и пусть F — элемент λ такой, что $f(F) \neq g(F)$. Без ограничения общности можно предположить, что существует точка $y \in f(F) \setminus g(F)$. Тогда множество $\langle F, R \setminus \{y\} \rangle$ является окрестностью g , не содержащей f .

Достаточность. Пусть найдутся две различные непрерывные функции f и g такие, что $f(F) = g(F)$ для любого элемента $F \in \lambda$. Тогда для любого открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \langle F, U \rangle$ тогда и только тогда, когда $g \in \langle F, U \rangle$. Значит, $C^\lambda(X)$ не является T_0 -пространством. $\square$

Пример. Положим $X = I$. В качестве λ возьмем все конечные объединения множеств вида $\{x, y\}$, где $y - x > 1/4$. Тогда λ не является π -сетью, так как в интервале $(0; 1/8)$ не содержится никакого элемента λ . Таким образом, $C^\lambda(X)$ не является T_1 -пространством. Покажем, что оно является T_0 -пространством. Возьмем любые две различные функции f и g из $C(X)$; пусть точка $x_0 \in I$ такова, что $f(x_0) \neq g(x_0)$. Пусть $x_0 > 1/2$ (случай $x_0 \leq 1/2$ рассматривается аналогично). Положим $x_1 = 0$, $x_2 = x_0/2$. Пары $\{x_0, x_1\}$, $\{x_0, x_2\}$ и $\{x_2, x_1\}$ принадлежат λ . Если $f(x_1) \neq g(x_0)$,

то взяв в качестве F пару $\{x_0, x_1\}$, получим $f(F) \neq g(F)$. Аналогично рассматриваются случаи $f(x_2) \neq g(x_0)$, $g(x_1) \neq f(x_0)$, $g(x_2) \neq f(x_0)$. Остается заметить, что если $f(x_1) = f(x_2) = g(x_0)$ и $g(x_1) = g(x_2) = f(x_0)$, то $f(\{x_1, x_2\}) \neq g(\{x_1, x_2\})$, т.е. λ удовлетворяет условиям теоремы 4.3.

Перейдем к рассмотрению аксиом регулярности и полной регулярности. В [19] доказано (даже для более общего случая пространств непрерывных функций из X в произвольное вполне регулярное пространство Y) следующее утверждение.

Предложение 4.4. *Если λ — сеть из компактных множеств пространства X , то пространство $C^\lambda(X)$ вполне регулярно.*

Естественно возникают два вопроса:

- 1) Насколько существенным является требование, чтобы семейство λ являлось сетью?
- 2) Можно ли ослабить требование компактности, налагаемое на элементы множества λ ?

Отвечая на первый вопрос, прежде всего заметим, что в формулировке предложения 4.4 заменить сеть на π -сеть нельзя.

Пример. Пусть $X = I$, λ — все конечные множества, содержащие одновременно 0 и 1 или не содержащие ни одну из этих точек. Покажем, что $C^\lambda(X)$ не регулярно. Пусть $F_0 = \{0, 1\}$. Ясно, что множество $\langle F_0, (-1; 1) \rangle$ есть окрестность точки f_0 в $C^\lambda(X)$. Покажем, что никакая окрестность Of_0 не содержится с замыканием в $\langle F_0, (-1; 1) \rangle$. Можно без ограничения общности полагать, что $Of_0 = \langle F, U \rangle$; кроме того, в качестве U достаточно рассматривать интервалы вида $(-\varepsilon; \varepsilon)$. Рассмотрим функцию $g \in C(X)$ такую, что $g(1) = 2$, $g(0) = 0$, и на всех точках F , отличных от 0 и 1, g также тождественно равна нулю. Ясно, что $g \notin \langle F_0, (-1; 1) \rangle$. Покажем, что $g \in [Of_0]$. В самом деле, пусть $Og = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$ — произвольная базисная окрестность g . Тогда существует функция $h \in C(X)$, равная 0 в точке 1 и равная 1 во всех остальных точках F и всех F_i . Легко проверить, что $h^* = hg \in Og \cap Of_0$.

А вот требование компактности в предложении 4.4 можно ослабить до R -компактности, причем данное в [19] доказательство остается без изменения. В сущности, оно вытекает из следующего более сильного результата.

Теорема 4.5. *Пусть λ состоит из R -компактных множеств и для всякого $F \in \lambda$ и для любого замкнутого в $\mathbb{R}$ множества M множество $\langle F, M \rangle$ замкнуто в $C^\lambda(X)$. Тогда $C^\lambda(X)$ удовлетворяет аксиоме $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Доказательство. Возьмем любую $f \in C(X)$ и любую ее предбазисную окрестность $\langle F, U \rangle$. Так как $f(F)$ — компакт, содержащийся в U , существует непрерывная функция $\phi : \mathbb{R} \rightarrow I$, такая что $\phi(f(F)) = 0$, $\phi(\mathbb{R} \setminus U) = 1$. Рассмотрим отображение $\Phi : C^\lambda(X) \rightarrow \mathbb{R}$, определенное правилом $\Phi(g) = \sup\{\phi(g(x)) \mid x \in F\}$. Легко видеть, что $\Phi(f) = 0$ и для всякой функции $h \notin \langle F, U \rangle$ имеем $\Phi(h) = 1$. Непрерывность Φ вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(a; b) &= \left\{ h \in C(X) \mid a < \sup \{ \phi(h(x)) \mid x \in F \} < b \right\} = \\ &= \left\{ h \in C(X) \mid a < \sup \{ \phi(h(x)) \mid x \in F \} \right\} \cap \left\{ h \in C(X) \mid \sup \{ \phi(h(x)) \mid x \in F \} < b \right\} = \\ &= \left(C(X) \setminus \{ h \in C(X) \mid \forall x \in F \ \phi(h(x)) \leq a \} \right) \cap \{ h \in C(X) \mid \forall x \in F \ \phi(h(x)) < b \} = \\ &= \left(C(X) \setminus \langle F, \phi^{-1}(-\infty; a] \rangle \right) \cap \langle F, \phi^{-1}(-\infty; b) \rangle. \end{aligned}$$

Очевидно, что последнее множество открыто в $C^\lambda(X)$. □

Следствие 4.6. *Если λ — сеть из R -компактных множеств пространства X , то пространство $C^\lambda(X)$ вполне регулярно.*

Следующая теорема дает легко проверяемое достаточное условие полной регулярности $C^\lambda(X)$.

Теорема 4.7. Пусть λ состоит из R -компактных множеств. Пусть, кроме того, для всякого элемента $F \in \lambda$ и любого открытого в X множества U , пересекающего F , найдется элемент $\Phi \in \lambda$, лежащий полностью в U и пересекающийся с F . Тогда пространство $C^\lambda(X)$ удовлетворяет аксиоме $T_{3\frac{1}{2}}$. Если, кроме того, λ — π -сеть, то $C^\lambda(X)$ вполне регулярно.

Доказательство. Покажем, что $\langle F, M \rangle$ замкнуто для всех $F \in \lambda$ и всех M , замкнутых в $\mathbb{R}$. Возьмем любую функцию $g \notin \langle F, M \rangle$. Пусть $U = g^{-1}(\mathbb{R} \setminus M)$. Так как U пересекается с F , найдется элемент $\Phi \in \lambda$, пересекающийся с F и такой, что $\Phi \subseteq U$. Положим $Og = \langle \Phi, \mathbb{R} \setminus M \rangle$. Ясно, что Og и $\langle F, M \rangle$ не пересекаются, что доказывает замкнутость множества $\langle F, M \rangle$. Остается применить теоремы 4.5 и 4.1. $\square$

Условие теоремы 4.5 не является необходимым, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = I$, λ состоит из множества $\{0, 1\}$ и семейств $\{x\}$, $0 < x < 1$, $\{[0; 1/n] \cup [1 - 1/n; 1]\}_{n \in \mathbb{N}}$, а также всех конечных объединений множеств этих семейств. Обозначим через F_0 множество $\{0, 1\}$ и пусть $U = [0; 1/3)$. Ясно, что для всякого элемента $\Phi \in \lambda$, лежащего в U , имеем $\Phi \not\ni 0$, поэтому Φ и F_0 не пересекаются, и условие следствия 4.6 не выполнено. Но $C^\lambda(X)$ вполне регулярно. В самом деле, возьмем любые $F \in \lambda$, $M = [M] \subseteq \mathbb{R}$ и покажем замкнутость множества $\langle F, M \rangle$. Если $F \neq F_0$, то выполнено условие следствия 4.6, и множество $\langle F, M \rangle$ замкнуто. Пусть $F = F_0$. Возьмем любую функцию $f \notin \langle F_0, M \rangle$. Без ограничения общности можно считать, что $f(0) \notin M$. Возможны два случая:

- 1) $f(0) = f(1)$; тогда $\langle F_0, \mathbb{R} \setminus M \rangle$ — окрестность f , не пересекающаяся с $\langle F_0, M \rangle$;
- 2) $f(0) \neq f(1)$; тогда найдутся непересекающиеся окрестности V_1, V_2 точек $f(0)$ и $f(1)$ соответственно, причем V_1 не пересекается с M .

Так как $f^{-1}(V_1 \cup V_2) \supseteq F_0$, то для некоторого номера n_0 выполнено $\Phi = [0; 1/n_0] \cup [1 - 1/n_0; 1] \subseteq f^{-1}(V_1 \cup V_2)$. Положим $Of = \langle \Phi, V_1 \cup V_2 \rangle \cap \langle \{1/n_0\}, V_1 \rangle$. Ясно, что для всякой функции $g \in Of$ выполнено $g([0; 1/n_0]) \subseteq V_1$, поэтому $g(0) \notin M$, откуда следует, что множества Of и $\langle F_0, M \rangle$ не пересекаются.

Вопрос. Пусть пространство $C^\lambda(X)$ вполне регулярно (регулярно). Возможно ли, что не все элементы λ являются R -компактными множествами?

Заметим, что не верно предположение о том, что если функция $f \in C^\lambda(X)$ такова, что для некоторого элемента $F \in \lambda$ множество $f(F)$ не компактно, то f — точка $C^\lambda(X)$, в которой нарушается регулярность пространства; именно об этом следующий пример.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, λ состоит из множеств

$$F_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} [2i - 1; 2i], \quad F_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} [2i; 2i + 1],$$

всех конечных подмножеств X и всех их конечных объединений. Пусть $f(x) = 1$ при $x \leq 1$ и $f(x) = 1/x$ при $x > 1$. Тогда

$$f(F_1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2i}; \frac{1}{2i-1} \right]$$

не компактно. Однако f — точка регулярности $C^\lambda(X)$. В самом деле, возьмем любую предбазисную окрестность $\langle F, U \rangle$ точки f . Возможны следующие два случая.

1. F конечно. Тогда утверждение очевидно, так как $f(F)$ — компакт.
2. F совпадает с одним из множеств F_1 или F_2 . Пусть, например, $F = F_1$. Тогда $U \supseteq [1/2n; 1/2n - 1]$ для всех натуральных n . Для каждого $n \in \mathbb{N}$ построим интервал $(a_n; b_n)$, удовлетворяющий условиям:

- 1) $[1/(n+1); 1/n] \subseteq (a_n; b_n)$;
- 2) $[a_{2n-1}; b_{2n-1}] \subseteq U$;
- 3) $[a_{2n-1}; b_{2n-1}] \cap [a_{2k-1}; b_{2k-1}] = [a_{2n}; b_{2n}] \cap [a_{2k}; b_{2k}] = \emptyset$ при всех $n \neq k$.

Положим

$$Of = \left\langle F_1, \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}; b_{2n-1}) \right\rangle \cap \left\langle F_2, \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{2n}; b_{2n}) \right\rangle \cup \langle \{1\}, (a_1; b_1) \rangle$$

и покажем, что $[Of] \subseteq \langle F, U \rangle$. Для этого возьмем произвольную функцию $g \in [Of]$. Тогда для всякого $x \in F_1$ следует, что $g(x) \in \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}; b_{2n-1}) \right]$. В самом деле, если найдется $x \in F_1$ такое, что $g(x) \notin \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}; b_{2n-1}) \right]$, то $\langle \{x\}, \mathbb{R} \setminus \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}; b_{2n-1}) \right] \rangle$ — окрестность g , не пересекающаяся с $\left\langle F_1, \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}; b_{2n-1}) \right\rangle$. Аналогично, для всех $x \in F_2$ выполнено включение $g(x) \in \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{2n}; b_{2n}) \right]$. Кроме того, $g(1) \in [a_1; b_1]$. Заметим также, что

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}; b_{2n-1}) \right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1}; b_{2n-1}] \cup \{0\}, \quad \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{2n}; b_{2n}) \right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_{2n}; b_{2n}] \cup \{0\}.$$

Докажем по индукции, что если $x \in [n; n+1]$, то $g(x) \geq a_n$.

1. $n = 1$. Тогда $x \in [1; 2]$, откуда

$$g(x) \in \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}; b_{2n-1}) \right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1}; b_{2n-1}] \cup \{0\}.$$

Так как $g(1) \in [a_1; b_1]$, то учитывая связность отрезка $[1; 2]$ и тот факт, что множества $[a_{2n-1}; b_{2n-1}]$ попарно не пересекаются, получим $g(x) \in [a_1; b_1]$.

2. Пусть при всех $n < k$ утверждение доказано. Пусть k четно (при нечетном k доказательство аналогично). Тогда $x \in [k; k+1]$, откуда

$$g(x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_{2n}; b_{2n}] \cup \{0\}.$$

Согласно индуктивному предположению $g(k) \geq a_{k-1}$. Но $a_{k-1} \geq a_k$, так как в противном случае $a_{k-1} < a_k < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k-1} < b_{k-1}$, откуда $\frac{1}{k+1} \in [a_{k-1}; b_{k-1}]$. С другой стороны, $\frac{1}{k+1} \in [a_{k+1}; b_{k+1}]$, что противоречит пустоте пересечения отрезков $[a_{k+1}; b_{k+1}]$ и $[a_{k-1}; b_{k-1}]$. Имеем $g(k) \geq a_k$ и, в силу связности $[k; k+1]$, $g(x) \geq a_k$.

Теперь, так как для всякого $x \in F_1$ найдется номер n такой, что $x \in [n; n+1]$, то $g(F_1) \not\subseteq 0$, поэтому

$$g(F_1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1}; b_{2n-1}] \subseteq U,$$

что доказывает регулярность $C^\lambda(X)$ в точке f .

Заметим еще, что $C^\lambda(X)$ не регулярно. Действительно, нетрудно убедиться, что функция g , равная 1 при $x < 1$, $1/(n+1)$ при $2n < x < 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, и совпадающая с функцией $g_n(x) = 1/(x-n)$ на отрезке $[2n+1; 2n+2]$, $n \in \mathbb{N}$, не является точкой регулярности $C^\lambda(X)$.

Как и в случае с T_1 - и T_2 -аксиомами, регулярность $C^\lambda(X)$ в одной точке не гарантирует регулярности всего пространства. Более того, как показывает следующий пример, даже регулярности $C^\lambda(X)$ в точке f_0 может оказаться недостаточно для регулярности $C^\lambda(X)$.

Пример. Пусть $X = I$, λ состоит из всего пространства X и всех конечных множеств, либо не содержащих точек 0 и 1, либо содержащих обе эти точки. Тогда пространство $C^\lambda(X)$ регулярно в точке f_0 , но не регулярно. Покажем регулярность в точке f_0 . Для этого достаточно показать, что $\langle I, [-a; a] \rangle$ замкнуто для всякого a . Но если некоторая непрерывная функция $g \notin \langle I, [-a; a] \rangle$, то существует точка $x_0 \in (-1; 1)$ такая, что $|g(x_0)| > a$. Тогда $\langle \{x_0\}, \mathbb{R} \setminus [-a; a] \rangle$ — искомая окрестность

g и f_0 — точка регулярности пространства $C^\lambda(X)$. Теперь покажем, что $C^\lambda(X)$ не регулярно. Пусть $F = \{0, 1\}$, $U = (-1/3; 1/3) \cup (2/3; 4/3)$, $f(x) = x$ для всех $x \in I$. Ясно, что $f \in \langle F, U \rangle$. Возьмем произвольную окрестность $Of = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$ точки f и покажем, что $[Of] \not\subseteq \langle F, U \rangle$. Пусть

$$M = \left\{ x \mid \text{существует номер } i \leq n \text{ такой, что } x \in F_i \neq I \text{ и } x \neq 1 \right\}.$$

Множество M конечно, поэтому существует функция $g \in C(X)$ такая, что сужения на M функций f и g совпадают, $g(0) = 0$, $g(1) = 1/2$, $0 \leq g \leq 1$. Ясно, что $g \notin \langle F, U \rangle$. Однако $g \in [Of]$. В самом деле, возьмем любую окрестность $Og = \bigcap_{j=1}^k \langle \Phi_j, V_j \rangle$ элемента g и пусть

$$M_1 = \left\{ x \mid \text{существует } j \leq k \text{ такой, что } x \in \Phi_j \neq I \text{ и } x \neq 1 \right\}.$$

Множество M_1 конечно; следовательно, найдется функция $h \in C(X)$, совпадающая с g на множестве $M_1 \cup M$, равная 0 в точках 0 и 1 и удовлетворяющая условию $0 \leq h(x) \leq g(x)$ при всех $x \in X$. Имеем $h \in Og$, так как

- 1) если $\Phi_j = I$, то $V_j \ni [0; \max\{g(x) \mid x \in I\}] \supseteq [0; \max\{h(x) \mid x \in I\}]$;
- 2) если $\Phi_j \neq I$, $\Phi_j \not\ni 1$, то $h|_{\Phi_j} = g|_{\Phi_j}$;
- 3) если $\Phi_j \neq I$, $\Phi_j \ni 1$, то $\Phi_j \ni 0$, поэтому $h(\Phi_j) = g(\Phi_j)$.

Аналогично, $h \in Of$, поэтому Og пересекается с Of и $g \in [Of]$.

Следующая теорема дает необходимое условие для выполнения аксиомы T_3 в точке f_0 .

Теорема 4.8. Пусть λ состоит из компактных подмножеств X и пространство $C^\lambda(X)$ таково, что в точке f_0 выполняется аксиома T_3 . Тогда для всякого $F \in \lambda$ найдется элемент $F_1 \in \lambda$, содержащий F и такой, что для всякого пересекающегося с F открытого в X множества U найдутся $\Phi_1, \Phi_2 \in \lambda$ такие, что выполняются следующие условия:

- 1) $\Phi_1 \subseteq U$;
- 2) Φ_2 пересекается как с Φ_1 , так и с F_1 ;
- 3) в $\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup F_1$ нет открыто-замкнутого множества, разделяющего Φ_1 и F_1 .

Доказательство. Возьмем любое $F \in \lambda$. Пусть $U_0 = (-1; 1)$. Так как в точке f_0 выполнена T_3 -аксиома, существует окрестность Of_0 функции f_0 такая, что $Of_0 \subseteq \langle F, U_0 \rangle$. Можно считать, что $Of_0 = \langle F_1, (-\varepsilon; \varepsilon) \rangle$, где $\varepsilon < 1$. Без ограничения общности можно полагать, что $F_1 \supseteq F$. Пусть теперь U — произвольное открытое подмножество X , пересекающее F , $x_0 \in F \cap U$ и функция $f \in C(X)$ такова, что $f(X \setminus U) = 0$ и $f(x_0) = 2$. Тогда $f \notin \langle F, U_0 \rangle$, поэтому $f \notin [Of_0]$ и, следовательно, найдется окрестность Of функции f , не содержащая f_0 . Пусть $Of = \bigcap_{i=1}^n \langle K_i, U_i \rangle$.

Если все $K_i \not\subseteq U$, то все $U_i \ni 0$, и $f_0 \in Of$ — противоречие. Поэтому найдутся такие i , что $K_i \subseteq U$. Положим $\Phi_1 = \bigcup_{K_i \subseteq U} K_i$. Если $\Phi_1 \cap F_1$ не пусто, то положим $\Phi_2 = \Phi_1$. Пусть Φ_1 не пересекается с F_1 . Рассмотрим множества $A_1, A_2, \dots, A_n$, где

$$A_1 = \{i \leq n \mid K_i \subseteq \Phi_1\},$$

$$A_l = \left\{ i \leq n \mid i \notin \bigcup_{j=1}^{l-1} A_j \text{ и } K_i \cap \left(\bigcup_{j \in A_{l-1}} K_j \right) \text{ не пусто} \right\}, \quad l > 1.$$

Положим $\Phi_2 = \bigcup \left\{ K_i \mid i \in \bigcup_{j=2}^n A_j \right\}$. Тогда $\Phi_2 \cap \Phi_1$ не пусто. Пусть Φ_2 и F_1 не пересекаются. Тогда

найдется функция $h^* \in C(X)$, сужение которой на множество $F_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \{K_i \setminus (\Phi_1 \cup \Phi_2)\} \right)$ есть 0, а сужение на $\Phi_1 \cup \Phi_2$ есть 1. Положим $h = h^* f$. Очевидно, что $h \in Of \cap Of_0$ — противоречие. Остается проверить условие 3. Пусть M — открыто-замкнутое множество в $F_1 \cup \Phi_1 \cup \Phi_2$, $M \supseteq F_1$ и не

пересекается с Φ_1 . Тогда существует функция $h_M^* \in C(X)$, принимающая значение 1 на множестве $F_1 \cup \Phi_1 \cup \Phi_2 \setminus M$ и 0 на множестве $\left(\bigcup_{i=1}^n K_i \setminus (\Phi_1 \cup \Phi_2)\right) \cup M$. Очевидно, что $h_M = h_M^* f \in Of \cap Of_0$ — противоречие. $\square$

Заметим, что доказательство теоремы 4.8 не проходит для семейств λ , состоящих из R -компактных множеств, так как неверно, что непересекающиеся R -компактные множества можно отделить функционально. Более того, как показывает следующий пример, R -компактное множество может быть функционально не отделимо от точки.

Пример. Пусть $X = A(c)$ — александровская компактификация дискрета мощности c , A — множество изолированных точек в X . Ясно, что $A \neq [A] = X$. Пусть $x_0 = X \setminus A$. Тогда для любой функции $f \in C(X)$ множества $X \setminus f^{-1}(f(x_0) - 1/n; f(x_0) + 1/n)$ конечны для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому множество $f^{-1}(R \setminus f(x_0))$ не более чем счетно, т.е. существует $y \in A$ такая, что $f(y) = f(x_0)$. Тогда $f(A) = f(X)$ — компакт, значит A R -компактно и A функционально неотделимо от x_0 .

5. Локальная компактность и σ -компактность пространства $C^\lambda(X)$

Хорошо известно, (см., например, [1]) что и локальная компактность, и σ -компактность пространства $C_p(X)$ эквивалентна конечности пространства X . Тот же результат верен и для компактно-открытой топологии. В настоящем параграфе приводятся критерии этих свойств для произвольной множественно-открытой топологии.

На протяжении этого параграфа мы будем полагать (для хаусдорфовости пространства $C^\lambda(X)$), что λ — обязательно π -сеть пространства X .

Лемма 5.1. Пусть λ — π -сеть. Тогда, если f_0 — точка локальной компактности $C^\lambda(X)$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\langle X, [-\varepsilon; \varepsilon] \rangle$ — компакт.

Доказательство. Пусть $Of_0 = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$ — окрестность точки f_0 , замыкание которой компактно.

Положим $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$, $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Очевидно, что $U \ni 0$, $f_0 \in \langle F, U \rangle \subseteq \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$. Поэтому можно полагать, что $Of_0 = \langle F, U \rangle$, где U — окрестность нуля, а $F \in \lambda$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $[-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq U$. Ясно, что $\langle X, [-\varepsilon, \varepsilon] \rangle \subseteq Of_0 \subseteq [Of_0]$, поэтому достаточно показать, что $\langle X, [-\varepsilon, \varepsilon] \rangle$ замкнуто. Возьмем любую непрерывную функцию $f \notin \langle X, [-\varepsilon, \varepsilon] \rangle$ и пусть $x \in X$ таково, что $|f(x)| > \varepsilon$. Так как λ — π -сеть, найдется $F \in \lambda$ такое, что $F \subseteq f^{-1}(R \setminus [-\varepsilon, \varepsilon])$. Тогда $\langle F, (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \rangle$ — окрестность f , не пересекающаяся с $\langle X, [-\varepsilon, \varepsilon] \rangle$. $\square$

Теорема 5.2. Пусть λ — π -сеть. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) $C^\lambda(X)$ локально компактно;
- б) точка f_0 — точка локальной компактности $C^\lambda(X)$;
- в) X конечно.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б) очевидно.

б) $\Rightarrow$ в) От противного. Пусть X бесконечно. Тогда возможны два случая:

1. Все элементы λ состоят из конечного числа точек. Рассмотрим окрестность f_0 , замыкание которой компактно. Можно полагать, что эта окрестность имеет вид $\langle F, U \rangle$, где $F \in \lambda$, U открыто в $\mathbb{R}$. Так как λ — π -сеть, а X бесконечно, найдется $\Phi \in \lambda$ такое, что $\Phi \subseteq X \setminus F$. Положим $\Omega = \{ \langle \Phi, (-n; n) \rangle \mid n \in \mathbb{N} \}$. Ясно, что семейство Ω состоит из открытых в $C^\lambda(X)$ множеств и покрывает все $C^\lambda(X)$. Пусть $\Omega_1 = \{ \langle \Phi, (-k_i; k_i) \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n \}$ — конечное подпокрытие $[\langle F, U \rangle]$. В силу конечности F и Φ найдется функция $f \in C^\lambda(X)$, обладающая свойствами $f|_F \equiv 0$ и $f|_\Phi \equiv \max\{k_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$. Очевидно, что эта функция лежит в $[\langle F, U \rangle]$ и не покрывается элементами Ω_1 . Противоречие.

2. Найдется элемент $F_0 \in \lambda$, состоящий из бесконечного числа точек. В силу леммы 5.1 найдется ε такое, что $\langle X, [-\varepsilon, \varepsilon] \rangle$ — компакт. Положим $\Omega = \{ \langle F, (-\varepsilon, \varepsilon) \rangle, \mid F \in \lambda \} \cup \{ \langle F_0, R \setminus [-\varepsilon/2, \varepsilon/2] \rangle \}$. Семейство Ω состоит из открытых в $C^\lambda(X)$ множеств и покрывает $\langle X, [-\varepsilon, \varepsilon] \rangle$. В самом деле, для

любой функции $f \in \langle X, [-\varepsilon, \varepsilon] \rangle$ если $|f| \not\equiv \varepsilon$, то найдется открытое $U \subseteq X$ такое, что $f(U) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. Возьмем $\Phi \in \lambda$, лежащее в U . Ясно, что $f \in \langle \Phi, (-\varepsilon, \varepsilon) \rangle$. Если же $|f| \equiv \varepsilon$, то $f \in \{ \langle F_0, R \setminus [-\varepsilon/2, \varepsilon/2] \rangle, | F \in \lambda \}$. Пусть $\Omega_1 = \{ \langle F_i, (-\varepsilon, \varepsilon) \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n \} \cup \{ \langle F_0, R \setminus [-\varepsilon/2, \varepsilon/2] \rangle \}$ — конечное подпокрытие Ω . Зафиксируем произвольно $x_i \in F_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $x_0 \in F_0$ так, чтобы $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^n x_i$. Существует функция $g \in C(X)$ такая, что $g(x_0) = 0$, $g(x_i) = \varepsilon$ для всех $i \geq 1$ и для всех $x \in X$ выполняется $g(x) \leq \varepsilon$. Тогда $g \in \langle X, [-\varepsilon, \varepsilon] \rangle$, но g не покрывается элементами семейства Ω_1 . Противоречие.

в) $\Rightarrow$ а) Очевидно, так как если X конечно, а λ — π -сеть, то $C^\lambda(X)$ совпадает с $C_p(X)$. $\square$

Как видно из теоремы 5.2, если X бесконечно, то точка f_0 (а следовательно, и все константы) не имеет окрестности, замыкание которой компактно. Возникает следующий вопрос.

Вопрос. Верно ли, что при бесконечном X и семействе λ , являющимся сетью, пространство $C^\lambda(X)$ не имеет точек локальной компактности?

В связи с этим вопросом отметим следующий факт.

Теорема 5.3. Для любого семейства λ (не обязательно являющегося π -сетью) в пространстве $C^\lambda(X)$ нет изолированных точек.

Доказательство. Пусть, напротив, f — изолированная точка $C^\lambda(X)$, т.е. $\{f\} = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$ для некоторых $F_1, F_2, \dots, F_n \in \lambda$ и для некоторых $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau$. На первом шаге (снова методом от противного) докажем, что для любой точки $x \in X$ найдется номер $i \leq n$ такой, что $x \in [F_i] \setminus F_i$, а $f(x) \in [U_i] \setminus U_i$. В самом деле, пусть в X существует точка x_0 , для которой это не выполняется. Тогда если $x_0 \in [F_i]$, то $f(x_0) \in [U_i]$ в силу непрерывности f . Теперь, если $x_0 \in [F_i] \setminus F_i$, то $f(x_0) \notin [U_i] \setminus U_i$, а поэтому $f(x_0) \in U_i$. Если же $x_0 \in F_i$, то $f(x_0) \in U_i$, ввиду того, что $f \in \langle F_i, U_i \rangle$. Итак, для всех i если $x_0 \in [F_i]$, то $f(x_0) \in U_i$. Существует положительное число ε такое, что интервал $(f(x_0) - \varepsilon; f(x_0) + \varepsilon)$ содержится во всех U_i таких, что $x_0 \in [F_i]$. Кроме того, у точки x_0 есть окрестность $\widetilde{Ox_0}$, не пересекающаяся со всеми остальными F_i . Положим $Ox_0 = \widetilde{Ox_0} \cap f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon/2; f(x_0) + \varepsilon/2)$. Рассмотрим непрерывную функцию g , обладающую свойствами: $g(x_0) = 1$, $g|_{X \setminus Ox_0} \equiv 0$, $0 \leq g(x) \leq 1$ для всех $x \in X$. Функция $h = f + \varepsilon g/2$ непрерывна, отлична от f , поэтому не лежит в $\bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$, значит, $h \notin \langle F_{i_0}, U_{i_0} \rangle$ для некоторого номера $i_0 \leq n$.

Множество $[F_{i_0}] \ni x_0$, так как в противном случае $h|_{F_{i_0}} \equiv f|_{F_{i_0}}$. Пусть $x_1 \in F_{i_0}$ таково, что $h(x_1) \notin U_{i_0}$. Тогда $h(x_1) \neq f(x_1)$ и, следовательно, $x_1 \in Ox_0$, откуда $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. Имеем:

$$|h(x_1) - f(x_0)| \leq |h(x_1) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_0)| = \frac{\varepsilon}{2} |g(x_1)| + |f(x_1) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $h(x_1) \in (f(x_0) - \varepsilon; f(x_0) + \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$ (здесь учтено, что $x_0 \in [F_{i_0}]$). Налицо противоречие. Первый шаг доказательства завершен.

Зафиксируем для каждого x свой номер $i(x) \leq n$, о котором шла речь на первом шаге. Положим $O_1 = f^{-1}(U_1)$ и пусть x_1 — произвольная точка из F_{i_1} , $i_2 = i(x_1)$. Ясно, что $i_2 \neq 1$. Так как $x_1 \in [F_{i_2}]$, найдется точка $x_2 \in O_1 \cap F_{i_2}$. Положим $O_2 = O_1 \cap f^{-1}(U_{i_2})$, $i_3 = i(x_2)$ (ясно, что $i_3 \neq i_2$, $i_3 \neq 1$), выберем $x_3 \in O_2 \cap F_{i_3}$ и т. д. Получим две бесконечные последовательности: точек $x_1, x_2, \dots$ и их окрестностей $O_1, O_2, \dots$. Последовательность окрестностей обладает свойствами: $O_1 \supseteq O_2 \supseteq \dots \supseteq O_n \supseteq \dots$ и $f^{-1}(U_{i_k}) \supseteq O_k$ для всех натуральных k . Но тогда все числа $i_1, i_2, \dots$ различны, что невозможно, так как все i_k — натуральные числа, не превосходящие n . $\square$

Итак, как и в случае топологий поточечной сходимости и компактно-открытой, локальная компактность $C^\lambda(X)$ эквивалентна конечности X . Для σ -компактности это не так в общем случае. Отметим, однако, что если семейство λ является сетью, то конечность X легко доказывается, так как тождественное отображение $i: C^\lambda(X) \rightarrow C_p(X)$ в этом случае является уплотнением.

Далее будем полагать, что λ — π -сеть, не являющаяся сетью. Введем некоторые обозначения. Для любой функции $f \in C(X)$ и любого положительного числа ε обозначим множество $\{g \in$

$C(X) : |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \forall x \in X$ через $A(f, \varepsilon)$. Через $D(X)$ будем обозначать множество всех изолированных точек пространства X . Кроме того, в дальнейшем нам понадобится понятие C^* -вложенности: говорят, что подпространство $Y \subseteq X$ C^* -вложено в X , если любая непрерывная ограниченная вещественнозначная функция на Y непрерывно продолжается на все пространство X , т.е. для любого $f \in C(Y)$ существует функция $\tilde{f} \in C(X)$, сужение которой на Y совпадает с f .

Имеет место следующий факт.

Теорема 5.4. Пусть $D(X)$ — всюду плотное подпространство псевдокомпактного пространства X , $D(X)$ C^* -вложено в X , а λ состоит из всех конечных подмножеств $D(X)$. Тогда пространство $C^\lambda(X)$ σ -компактно.

Доказательство. Рассмотрим отображение сужения $i : C^\lambda(X) \rightarrow C_p(D(X))$ — отображение сужения. Так как $D(X)$ всюду плотно в X , то i — взаимно-однозначное отображение $C^\lambda(X)$ на свой образ. Кроме того, i взаимно-непрерывно, так как открытые множества в обеих топологиях одни и те же, поэтому i является гомеоморфным вложением. Образом $C^\lambda(X)$ при отображении i является множество всех ограниченных функций из $D(X)$ в $\mathbb{R}$ — это немедленно следует из псевдокомпактности X и C^* -вложенности $D(X)$ в X . Таким образом, $C^\lambda(X)$ гомеоморфно $C_p^*(D(X))$ — пространству всех ограниченных функций на $D(X)$ в топологии поточечной сходимости. Но $C_p^*(D(X)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle D(X), [-i; i] \rangle$, причем каждое множество $\langle D(X), [-i; i] \rangle$ есть произведение отрезков, т.е. компактно, поэтому $C^\lambda(X)$ σ -компактно. $\square$

Следствие 5.5. Пространство $C^\lambda(\beta N)$, где λ состоит из всех конечных подмножеств N , σ -компактно.

Теперь займемся поиском необходимых условий σ -компактности $C^\lambda(X)$. Для этого нам понадобится ряд фактов, которые мы докажем в леммах 5.6–5.8.

Лемма 5.6. Если λ — π -сеть, то множество $A(f, \varepsilon)$ замкнуто для всех $f \in C(X)$ и всех $\varepsilon > 0$ как в топологии равномерной сходимости на всем пространстве X , так и в λ -открытой топологии.

Доказательство. Возьмем любую функцию $g \notin A(f, \varepsilon)$. Найдется точка $x_0 \in X$ такая, что $|g(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon$. Без ограничения общности можно предположить, что $g(x_0) \geq f(x_0)$. Тогда $g(x_0) > f(x_0) + \varepsilon$. Пусть V_1 и V_2 — непересекающиеся интервалы, содержащие $g(x_0)$ и $f(x_0) + \varepsilon$ соответственно. Можно полагать, что $V_1 = (g(x_0) - a, g(x_0) + a)$, где a — некоторое положительное число. Так как λ — π -сеть, в окрестности $Ox_0 = g^{-1}(V_1) \cap (f + \varepsilon)^{-1}(V_2)$ точки x_0 найдется элемент $F \in \lambda$. Тогда $\langle F, V_1 \rangle$ — окрестность функции g в $C^\lambda(X)$, а $\langle g, X, a \rangle$ — окрестность g в топологии равномерной сходимости на X , причем обе они не пересекаются с $A(f, \varepsilon)$. Лемма доказана. $\square$

Следующая лемма утверждает, что если $C^\lambda(X)$ σ -компактно, то в $C^\lambda(X)$ найдется компакт K , плотный в некоторой равномерной окрестности некоторой непрерывной функции, т.е. замыкание K в равномерной топологии целиком содержит равномерную окрестность.

Лемма 5.7. Пусть $C^\lambda(X)$ σ -компактно. Тогда найдутся такая функция $f \in C(X)$, число $\varepsilon > 0$ и компакт $K \subseteq C^\lambda(X)$, что для любой непрерывной функции g и любого числа ε_1 таких, что $A(g, \varepsilon_1) \subseteq A(f, \varepsilon)$ выполняется $K \cap A(g, \varepsilon_1) \neq \emptyset$. При этом можно полагать, что $K \subseteq A(f, \varepsilon)$.

Доказательство. Предположим, что это неверно, то есть для любого компакта K , любой функции f и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $g \in C(X)$ и $\varepsilon_1 > 0$, что $A(g, \varepsilon_1) \subseteq A(f, \varepsilon)$, и $K \cap A(g, \varepsilon_1) = \emptyset$. Пусть $C^\lambda(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, где все K_i — компакты. Можно полагать, что $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$ (в про-

тивном случае положим $\tilde{K}_i = \bigcup_{j=1}^i K_j$). $K_1 \neq C^\lambda(X)$ (иначе $K_1 \supseteq A(f_0, 1)$ вопреки предположению).

Пусть $f^{(1)}$ — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f^{(1)} \in C^\lambda(X) \setminus K_1$

и пусть $\varepsilon_1 = 1/2$. Согласно предположению найдутся функция $f^{(2)} \in C(X)$ и число ε_2 такие, что $A(f^{(2)}, \varepsilon_2) \subseteq A(f^{(1)}, \varepsilon_1)$, и $A(f^{(2)}, \varepsilon_2) \cap K_2 = \emptyset$. Можно выбрать ε_2 меньше $1/4$. Аналогично, найдутся функция $f^{(3)} \in C(X)$ и число $\varepsilon_3 \in (0; 1/8)$ такие, что $A(f^{(3)}, \varepsilon_3) \subseteq A(f^{(2)}, \varepsilon_2)$, и $A(f^{(3)}, \varepsilon_3) \cap K_3 = \emptyset$. По индукции строим последовательности функций $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$ и чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, удовлетворяющих условиям: $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2^n}$, $A(f^{(k)}, \varepsilon_k) \supseteq A(f^{(k+1)}, \varepsilon_{k+1})$ для всех натуральных k и $A(f^{(n)}, \varepsilon_n) \cap K_n = \emptyset$. Так как для всех $x \in X$ имеем $|f^{(n)}(x) - f^{(n+1)}(x)| \leq \varepsilon_{n+1} < 1/2^n$, то последовательность $\{f^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ равномерно сходится к некоторой функции $f \in C^\lambda(X)$. Но тогда f содержится в K_{n_0} для некоторого натурального n_0 , поэтому f не содержится в $A(f^{(n_0)}, \varepsilon_{n_0})$, которое (согласно лемме 5.6) замкнуто в топологии равномерной сходимости на всем X . Пусть Of — равномерная окрестность f , не пересекающаяся с $A(f^{(n_0)}, \varepsilon_{n_0})$. Но согласно построению при всех $n > n_0$ выполняется $f^{(n)} \in A(f^{(n)}, \varepsilon_n) \subseteq A(f^{(n_0)}, \varepsilon_{n_0})$, поэтому ни одна из функций $f^{(n)}$ при $n > n_0$ не лежит в Of , что противоречит равномерной сходимости последовательности $\{f^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ к f . Существование f , K и ε доказано.

Остается заметить, что если K не лежит в $A(f, \varepsilon)$, то вместо K следует рассмотреть множество $K \cap A(f, \varepsilon)$, которое также компактно в $C^\lambda(X)$ в силу замкнутости $A(f, \varepsilon)$ (см. лемму 5.6). $\square$

Лемма 5.8. Если λ состоит из компактных множеств X , а $C^\lambda(X)$ σ -компактно, то для некоторой функции $f \in C(X)$ и некоторого положительного числа ε множество $A(f, \varepsilon)$ является компактом в $C^\lambda(X)$.

Доказательство. Возьмем компакт K , функцию f и число ε , существование которых доказано в предыдущей лемме, и покажем, что $K = A(f, \varepsilon)$. В самом деле, пусть $g \in A(f, \varepsilon) \setminus K$. Так как K замкнуто в $C^\lambda(X)$, у функции g найдется окрестность в $C^\lambda(X)$, не пересекающаяся с K . Но (см. [19]) для λ , состоящего из компактных множеств, λ -открытая топология слабее топологии равномерной сходимости на λ , которая в свою очередь слабее топологии равномерной сходимости на всем X , поэтому существует равномерная окрестность $\langle g, X, \varepsilon_1 \rangle$ функции g , не пересекающаяся с K . (Здесь $\varepsilon_1 < \varepsilon$.) Положим $a = \varepsilon - \varepsilon_1/2$ и

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + a, & \text{если } g(x) \geq f(x) + a, \\ f(x) - a, & \text{если } g(x) \leq f(x) - a, \\ g(x), & \text{если } |g(x) - f(x)| < a. \end{cases}$$

Тогда $A(h, \varepsilon_1/2) \subseteq A(f, \varepsilon)$, поэтому $A(h, \varepsilon_1/2)$ пересекается с K . Но $A(h, \varepsilon_1/2) \subseteq \langle g, X, \varepsilon_1 \rangle$, следовательно, $A(h, \varepsilon_1/2)$ с K не пересекается; противоречие. Итак, $K = A(f, \varepsilon)$. $\square$

Теорема 5.9. Если $C^\lambda(X)$ σ -компактно, то $D(X)$ всюду плотно в X и C^* -вложено в X .

Доказательство. Пусть $C^\lambda(X)$ σ -компактно. Возьмем непрерывную функцию f , положительное число ε и компакт $K \subseteq A(f, \varepsilon)$, существование которых доказано в лемме 5.8. Рассмотрим семейство $\tilde{\lambda} = \{F \in \lambda : F \text{ конечно}\}$. Покажем прежде всего, что оно будет являться π -сетью.

Пусть, напротив, существует непустое открытое в X множество U такое, что если элемент $F \in \lambda$ содержится в U , то F бесконечно. Зафиксируем произвольное $x_0 \in U$. Для любой функции $g \in K$ положим $O_g(x_0) = g^{-1}(g(x_0) - \varepsilon/3; g(x_0) + \varepsilon/3) \cap U$ и пусть $F_g \in \lambda$ таково, что $F_g \subseteq O_g(x_0) \subseteq U$. Такое F_g существует, так как λ — π -сеть, причем F_g бесконечно в силу выбора U . Положим $Og = \langle F_g, (g(x_0) - \varepsilon/3; g(x_0) + \varepsilon/3) \rangle$. Семейство $\{Og : g \in K\}$ — открытое покрытие компакта K . Выберем его конечное подпокрытие $\{Og_i\}_{i=1}^n$. В силу бесконечности всех F_{g_i} найдутся попарно различные точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ такие, что $x_i \in F_{g_i}$ для всех $i \leq n$. Пусть $V_1, V_2, \dots, V_n$ — их попарно непересекающиеся окрестности в X . Выберем для каждого $i \leq n$ число $a_i \in (f(x_i); f(x_i) + \varepsilon) \setminus [g_i(x_0) - \varepsilon/3; g_i(x_0) + \varepsilon/3]$. Существует функция $\varphi_i \in C(X)$ такая, что $\varphi_i|_{X \setminus V_i} \equiv 0$, $\varphi_i(x_i) = a_i - f(x_i)$ и для всех $x \in X$ выполнено $0 \leq \varphi_i(x) \leq a_i - f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Рассмотрим функцию $h = f + \sum_{i=1}^n \varphi_i$.

Пусть число ε_1 таково, что

- 1) для всех $i \leq n$ $(a_i - \varepsilon_1; a_i + \varepsilon_1) \cap (g_i(x_0) - \varepsilon/3; g_i(x_0) + \varepsilon/3) = \emptyset$,
- 2) $A(h, \varepsilon_1) \subseteq A(f, \varepsilon)$.

Тогда $K \cap A(h, \varepsilon_1) \neq \emptyset$ в силу выбора f , ε и K . Однако для всех $i \leq n$ $Og_i \cap A(h, \varepsilon_1) = \emptyset$, так как для всякой функции $u \in A(h, \varepsilon_1)$ $u(x_i) \in (a_i - \varepsilon_1; a_i + \varepsilon_1)$, следовательно, $u(x_i) \notin (g_i(x_0) - \varepsilon/3; g_i(x_0) + \varepsilon/3)$. Противоречие с тем, что Og_i покрывают K . Таким образом, $\tilde{\lambda}$ — π -сеть.

Тождественное отображение $i : C^\lambda(X) \mapsto C^{\tilde{\lambda}}(X)$ является, очевидно, уплотнением. Так как при уплотнении σ -компактность сохраняется, пространство $C^{\tilde{\lambda}}(X)$ также σ -компактно. В силу леммы 5.7 можно полагать $K = A(f, \varepsilon)$.

Предположим теперь, что существует непустое открытое множество, не пересекающееся с $D(X)$. Так как $\tilde{\lambda}$ — π -сеть, найдется элемент $F_0 \in \tilde{\lambda}$, не содержащий ни одной изолированной точки X , поэтому множество $X \setminus F_0$ будет всюду плотным в X . Выберем для каждой функции g из $K \setminus \{f\}$ точку $x_g \in X \setminus F_0$ такую, что $g(x_g) \neq f(x_g)$, и пусть $a_g = |g(x_g) - f(x_g)|$. Выберем элемент F_g из $\tilde{\lambda}$, лежащий в окрестности $g^{-1}(\mathbb{R} \setminus [f(x_g) - a_g/2; f(x_g) + a_g/2]) \cap f^{-1}(f(x_g) - a_g/2; f(x_g) + a_g/2) \cap (X \setminus F_0)$ точки x_g , и положим $Og = \langle F_g, \mathbb{R} \setminus [f(x_g) - a_g/2; f(x_g) + a_g/2] \rangle$. Пусть, кроме того, U_0 — конечное объединение интервалов, содержащее множество $f(F_0)$ и такое, что сумма их длин меньше ε . Тогда семейство $\{Og \mid g \in K \setminus \{f\}\} \cup \{\langle F_0, U_0 \rangle\}$ есть открытое покрытие компакта K . Пусть $\{Og_i\}_{i=1}^n \cup \{\langle F_0, U_0 \rangle\}$ — его конечное подпокрытие. Зафиксируем точку $x_0 \in F_0$. В силу выбора U_0 множество $(f(x_0); f(x_0) + \varepsilon) \setminus U_0$ содержит некоторую точку y . Положим $b = y - f(x_0)$.

Рассмотрим непрерывную функцию φ , совпадающую с f на $\bigcup_{i=1}^n F_{g_i}$ и удовлетворяющую условиям: $\varphi(x_0) - f(x_0) = b$, $0 \leq \varphi(x) - f(x) \leq b$ для всех $x \in X$. Очевидно, $\varphi \in A(f, \varepsilon) = K$. С другой стороны, $\varphi \notin \langle F_0, U_0 \rangle$ (так как $\varphi(x_0) = y \notin U_0$) и для любого $i \leq n$ функция $\varphi \notin Og_i$ (так как $\varphi(F_{g_i}) = f(F_{g_i}) \subseteq (f(x_{g_i}) - a_{g_i}/2; f(x_{g_i}) + a_{g_i}/2)$). Полученное противоречие показывает, что $D(X)$ всюду плотно в X .

Теперь докажем C^* -вложенность $D(X)$ в X . Так как $\tilde{\lambda}$ — π -сеть, все конечные подмножества $D(X)$ являются элементами λ . Но тогда тождественное отображение $i : C^\lambda(X) \rightarrow C^{\lambda_1}(X)$, где λ_1 состоит из всех конечных подмножеств $D(X)$, является уплотнением, а поэтому K останется компактом и в $C^\mu(X)$. Но λ_1 — наследственно-замкнутое семейство компактных подмножеств, поэтому (см. [19]) топология $C^{\lambda_1}(X)$ совпадает с топологией равномерной сходимости на λ_1 . Такая топология однородна, значит для некоторого $\delta > 0$ множество $A(f_0, \delta) = \langle X, [-\delta, \delta] \rangle$ также является компактом в $C^{\lambda_1}(X)$. Но тогда все множества вида $\langle X, [-\delta, \delta] \rangle$ будут компактами в $C^{\lambda_1}(X)$, так как все они гомеоморфны друг другу. Рассмотрим отображение сужения $\psi : C^{\lambda_1}(X) \rightarrow C^{\lambda_1}(D(X))$. Оно непрерывно, так как каждый элемент из λ_1 лежит в $D(X)$, поэтому $\psi(A(f_0, \delta))$ компактно в $C^{\lambda_1}(D(X))$. Для каждого δ рассмотрим множество M_δ всех функций из $C(D(X))$, по модулю не превосходящих δ . Покажем, что $\psi(A(f_0, \delta))$ всюду плотно в M_δ . Тогда в силу компактности $\psi(A(f_0, \delta))$ мы получим равенство $M_\delta = \psi(A(f_0, \delta))$, что и означает C^* -вложенность $D(X)$ в X .

Итак, пусть f — произвольная функция из M_δ и $Of = \bigcap_{i=1}^n \langle \{x_i\}, U_i \rangle$ — ее произвольная базисная окрестность в $C^\mu(D(X))$. Так как все x_i — изолированные точки пространства X , функция $h : X \rightarrow \mathbb{R}$, совпадающая с f на $\bigcup_{i=1}^n x_i$ и равная нулю во всех остальных точках X , непрерывна, а значит лежит в $A(f_0, \delta)$. Остается заметить, что $\psi(h) \in Of$. $\square$

Теорема 5.10. Если $C^\lambda(X)$ σ -компактно, то X псевдокомпактно.

Доказательство. Пусть, напротив, X не псевдокомпактно. Тогда в X найдется бесконечное дискретное семейство $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ непустых открытых множеств. Выберем для каждого такого множества содержащуюся в нем изолированную точку (это возможно в силу теоремы 5.9) $x_i \in U_i \cap D(X)$.

Пусть $C^\lambda(X) = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$, где все K_i — компакты. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ рассмотрим отображение $\phi_{x_i} : C^\lambda(X) \rightarrow \mathbb{R}$, действующее по правилу $\phi_{x_i}(f) = f(x_i)$ для всех $f \in C^\lambda(X)$. Оно непрерывно, как следует из теоремы 3.1, значит $\phi_{x_i}(K_i)$ компактно в $\mathbb{R}$, в частности, найдется точка числовой прямой a_i такая, что при всех f из K_i выполнено неравенство $f(x_i) < a_i$. Пусть g — произвольная непрерывная функция, принимающая значение a_i в точке x_i для всех номеров i — такая функция

существует в силу дискретности семейства $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$. Ясно, что g не может принадлежать никакому K_i , что противоречит условию $C^\lambda(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Лемма 5.11. *Если $C^\lambda(X)$ σ -компактно, то все элементы семейства λ конечны и содержатся в $D(X)$.*

Доказательство. Докажем конечность элементов λ . Пусть, напротив, найдется бесконечное F_0 из λ . Рассмотрим пространство $C^{\tilde{\lambda}}(X)$, где $\tilde{\lambda} = \{F \in \lambda : F = F_0 \text{ или } F \text{ — конечное подмножество } D(X)\}$. Так как тождественное отображение $i : C^\lambda(X) \rightarrow C^{\tilde{\lambda}}(X)$ будет уплотнением, $C^{\tilde{\lambda}}(X)$ также σ -компактно, поэтому в силу леммы 5.7 найдутся функция $f \in C(X)$, число $\varepsilon_1 > 0$ и компакт $K_1 \subseteq C^{\tilde{\lambda}}(X)$ такие, что K_1 равномерно плотен в $A(f, \varepsilon_1)$. В силу теоремы 5.10 X псевдокомпактно, поэтому $f(F_0)$ ограничено в R . Возможны два случая.

1. $f(F_0)$ бесконечно. Тогда множество предельных точек $f(F_0)$ непусто, ограничено, а значит имеет точную верхнюю грань, равную a . Найдется число $\varepsilon_2 > 0$ такое, что интервал $(a; a + \varepsilon_2)$ не содержит точек $f(F_0)$. Положим ε равному наименьшему из чисел ε_1 и $\varepsilon_2/2$, $K = K_1 \cap A(f, \varepsilon)$. Очевидно, что K — компакт, равномерно плотный в $A(f, \varepsilon)$. Семейство $\mathcal{U} = \{\langle F_0, (-\infty; a + 2\varepsilon/3) \rangle\} \cup \{\langle x, (f(x) + \varepsilon/3; +\infty) \rangle\}_{x \in D(X)}$ является открытым покрытием компакта K . В самом деле, если функция g принадлежит множеству $K \setminus \langle F_0, (-\infty; a + 2\varepsilon/3) \rangle$, то для некоторого $x \in F_0$ имеем $g(x) \geq a + 2\varepsilon/3$. Положим $T = f^{-1}(-\infty; a] \cap F_0$. Очевидно, T не пусто; зафиксируем произвольно $x_0 \in T$. В окрестности $f^{-1}(-\infty; f(x_0) + \varepsilon/6) \cap g^{-1}(a + \varepsilon/2; +\infty)$ точки x_0 найдется точка $x_1 \in D(X)$ (в силу плотности $D(X)$). Тогда

$$f(x_1) + \frac{\varepsilon}{3} < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < a + \frac{\varepsilon}{2} < g(x_1),$$

т.е. $g \in \langle x_1, (f(x_1) + \varepsilon/3; +\infty) \rangle$ и $\mathcal{U}$ — действительно покрытие K . Пусть

$$\mathcal{U}_1 = \bigcup_{i=1}^n \left\{ \langle x_i, (f(x_i) + \varepsilon/3; +\infty) \rangle \right\} \cup \left\{ \langle F_0, (-\infty; a + 2\varepsilon/3) \rangle \right\}$$

— конечное подпокрытие K . Так как a — точная верхняя грань множества предельных точек $f(F_0)$, найдется точка $x_0 \in F_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n x_i$ такая, что $a > f(x_0) > a - \varepsilon/3$. Тогда $a + 2\varepsilon/3 < f(x_0) + \varepsilon$ и существует точка y , лежащая в интервале $(a + 2\varepsilon/3; f(x_0) + \varepsilon)$. Для нее найдутся такое число $m < \varepsilon$ и такая функция $g \in A(f, m)$, что $g(x_0) = y$, а $g(x_i) = f(x_i)$ при всех $1 \leq i \leq n$. Положим δ равным наименьшему из чисел $\varepsilon - m$ и $y - (a + 2\varepsilon/3)$. Тогда $A(g, \delta) \subseteq A(f, \varepsilon)$, поэтому $K \cap A(g, \delta)$ непусто. Но для всякой функции h из $A(g, \delta)$ справедлива цепочка неравенств

$$h(x_0) \geq g(x_0) - \delta \geq g(x_0) - y + a + \frac{2\varepsilon}{3} = a + \frac{2\varepsilon}{3},$$

откуда следует, что $h \notin \langle F_0, (-\infty; a + 2\varepsilon/3) \rangle$. Кроме того, для всех $1 \leq i \leq n$ выполнено

$$|h(x_i) - f(x_i)| = |h(x_i) - g(x_i)| \leq \delta \leq f(x_0) + \varepsilon - y < a + \varepsilon - \left(a + \frac{2\varepsilon}{3}\right) = \frac{\varepsilon}{3},$$

т.е. $h \notin \langle x_i, (f(x_i) + \varepsilon/3; +\infty) \rangle$. Значит, ни одна функция из $A(g, \delta)$ не покрывается элементами $\mathcal{U}_1$; противоречие.

2. $f(F_0)$ конечно. Тогда найдется $y_0 \in f(F_0)$ такое, что $f^{-1}(y_0) \cap F_0$ бесконечно. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ и $[y_0 - 2\varepsilon, y_0 + 2\varepsilon] \cap f(F_0) = \{y_0\}$. Пусть $V = (y_0 - \varepsilon/2; y_0 + \varepsilon/2) \cup (R \setminus [y_0 - 2\varepsilon; y_0 + 2\varepsilon])$. Семейство $\mathcal{U} = \{\langle F_0, V \rangle\} \cup \{\langle x, R \setminus [-\varepsilon/3; \varepsilon/3] \rangle\}_{x \in D(X)}$ — открытое покрытие компакта $K = A(f, \varepsilon) \cap K_1$. Пусть $\mathcal{U}_1 = \{\langle F_0, V \rangle\} \cup \{\langle x_i, R \setminus [-\varepsilon/3; \varepsilon/3] \rangle\}_{i=1}^n$ — его конечное подпокрытие, и $x_0 \in F_0$ таково, что $f(x_0) = y_0$ и $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^n x_i$. Найдется функция g из $A(f, 2\varepsilon/3)$, удовлетворяющая условиям: $g(x_i) = f(x_i)$ при $i \leq n$ и $g(x_0) = y_0 + 2\varepsilon/3$. Легко видеть, что ни одна функция из $A(g, \varepsilon/6)$ не покрывается элементами $\mathcal{U}_1$, и что $A(g, \varepsilon/6) \subseteq A(f, \varepsilon)$. Противоречие с леммой 5.7.

Докажем, что все элементы λ содержатся в $D(X)$. Пусть это не так и пусть $F_0 \in \lambda$ таково, что $F_0 \cap (X \setminus D(X))$ содержит некоторую точку x_0 . Так как все элементы λ конечны, λ -открытая топология совпадает с топологией равномерной сходимости на элементах λ , а значит, (см. [19]) однородна. В силу леммы 5.7 существуют $\varepsilon > 0$ и $A(f_0, \varepsilon)$ — компакт в $C^\lambda(X)$. Семейство

$$\mathcal{U} = \left\{ \left\langle F_0, \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2} \right] \right\rangle \right\} \cup \left\{ \left\langle x, \left(-\frac{2\varepsilon}{3}; \frac{2\varepsilon}{3} \right) \right\rangle \right\}_{x \in D(X)}$$

— открытое покрытие $A(f_0, \varepsilon)$. В самом деле, если $|g(x)| > 2\varepsilon/3$ при всех $x \in D(X)$, то $g(x_0) \geq 2\varepsilon/3 > \varepsilon/2$ в силу непрерывности g и всюду плотности $D(X)$, а поэтому $g(F_0) \subseteq \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon/2; \varepsilon/2]$. Ввиду компактности $A(f_0, \varepsilon)$ существует

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \left\langle F_0, \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2} \right] \right\rangle \right\} \cup \left\{ \left\langle x_i, \left(-\frac{2\varepsilon}{3}; \frac{2\varepsilon}{3} \right) \right\rangle \right\}_{i=1}^n$$

— конечное открытое подпокрытие $A(f_0, \varepsilon)$. Но тогда любая непрерывная функция g , удовлетворяющая условиям $g(x_i) = \varepsilon$ при $1 \leq i \leq n$, $g(x_0) = 0$, и $g(x) \leq \varepsilon$ при всех $x \in X$ не покрывается элементами $\mathcal{U}_1$; противоречие. $\square$

Объединяя теоремы 5.4, 5.9, 5.10 и лемму 5.11, получаем критерий σ -компактности.

Теорема 5.12. $C^\lambda(X)$ σ -компактно тогда и только тогда, когда X псевдокомпактно, $D(X)$ всюду плотно в X и C^* -вложено в X , а λ состоит из всевозможных конечных объединений $D(X)$.

6. Модификация множественно-открытой топологии

Напомним, что стандартную предбазу λ -открытой топологии образуют все множества вида $\langle F, U \rangle = \{f \in C(X) : f(F) \subseteq U\}$, где $F \in \lambda$, U — открытое подмножество $\mathbb{R}$. Изменится ли топология, если в качестве U брать не всевозможные открытые подмножества, а только некоторые, принадлежащие какому-либо фиксированному семейству τ ? Если да, то какими свойствами будет обладать получившееся пространство? В этом параграфе мы попытаемся дать ответ на эти вопросы.

Определение. Пусть задано непустое семейство λ подмножеств тихоновского пространства X и непустое семейство открытых множеств числовой прямой $\mathbb{R}$. Топология, предбазу которой образуют все множества вида $\langle F, U \rangle = \{f \in C(X) : f(F) \subseteq U\}$, где $F \in \lambda$, $U \in \tau$, а также пустое множество и все $C(X)$, называется λ - τ -топологией. Пространство непрерывных вещественнозначных функций, наделенное такой топологией, обозначается через $C_\tau^\lambda(X)$.

Замечание. Поскольку для всякого $F \in \lambda$ справедливы равенства $\langle F, \mathbb{R} \rangle = C(X)$ и $\langle F, \emptyset \rangle = \emptyset$, можно без ограничения общности полагать, что семейство τ содержит в качестве элементов и $\emptyset$, и все $\mathbb{R}$, что мы и будем делать в дальнейшем. Кроме того, мы будем полагать, что семейство τ замкнуто относительно конечных пересечений: ввиду теоретико-множественного равенства $\langle F, U_1 \cap U_2 \rangle = \langle F, U_1 \rangle \cap \langle F, U_2 \rangle$ такое допущение не ограничивает общности. Наиболее интересный случай семейства τ — это семейство всех интервалов. Договоримся обозначать такое семейство символом τ_0 .

Хорошо известно, что если λ есть семейство всех конечных (или всех компактных) подмножеств X , то λ - τ -топология будет одной и той же для любого семейства τ , являющегося базой $\mathbb{R}$. При этом получится топология поточечной сходимости (соответственно компактно-открытая топология). Однако, как показывают следующие примеры, в общем случае λ - τ -топология может быть различной для различных баз $\mathbb{R}$, даже если семейство λ — сеть из компактных множеств.

Пример. Пусть X — числовая прямая, λ состоит из всех компактов, которые либо конечны, либо имеют диаметр, больший 1, τ_1 — семейство всех интервалов длины, меньшей 1. Тогда λ - τ_0 -топология строго сильнее λ - τ_1 -топологии. В самом деле, рассмотрим открытое в $C_{\tau_0}^\lambda(X)$ множество $A = \langle [0; 2], (-1; 3) \rangle$. Функция $f(x) \equiv x$ лежит в A . Пусть $Of = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$ — ее произвольная

базисная окрестность в $C_{\tau_1}^\lambda(X)$. Так как для всех бесконечных $F \in \lambda$ диаметр $f(F)$ больше 1, и тем более больше диаметра любого U_i , то среди множеств F_i нет ни одного бесконечного. Пусть $x_0 \in [0; 2] \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i$. Функция g , совпадающая с f на $\bigcup_{i=1}^n F_i$ и принимающая в точке x_0 значение 10, принадлежит множеству $Of \setminus A$, значит, $Of \not\subseteq A$.

Пример. Пусть $X = I$. В качестве λ возьмем все конечные объединения одноточечных множеств и множеств вида $[0, \alpha] \cup [1 - \alpha, 1]$, где $0 < \alpha < 1/2$. Тогда λ -открытая топология строго сильнее λ - τ_0 -топологии, так как множество $A = \langle [0, 1/4] \cup [3/4, 1], \mathbb{R} \setminus [0; 3/10] \cup [7/10; 1] \rangle$ открыто в $C^\lambda(X)$, но не является таковым в $C_{\tau_0}^\lambda(X)$. В самом деле, рассмотрим функцию $f(x) \equiv x$; пусть $Of = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$ — ее произвольная базисная окрестность в $C_{\tau_0}^\lambda(X)$. Тогда если F_i бесконечно, то оно содержит одновременно точки 0 и 1, поэтому U_i содержит $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, а будучи интервалом, содержит и весь образ $f(X)$. В интервале $(0, 1/4)$ найдется точка $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^n \{F_i \mid F_i \text{ конечно}\}$. Тогда любая непрерывная функция g , удовлетворяющая условиям $g|_{F_i} \equiv f|_{F_i}$ для всех конечных F_i , $g(X) \subseteq [0, 1]$ и $g(x_0) = 1/2$, лежит в $Of \setminus A$, что завершает доказательство.

Пусть теперь τ_1 и τ_2 — две различные базы $\mathbb{R}$. Для каких семейств λ топологии λ - τ_1 и λ - τ_2 совпадут? Частичный ответ на этот вопрос дан в [19], где доказано, что если λ — сеть из компактов, содержащая вместе с каждым своим элементом все его замкнутые подмножества, то λ - τ_1 -топология одна и та же для любой базы τ . Кроме того, справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. *Если λ состоит из связных подмножеств X , то топологии $C^\lambda(X)$ и $C_{\tau_0}^\lambda(X)$ совпадают.*

Доказательство. Очевидно, что топология $C^\lambda(X)$ не слабее топологии $C_{\tau_0}^\lambda(X)$. Покажем, что для любого $F \in \lambda$ и любого открытого в $\mathbb{R}$ множества U множество $\langle F, U \rangle$ открыто в $C_{\tau_0}^\lambda(X)$. Для всякой функции $f \in \langle F, U \rangle$ множество $f(F)$ связно и лежит в U , поэтому в U найдется интервал U_1 , содержащий $f(F)$. Но тогда $f \in \langle F, U_1 \rangle \subseteq \langle F, U \rangle$, поэтому топология $C_{\tau_0}^\lambda(X)$ в свою очередь не слабее топологии $C^\lambda(X)$. Теорема доказана. $\square$

Теперь зафиксируем семейство τ и зададимся вопросом совпадения λ — τ -топологий при различных семействах λ . Справедливы следующие аналоги теорем 2.1–2.3 (причем их доказательство почти не меняется, достаточно в качестве открытых подмножеств $\mathbb{R}$ выбирать элементы τ).

Теорема 6.2. *Если λ_1 является базисом λ , то для любого семейства τ топологии пространств $C_\tau^\lambda(X)$ и $C_\tau^{\lambda_1}(X)$ совпадают.*

Теорема 6.3. *Пусть λ состоит из связных компактных множеств, и $\lambda_1 \subseteq \lambda$. Тогда для любого семейства τ $C_\tau^{\lambda_1}(X) = C_\tau^\lambda(X)$ тогда и только тогда, когда λ_1 — базис λ .*

Теорема 6.4. *Пусть λ состоит из нульмерных компактов и $\lambda_1 \subseteq \lambda$. Тогда для любого семейства τ открытых подмножеств числовой прямой $C^\lambda(X) = C_\tau^{\lambda_1}(X)$ тогда и только тогда, когда λ_1 базис λ .*

Для пространства $C_{\tau_0}^\lambda$ теорему 6.2 можно обратить.

Теорема 6.5. *Пусть λ состоит из компактных множеств X , $\lambda_1 \subseteq \lambda$ и τ — семейство интервалов (ограниченных или не ограниченных). Тогда $C_\tau^\lambda(X) = C_\tau^{\lambda_1}(X)$ в том и только том случае, когда λ_1 — базис λ .*

Доказательство. В силу теоремы 6.2 достаточно показать, что совпадение λ_1 - τ и λ - τ топологии влечет, что λ_1 — базис λ . Пусть это не так, т.е. найдется элемент F семейства λ и его окрестность OF такие, что какое бы конечное покрытие F элементами λ_1 мы ни взяли, оно не будет содержаться целиком в OF . Возьмем отличный от $\mathbb{R}$ элемент $U \in \tau$. Можно полагать, что $0 \notin U$ и $1 \in U$. Рассмотрим функцию f , равную 1 на F , 0 на дополнении до OF и удовлетворяющую при всех $x \in X$ неравенству $0 \leq f(x) \leq 1$. Так как $\langle F, U \rangle$ — ее окрестность и в силу совпадения топологи

найдутся такие $F_1, F_2, \dots, F_n$ из λ_1 и такие $U_1, U_2, \dots, U_n$ из τ , что $f \in \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle \subseteq \langle F, U \rangle$. Пусть $A = \{i \mid F_i \subseteq OF\}$. Тогда $\bigcup_{i \in A} F_i \not\subseteq F$. Пусть $x_0 \in F \setminus \bigcup_{i \in A} F_i$. Рассмотрим функцию $\tilde{g} \in C(X)$, равную 0 в точке x_0 , 1 на $\bigcup_{i \in A} F_i$ и такую, что $0 \leq \tilde{g}(x) \leq 1$ при всех $x \in X$. Тогда функция $g = f\tilde{g}$ не лежит в $\langle F, U \rangle$ (так как $g(x_0) = 0$), но при всех $i \leq n$ имеем $g(F_i) \subseteq U_i$. В самом деле, если $i \in A$, то $g|_{F_i} \equiv f|_{F_i}$. Если же $i \notin A$, то

$$U_i \supseteq \left[0; \max_{x \in F_i} \{f(x)\}\right] \supseteq \left[0; \max_{x \in F_i} \{g(x)\}\right].$$

Теорема доказана. $\square$

Перейдем к рассмотрению вопросов, связанных с отображением вычисления $\phi : C(X) \times X \rightarrow \mathbb{R}$, где $\phi(f, x) = f(x)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.6. *Для любого семейства λ , если существует такая точка $x_0 \in X$, что отображение $\phi_{x_0} : C_\tau^\lambda(X) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно, то τ — база $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Предположим, что существуют точка $y \in \mathbb{R}$ и ее окрестность U такие, что если некоторый элемент τ содержит y , то он пересекается с $R \setminus U$. В силу непрерывности ϕ_{x_0} множество $\phi_{x_0}^{-1}(U)$ открыто в $C_\tau^\lambda(X)$ и содержит функцию $f_y \equiv y$. Пусть $\bigcap_{i=1}^n \langle F_i, V_i \rangle$ — базисная окрестность f_y в $C_\tau^\lambda(X)$, содержащаяся в $\phi_{x_0}^{-1}(U)$. Положим $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ и $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$. Очевидно, $y \in V$, поэтому $V \cap (R \setminus U) \neq \emptyset$. Пусть $z \in V \cap (R \setminus U)$. Тогда $f_z \in \langle F, V \rangle \setminus \phi_{x_0}^{-1}(U)$. Противоречие. $\square$

Следствие 6.7. *Если отображение вычисления раздельно непрерывно, то τ — база $\mathbb{R}$.*

Также верны соответствующие аналоги теорем 3.1, 3.4, 3.5 и следствий 3.2, 3.3. В случае $\tau = \tau_0$ находятся следующие критерии раздельной непрерывности и непрерывности отображения вычисления.

Теорема 6.8. *Если λ состоит из замкнутых в X множеств, а τ — база из интервалов (ограниченных или неограниченных), то отображение вычисления $\phi : C_\tau^\lambda(X) \times X \rightarrow \mathbb{R}$ раздельно непрерывно тогда и только тогда, когда λ — сеть.*

Доказательство. Необходимость немедленно следует из следствия 3.3.

Достаточность. Пусть точка $x_0 \in X$ и ее окрестность Ox_0 таковы, что если некоторое $F \in \lambda$ содержит x_0 , то $F \not\subseteq Ox_0$. Покажем, что ϕ_{x_0} — разрывная функция. Пусть функция $f \in C_\tau^\lambda(X)$ такова, что $f^{-1}(0) \supseteq X \setminus Ox_0$, $0 \leq f(x) \leq 1$ при всех $x \in X$ и $f(x_0) = 1$. Ясно, что $f \in \phi_{x_0}^{-1}(0, 2)$. Пусть $Of = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, (a_i, b_i) \rangle$ — произвольная окрестность f в $C_\tau^\lambda(X)$. Тогда для некоторого $F_i \ni x_0$, во-первых, $(a_i, b_i) \ni \{1\}$, а во-вторых, $F_i \cap (X \setminus Ox_0) \neq \emptyset$, откуда $(a_i, b_i) \ni \{0\}$. Но тогда $(a_i, b_i) \supseteq [0; 1]$. Множество $M = \cup \{F_i : F_i \not\subseteq Ox_0\}$ замкнуто и не содержит x_0 , поэтому найдется функция $g \in C_{\tau_0}^\lambda(X)$ такая, что $g(M) = 1$, $g(x_0) = 0$ и $0 \leq g \leq 1$. Легко видеть, что функция $\tilde{g} = gf$ содержится в Of , а так как $\tilde{g}(x_0) = 0$, $\tilde{g} \notin \phi_{x_0}^{-1}(0, 2)$, что доказывает разрывность функции ϕ_{x_0} . $\square$

Теорема 6.9. *Пусть семейство λ состоит из замкнутых подмножеств пространства X , а τ — база $\mathbb{R}$, состоящая из интервалов. Тогда отображение вычисления $\phi : C_\tau^\lambda(X) \times X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно в том и только том случае, когда для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ox найдется $F \in \lambda$ такой, что $x \in \text{int } F \subseteq F \subseteq Ox$.*

Доказательство. Достаточность следует из следствия 3.6. Докажем необходимость. Пусть $x_0 \in X$ — произвольная точка и Ox_0 — ее произвольная окрестность. Пусть функция $f \in C(X, I)$ такова, что $f(x_0) = 1$, $f|_{X \setminus Ox_0} \equiv 0$. В силу непрерывности ϕ найдутся окрестность V точки x_0 и окрестность Of функции f такие, что при всех $g \in Of$ и всех $x \in V$ $g(x) \geq 1/2$. Ясно, что $V \subseteq Ox_0$. Пусть $Of = \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle$, $T = \bigcup \{F_i : i \leq n \text{ и } F_i \subseteq Ox_0\}$. Достаточно показать, что $x_0 \in \text{int } T$. Пусть

это не так; положим $V_1 = V \cap (X \setminus \bigcup \{F_i : i \leq n \text{ и } F_i \not\ni x_0\})$. В силу замкнутости всех F_i получаем, что V_1 — окрестность x_0 , а так как $x_0 \notin \text{int } T$, найдется точка $x_1 \in V_1 \setminus T$. Пусть $S = \bigcup \{F_i : i \leq n \text{ и } F_i \not\ni x_1\}$. Тогда S замкнуто и $T \subseteq S$. Найдется функция $\tilde{g} \in C(X, I)$ такая, что $\tilde{g}(S) = 0$, $\tilde{g}(x_1) = 1$. Тогда $g = f\tilde{g} \in Of$. Действительно, функция g совпадает с f на тех F_i , которые не содержат x_1 , а если некоторое F_i содержит x_1 , то $F_i \ni x_0$ и $F_i \not\subseteq T$, а значит $F_i \cap (X \setminus Ox_0) \neq \emptyset$. Но тогда U_i содержит одновременно точки 0 и 1, а будучи интервалом, содержит и весь отрезок $[0; 1]$, в котором находятся все значения функции g . С другой стороны, $g(x_1) = 0$ — противоречие с выбором V и Of . $\square$

Замечание. Как показывает следующий пример, критерий, приведенный в теореме 6.9, не может быть заменен на условие: внутренности элементов λ образуют базу, а само λ является сетью.

Пример. Пусть $X = I$, λ состоит из точки $x = 0$, всевозможных отрезков $[a, b]$, где $a > 0$, и всевозможных множеств вида $[0, a] \cup \{1\}$ (а также всех конечных объединений перечисленных множеств). Очевидно, что в окрестности нуля $[0; 1/2)$ не лежит никакой элемент λ , содержащий 0 в своей внутренности, поэтому в силу теоремы 6.9 отображение вычисления $\phi : C_{\tau_0}^\lambda(X) \times X \rightarrow R$ разрывно. Легко, однако, видеть, что λ является сетью, и что внутренности его элементов образуют стандартную базу отрезка.

Перейдем к рассмотрению аксиом отделимости. Прежде всего отметим следующие факты.

Теорема 6.10. Пусть $\lambda_1 \subseteq \lambda_2$, $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Тогда $C_{\tau_2}^{\lambda_2}(X)$ уплотняется на $C_{\tau_1}^{\lambda_1}(X)$ (в частности, $C^\lambda(X)$ уплотняется на $C_\tau^\lambda(X)$ при любом τ).

Доказательство. Искомым уплотнением является тождественное отображение. $\square$

Следствие 6.11. Пусть λ и τ таковы, что $C_\tau^\lambda(X)$ — хаусдорфово пространство (T_1 -пространство, T_0 -пространство). Тогда $C^\lambda(X)$ также хаусдорфово пространство (T_1 -пространство, T_0 -пространство).

Естественно ввести следующие понятия.

Определение. Назовем τ T_2 -семейством (T_1 -семейством), если для любых двух различных точек y_1 и y_2 из R найдутся V_1, V_2 из τ такие, что $V_i \ni y_i$ и $V_1 \cap V_2$ пусто ($V_1 \not\ni y_2, V_2 \not\ni y_1$). Аналогично, τ — T_0 -семейство, если для любых $y_1 \neq y_2 \in R$ найдется элемент из τ , содержащий ровно одну из точек y_1, y_2 .

Теорема 6.12. Если $C_\tau^\lambda(X)$ — T_i -пространство, $0 \leq i \leq 2$, то τ — T_i -семейство.

Доказательство. Докажем теорему для случая $i = 1$ (остальные случаи аналогичны). Пусть $C_\tau^\lambda(X)$ — T_1 -пространство. Возьмем любые две точки $y_1 \neq y_2$ из R . Так как $f_{y_1} \neq f_{y_2}$, найдутся окрестности этих функций O_1 и O_2 такие, что $f_{y_1} \notin O_2$ и $f_{y_2} \notin O_1$. Можно полагать $O_1 = \langle F_1, U_1 \rangle$, где $y_1 \in U_1 \in \tau$, и $O_2 = \langle F_2, U_2 \rangle$, где $y_2 \in U_2 \in \tau$. Так как $f_{y_2} \notin O_1$, то $y_2 \notin U_1$. Аналогично, $y_1 \notin U_2$. Множества U_1 и U_2 — искомые. $\square$

Из теоремы 6.12 видно, что для пространств $C_\tau^\lambda(X)$ все аксиомы T_0 – T_2 различны. Для хаусдорфовости пространства $C_\tau^\lambda(X)$ имеется следующий критерий.

Теорема 6.13. Пространство $C_\tau^\lambda(X)$ хаусдорфово если и только если λ — π -сеть, а τ — T_2 -семейство.

Доказательство. Необходимость. Факт, что λ является π -сетью, следует из следствия 6.11 и теоремы 4.1, а факт, что τ является T_2 -семейством, — из теоремы 6.12.

Достаточность. Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 4.1 (импликация (в) $\Rightarrow$ (а)), только в качестве U_i надлежит выбирать элементы из τ . $\square$

Рассмотрим T_1 -аксиому. Сопоставляя теоремы 4.1 и 6.12 и следствие 6.11, получим следующий результат.

Теорема 6.14. Если $C_\tau^\lambda(X)$ — T_1 -пространство, то λ — π -сеть, а τ — T_1 -семейство.

Обратить теорему 6.14 нельзя, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$ и $\{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ — счетная база $\mathbb{R}$. Построим по индукции множества A_i ($i \in \mathbb{N}$) так, чтобы

- 1) для всех i $A_i \subseteq V_i \cap \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ — множество рациональных точек числовой прямой),
- 2) A_i и A_j не пересекались при $i \neq j$,
- 3) $|A_i| = 2$ для любого i .

В качестве A_1 возьмем любое двухточечное множество из $V_1 \cap \mathbb{Q}$. Пусть множества $A_1, \dots, A_{n-1}$ построены. Зафиксируем любые две точки q_1, q_2 из $(V_n \cap \mathbb{Q}) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ и положим $A_n = \{q_1, q_2\}$.

Построенное семейство множеств, очевидно удовлетворяет условиям (1)–(3).

Пусть λ состоит из всех конечных объединений A_i . Очевидно, λ является π -сетью.

Зафиксируем некоторое иррациональное число r_0 . Рассмотрим семейство Ω всех конечных подмножеств $\mathbb{R}$, обладающих тем свойством, что $F \in \Omega$ пересекается с множеством A_i ($i \in \mathbb{N}$) тогда и только тогда, когда F пересекается с множеством $A_i + r_0 = \{x + r_0 | x \in A_i\}$. Положим $\tau = \{\mathbb{R} \setminus F | F \in \Omega\}$. Очевидно, τ является T_1 -семейством, замкнутым относительно конечных пересечений. Покажем, что $C_\tau^\lambda(X)$ не является T_0 -пространством. Для всех $x \in X$ положим $f(x) = x$, $g(x) = x + r_0$.

Теперь для всякого $B = \bigcup_{i=1}^n A_{s_i}$ и любого $U \in \tau$ ($U = \mathbb{R} \setminus F$) имеем: $f \in \langle B, U \rangle$ тогда и только тогда, когда $f(B) = B \subseteq U$, т.е. B и F не пересекаются. Но это равносильно тому, что не пересекаются $B + r_0$ и F , что возможно тогда и только тогда, когда $g(B) = B + r_0 \subseteq U$, т.е. $g \in \langle B, U \rangle$. Итак, у функций f и g окрестности в $C_\tau^\lambda(X)$ одни и те же.

Следующие две теоремы дают два важных случая, при которых теорема, обратная к теореме 6.14, все же верна.

Теорема 6.15. Пусть λ — π -сеть X , а τ — открытое покрытие $\mathbb{R}$, обладающее следующим свойством: для любого элемента $V \in \tau$ и для всякой точки $y \in V$ множество $V \setminus \{y\}$ также принадлежит τ . Тогда $C_\tau^\lambda(X)$ — T_1 -пространство.

Доказательство. Возьмем любые различные непрерывные функции f_1 и f_2 . Пусть точка x такова, что $f_1(x) \neq f_2(x)$ и пусть V_1, V_2 — непересекающиеся окрестности точек $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Пусть кроме того U_1, U_2 — элементы τ такие, что $f_i(x) \in U_i$ ($i = 1, 2$). Положим $Ox = f_1^{-1}(V_1) \cap f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \cap f_2^{-1}(U_2)$ и пусть $F \in \lambda$ лежит в Ox . Возьмем любую точку $t \in F$. Тогда $f_1(t) \notin f_2(F)$ и $f_2(t) \notin f_1(F)$. Рассмотрим множество $\langle F, U_1 \setminus f_2(t) \rangle$. Оно открыто в $C_\tau^\lambda(X)$ и содержит f_1 , но не содержит f_2 . Аналогично, $\langle F, U_2 \setminus f_1(t) \rangle$ — окрестность f_2 , не содержащая f_1 . $\square$

Определение. Назовем семейство подмножеств λ топологического пространства X *почти сетью*, если в X существует всюду плотное множество A такое, что для любой точки $x \in A$ и любой ее окрестности Ox найдется элемент $F \in \lambda$ такой, что $x \in F \subseteq Ox$.

Теорема 6.16. Пусть τ — T_1 -семейство, а λ — почти сеть. Тогда $C_\tau^\lambda(X)$ — T_1 -пространство.

Доказательство. Возьмем любые различные непрерывные функции f_1 и f_2 . Найдется точка $x_0 \in A$ такая, что $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$. Пусть $U \in \tau$ таково, что $f_1(x_0) \in U$, $f_2(x_0) \notin U$. Положим $Ox_0 = f_1^{-1}(U)$ и пусть $F \in \lambda$ таково, что $x_0 \in F \subseteq Ox_0$. Тогда $f_1 \in \langle F, U \rangle$, но $f_2 \notin \langle F, U \rangle$, так как $f_2(x_0) \notin U$. Аналогично строится окрестность f_2 , не содержащая f_1 . $\square$

Перейдем к T_0 -аксиоме. Аналог теоремы 4.3 выглядит следующим образом.

Теорема 6.17. $C_\tau^\lambda(X)$ является T_0 -пространством в том и только том случае, когда для любых различных функций f и g из $C(X)$ найдутся элемент F семейства λ и V из τ такие, что V содержит ровно одно из множеств $f(F)$ и $g(F)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть f и g — произвольные различные непрерывные функции, $F \in \lambda$ и $V \in \tau$ таковы, что $f(F) \subseteq V$, $g(F) \not\subseteq V$ (случай $g(F) \subseteq V$, $f(F) \not\subseteq V$ аналогичен). Тогда $\langle F, V \rangle$ — окрестность f , не содержащая g .

Достаточность. Пусть f и g — различные непрерывные функции. Существует окрестность одной из них, которая не содержит другую. Пусть $f \in \bigcap_{i=1}^n \langle F_i, U_i \rangle \not\subseteq g$, где все F_i — элементы λ , U_i — элементы τ . Найдется номер i_0 такой, что $g \notin \langle F_{i_0}, U_{i_0} \rangle$. Тогда F_{i_0} и U_{i_0} — искомые. $\square$

Следствие 6.18. Если тело λ не плотно в X , то для любого семейства τ пространство $C_\tau^\lambda(X)$ не является T_0 -пространством.

Доказательство. Пусть x — произвольная точка из $X \setminus \left[\bigcup_{F \in \lambda} F \right]$. Существует непрерывная функция f , принимающая значение 1 в точке x и равная нулю на всех элементах λ . Ясно, что для любого $F \in \lambda$ $f(F) = f_0(F) = 0$. Остается применить теорему 6.17. $\square$

Следствие 6.18 обратить нельзя.

Пример. Пусть $X = I$, λ состоит из одного элемента — всего пространства X . Тогда тело λ плотно в X , но условие теоремы 6.17 не выполняется (например, для функций $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$).

Очевидно также следующее утверждение.

Теорема 6.19. Пусть τ — T_0 -семейство, а λ — почти сеть. Тогда $C_\tau^\lambda(X)$ — T_0 -пространство.

Следствие 6.20. Если λ — сеть, то следующие условия эквивалентны:

- (а) $C_\tau^\lambda(X)$ — T_0 -пространство;
- (б) τ — T_0 -семейство.

Вопросы регулярности и полной регулярности пространства $C_\tau^\lambda(X)$ будем рассматривать только для случая $\tau = \tau_0$. В этом случае теорема 4.7, как легко убедиться, остается справедливой, причем ее доказательство почти не меняется. Кроме того, если λ состоит из компактных множеств, то для $C_{\tau_0}^\lambda(X)$ существует критерий регулярности в точке f_0 .

Теорема 6.21. Если λ состоит из компактных множеств, то пространство $C_{\tau_0}^\lambda(X)$ регулярно в точке f_0 в том и только том случае, когда для всякого $F_0 \in \lambda$ найдется содержащее его множество $\Phi_1 \in \lambda$ такое, что для всякого открытого в X множества U , пересекающегося с F_0 , существует множество $\Phi_2 \in \lambda$, лежащее в U и пересекающееся с Φ_1 .

Доказательство. Необходимость. Возьмем любое множество $F_0 \in \lambda$ и любой интервал $(\alpha; \beta)$ такой, что $\alpha < 0 < \beta$. Достаточно найти окрестность точки f_0 , лежащую с замыканием в $\langle F_0, (\alpha, \beta) \rangle$. Возьмем множество $\Phi_1 \in \lambda$, о котором говорится в условии, и пусть V — некоторый интервал, содержащий 0 и лежащий с замыканием в (α, β) . Тогда $\langle \Phi_1, V \rangle$ — искомая окрестность. Покажем это. Пусть g — произвольная непрерывная функция, не лежащая в $\langle F_0, (\alpha, \beta) \rangle$, и пусть точка $x_0 \in F_0$ такова, что $g(x_0) \notin (\alpha, \beta)$. Без ограничения общности $g(x_0) > \beta$. Пусть число β_1 лежит между $g(x_0)$ и β . Тогда множество $U = g^{-1}((\beta_1, +\infty))$ — окрестность точки x_0 и, следовательно, пересекается с F_0 . По условию, найдется элемент $\Phi_2 \in \lambda$, содержащийся в U и пересекающийся с Φ_1 . Пусть $x_1 \in \Phi_1 \cap \Phi_2$. Множество $Og = \langle \Phi_2, (\beta_1, +\infty) \rangle$ есть окрестность точки g , причем для всякой функции $h \in Og$ имеем $h(x_1) > \beta_1 > \beta$, так что $h \notin \langle \Phi_1, (\alpha, \beta) \rangle$ и тем более $h \notin \langle \Phi_1, V \rangle$. Значит, Og и $\langle \Phi_1, V \rangle$ не пересекаются, т.е. $g \notin [\langle \Phi_1, V \rangle]$ и $[\langle \Phi_1, V \rangle] \subseteq \langle F_0, (\alpha, \beta) \rangle$, что и требовалось.

Достаточность. Возьмем любое множество $F_0 \in \lambda$ и пусть $U_0 = (-1; 1)$. В силу регулярности у точки f_0 существует окрестность Of_0 , лежащая с замыканием в $\langle F_0, U_0 \rangle$. Можно полагать $Of_0 = \langle F, V \rangle$, где V — интервал, содержащийся в U_0 . Положим $\Phi_1 = F_0 \cup F$. Тогда $f_0 \in \langle \Phi_1, V \rangle \subseteq Of_0$, поэтому $[\langle \Phi_1, V \rangle] \subseteq [Of_0] \subseteq \langle F_0, U_0 \rangle$. Зафиксируем произвольное открытое в X множество U , пересекающееся с F_0 , и пусть $x_0 \in U \cap F_0$. Существует функция $g \in C(X)$ такая, что $g(x_0) = 2$, $g(X \setminus U) = 0$ и $g(x) \geq 0$ для всех $x \in X$. Ясно, что $g \notin \langle F_0, U_0 \rangle$, поэтому $g \notin [\langle \Phi_1, V \rangle]$; следовательно, у точки g имеется окрестность Og , не пересекающаяся с множеством $\langle \Phi_1, V \rangle$.

Пусть $Og = \bigcap_{i=1}^k \langle B_i, V_i \rangle$. Существует номер i_0 такой, что $B_{i_0} \not\subseteq U$ (в противном случае все $V_i \ni 0$ и $f_0 \in Og$ — противоречие). Пусть $B_1, B_2, \dots, B_{k_0} \subseteq U$, $B_{k_0+1}, \dots, B_k \not\subseteq U$. Положим $\Phi_2 = \bigcup_{i=1}^{k_0} B_i$. Ясно, что $\Phi_2 \subseteq U$. Покажем, что Φ_2 пересекается с Φ_1 . Пусть это не так; тогда найдется $\phi \in C(X)$ такая, что $\phi(\Phi_2) = 1$, $\phi(\Phi_1) = 0$ и $1 \geq \phi(x) \geq 0$ для всех $x \in X$. Положим $g^* = g\phi$. Тогда $g^*(\Phi_1) = 0$; поэтому $g^* \in \langle \Phi_1, V \rangle$. На множестве Φ_2 функции g и g^* совпадают, поэтому $g^* \in \bigcap_{i=1}^{k_0} \langle B_i, V_i \rangle$. Наконец, если $x \in B_i$ при некотором $i > k_0$, то, поскольку $g(x) \geq g^*(x) \geq 0$, имеем $V_i \supseteq [0, g(x)] \supseteq [0, g^*(x)]$. Следовательно, $g^*(x) \in V_i$, поэтому $g^* \in \bigcap_{i=k_0+1}^k \langle B_i, V_i \rangle$. Но тогда $g^* \in Og$. Противоречие с тем, что множества Og и $\langle \Phi_1, V \rangle$ не пересекаются. $\square$

Замечание. Доказательство теоремы 6.21 не проходит для семейств λ , состоящих из R -компактных множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. — М.: Мир, 1986.
2. Архангельский А. В. Пространства отображений и кольца непрерывных функций// Итоги науки и техники. Фундаментальные направления. — М.: ВИНТИ. — 51. — С. 81–172.
3. Асанов М. О. Пространство непрерывных отображений/ Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. — Свердловск, 1980.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
5. Arens R., Dugundji J. Topologies for functions spaces// Pac. J. Math. — 1951. — 1. — С. 5–31.
6. Ascoli G. Le curve limite di una varieta data di curve// Mem. Accad. Lincei. — 1883. — 18. — С. 521–586.
7. Eclund A. D. The fine topology and other topologies on $C(X, Y)$ / Dissertation. Virginia Polytechnic Institute and State University. — Blacksburg, Virginia, 1978.
8. Fox R. H. On topologies for fuction spaces// Bull. Amer. Math. Soc. — 1945. — 51. — С. 429–432.
9. Frechet M. Sur quelques points du calcul fonctionnel// Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1906. — С. 1–74.
10. Hadamard J. Sur certaines applications possibles de la theorie des ensembles// Verhandle. Eastern Intern Math. Kongress. — Leipzig: B. G. Teubner, 1898.
11. Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions, I// Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — 48. — С. 54–99.
12. Isbell J. R. Uniform spaces// Math Surv. — Amer. Math. Soc., 1964. — 12.
13. Jackson J. R. Spaces of mappings on topological products with appliances to homotopy theory// Proc. Amer. Math. Soc. — 1952. — 3. — С. 327–333.
14. Hola L., McCoy R. A. Compactness in the fine and related topologies// Topology Appl. — 2001. — 109. — С. 183–190.
15. Kelley J. L. General topology. — New York: Van Nostrand, 1955.
16. Krikorian N. A note concerning the fine topology on function spaces// Compos. Math. — 1969. — 21. — С. 343–348.
17. McCoy R. A. The topology on function spaces// Int. J. Math. Math. Sci. — 1986. — 9. — С. 417–424.
18. Di Maio G., Hola L., Holy D., McCoy R. A. Topologies on the space of continuous functions// Topology Appl. — 1998. — 86. — С. 105–122.
19. McCoy R. A., Ntantu I. Topological properties of spaces of continuous functions/ Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1988. — 1315.
20. Morita K. Note of mapping spaces// Proc. Japon Acad. — 1956. — 32. — С. 671–675.
21. Naimpally S. A. Graph topology for function spaces// Trans. Amer. Math. Soc. — 1966. — 123. — С. 267–272.

22. *Poppe H.* Über Graphen topologien für Abbildungsräume, I// Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. — 1966. — 15. — С. 71–80.
23. *Poppe H.* Über Graphen topologien für Abbildungsräume, II// Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Nactr. — 1967. — 38. — С. 89–96.

С. Э. Нохрин

Институт математики и механики УрО РАН

E-mail: nok@imm.uran.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕМЕЙСТВ МОНОТОННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НАД ТИХОНОВСКИМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

© 2005 г. Д. С. ОХЕЗИН

Аннотация. Основным объектом исследования в данной работе является пространство всех монотонных непрерывных функций $CM(X)$ над связным тихоновским пространством X , наделённое топологией поточечной $(CM_p(X))$ и равномерной сходимости $(CM(X))$. Техническим вопросам о сужении и продолжении монотонных функций посвящена глава 2. Устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых $CM(X)$ разделяет точки X , и условия, при которых $CM(X)$ содержит только константы (глава 3). Изучается линейная структура $CM(X)$ и описываются все линейные подпространства $CM(X)$ для некоторого класса пространств X (глава 4). В главе 5 устанавливаются условия, при которых $CM(X)$ замкнуто, нигде не плотно в $C_p(X)$ и $C(X)$. Вопросу о метризуемости $CM_p(X)$ посвящена глава 6, в которой найдены необходимые и достаточные условия для различных классов пространств X . В главе 7 устанавливаются критерии σ -компактности и свойства Гуревича для $CM_p(X)$.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Основные понятия и определения	130
2. Сужение и продолжение монотонных функций	135
3. Функционально m -отделимые и функционально m -вырожденные пространства	140
4. Линейная структура $CM(X)$	148
5. Условия на X , при которых $CM(X)$ замкнуто, нигде не плотно в $C_p(X)$ и $C(X)$	150
6. Метризуемость $CM_p(X)$	154
7. Пространства Гуревича, локальная компактность и σ -счетная компактность $CM_p(X)$	157
Список литературы	161

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Понятие связности топологического пространства, выражающее интуитивное понятие непрерывности точечного множества, по сути возникло еще в работах К. Жордана в XIX в. Тот факт, что для функции действительного аргумента условие монотонности (т.е. невозрастания или неубывания относительно порядка) эквивалентно тому, что прообраз всякого связного подмножества связан, позволяет определить монотонность в топологических терминах. Впервые класс монотонных отображений был введен Уайберном в [17] (см. также [18, 19]). Различные обобщения монотонности изучались в работах Я. Харатоника, В. Харатоника ([11–13]). В работе Дийкстра и ван Милла [15] рассматривался ряд вопросов, связанных с продолжением монотонных отображений на компактификации. Монотонные отображения привели к плодотворным результатам в теории размерности (Бинг, Келдыш) и в теории континуумов (см. [16]).

Основным объектом исследования в данной работе является пространство всех монотонных непрерывных функций $CM(X)$ над связным тихоновским пространством X . Естественно рассматривать $CM(X)$ как подпространство пространства $C_p(X)$ непрерывных функций на X с топологией поточечной сходимости и как подпространство пространства $C(X)$ непрерывных функций с топологией равномерной сходимости. Изучению топологических и алгебраических свойств $C_p(X)$ и $C(X)$ посвящено большое число исследований как в России, так и за рубежом.

На топологическом семинаре профессора Н. В. Величко в ИММ УрО РАН были сформулированы следующие группы вопросов.

1. Насколько может быть «большим» или «малым» пространство $CM(X)$? В этой связи появилось определение функционально m -отделимого пространства, т.е. пространства, у которого $CM(X)$ разделяет точки, и функционально m -вырожденного пространства, т.е. пространства у которого $CM(X)$ состоит только из констант.
2. Какова линейная структура $CM(X)$? Что представляют из себя линейные подпространства $CM(X)$?
3. Как расположено $CM(X)$ в пространствах $C_p(X)$ и $C(X)$? В каком случае оно замкнуто в $C_p(X)$ и $C(X)$, в каком случае нигде не плотно?
4. Какова связь между топологическими свойствами пространства X и пространства $CM(X)$, наделенного топологией поточечной сходимости (обозначаемого как $CM_p(X)$)?

На протяжении всей работы $\mathbb{R}$ обозначает числовую прямую с естественной топологией, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел с дискретной топологией, $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, $\mathbb{I}$ — отрезок $[0; 1]$ числовой прямой, $(a; b)$ — открытый интервал с концами a и b . Отметим, что всякое связное невырожденное подмножество $\mathbb{R}$ есть промежуток, т.е. одно из следующих множеств:

$$(-\infty; a), \quad (-\infty; a], \quad (b; +\infty), \quad [b; +\infty), \quad (-\infty; +\infty), \quad (a; b), \quad (a; b], \quad [a; b), \quad [a; b].$$

Под *функцией* будет пониматься непрерывное отображение в $\mathbb{R}$. Все топологические пространства, если не оговорено противное, предполагаются бесконечными связными тихоновскими и именуются просто пространствами. Все базовые топологические понятия и определения соответствуют монографиям [3, 4]. Замыкание множества E мы будем обозначать через $\overline{E}$, границу через $\text{Fr}(E)$, внутренность через $\text{Int}(E)$, семейство всех окрестностей точки x через $\mathcal{N}(x)$. Гомеоморфность пространств X и Y обозначается так: $X \approx Y$. Символ $\emptyset$ обозначает пустое множество.

Определение. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *монотонным*, если для всякой точки $y \in Y$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ связан.

Определение. Функция f называется *монотонной*, если для всякой точки $y \in \mathbb{R}$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ связан.

Покажем, что это определение эквивалентно тому, что прообраз всякого связного подмножества связан.

Предложение 1.1. Для непрерывной функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, определенной на связном пространстве X , следующие условия эквивалентны:

- 1) для всякого связного множества $C \subset \mathbb{R}$ полный прообраз $f^{-1}(C)$ связан;
- 2) для всякой точки $y \in \mathbb{R}$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ связан.

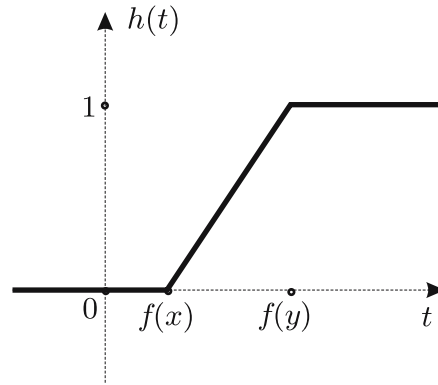
Доказательство. Очевидно, достаточно доказать только импликацию (2) $\Rightarrow$ (1). Если $f \equiv \text{const}$, то теорема доказана. Так как $f(X)$ связно и всякое связное подмножество прямой есть промежуток, пересечение промежутков есть промежуток, то достаточно доказать, что прообраз любого промежутка из образа $f(X)$ связан. Поскольку любой промежуток C можно представить в виде $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i; b_i]$, $[a_i; b_i] \subset [a_{i+1}; b_{i+1}]$, то $f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}([a_i; b_i])$, и если доказать, что прообраз любого отрезка связан, то, используя тот факт, что объединение возрастающей последовательности связных множеств связно, получим, что $f^{-1}(C)$ связан.

Пусть $[a, b] \subset f(X)$, $a < b$, $A = f^{-1}(a)$, $B = f^{-1}(b)$, $D = f^{-1}([a, b])$. Предположим, что замкнутое множество D не связно, т.е. $D = E \cup F$, $E \cap F = \emptyset$, где E и F непусты и замкнуты в D , а значит и в X . Отметим, что $A \subset D$, $B \subset D$.

Если $A \cap E \neq \emptyset$ и $B \cap E \neq \emptyset$, то $A \cap F = \emptyset$ и $B \cap F = \emptyset$, поскольку A и B связны. Тогда $X = (f^{-1}((-\infty, a]) \cup E \cup f^{-1}([b, +\infty))) \cup F$, т.е. представляется в виде объединения двух замкнутых непустых дизъюнктивных множеств; противоречие со связностью X .

Если $A \cap E \neq \emptyset$ и $B \cap F \neq \emptyset$, то $A \cap F = \emptyset$ и $B \cap E = \emptyset$, поскольку A и B связны. Тогда $X = (f^{-1}((-\infty, a]) \cup E) \cup (F \cup f^{-1}([b, +\infty)))$, т.е. представляется в виде объединения двух замкнутых непустых дизъюнктивных множеств; противоречие со связностью X .

Аналогично разбираются случаи, когда $A \cap F \neq \emptyset$, $B \cap F \neq \emptyset$ и когда $A \cap F \neq \emptyset$, $B \cap E \neq \emptyset$. Следовательно, предложение доказано. $\square$

Рис. 1. График функции h

Предложение 1.2. Если существует монотонная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, разделяющая точки $x, y \in X$: $f(x) \neq f(y)$, то существует монотонная функция g такая, что $g(X) = \mathbb{I}$, $g(x) = 0$, $g(y) = 1$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $f(x) < f(y)$. Рассмотрим следующую монотонную непрерывную функцию $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ее график изображен на рис. 1):

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq f(x), \\ \frac{t - f(x)}{f(y) - f(x)}, & \text{если } t \in (f(x); f(y)), \\ 1, & \text{если } t \geq f(y). \end{cases}$$

Положим $g(z) = h(f(z))$. Эта функция непрерывна и монотонна как композиция непрерывных монотонных функций, а также $g(x) = 0$, $g(y) = 1$, $g(X) = \mathbb{I}$. $\square$

Через $C(X)$ мы будем обозначать пространство всех непрерывных функций на X . Фундаментальная система окрестностей функции f в топологии равномерной сходимости задается следующим образом:

$$\mathcal{O}(f, \varepsilon) = \left\{ g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in X \right\},$$

где $\varepsilon > 0$. Будем обозначать соответствующее пространство функций, наделенное топологией равномерной сходимости, символом $C(X)$.

Фундаментальная система окрестностей функции f в топологии поточечной сходимости задается следующим образом:

$$\mathcal{O}(f, \varepsilon, x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{ g \in C(X) : |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

где $\varepsilon > 0$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Будем обозначать соответствующее пространство функций, наделенное топологией поточечной сходимости, символом $C_p(X)$.

Через $SM(X)$ мы будем обозначать семейство всех непрерывных монотонных функций на X . Будем обозначать соответствующие пространства функций, наделенные топологией равномерной и поточечной сходимости, символами $SM(X)$ и $SM_p(X)$ соответственно.

Функция $f \equiv 0$ обозначается через θ .

Если $Y \subset X$ и $\mathcal{F}(X)$ есть семейство функций на X , то через $\mathcal{F}(Y|X)$ будем обозначать семейство сужений на Y функций из $\mathcal{F}(X)$.

Определение. Пространство X называется *функционально m -отделимым* или, короче, *m -отделимым*, если семейство $SM(X)$ разделяет точки, т.е. для любых двух точек $x, y \in X$, $x \neq y$, найдется монотонная функция f такая, что $f(x) \neq f(y)$.

Определение. Пространство X называется *функционально m -вырожденным*, если семейство $SM(X)$ состоит только из констант, т.е. все монотонные функции являются постоянными на X .

Далее приведены определения известных понятий, используемые в работе.

Дугой $\widehat{ab}$ в пространстве X называется гомеоморфный образ отрезка $\psi(\mathbb{I})$, где $\psi : \mathbb{I} \rightarrow X$, $\psi(0) = a$, $\psi(1) = b$. В этом случае говорят, что дуга *соединяет точки a и b* .

Простой замкнутой кривой называется гомеоморфный образ окружности.

Пространство называется *локально дугообразно связным в точке x* , если для любой окрестности U точки x найдется окрестность V такая, что все точки из V можно соединить с точкой x дугами, целиком лежащими в U .

Пространство называется *локально дугообразно связным*, если оно локально дугообразно связно в каждой своей точке.

Пространство называется *дугообразно связным*, если любые две точки можно соединить дугой. Отметим, что всякое связное локально дугообразно связное пространство является дугообразно связным.

Отметим основные факты, касающиеся линейно упорядоченных пространств. Пусть $(X, <)$ — линейно упорядоченное множество. Множество X называется *плотно упорядоченным*, если для любых a, b , $a < b$, найдется c такое, что $a < c < b$. Множество называется *полным*, если любое ограниченное подмножество $A \subseteq X$ имеет верхнюю грань $\sup A$ и нижнюю грань $\inf A$. Линейный порядок порождает интервальную топологию $(X, \tau_<)$. Следующие предложения хорошо известны (см. [3]).

Предложение 1.3. *Пространство $(X, \tau_<)$ связно тогда и только тогда, когда $(X, <)$ — полное и плотно упорядоченное множество.*

Предложение 1.4. *Связное пространство $(X, \tau_<)$ компактно в том и только в том случае, когда в $(X, <)$ существуют максимальный и минимальный элементы.*

Предложение 1.5. *Пусть X — связное линейно упорядоченное пространство. Функция f монотонна тогда и только тогда, когда она не убывает или не возрастает относительно порядка на X .*

Теорема 1.6. *Пусть X — связное линейно упорядоченное топологическое пространство. Тогда пространство X функционально m -отделимо.*

Доказательство. Схема доказательства подобна доказательству классической леммы Урысона [3, теорема 1.5.10]. Рассмотрим две точки $a \in X$, $b \in X$, $a < b$. Построим по индукции систему интервалов $\{(a_n^k; b_n^k)\}_{n,k}$ и систему отрезков $\{F_n^k\}_{n,k}$ на $[a; b]$ и зададим значение функции f на каждом из интервалов. В силу предложения 1.3 можно выбрать a_1^1 и b_1^1 так, что $a < a_1^1 < b_1^1 < b$. Пусть $F_1^1 = [a; a_1^1]$, $F_1^2 = [b_1^1; b]$. Положим $f(x) = 1/2$ при $x \in (a_1^1; b_1^1)$.

На n -м шаге построим 2^{n-1} интервалов $(a_n^1; b_n^1), (a_n^2; b_n^2), \dots, (a_n^{2^{n-1}}; b_n^{2^{n-1}})$ и 2^n отрезков $F_n^1, F_n^2, \dots, F_n^{2^n}$ так, что

$$[a_n^k; b_n^k] \subset \text{Int}(F_{n-1}^k), \quad k = 1, 2, \dots, 2^{n-1},$$

$$F_n^{2^{k-1}} = F_{n-1}^k \cap (-\infty; a_n^k], \quad F_n^{2^k} = F_{n-1}^k \cap [b_n^k; +\infty), \quad k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}.$$

Положим $f(x) = \frac{2k-1}{2^n}$ при $x \in (a_n^k; b_n^k)$, $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$.

Таким образом, мы определили функцию f на множестве $A = \bigcup_{n,k} (a_n^k; b_n^k)$. Она не убывает относительно порядка на A . Продолжим ее на все пространство:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \inf A, \\ \sup_{\substack{y \in A \\ y < x}} f(y), & \text{если } x \in (a; b) \setminus A, \\ 1, & \text{если } x \geq \sup A. \end{cases}$$

Полученная функция непрерывна и не убывает на X . Следовательно, она монотонна. Кроме того, $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, а значит, X — m -отделимое пространство. $\square$

Если $(X, <)$ — линейно упорядоченное пространство, то через $CM^i(X)$ будем обозначать семейство всех монотонных неубывающих функций на X .

Обобщенной дугой $\widehat{ab}$ в пространстве X называется гомеоморфный образ линейно упорядоченного компакта $(K, <)$, т.е. $\psi(K)$, где $\psi : K \rightarrow X$, $\psi(A) = a$, $\psi(B) = b$, A, B — наименьший и наибольший элементы K соответственно. В этом случае говорят, что дуга $\widehat{ab}$ соединяет точки a и b .

Пространство называется *обобщенно дугообразно связным*, если любые две точки можно соединить обобщенной дугой.

Пространство называется *обобщенно локально дугообразно связным в точке x* , если для любой окрестности U точки x найдется окрестность V такая, что все точки из V можно соединить с точкой x обобщенными дугами, целиком лежащими в U .

Пространство называется *обобщенно локально дугообразно связным*, если оно обобщенно локально дугообразно связно в каждой своей точке.

Континуумом называется связное компактное метрическое пространство.

Пространство называется *счетно компактным*, если из любого его открытого счетного покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Пространство называется σ -компактным, если оно представляется в виде объединения счетного числа бикомпактов. Пространство называется σ -счетно компактным, если оно представляется в виде объединения счетного числа счетно компактных пространств. Пространство X называется *пространством Гуревича*, если для каждой последовательности $\{\gamma_n\}$ открытых покрытий пространства X найдутся конечные $\lambda_n \subset \gamma_n$, такие, что $\bigcup_n \lambda_n$ покрывает X . Пространство называется *псевдокомпактным*, если любая непрерывная функция на этом пространстве ограничена.

Введем понятие порядка топологического пространства в точке (см. [2, § 51]). Пусть τ — некоторый кардинал.

Будем говорить, что пространство X имеет *порядок $< \tau$ в точке p* (обозначение $\text{ord}_p X < \tau$), если существует фундаментальная система окрестностей $\{U_\alpha\} \subset \mathcal{N}(p)$ такая, что для всех α имеем

$$|\text{Fr}(U_\alpha)| < \tau.$$

Пространство X имеет *порядок $< \tau$* (обозначение $\text{ord } X < \tau$), если во всех точках $p \in X$ имеем $\text{ord}_p X < \tau$.

Пространство X называется *дискогерентным*, если для любой пары замкнутых множеств A и B таких, что $X = A \cup B$, $A \neq X \neq B$, пересечение $A \cap B$ несвязно.

Пространство X называется *неразложимым*, если оно связно и не допускает представления в виде объединения двух замкнутых связных множеств, отличных от X .

Канторовским дисконтинуумом называется подмножество $\mathbb{I}$, состоящее из чисел, которые могут быть записаны в троичной системе счисления без использования цифры 1 (см. [1, § 3]).

Пример 1.7. Предположим, что задано некоторое множество $K \subset \mathbb{R}$ гомеоморфное канторовскому дисконтинууму. Опишем построение монотонной «ступенчатой» функции h .

Это построение по сути представляет из себя «лестницу Кантора» (см. [1, § 16, II, следствие 6a]). Отметим, что K есть замкнутое, нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$ без изолированных точек. Пусть $\{U_n\}$ — дизъюнктное семейство дополнительных интервалов ко множеству K , т.е. $\mathbb{R} \setminus K = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, причем $U_1 = (-\infty; a)$, $U_2 = (b; +\infty)$.

Положим $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Пусть определены числа $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$. Из множества $\{U_1, U_2, \dots, U_{n-1}\}$ выберем самый ближний слева U_k и самый ближний справа U_l интервалы к интервалу U_n . Положим $c_n = \frac{c_k + c_l}{2}$. Далее, продолжая этот процесс, построим последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, пробегающую множество всех двоично-рациональных чисел отрезка $\mathbb{I}$.

Определим функцию h_1 на объединении $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ следующим образом: $h_1(x) = c_n$, если $x \in U_n$. Продолжим функцию h_1 на множество K по непрерывности справа:

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus K, \\ \inf\{c_k : x \text{ лежит слева от } U_k\}, & \text{если } x \in K. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что построенная функция непрерывна и монотонна. Точнее,

$$h^{-1}(c_n) = \overline{U_n}, \quad h^{-1}(p) = \{x_p\}, \quad \text{где } p \notin \{c_n\}, \quad \text{а } x_p \in K \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}.$$

Доказательство следующего предложения фактически повторяет доказательство теоремы 6.1.18 из [3].

Предложение 1.8. Пусть X — нормальное счетно компактное пространство, $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вложенных замкнутых связных подмножеств X , $C_{n+1} \subseteq C_n$. Тогда их пересечение $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ связно.

Первый бесконечный ординал мы будем обозначать ω_0 , первый несчетный ординал ω_1 , мощность счетного множества $\aleph_0$, наименьшую несчетную мощность $\aleph_1$, мощность континуума $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Остальные определения можно найти в монографиях [3, 4].

2. СУЖЕНИЕ И ПРОДОЛЖЕНИЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

2.1. Сужение монотонных функций. Пусть $Y \subset X$ — некоторое подпространство и f — некоторая монотонная функция на X . Является ли сужение $f|_Y$ монотонной функцией на Y ?

Предложение 2.1. Пусть f — монотонная функция, $C \subset \mathbb{R}$ — связное множество. Тогда сужение $g = f|_{f^{-1}(C)}$ — монотонная функция.

Доказательство легко получается из определения монотонности.

Определение. Будем говорить, что функция f монотонна на семействе Γ подмножеств пространства X , если для любого $S \in \Gamma$ сужение $f|_S$ монотонно.

Будем говорить, что семейство функций $\mathcal{F}$ монотонно на семействе Γ подмножеств пространства X , если для любой функции $f \in \mathcal{F}$ f монотонна на Γ .

Будем называть семейство Γ подмножеств пространства X допустимым, если для любых $x, y \in X$ существует $S \in \Gamma$ такое, что $x, y \in S$.

Предложение 2.2. Если функция f монотонна на допустимом семействе Γ , то f — монотонная функция.

Доказательство. Допустим, что f — немонотонная функция. Тогда для некоторого $c \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(c)$ несвязно. Пусть $x, y \in f^{-1}(c)$, причем x и y лежат в различных компонентах связности множества $f^{-1}(c)$. Рассмотрим множество $S \in \Gamma$ такое, что $x, y \in S$. Тогда $f|_S$ не является монотонной функцией, поскольку $f^{-1}(c) \cap S$ несвязно. $\square$

Определение. Будем говорить, что пространство X удовлетворяет условию единственности пути, если всякую пару точек $a \neq b$ можно соединить единственной обобщенной дугой $\widehat{ab}$.

Докажем простое предложение, по сути соответствующее [2, § 51, VI, следствие 2].

Предложение 2.3. Для локально дугообразно связного пространства X следующие условия эквивалентны:

- 1) X не содержит простых замкнутых кривых;
- 2) X удовлетворяет условию единственности пути.

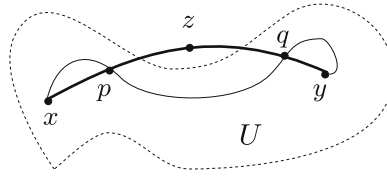


Рис. 2

Доказательство. Очевидно, что если в пространстве лежит простая замкнутая кривая, то оно не удовлетворяет условию единственности пути ни для какой пары точек на этой кривой. Обратно, если существуют две различные дуги A и B , соединяющие точки a и b , то рассмотрим точку $z \in A \setminus B$. Пусть A и B суть линейно упорядоченные множества в соответствии с параметризацией. Пусть p есть самая ближняя к z слева точка из пересечения $A \cap B$, а q есть самая ближняя к z справа точка из пересечения $A \cap B$. Пусть A_1 есть часть дуги A , $A_1 = \widehat{pq}$, а B_1 есть часть дуги B , $B_1 = \widehat{pq}$. Из дуг A_1 и B_1 можно составить простую замкнутую кривую. $\square$

Теорема 2.4. *Предположим, что пространство X удовлетворяет одному из следующих условий:*

- 1) X — обобщенно локально дугообразно связное пространство, удовлетворяющее условию единственности пути;
- 2) $\text{ord } X < \mathfrak{c}$;
- 3) $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где X_i есть либо дуга $\widehat{a_i b_i}$, либо точка.

Пусть Y обобщенно дугообразно связное подмножество X , f — монотонная функция на X . Тогда сужение $f|_Y$ монотонно.

Доказательство. Покажем, что для любой обобщенной дуги $D \subset Y$ сужение $f|_D$ монотонно. Предположим противное, т.е. что $f|_D$ не монотонно. Пусть $D = \widehat{cd}$. Будем считать множество D линейно упорядоченным в соответствии с параметризацией дуги $\widehat{cd}$. Поскольку для линейно упорядоченных топологических пространств топологическое понятие монотонности совпадает с условием неубывания или невозрастания функции, найдутся точки x, y, z из $\widehat{cd}$ такие, что $x < z < y$, и либо $f(z) > f(x)$, $f(z) > f(y)$, либо $f(z) < f(x)$, $f(z) < f(y)$. Для определенности будем считать, что $f(z) > f(x)$, $f(z) > f(y)$. Пусть $a = \max\{f(x), f(y)\}$, $b = f(z)$, $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.

Пусть выполняется условие 1). Тогда $U = f^{-1}((-\infty; a + \varepsilon))$ является открытым связным множеством, содержащим точки x и y . Поскольку X обобщенно локально дугообразно связно, то этим свойством обладает и U . Значит, существует обобщенная дуга $\widehat{xy} \subset U$. Поскольку $z \notin U$, в пространстве существуют две различные обобщенные дуги, соединяющие точки x и y (см. рис. 2). Полученное противоречие доказывает теорему для этого случая.

Пусть выполняется условие (2). Обозначим

$$A = f^{-1}([a; a + \varepsilon]) \cap \widehat{xz}, \quad B = f^{-1}([a; a + \varepsilon]) \cap \widehat{zy}.$$

Отметим, что A и B — непустые дизъюнктные компакты. Для каждой точки $p \in A$ выберем окрестность $V_p \in \mathcal{N}(p)$ такую, что $|\text{Fr } V_p| < \mathfrak{c}$ и $V_p \cap B = \emptyset$. Из открытого покрытия $\{V_p : p \in A\}$ компакта A выберем конечное подпокрытие $\{V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_n}\}$ и обозначим $V = V_{p_1} \cup V_{p_2} \cup \dots \cup V_{p_n}$. Заметим, что

$$|\text{Fr } V| \leq |\text{Fr } V_{p_1}| + |\text{Fr } V_{p_2}| + \dots + |\text{Fr } V_{p_n}| < \mathfrak{c}, \quad A \subset V, \quad V \cap B = \emptyset.$$

Для любого $t \in (a; a + \varepsilon)$ имеем $f^{-1}(t) \cap A \neq \emptyset$ и $f^{-1}(t) \cap B \neq \emptyset$. Поскольку функция f монотонна, то $f^{-1}(t)$ связно для любого t . Мы получили, что $f^{-1}(t) \cap V \neq \emptyset$ и $f^{-1}(t) \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$. Следовательно, $f^{-1}(t) \cap \text{Fr } V \neq \emptyset$. Поскольку

$$|\{f^{-1}(t) \cap \text{Fr } V : t \in (a; a + \varepsilon)\}| = \mathfrak{c}, \quad |\text{Fr } V| < \mathfrak{c},$$

получаем противоречие.

Пусть выполняется условие (3). Для каждого $t \in (a; a + \varepsilon)$ рассмотрим множество $A_t = f^{-1}(t) = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^t$, где $B_i^t = A_t \cap X_i$. Каждое A_t является связным замкнутым множеством в силу монотонности и непрерывности f , а также невырожденным, поскольку содержит точку дуги $\widehat{xz}$ и точку дуги $\widehat{zy}$ на дуге $\widehat{cd}$. Если предположить, что замкнутое множество B_i^t нигде не плотно на X_i для всех i , то B_i^t нульмерно, т.е., $\dim(B_i^t) = 0$, а значит, нульмерно и A_t по теореме о счетной сумме (см. [3, теорема 7.2.1]) — противоречие со связностью A_t . Пусть S_i — плотное счетное множество в X_i , $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Мы показали, что $A_t \cap S \neq \emptyset$ для любого $t \in (a; a + \varepsilon)$. Так как $A_{t'} \cap A_{t''} = \emptyset$ при $t' \neq t''$, а S — счетное множество, то получаем противоречие с мощностью $(a; a + \varepsilon)$.

Доказано, что сужение f на любую дугу $D \subset Y$ монотонно. Поскольку Y обобщенно дугообразно связно, то семейство всех дуг из Y образует допустимое множество в Y , и, согласно предложению 2.2, функция $f|_Y$ монотонна на Y . $\square$

Пример 2.5. Существует монотонная функция f на $\mathbb{I}^2$ такая, что сужение f на $\{t\} \times \mathbb{I}$ или на $\mathbb{I} \times \{t\}$ не является монотонным ни при каком $t \in (0; 1)$.

Всеми перечисленными свойствами обладает функция

$$f(x, y) = \max \left\{ \left| x - \frac{1}{2} \right|, \left| y - \frac{1}{2} \right| \right\}.$$

Пример 2.6. Существует немонотонная функция на $\mathbb{I}^2$ такая, что сужения f на $\{t\} \times \mathbb{I}$ и на $\mathbb{I} \times \{t\}$ являются монотонными для всех $t \in \mathbb{I}$.

Всеми перечисленными выше свойствами обладает функция

$$f(x, y) = (1 - 2y) \cdot x + y.$$

Отметим, что все сужения f на $\{t\} \times \mathbb{I}$ и на $\mathbb{I} \times \{t\}$ являются линейными функциями. Если $0 < y < 1$, то $\max\{f(x, y) : x \in \mathbb{I}\}$ равен либо $f(0, y) = y < 1$, либо $f(1, y) = 1 - y < 1$. Поэтому, $f^{-1}(1) = \{(1, 0), (0, 1)\}$ есть несвязное множество.

2.2. Продолжение монотонных функций. Пусть $Y \subset X$ — некоторое замкнутое подпространство, f — непрерывная функция на Y . Можно ли продолжить ее до непрерывной монотонной функции $\tilde{f}$ на пространстве X ?

2.2.1. Продолжения с монотонных ретрактов.

Определение. Подпространство $Y \subset X$ будем называть монотонным ретрактом X , если существует монотонное отображение F пространства X на Y , являющееся ретракцией, т.е. $F(X) = Y$ и $F|_Y = \text{id}_Y$.

Предложение 2.7. Подпространство $X \times \{y\}$ является монотонным ретрактом $X \times Y$ для любых связных пространств X , Y и $y \in Y$.

Доказательство. Всем требуемым свойствам монотонной ретракции удовлетворяет отображение $F : X \times Y \rightarrow X \times \{y\}$, заданное формулой $F(x, v) = (x, y)$. $\square$

Лемма 2.8. Пусть X — связное, обобщенно локально дугообразно связное пространство, Y — обобщенно дугообразно связное замкнутое подмножество X , K — компонента связности множества $X \setminus Y$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) K открыто в X и $\overline{K} \cap Y \neq \emptyset$.
- 2) Если $|\overline{K} \cap Y| > 1$, то некоторые две точки из Y соединяются двумя различными обобщенными дугами.

Доказательство. 1) Обозначим $D = X \setminus Y$. Так как D открыто в X , то компонента связности K открыта в X (см. [2, § 49, II, теорема 4]) и является обобщенно локально дугообразно связным множеством. Поскольку X связно, то $\overline{K} \cap Y \neq \emptyset$.

2) Пусть $z_1, z_2 \in \overline{K} \cap Y$, $z_1 \neq z_2$. Рассмотрим дугу $\widehat{z_1 z_2} \subset Y$. Поскольку X обобщенно локально дугообразно связно, то можно выбрать такие окрестности $U_i, V_i \in \mathcal{N}(z_i)$, что все точки из V_i

соединяются обобщенными дугами с z_i , целиком лежащими в U_i ($i = 1, 2$), и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Выберем точку $w_1 \in V_1 \cap K$ и обобщенную дугу $z_1 \widehat{w}_1 \subset U_1$. Будем рассматривать дуги как линейно упорядоченные множества в соответствии с параметризацией. Пусть p есть самая правая точка на дуге $z_1 \widehat{w}_1$ из пересечения $z_1 \widehat{w}_1 \cap z_1 \widehat{z}_2$. Рассмотрим соответствующий участок дуги $p \widehat{w}_1 \subset z_1 \widehat{w}_1$. Отметим, что $p \widehat{w}_1 \cap z_1 \widehat{z}_2 = \{p\}$. Точно так же, выберем точку $w_2 \in V_2 \cap K$ и дугу $w_2 \widehat{q} \subset U_2$ так, что $w_2 \widehat{q} \cap z_1 \widehat{z}_2 = \{q\}$. Поскольку K связно и обобщенно локально дугообразно связно, то оно обобщенно дугообразно связно (см. [2, § 50, I, теорема 2]), т.е. существует обобщенная дуга $w_1 \widehat{w}_2 \subset K$. Пусть s есть самая правая точка на дуге $w_1 \widehat{w}_2$ из пересечения $w_1 \widehat{w}_2 \cap p \widehat{w}_1$, а t есть самая левая точка на дуге $w_1 \widehat{w}_2$ из пересечения $w_1 \widehat{w}_2 \cap w_2 \widehat{q}$. Рассмотрим соответствующие участки дуг $\widehat{ps} \subset p \widehat{w}_1$, $\widehat{st} \subset w_1 \widehat{w}_2$, $\widehat{tq} \subset w_2 \widehat{q}$, $\widehat{qp} \subset z_1 \widehat{z}_2$. Отметим все непустые пересечения этих участков (см. рис. 3):

$$\widehat{ps} \cap \widehat{st} = \{s\}, \quad \widehat{st} \cap \widehat{tq} = \{t\}, \quad \widehat{tq} \cap \widehat{qp} = \{q\}, \quad \widehat{qp} \cap \widehat{ps} = \{p\}.$$

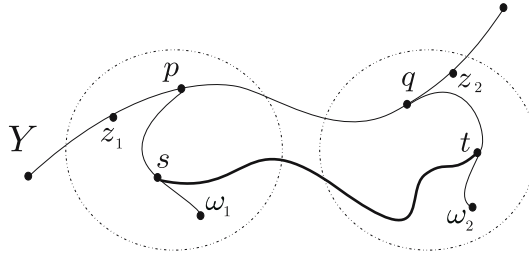


Рис. 3

Дуга, составленная из участков $\widehat{ps}$, $\widehat{st}$, $\widehat{tq}$, и дуга $\widehat{qp}$ различны и соединяют точки p и q . $\square$

Предложение 2.9. Если Y является связным замкнутым подмножеством связного локально связного пространства X , и для каждой компоненты связности K множества $X \setminus Y$ найдется единственная точка $y_K \in \overline{K} \cap Y$, то Y является монотонным ретрактом X .

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in Y, \\ y_K, & \text{если } x \in K, \text{ где } K \text{ — компонента связности } X \setminus Y. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что это отображение является монотонной ретракцией X на Y . $\square$

Следствие 2.10. Если Y является обобщенно дугообразно связным замкнутым подмножеством связного обобщенно локально дугообразно связного пространства X , удовлетворяющего условию единственности пути, то Y является монотонным ретрактом X .

Предложение 2.11. Если Y является монотонным ретрактом пространства X , то любая монотонная функция f на Y продолжается на все пространство X .

Доказательство. Рассмотрим монотонную ретракцию $F : X \rightarrow Y$ и функцию $\tilde{f}(x) = f(F(x))$. Нетрудно убедиться, что $\tilde{f}$ является непрерывным продолжением f . Убедимся в монотонности этой функции. Рассмотрим произвольно $c \in \mathbb{R}$ и обозначим $A = f^{-1}(c)$. В этом случае

$$\tilde{f}^{-1}(c) = F^{-1}(f^{-1}(c)) = \bigcup_{p \in A} (F^{-1}(p) \cup A)$$

является связным множеством, как объединение направленного семейства связных множеств. $\square$

Следствие 2.12. Любая монотонная функция, определенная на подпространстве $X \times \{y\}$, продолжается до монотонной функции на всем пространстве $X \times Y$ для любых связных пространств X , Y и $y \in Y$.

Следствие 2.13. Любая монотонная функция, определенная на обобщенно дугообразно связном замкнутом подмножестве Y обобщенно локально дугообразно связного пространства X , удовлетворяющего условию единственности пути, продолжается до монотонной функции на всем пространстве X .

Следствие 2.14. Если $Y = \widehat{ab}$ есть дуга и для каждой компоненты связности K множества $X \setminus Y$ найдется единственная точка $y_K \in \overline{K} \cap Y$, то существует монотонная функция на X , разделяющая точки a и b .

Доказательство. Действительно, рассмотрим монотонную функцию f на Y такую, что $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, построенную в теореме 1.6. Согласно доказанному выше, она продолжается до монотонной функции на всем пространстве X . $\square$

2.2.2. Продолжение на произведение $X \times \mathbb{I}$.

Теорема 2.15. Пусть f — произвольная ограниченная функция (не обязательно монотонная) на пространстве $X \times \{p\}$. Тогда она продолжается до монотонной функции на всем пространстве $X \times \mathbb{I}$ для любого связного пространства X и любой точки $p \in (0; 1)$.

Доказательство. отождествим пространство X и подпространство $X \times \{p\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < f(x) < 1$ и что $p = 1/2$. Рассмотрим следующую функцию на пространстве $X \times \mathbb{I}$:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} \min\{f(x, p), 3y\}, & \text{если } y \in [0; 1/3], \\ f(x, p), & \text{если } y \in (1/3; 2/3), \\ \max\{f(x, p), 3y - 2\}, & \text{если } y \in [2/3; 1]. \end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{f}$ — непрерывная функция. Убедимся в ее монотонности.

Отметим, что $\tilde{f}^{-1}(0) = X \times \{0\}$, а $\tilde{f}^{-1}(1) = X \times \{1\}$. Рассмотрим произвольное число $c \in (0; 1)$. Пусть $A = \tilde{f}^{-1}(c)$. Покажем, что A — связное множество. В силу определения $\tilde{f}$, при $y < c/3$ имеем $\tilde{f}(x, y) < c$ и при $y > (2 + c)/3$ имеем $\tilde{f}(x, y) > c$. Поэтому

$$A \subset X \times \left[\frac{c}{3}; \frac{2}{3} + \frac{c}{3} \right].$$

Обозначим $B = f^{-1}(c)$; это есть замкнутое подмножество X . Пусть K есть компонента связности множества $X \setminus B$. Тогда либо для всех $x \in K$ имеем $f(x, p) > c$, либо для всех $x \in K$ имеем $f(x, p) < c$ в силу того, что f обладает свойством Дарбу. Из определения $\tilde{f}$ видно, что в первом случае $D_K = \overline{K} \times \{c/3\} \subset A$, а во втором случае $D_K = \overline{K} \times \{(2 + c)/3\} \subset A$.

Итак, множество A можно представить в виде

$$A = \left(B \times \left[\frac{c}{3}; \frac{2}{3} + \frac{c}{3} \right] \right) \cup \{D_K : K \text{ — компонента связности } X \setminus B\}.$$

Рассмотрим отображение проектирования пространства $X \times \mathbb{I}$ на X : $g(x, y) = x$. Ясно, что образ $g(A) = X$. Это отображение будет замкнутым в силу теоремы Куратовского. Предположим, что замкнутое множество A представляется в виде объединения дизъюнктивных замкнутых множеств $A = E \cup F$. В этом случае для каждой точки $x \in B$ получаем, что связное множество $\{x\} \times \left[\frac{c}{3}; \frac{2}{3} + \frac{c}{3} \right]$ является либо подмножеством E , либо подмножеством F . Поэтому, при проектировании образы $g(E)$ и $g(F)$ будут дизъюнктивны. Поскольку X связно, то одно из этих множеств пусто, а значит пусто E или F . Тем самым, связность A доказана. $\square$

Пример 2.16. Существует непрерывная функция на пространстве $\mathbb{I} \times \{0\}$ которая не продолжается до монотонной функции на пространстве $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x, 0) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \in [0; 1/3), \\ 2 - 3x, & \text{если } x \in [1/3; 2/3), \\ 3x - 2, & \text{если } x \in [2/3; 1]. \end{cases}$$

Пусть $\tilde{f}$ — некоторое монотонное продолжение функции f на $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$. Рассмотрим дизъюнкты связанные открытые прообразы $A = \tilde{f}^{-1}([0; 1/3))$ и $B = \tilde{f}^{-1}((2/3; 1])$. Точки $(0, 0)$ и $(2/3, 0)$ лежат в A , следовательно в A лежит некоторая ломаная P , соединяющая эти точки. Точки $(1/3, 0)$ и $(1, 0)$ лежат в B , следовательно, в B лежит некоторая ломаная Q , соединяющая эти точки. В силу теоремы Жордана о разбиении плоскости простой замкнутой кривой на две дизъюнктные области, ломаные P и Q обязаны пересекаться. Получаем противоречие с тем, что множества A и B дизъюнктны. $\square$

3. ФУНКЦИОНАЛЬНО m -ОТДЕЛИМЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНО m -ВЫРОЖДЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Обобщенно локально дугообразно связные пространства.

Теорема 3.1. *Предположим, что пространство X удовлетворяет одному из следующих условий:*

- 1) X неразложимо;
- 2) X дискогерентно;
- 3) X есть простая замкнутая кривая;
- 4) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, где C_n есть простая замкнутая кривая или точка.

Тогда X есть функционально m -вырожденное пространство.

Доказательство. Предположим, что выполняется условие 1) и существует $f \in CM(X)$ такая, что f не является постоянной. Согласно предложению 1.2 найдется $g \in CM(X)$ такая, что $g(X) = [0; 1]$. Тогда $A = f^{-1}([0; 1/2])$ и $B = f^{-1}([1/2; 1])$ есть непустые собственные связанные замкнутые подмножества, дающие в объединении X ; противоречие с неразложимостью X .

Предположим, что выполняется условие 2). Дискогерентны на числовой прямой только одноточечные множества. Поскольку монотонный образ дискогерентного пространства является дискогерентным, то все монотонные функции на X суть константы.

Предположим, что выполняется условие 3). Поскольку простая замкнутая кривая дискогерентна, то все монотонные функции на X суть константы.

Предположим, что выполняется условие 4) и существует монотонная функция f , отличная от константы. Тогда $|f(X)| = \mathfrak{c}$. Поэтому для некоторой простой замкнутой кривой C_m функция f не является константой на C_m . Всякая простая замкнутая кривая представляется в виде объединения двух дуг. Следовательно X удовлетворяет условию 3) теоремы 2.4. Значит, функция $f|_{C_m}$ монотонна и, по доказанному выше, $f|_{C_m}$ — константа. Противоречие. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть $\text{ord } X < \mathfrak{c}$, $C \subset X$ — простая замкнутая кривая, f — монотонная функция на X . Тогда f постоянна на C .*

Доказательство. Согласно теореме 2.4, сужение $f|_C$ есть монотонная функция, а согласно теореме 3.1, $f|_C$ — константа. $\square$

Теорема 3.3. *Пусть X — связное, локально дугообразно связное, функционально m -вырожденное пространство. Пусть $\tau = d(X)$ — плотность пространства X . Тогда X можно представить в виде*

$$X = \overline{\bigcup_{\alpha < \tau} C_\alpha},$$

где C_α — простая замкнутая кривая.

Доказательство. Пусть S — всюду плотное в X множество мощности τ . Возьмем произвольно две точки $a, b \in S$, $a \neq b$. Существует дуга $\widehat{ab}$, соединяющая точки a и b . Пусть $\psi : \mathbb{I} \rightarrow X$ — гомеоморфизм, задающий дугу $\widehat{ab}$, $\psi(0) = a$, $\psi(1) = b$. Рассмотрим последовательности $\{x_k = \psi(1/k)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k = \psi((k-1)/k)\}_{k=1}^{\infty}$. Ясно, что $x_k \rightarrow a$ и $y_k \rightarrow b$ при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим для каждого k точки a и x_k . Используя лемму 2.8, предложение 2.3 и следствие 2.14, учитывая, что нет функций, разделяющих точки, заключаем, что найдется простая замкнутая кривая S_k такая, что $S_k \cap \widehat{ax_k} \neq \emptyset$. Аналогично, рассматривая точки y_k и b , заключаем, что найдется простая замкнутая кривая S'_k такая, что $S'_k \cap \widehat{y_k b} \neq \emptyset$. Нетрудно убедиться, что

$$\{a, b\} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} S'_k}$$

Мы получили счетное семейство простых замкнутых кривых. Прделав эту процедуру для каждой пары $a, b \in S$ и перенумеровав кривые, получим семейство $\{C_\alpha\}_{\alpha < \tau}$. При этом $S \subset \overline{\bigcup_{\alpha < \tau} C_\alpha}$, а поскольку, $\overline{S} = X$, то имеем

$$X = \overline{\bigcup_{\alpha < \tau} C_\alpha}.$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.4. *Обобщенно локально дугообразно связное пространство, удовлетворяющее условию единственности пути, функционально m -отделимо.*

Доказательство. Рассмотрим произвольно две точки $a \neq b$ и дугу $Y = \widehat{ab}$. В силу леммы 2.8 выполняются посылки следствия 2.14. А значит, точки a и b разделяются монотонной функцией. $\square$

Теорема 3.5. *Пусть X — обобщенно локально дугообразно связное пространство, $\text{ord } X < \mathfrak{c}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) X — функционально m -отделимое пространство;
- 2) X удовлетворяет условию единственности пути.

Доказательство. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из теоремы 3.4, а импликация 1) $\Rightarrow$ 2) легко получается небольшим видоизменением доказательств предложения 2.3 и теоремы 3.2. $\square$

Следующий пример показывает, что заключение теоремы 3.3 нельзя усилить до условия 4) теоремы 3.1.

Пример 3.6. Существует локально связный плоский континуум X , обладающий следующими свойствами:

- 1) X — функционально m -вырожденное пространство;
- 2) X не представляется в виде объединения не более чем счетного числа простых замкнутых кривых или точек;
- 3) $\text{ord } X < \mathfrak{c}$.

Этим условиям удовлетворяет *треугольная кривая Серпинского* (см. [2, § 51, I, 6]). Пусть T — равносторонний треугольник. Разобьем его на четыре конгруэнтных треугольника. Пусть T_0, T_1, T_2 — те из них, которые имеют общую вершину с T . Аналогично разобьем каждый из треугольников T_0, T_1, T_2 на четыре конгруэнтных треугольника, и пусть $T_{00}, T_{01}, T_{02}, T_{10}, \dots, T_{22}$ — те из них, которые имеют общую вершину с одним из треугольников T_0, T_1, T_2 . Далее, продолжая этот процесс шаг за шагом, получим последовательность треугольников $T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$. Обозначим

$$B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = \text{Fr}(T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}), \quad B = \bigcup B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}, \quad X = \overline{B}, \quad X_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \cap X,$$

где индексы α_i принимают значения 0, 1 или 2, а $k = 0, 1, \dots$.

Каждое множество $B_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$ является простой замкнутой кривой. Порядок пространства $\text{ord } X < \mathfrak{c}$. Точнее, континуум X имеет три точки порядка 2 (вершины треугольника T), счетное множество точек порядка 4 (вершины других треугольников), а все остальные точки имеют порядок 3. Согласно теореме 3.2 получаем, что любая монотонная функция постоянна на любом множестве $B_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$, а значит, и на множестве B . Следовательно, все монотонные функции суть константы на X .

Однако это пространство нельзя представить в виде объединения счетного числа простых замкнутых кривых или точек. Пусть $\{D_j\}_{j=1}^\infty$ — счетное множество, где $D_j \subset X$, D_j — простая замкнутая кривая или точка.

Рассмотрим множество D_1 . Это замкнутое подмножество X , не гомеоморфное всему пространству X (поскольку содержит только точки порядка 2). Поскольку семейство $\{X_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\}$ является π -базой пространства X , найдется множество $X_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_1}}$ такое, что $X_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_1}} \cap D_1 = \emptyset$. Обозначим $F_1 = X_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_1}}$.

Рассмотрим множество D_2 . Это замкнутое подмножество X , не содержащее целиком множество F_1 (поскольку все точки всех связных подмножеств D_2 имеют порядок ≤ 2). Следовательно, найдется множество $X_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_1}\alpha_{n_1+1}\dots\alpha_{n_2}}$ такое, что $X_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_2}} \cap D_2 = \emptyset$. Обозначим $F_2 = T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_2}}$.

Продолжая этот процесс, получим монотонно убывающую последовательность непустых компактных множеств F_m , причем $F_m \cap D_j = \emptyset$ при $j \leq m$. Пусть $\{c\} = \bigcap_{m=1}^\infty F_m$. Тогда, очевидно, $c \notin \bigcup_{j=1}^\infty D_j$.

Нетрудно убедиться, что если $\text{ord } X < \mathfrak{c}$, то $\text{ind } X = 1$. Следующий пример показывает, что теорема 3.5 неверна в классе одномерных пространств.

Пример 3.7. Существует локально связный континуум X , обладающий следующими свойствами:

- 1) $\text{ind } X = 1$;
- 2) имеет место представление

$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty C_n}, \quad (1)$$

где каждое C_n — простая замкнутая кривая;

- 3) X — функционально m -отделимое пространство.

Этим условиям удовлетворяет одномерный континуум Менгера μ_1 . Он строится следующим образом. Разобьем стандартный единичный куб $\mathbb{I}^3$, лежащий в 3-мерном евклидовом пространстве, на 27 конгруэнтных кубов первого ранга гиперплоскостями, проведенными перпендикулярно ребрам куба $\mathbb{I}^3$ в точках деления ребер на три равные части и отберем из этих 27 кубов те, которые пересекаются с одномерным остовом куба $\mathbb{I}^3$. Их объединение обозначим через $\mathbb{I}_1^3$. Каждый куб, входящий в качестве слагаемого в $\mathbb{I}_1^3$, разделим аналогичным образом на 27 конгруэнтных кубов второго ранга и сумму всех аналогичным образом выделенных кубов второго ранга обозначим через $\mathbb{I}_2^3$. Продолжая описанный процесс, получим убывающую последовательность компактов

$$\mathbb{I}_1^3 \supset \mathbb{I}_2^3 \supset \dots$$

Компакт $\mu_1 = \bigcap_{i=1}^\infty \mathbb{I}_i^3$ и называют 1-мерным универсальным компактом Менгера.

Известно, что $\text{ind } \mu_1 = \text{Ind } \mu_1 = \dim \mu_1 = 1$.

Заметим, что одномерный остов куба представляется в виде объединения шести простых замкнутых кривых. Если рассмотреть на каждом этапе построения одномерные остовы выделенных кубов и перенумеровать полученное множество простых замкнутых кривых, то получим представление (1).

Известно, что пространство μ_1 топологически однородно.

Покажем, что μ_1 является функционально m -отделимым пространством. Рассмотрим канторовский дисконтинуум K . Пусть h — «ступенчатая» функция, построенная в примере 1.7. Мы предполагаем, что μ_1 вложено в $\mathbb{R}^3$ по построению, данному выше, а значит, можно считать, что его точки описываются тремя координатами (x, y, z) . Нетрудно убедиться, что функции

$F_1(x, y, z) = h(x)$, $F_2(x, y, z) = h(y)$, $F_3(x, y, z) = h(z)$ являются монотонными на μ_1 . Поскольку $F_1^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0) \cap F_3^{-1}(0) = \{(0, 0, 0)\}$, то любую точку компакта Менгера можно отделить от точки $(0, 0, 0)$ при помощи одной из этих трех функций. В силу топологической однородности это пространство m -отделимо.

Следующий пример показывает, что теорему 3.3 нельзя обратить даже в классе локально дугообразно связных пространств, у которых $\text{ord } X < \mathfrak{c}$, несмотря на результат теоремы 3.2.

Пример 3.8. Существует локально связный континуум X , обладающий следующими свойствами:

- 1) $\text{ord } X < \mathfrak{c}$;
- 2) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, где каждое C_n — простая замкнутая кривая;
- 3) X не является функционально m -вырожденным.

Возьмем канторовской дисконтинуум K . Пусть $\{U_n\}$ — система всех дополнительных к K интервалов из $\mathbb{I}$. Для каждого n рассмотрим на плоскости окружность C_n с центром в точке $(\frac{a_n+b_n}{2}, 0)$ радиуса $\frac{b_n-a_n}{2}$, где $U_n = (a_n; b_n)$. X зададим как подпространство $\mathbb{R}^2$ следующим образом:

$$X = \left(\bigcup_n C_n \right) \cup (K \times \{0\}).$$

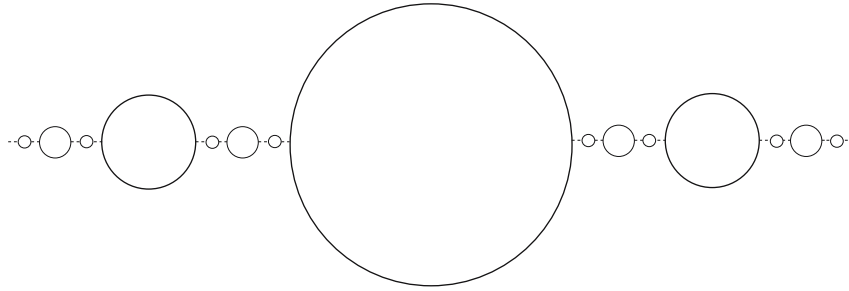


Рис. 4. Пространство X из примера 3.8

Нетрудно убедиться, что $\text{ord } X < 4$ и $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n}$ (рис. 4). Пусть h — «ступенчатая» функция, построенная в примере 1.7. Рассмотрим следующую функцию $f : X \rightarrow \mathbb{I}$:

$$f(x, y) = h(x).$$

Для каждого двоично-рационального числа $c \in \mathbb{I}$ имеем $f^{-1}(c) = C_n$ при некотором n . А для остальных $c \in \mathbb{I}$ имеем $f^{-1}(c) = \{(p, 0)\}$, где $p \in K$. Построенная функция является монотонной и отличной от константы.

3.2. Критерии в классе метрических компактов. Следующее определение взято из [2, § 46, VIII].

Определение. Разделителем между точками a и b пространства X будем называть связное замкнутое множество C такое, что

$$X \setminus C = M \cup N, \quad a \in M, \quad b \in N, \quad M \cap N = \emptyset, \quad M \text{ и } N \text{ открыты.} \quad (2)$$

Следующее предложение дает необходимое условие существования монотонной функции в терминах разделителей для произвольного пространства X .

Предложение 3.9. Пусть f — монотонная непрерывная функция на X , не являющаяся константой. Тогда существует дизъюнктное семейство $\mathcal{G}$ разделителей между любыми точками $a, b \in X$ такими, что $f(a) \neq f(b)$, причем $|\mathcal{G}| = \mathfrak{c}$.

Доказательство. Рассмотрим точки $a, b \in X$ такие, что $f(a) \neq f(b)$ (без ограничения общности можно считать, что $f(a) < f(b)$). В силу непрерывности и монотонности f семейство

$$\mathcal{G} = \{f^{-1}(c) \mid c \in (f(a); f(b))\}$$

удовлетворяет требуемым условиям. $\square$

Пусть $\mathcal{G}$ — семейство непересекающихся разделителей между точками a и b . Поставим в соответствие каждому множеству $C \in \mathcal{G}$ пару открытых множеств $M(C)$ и $N(C)$, удовлетворяющих условиям (2), и положим $A(C) = M(C) \cup C$. Отметим, что множество $A(C)$ связно, а множества $M(C)$ и $N(C)$, вообще говоря, нет.

Доказательства следующих теорем содержатся в [2].

Теорема 3.10 ([2, § 46, VIII, теорема 1]). Пусть $\mathcal{G}$ — семейство непересекающихся разделителей между точками a и b . Семейство всех множеств $A(C)$, где $C \in \mathcal{G}$, строго монотонно.

Более того, выполнено следующее условие:

1) если $C \neq D$, то либо $A(D) \subset M(C)$, либо $A(C) \subset M(D)$.

Теорема 3.11 ([2, § 46, VIII, теорема 2]). Если X — сепарабельное метрическое пространство, то элементы $\mathcal{G}$ можно снабдить такими индексами y , что $0 < y < 1$ и что из условия $u < v$ следует $M(C_u) \subset A(C_u) \subset M(C_v)$.

Теорема 3.12 ([2, § 46, VIII, теорема 3]). За исключением счетного множества элементов семейства $\mathcal{G}$, каждый элемент $C \in \mathcal{G}$ удовлетворяет следующим условиям:

2) $\text{Int}(A(C)) = M(C)$, $\text{Fr}(A(C)) = C$;

3) $C = \text{Fr}(M(C)) = \text{Fr}(N(C))$, в семействе $\mathcal{G}$ существует две последовательности $\{D_n\}$ и $\{E_n\}$, такие, что $C = \bigcap_n M(D_n) \cap N(E_n)$;

4) $M(C)$ и $N(C)$ связны.

Теорема 3.13 ([2, § 46, VIII, теорема 5]). Пусть в сепарабельном метрическом пространстве X задано дизъюнктное семейство $\mathcal{G}$ разделителей между точками a и b , снабженное индексами в соответствии с теоремой 3.11. Тогда существует непрерывное отображение g пространства X на $\mathbb{I}$, такое, что $g(a) = 0$, $g(b) = 1$ и для каждого индекса y либо $g^{-1}([0; y]) = A(C_y)$, либо $g^{-1}([0; y]) = \bigcap_{z > y} A(C_z)$, в соответствии с тем, существует ли индекс, непосредственно следующий за y , или нет.

Из теорем 3.12, 3.13 и более общей теоремы о строго монотонных семействах множеств (см. [1, § 24, IX (17)]) получаем следующее следствие.

Следствие 3.14. За исключением, быть может, счетного множества индексов y , имеем

5) $A(C_y) = g^{-1}([0; y])$;

6) $C_y = g^{-1}(y)$.

Теперь все готово для доказательства основной леммы этого параграфа.

Лемма 3.15. Пусть X — метрический компакт, $\mathcal{G}$ — несчетное дизъюнктное семейство разделителей между некоторыми точками $a, b \in X$. Тогда существует монотонная непрерывная функция f на X такая, что $f(a) \neq f(b)$.

Доказательство. Используя теоремы 3.10 и 3.11, можно проиндексировать семейство $\mathcal{G}$ числами из интервала $(0; 1)$. Обозначим индексующую функцию через $t : \mathcal{G} \rightarrow (0; 1)$. Эта функция обладает следующим свойством: $A(D) \subset M(C) \Leftrightarrow t(D) < t(C)$, где $D, C \in \mathcal{G}$.

Докажем, что если $A(D) \subset M(C)$, то $A(C) \setminus M(D) = Y$ есть связное замкнутое множество. Поскольку Y представляется в виде разности замкнутого и открытого множества, то Y замкнуто. Предположим от противного, что Y не связно, т.е. $Y = E \cup F$, $E \cap F = \emptyset$, E и F непусты и замкнуты в Y , а значит, в X . Поскольку D связно, то $D \cap E = \emptyset$ или $D \cap F = \emptyset$. Поскольку C связно, то $C \cap E = \emptyset$ или $C \cap F = \emptyset$. Итак, возможны четыре логических случая. Рассмотрим следующие два.

1. $D \cap E = \emptyset$ и $C \cap E = \emptyset$. Тогда

$$X = (A(D) \cup F \cup C \cup N(C)) \bigcup E$$

представляется в виде объединения непустых замкнутых дизъюнктивных множеств — противоречие со связностью X .

2. $D \cap E = \emptyset$ и $C \cap F = \emptyset$. Тогда

$$X = (A(D) \cup F) \bigcup (E \cup C \cup N(C))$$

представляется в виде объединения непустых замкнутых дизъюнктивных множеств — противоречие со связностью X .

Остальные два случая рассматриваются аналогично с заменой E на F . Следовательно, Y связно.

Рассмотрим несчетное числовое множество $T = t(\mathcal{G})$. Построим семейство разделителей $\mathcal{G}' \supset \mathcal{G}$ и индексирующую функцию t' , являющуюся продолжением функции t .

Рассмотрим каждое $t_0 \in \overline{T} \setminus T$ такое, что в любой окрестности t_0 есть точки из T как слева, так и справа. Существуют последовательности $\{x_n\} \subset T$, $\{y_n\} \subset T$, $x_n < x_{n+1} < t_0 < y_{n+1} < y_n$ и $x_n \rightarrow t_0$, $y_n \rightarrow t_0$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $X_n = A(t^{-1}(y_n)) \setminus M(t^{-1}(x_n))$. Согласно доказанному выше — это связное замкнутое множество, а поскольку X — компакт, то X_n — также компакт. Пусть $C_0 = \bigcap_n X_n$. Тогда $C_0 \neq \emptyset$ также является континуумом (как пересечение вложенных континуумов $X_{n+1} \subset X_n$, см. предложение 1.8). Имеем

$$X \setminus C_0 = \left(\bigcup_n M(t^{-1}(x_n)) \right) \cup \left(\bigcup_n N(t^{-1}(y_n)) \right) = M(C_0) \cup N(C_0).$$

Это значит, что C_0 является разделителем между точками a и b . Добавим C_0 в $\mathcal{G}'$ и положим $t'(C_0) = t_0$.

Будем считать, что каждое $C \in \mathcal{G}$ входит в $\mathcal{G}'$ и $t'(C) = t(C)$. Обозначим $T' = t'(\mathcal{G}')$.

По построению получаем, что T' содержит все точки, являющиеся предельными слева и справа для T . Поскольку точек, являющихся предельными справа, но не являющихся предельными слева, и точек, являющихся предельными слева, но не являющихся предельными справа, не более чем счетное множество для любого числового множества, то $T' = \overline{T} \setminus P$, где $|P| \leq \aleph_0$. Применяя теорему 3.12, рассмотрим множество $T'' \subset T'$, соответствующую индексирующую функцию t'' и множество $G'' \subset G'$, для элементов которого выполняются соотношения 2), 3) и 4), и, кроме того, $|T' \setminus T''| \leq \aleph_0$.

Следовательно, T'' является несчетным G_δ -множеством. Применяя теорему 3.13 и следствие 3.14 для семейства $\mathcal{G}''$ и индексирующей функции t'' , получаем, что существует непрерывная функция $g : X \rightarrow \mathbb{I}$ такая, что соотношения $A(C_y) = g^{-1}([0; y])$ и $C_y = g^{-1}(y)$ имеют место для всех, за исключением самое большее $\aleph_0$, $y \in T''$. Рассмотрим семейство $\mathcal{G}_1 \subset G''$ и соответствующее множество $T_1 \subset T''$ для которых выполняются эти соотношения. В силу сказанного выше, T_1 — несчетное G_δ -множество.

Следовательно, в силу теоремы Александрова—Хаусдорфа [1, § 37, I, теорема 3], T_1 содержит множество K , гомеоморфное канторовскому дисконтинууму. Рассмотрим «ступенчатую» функцию h , описанную в примере 1.7.

Функция $f(x) = h(g(x))$ является непрерывной, как композиция непрерывных функций. Убедимся, что функция f является монотонной.

Рассмотрим двоично-рациональное число $c \in (0; 1)$. Тогда $h^{-1}(c) = [u; v]$, где $u, v \in K$, $[u; v] = \overline{U_n}$, U_n — один из дополнительных к K интервалов. В этом случае

$$f^{-1}(c) = g^{-1}([u; v]) = (g^{-1}([0; v]) \setminus g^{-1}([0; u])) \cup g^{-1}(u) = (A(C_v) \setminus A(C_u)) \cup C_u = A(C_v) \setminus M(C_u)$$

в силу условий (2), (3), (4) и (5). Выше было показано, что $A(C_v) \setminus M(C_u)$ есть связное замкнутое множество.

Отметим, что

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= g^{-1}(h^{-1}(0)) = g^{-1}([0; u]) = A(C_u), \\ f^{-1}(1) &= g^{-1}(h^{-1}(1)) = g^{-1}([v; 1]) = (g^{-1}([0; 1]) \setminus g^{-1}([0; v])) \cup g^{-1}(v) = \\ &= (X \setminus A(C_v)) \cup C_v = N(C_v) \cup C_v, \end{aligned}$$

где u и v суть минимальный и максимальный элементы K соответственно. Следовательно, $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ связны.

Если c не является двоично-рациональным числом, то $h^{-1}(c) = \{y\}$, где $y \in K$, и множество $f^{-1}(c) = g^{-1}(h^{-1}(c)) = g^{-1}(y) = C_y$ связно.

Мы показали, что прообраз любой точки $c \in \mathbb{I}$ непрерывной функции f связан. Следовательно, она монотонна. Нетрудно убедиться, что $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. $\square$

В качестве следствий этой леммы получаем следующие критерии.

Теорема 3.16. Пусть X — метрический компакт. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) X — функционально m -отделимое пространство.
- 2) Для любых точек $a, b \in X$ существует несчетное дизъюнктное семейство разделителей между a и b .
- 3) Для любых точек $a, b \in X$ существует континуальное дизъюнктное семейство разделителей между a и b .

Теорема 3.17. Пусть X — метрический компакт. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) X — функционально m -вырожденное пространство.
- 2) Для любых точек $a, b \in X$ и любого дизъюнктного семейства $\mathcal{G}$ разделителей между a и b имеем, что $|\mathcal{G}| \leq \aleph_0$.

Следующие примеры показывают, что теорема 3.17 неверна в классе сепарабельных метрических пространств и в классе бикомпактов.

Пример 3.18. Существует сепарабельное метрическое пространство, в котором некоторая пара точек отделяется несчетным семейством разделителей, но все монотонные функции на котором суть константы.

Пусть B есть множество Бернштейна, т.е. подмножество $\mathbb{I}$ такое, что все борелевские подмножества B и $B' = \mathbb{I} \setminus B$ не более чем счетны, а также $|B| = \mathfrak{c}$ и $|B'| = \mathfrak{c}$ (см. [1, § 40, I, теорема 1]). Будем считать, что $\{0, 1\} \subset B'$. Отметим, что $\overline{B} = \overline{B'} = \mathbb{I}$.

Рассмотрим подпространство $X \subset \mathbb{I}^2$. Будем считать, что точки пространства описываются двумя координатами (x, y) :

$$X = (\mathbb{I} \times \{0\}) \cup (\mathbb{I} \times \{1\}) \cup (B \times \mathbb{I}), \quad a = (0, 0), \quad b = (1, 0).$$

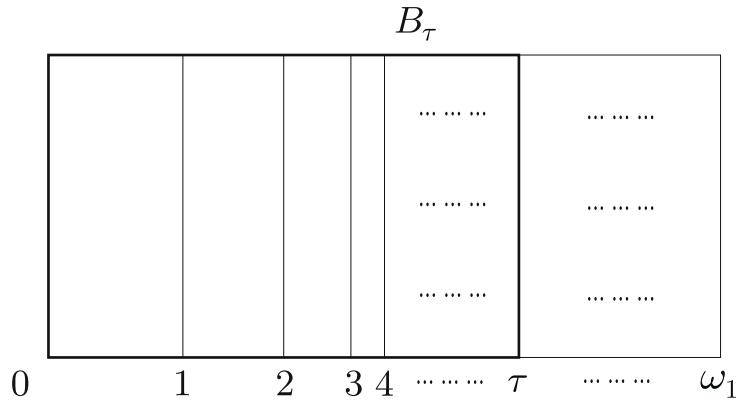
Семейство $\mathcal{G} = \{\{t\} \times \mathbb{I} : t \in B\}$ замкнутых связных дизъюнктных разделителей между точками a и b имеет мощность $\mathfrak{c}$.

Обозначим проекцию на первую координату через $p_1(x, y) = x$. Пусть f — некоторая монотонная функция на X . Покажем, что f на каждом разделителе $C \in \mathcal{G}$ постоянна. Предположим от противного, что $C = \{t\} \times \mathbb{I}$ и существует точка $(t, y) \in C$, для которой $f(t, y) \neq f(t, 0)$, $f(t, y) \neq f(t, 1)$. Пусть $(p; q)$ такой интервал, что $f(t, y) \in (p; q)$, $f(t, 0) \notin [p; q]$, $f(t, 1) \notin [p; q]$. Покажем, что открытое множество $Z = f^{-1}((p; q))$ несвязно.

В силу непрерывности функции f , можно выбрать базовые окрестности $U_0 \in \mathcal{N}((t, 0))$, $U_1 \in \mathcal{N}((t, 1))$ такие, что $Z \cap U_0 = Z \cap U_1 = \emptyset$. Поскольку система интервалов $\{(u; v) : u, v \in B'\}$ образует базу пространства $\mathbb{I}$ в точке t и топология пространства X индуцирована из произведения $\mathbb{I}^2$, то найдутся интервалы $[0; y_0)$, $(y_1; y_2)$, $(y_3; 1]$, $(u; v)$ такие, что

$$\begin{aligned} y &\in (y_1; y_2), \quad u, v \in B', \quad t \in (u; v), \\ ((u; v) \times (y_1; y_2)) \cap X &\subset Z, \quad ((u; v) \times [0; y_0)) \cap X \subset U_0, \quad ((u; v) \times (y_3; 1]) \cap X \subset U_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим числа u_1, v_1 , удовлетворяющие условиям $u < u_1 < t < v_1 < v$ и $u_1, v_1 \in B'$. Нетрудно убедиться, что множество $Z_1 = Z \cap ((u_1; v_1) \times \mathbb{I})$ является непустым открыто-замкнутым

Рис. 5. Пространство X из примера 3.19

множеством в Z , отличным от Z . Следовательно, Z не связно и мы получаем противоречие с монотонностью функции f .

Далее, поскольку $\bigcup \mathcal{G}$ всюду плотно в X , имеем

$$f(t, 0) = f(t, 1) \quad (3)$$

для всех $t \in \mathbb{I}$. Предположим, что функция f отлична от константы и, для определенности, $f(t_1, 0) = 0$, $f(t_2, 0) = 1$, где $t_1 < t_2$. Выберем произвольно число $c \in \mathbb{I}$ и рассмотрим связное замкнутое множество $T = f^{-1}(c)$. Его проекция $p_1(T)$ должна быть связным множеством в $\mathbb{I}$. Следовательно, это либо точка t , либо невырожденный промежуток. В силу (3) точка t обязательно принадлежит B , иначе множество T представляло бы из себя несвязное двоеточие. Точек $c \in \mathbb{I}$, для которых проекция $p_1(T)$ есть невырожденный промежуток, не более чем счетное множество. Следовательно, множество E тех чисел $c \in \mathbb{I}$, для которых $p_1(T) = \{t\}$, $t \in B$, есть несчетное G_δ -множество. Его прообраз $f^{-1}(E)$ есть несчетное G_δ -множество в X , а его проекция $p_1(f^{-1}(E))$ есть несчетное G_δ -множество в B . Получаем противоречие с определением множества Бернштейна.

Пример 3.19. Существует бикompактное пространство, в котором некоторая пара точек отделяется несчетным семейством разделителей, но все монотонные функции на котором суть константы.

Длинной прямой называется пространство $V_0 = \omega_1 \times [0; 1)$ с топологией, порожденной лексикографическим упорядочением, где ω_1 — вполне упорядоченное множество всех счетных ординалов (см. [3, п. 3.12.18]). Присоединив к пространству V_0 точку ω_1 и приняв, что $x < \omega_1$ при всех $x \in V_0$, мы получим упорядоченное множество V . Это множество с топологией, порожденной линейным порядком, называется *длинным отрезком*.

Пусть $P = \{(\alpha, 0) \in V : 0 \leq \alpha \leq \omega_1\}$. Рассмотрим подпространство $X \subset V \times \mathbb{I}$:

$$X = (P \times \mathbb{I}) \cup (V \times \{0\}) \cup (V \times \{1\}), \quad a = (0, 0), \quad b = (\omega_1, 0).$$

X является бикompактом, так как представляется в виде объединения трех бикompактов (рис. 5).

Семейство $\mathcal{G} = \{\{\tau\} \times \mathbb{I} : \tau \in P, 0 < \tau < \omega_1\}$ замкнутых связных дизъюнктивных разделителей между точками a и b имеет мощность $\aleph_1$.

Пусть f — произвольная монотонная функция на X . Обозначим $[0; \tau] = \{x \in V : 0 \leq x \leq \tau\}$.

Для каждого ординала $\tau < \omega_1$ рассмотрим множество

$$B_\tau = ([0; \tau] \times \{0\}) \cup ([0; \tau] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{I}) \cup (\{\tau\} \times \mathbb{I}).$$

Нетрудно убедиться, что B_τ является простой замкнутой кривой, и во всех точках $p \in B_\tau$ имеем $\text{ord}_p X < \mathfrak{c}$. По теореме 3.2 получаем, что f является постоянной на B_τ , а значит, f является постоянной на X .

Пример 3.20. Существует метрический компакт (двумерный полиэдр) X , не являющийся функционально m -отделимым, для любых двух точек которого найдется разделитель.

Рассмотрим отношение эквивалентности E на $\mathbb{I}^2$:

$$E = \left\{ \{(0,0), (1,1)\}, \{(1,0), (0,1)\} \right\} \cup \left\{ \{(x,y)\} : (x,y) \notin \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \right\}.$$

В качестве требуемого пространства рассмотрим фактор-пространство $X = \mathbb{I}^2/E$ и факторное отображение φ_E . Обозначим через a точку, полученную склейкой точек $(0,0)$ и $(1,1)$, а через b точку, полученную склейкой точек $(1,0)$ и $(0,1)$. Точки a и b разделяются связным замкнутым множеством $\varphi_E(F)$, где $F \subset \mathbb{I}^2$ есть квадрат с вершинами $(0, 1/2)$, $(1/2, 0)$, $(1, 1/2)$, $(1/2, 1)$. А каждая точка, отличная от a и b , имеет такую фундаментальную систему окрестностей $\{U_n\}$, что каждое множество $\text{Fr}(U_n)$ является разделителем.

Предположим, что существует монотонная функция g , разделяющая точки a и b . Согласно предложению 1.2 существует функция f такая, что $f(X) = \mathbb{I}$, $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Рассмотрим связные открытые множества $A = f^{-1}((1/5; 2/5))$ и $B = f^{-1}((3/5; 4/5))$. Отметим, что следующие прообразы факторного отображения φ_E будут открытыми и связными множествами в $\mathbb{I}^2$:

$$C = \varphi_E^{-1}(A), \quad D = \varphi_E^{-1}(B).$$

Поскольку множества $\{0\} \times \mathbb{I}$ и $\{1\} \times \mathbb{I}$ связны, а функция $f \circ \varphi_E$ удовлетворяет условию Дарбу, то $C \cap (\{0\} \times \mathbb{I}) \neq \emptyset$ и $C \cap (\{1\} \times \mathbb{I}) \neq \emptyset$. Поскольку множества $\mathbb{I} \times \{0\}$ и $\mathbb{I} \times \{1\}$ связны, то $D \cap (\mathbb{I} \times \{0\}) \neq \emptyset$ и $D \cap (\mathbb{I} \times \{1\}) \neq \emptyset$. Всякое открытое связное подмножество $\mathbb{I}^2$ является дугообразно связным. Поэтому, в силу классической теоремы Жордана о разбиении плоскости простой замкнутой кривой на две дизъюнктные области, множества C и D обязаны пересекаться, что невозможно в силу их определения. Мы показали, что точки a и b не разделяются монотонной функцией.

4. ЛИНЕЙНАЯ СТРУКТУРА $CM(X)$

Вообще говоря, сумма двух монотонных функций не является монотонной функцией.

Предложение 4.1. *Для любой функции $f \in CM(X)$, отличной от константы, существует функция $g \in CM(X)$ такая, что функция $f + g$ не монотонна.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $[-1; 1] \subset f(X)$. Положим $g(x) = -(f(x))^3$. Покажем, что функция $F(x) = f(x) + g(x) = f(x) - (f(x))^3$ не монотонна. Ясно, что $f(x) - (f(x))^3 = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ равно -1 , 0 или 1 . Поэтому множество

$$F^{-1}(0) = f^{-1}(-1) \cup f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$$

представляется в виде объединения трех замкнутых непустых дизъюнктных множеств. Следовательно, $F^{-1}(0)$ несвязно и функция F не монотонна. $\square$

Пусть $L_0 = \{f : f \equiv c, c \in \mathbb{R}\}$ есть семейство всех постоянных функций на X . Нетрудно убедиться в том, что это линейное пространство и $L_0 \subset CM(X)$. Из предложения 4.1 легко получается следующее утверждение.

Следствие 4.2. *$CM(X)$ является линейным пространством в том и только в том случае, если X — функционально t -вырожденное пространство.*

Предложение 4.3. *Пусть $f \in CM(X)$. Тогда $L_1 = \{k \cdot f(x) : k \in \mathbb{R}\}$ и $L_2 = \{k \cdot f(x) + c : k \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$ являются линейными пространствами в $CM(X)$.*

Доказательство. Очевидно, что множества L_1 и L_2 образуют линейные пространства. Непрерывность и монотонность функций из L_1 и L_2 следует из непрерывности и монотонности функции f и функций $y_1(t) = k \cdot t$, $y_2(t) = k \cdot t + c$, а также того факта, что композиция непрерывных и монотонных функций является непрерывной и монотонной. $\square$

Оказывается, что в ряде случаев этими пространствами исчерпываются все линейные подпространства $CM(X)$.

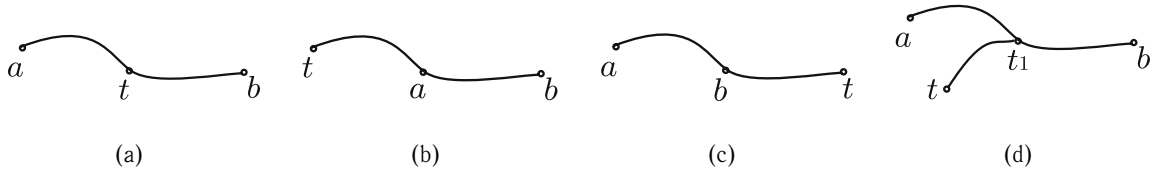


Рис. 6

Теорема 4.4. Пусть Y — обобщенно дугообразно связное всюду плотное множество в пространстве X , Γ — семейство всех обобщенных дуг в Y , L — невырожденное линейное пространство, $L \subset CM(X)$ и L монотонно на Γ . Тогда L представляется одной из следующих формул:

- 1) $L = \{f : f \equiv c, c \in \mathbb{R}\}$;
- 2) $L = \{k \cdot f(x) : k \in \mathbb{R}\}$ для некоторой функции $f \in CM(X) \setminus L_0$;
- 3) $L = \{k \cdot f(x) + c : k \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$ для некоторой функции $f \in CM(X) \setminus L_0$.

Доказательство. Если все функции из L суть константы, то выполняется условие 1) и теорема доказана. Предположим, что L содержит все константы и некоторую функцию f , отличную от константы, и покажем, что выполняется условие 3). Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in L$. Докажем, что существуют числа $k \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}$ такие, что $\varphi(x) = k \cdot f(x) + c$.

Существуют точки $a, b \in Y$ такие, что $f(a) < f(b)$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x) + f(x), & \text{если } \varphi(a) = \varphi(b), \\ \varphi(x), & \text{если } \varphi(a) < \varphi(b), \\ -\varphi(x), & \text{если } \varphi(a) > \varphi(b). \end{cases}$$

Ясно, что $g \in L$ и существуют числа k_1 и k_2 такие, что

$$\varphi(x) = k_1 \cdot f(x) + k_2 \cdot g(x) \quad (4)$$

Заметим, что $g(a) < g(b)$. Положим

$$h(x) = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (f(x) - f(a)) + g(a). \quad (5)$$

Отметим, что $h \in L$ и $h(a) = g(a)$, $h(b) = g(b)$. Докажем, что при всех $t \in Y$ выполняется равенство $h(t) = g(t)$. В силу обобщенной дугообразной связности, в пространстве Y существуют обобщенные дуги $\widehat{ab}$ и $\widehat{at}$. Будем рассматривать их как линейно упорядоченные множества. Пусть p есть самая правая точка из пересечения $\widehat{ab} \cap \widehat{at}$, $\widehat{ap}$ — часть дуги $\widehat{ab}$, а $\widehat{pt}$ — часть дуги $\widehat{at}$. Будем рассматривать вместо дуги $\widehat{at}$ дугу, полученную соединением участков $\widehat{ap}$ и $\widehat{pt}$. Тогда $\widehat{ab} \cap \widehat{at}$ есть связное множество. Возможны следующие случаи.

1. $\widehat{at} \cap \widehat{ab} = \widehat{at}$, т.е. $p = t$ (см. рис. 6(a)). В этом случае рассмотрим функцию

$$m(x) = h(x) - g(x).$$

Ясно, что $m \in L$, $m(a) = 0$, $m(b) = 0$. Поскольку сужение m на дугу $\widehat{ab}$ монотонно, то $m(t) = 0$. Следовательно, $h(t) = g(t)$.

2. $\widehat{at} \cap \widehat{ab} = \{a\}$, т.е. $p = a$ (см. рис. 6(b)). Поскольку на дуге $\widehat{tab}$ функция f монотонна, то $g(t) < g(b)$. Рассмотрим функцию

$$m(x) = \frac{g(x) - g(b)}{g(t) - g(b)} \cdot (h(t) - h(b)) - (h(x) - h(b)).$$

Ясно, что $m \in L$, $m(t) = 0$, $m(b) = 0$. Поскольку на дуге $\widehat{tab}$ функция m монотонна, то $m(a) = 0$, а значит $h(t) = g(t)$.

3. $\widehat{at} \cap \widehat{ab} = \widehat{ab}$, т.е. $p = b$ (см. рис. 6(c)). Поскольку на дуге $\widehat{abt}$ функция f монотонна, то $g(a) < g(t)$. Рассмотрим функцию

$$m(x) = \frac{g(x) - g(a)}{g(t) - g(a)} \cdot (h(t) - h(a)) - (h(x) - h(a)).$$

Ясно, что $m \in L$, $m(t) = 0$, $m(a) = 0$. Поскольку на дуге $\widehat{abt}$ функция m монотонна, то $m(b) = 0$, а значит $h(t) = g(t)$.

4. $\widehat{at} \cap \widehat{ab} = \widehat{at_1}$, т.е. $p \notin \{a, b, t\}$, $p = t_1$ (см. рис. 6(d)). Из монотонности g на дуге $\widehat{ab}$ следует, что $g(a) \leq g(t_1) < g(b)$ или $g(a) < g(t_1) \leq g(b)$. Для определенности, $g(a) \leq g(t_1) < g(b)$. В силу монотонности g на дуге $\widehat{tt_1b}$ имеем $g(t) < g(b)$. В силу пункта 1 $h(t_1) = g(t_1)$. Рассмотрим функцию

$$m(x) = \frac{g(x) - g(b)}{g(t) - g(b)} \cdot (h(t) - h(b)) - (h(x) - h(b)).$$

Ясно, что $m \in L$, $m(t) = 0$, $m(b) = 0$. Поскольку на дуге $\widehat{tt_1b}$ функция m монотонна, то $m(t_1) = 0$, а значит $h(t) = g(t)$.

Мы показали, что для всех $t \in Y$ имеем $h(t) = g(t)$. Поскольку $\overline{Y} = X$, то для всех $t \in X$ имеем $h(t) = g(t)$. Рассмотрев выражения (4) и (5), заключаем, что для некоторых $k \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}$ имеем $\varphi(x) = k \cdot f(x) + c$. Формула п. 3) доказана.

Предположим, что L не содержит ненулевых констант. Выберем произвольно $f \in L$, $f \neq \theta$. Рассмотрим линейное пространство $L_1 = \{g(x) + b : g \in L, b \in \mathbb{R}\}$. Ясно, что $L_1 \subset CM(X)$ и L_1 содержит константы и функцию f , отличную от константы. Следовательно, согласно доказанному выше, $L_1 = \{k \cdot f(x) + c : k \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$. Для произвольной функции $g \in L$ получаем представление $g(x) + 0 = k \cdot f(x) + c$. Отсюда следует, что $c = g(x) - k \cdot f(x)$. Так как L не содержит констант, имеем $c = 0$. Таким образом $g(x) = k \cdot f(x)$, формула п. 2) доказана. $\square$

Из теорем 2.4 и 4.4 легко получается следующий результат.

Следствие 4.5. *Предположим, что пространство X удовлетворяет одному из следующих условий:*

- 1) X — обобщенно локально дугообразно связное пространство, удовлетворяющее условию единственности пути;
- 2) X — обобщенно дугообразно связное пространство, $\text{ord } X < \infty$;
- 3) $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где X_i есть либо дуга, либо точка.

Кроме того, предположим, что L — невырожденное линейное подпространство $CM(X)$. Тогда L представляется одной из следующих формул:

- 1) $L = \{f : f \equiv c, c \in \mathbb{R}\}$;
- 2) $L = \{k \cdot f(x) : k \in \mathbb{R}\}$ для некоторой функции $f \in CM(X) \setminus L_0$;
- 3) $L = \{k \cdot f(x) + c : k \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$ для некоторой функции $f \in CM(X) \setminus L_0$.

Пример 4.6. В $CM(\mathbb{I}^2)$ существует линейное подпространство L такое, что алгебраическая размерность L равна 3.

Рассмотрим пространство всех линейных функций на $\mathbb{I}^2$:

$$L = \left\{ f = f(x, y) : f(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что все функции из L непрерывны и монотонны.

5. Условия на X , при которых $CM(X)$ замкнуто, нигде не плотно в $C_p(X)$ и $C(X)$

Теорема 5.1. $CM(X)$ нигде не плотно в $C(X)$ для любого пространства X .

Доказательство. Множество всех констант является нигде не плотным множеством в $C(X)$. Предположим, что F — монотонная непрерывная функция, отличная от константы. $F(X)$ — связное множество. Без ограничения общности можно считать, что $[-1; 1] \subset F(X)$. Зафиксируем $0 < \varepsilon < 1$. В окрестности $\mathcal{O}(F, \varepsilon)$ найдем открытое множество, не содержащее монотонных функций.

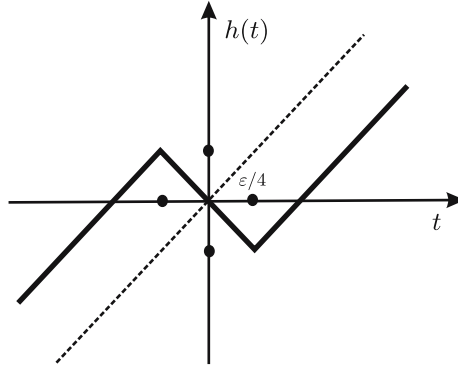


Рис. 7

Рассмотрим вспомогательную непрерывную функцию $h(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (см. рис. 7)

$$h(t) = \begin{cases} t - \frac{\varepsilon}{2}, & \text{если } t \geq \frac{\varepsilon}{4}, \\ -t, & \text{если } -\frac{\varepsilon}{4} < t < \frac{\varepsilon}{4}, \\ t + \frac{\varepsilon}{2}, & \text{если } t \leq -\frac{\varepsilon}{4}. \end{cases}$$

Пусть $f(x) = h(F(x))$. Ясно, что $f \in \mathcal{O}(F, 3\varepsilon/4)$.

Положим $U = \mathcal{O}(f, \varepsilon/8)$. Очевидно, что $U \subset \mathcal{O}(F, \varepsilon)$. Покажем, что всякая функция $g \in U$ не является монотонной. Для этого убедимся в том, что $g^{-1}(0)$ — несвязное множество.

Поскольку $g \in U$, то $g^{-1}(0) \subset f^{-1}((-\varepsilon/8; \varepsilon/8))$. Из определения f имеем

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\left(-\frac{\varepsilon}{8}; \frac{\varepsilon}{8}\right)\right) &= F^{-1}\left(h^{-1}\left(\left(-\frac{\varepsilon}{8}; \frac{\varepsilon}{8}\right)\right)\right) = \\ &= F^{-1}\left(\left(-\frac{5\varepsilon}{8}; -\frac{3\varepsilon}{8}\right) \cup \left(-\frac{\varepsilon}{8}; \frac{\varepsilon}{8}\right) \cup \left(\frac{3\varepsilon}{8}; \frac{5\varepsilon}{8}\right)\right) = \\ &= F^{-1}\left(\left(-\frac{5\varepsilon}{8}; -\frac{3\varepsilon}{8}\right)\right) \cup F^{-1}\left(\left(-\frac{\varepsilon}{8}; \frac{\varepsilon}{8}\right)\right) \cup F^{-1}\left(\left(\frac{3\varepsilon}{8}; \frac{5\varepsilon}{8}\right)\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Положим

$$A = F^{-1}\left(\left[-\frac{5\varepsilon}{8}; -\frac{3\varepsilon}{8}\right]\right), \quad B = F^{-1}\left(\left[-\frac{\varepsilon}{8}; \frac{\varepsilon}{8}\right]\right), \quad C = F^{-1}\left(\left[\frac{3\varepsilon}{8}; \frac{5\varepsilon}{8}\right]\right).$$

Это непустые замкнутые связные дизъюнктные множества в X . Из равенства (6) следует, что $g^{-1}(0) \subset A \cup B \cup C$. Покажем, что $g^{-1}(0) \cap A \neq \emptyset$ и $g^{-1}(0) \cap C \neq \emptyset$.

Пусть $a_1 \in F^{-1}(-5\varepsilon/8)$, $a_2 \in F^{-1}(-3\varepsilon/8)$. Тогда $f(a_1) = -\varepsilon/8$, $f(a_2) = \varepsilon/8$. Следовательно, $g(a_1) < 0$ и $g(a_2) > 0$. Поскольку множество A связно, существует $a_3 \in A$ такое, что $g(a_3) = 0$. Таким образом, $a_3 \in g^{-1}(0) \cap A$.

Проведем аналогичное рассмотрение для множества C . Пусть $c_1 \in F^{-1}(3\varepsilon/8)$, $c_2 \in F^{-1}(5\varepsilon/8)$. Тогда $f(c_1) = -\varepsilon/8$, $f(c_2) = \varepsilon/8$. Следовательно, $g(c_1) < 0$ и $g(c_2) > 0$. Поскольку множество C связно, существует $c_3 \in C$ такое, что $g(c_3) = 0$. Таким образом $c_3 \in g^{-1}(0) \cap C$.

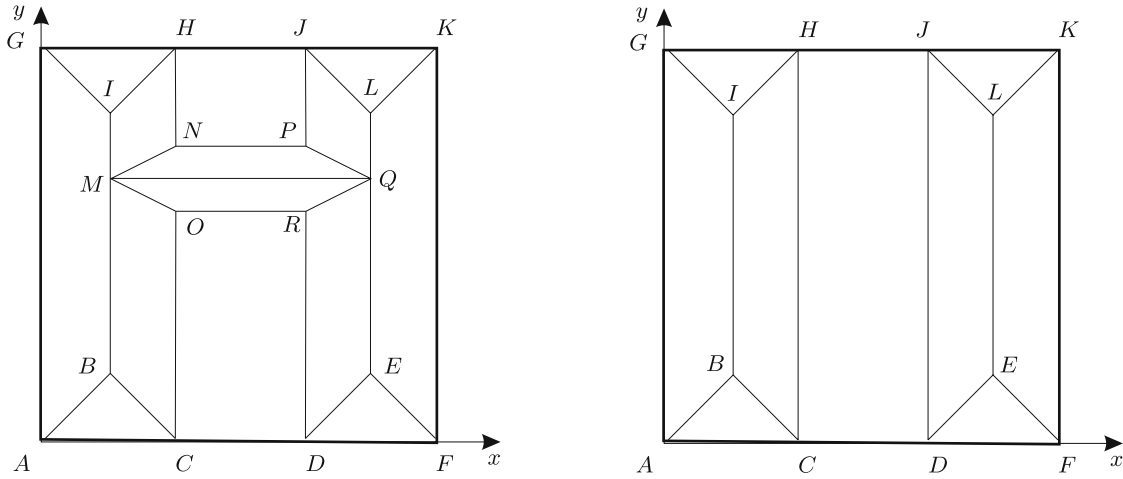
Следовательно, множество $g^{-1}(0)$ несвязно. $\square$

Следствие 5.2. $C_p(X) \setminus CM_p(X)$ всюду плотно в $C_p(X)$.

Это следует из того, что семейство $C(X) \setminus CM(X)$ всюду плотно в $C(X)$, тем более, в $C_p(X)$.

Теорема 5.3. Пусть Γ — допустимое семейство обобщенных дуг пространства X , семейство $CM(X)$ монотонно на Γ . Тогда $CM_p(X)$ замкнуто и нигде не плотно в $C_p(X)$.

Доказательство. Пусть g — не монотонная непрерывная функция. В силу предложения 2.2, существует обобщенная дуга $\widehat{xy} \in \Gamma$ такая, что сужение $g|_{\widehat{xy}}$ не монотонно. Без ограничения общности

Рис. 8. Графики функций f_n и f (вид сверху)

можно считать, что существует $z \in \widehat{xy}$ такое, что $g(z) > g(x)$, $g(z) > g(y)$. Положим $a = g(z)$, $b = \max\{g(x), g(y)\}$. Пусть $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Рассмотрим следующую окрестность функции g в $C_p(X)$:

$$U = \mathcal{O}(g, \varepsilon, x, y, z).$$

Для любой функции $f \in U$ имеем $f(x) < \frac{a+b}{2}$, $f(y) < \frac{a+b}{2}$ и $f(z) > \frac{a+b}{2}$. Поэтому сужение f на дугу $\widehat{xy} \in \Gamma$ не монотонно. Так как, по условию, $CM_p(X)$ монотонно на Γ , заключаем, что $f \notin CM_p(X)$. Таким образом, приходим к заключению, что $U \subset C_p(X) \setminus CM_p(X)$.

Мы показали, что $C_p(X) \setminus CM_p(X)$ открыто в $C_p(X)$, значит, $CM_p(X)$ замкнуто в $C_p(X)$. В силу следствия 5.2 $C_p(X) \setminus CM_p(X)$ всюду плотно в $C_p(X)$, следовательно, $CM_p(X)$ нигде не плотно в $C_p(X)$. $\square$

Следствие 5.4. *Предположим, что пространство X удовлетворяет одному из следующих условий:*

- 1) X — обобщенно локально дугообразно связное пространство, удовлетворяющее условию единственности пути;
- 2) X — обобщенно дугообразно связное пространство, $\text{ord } X < \mathfrak{c}$;
- 3) $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где X_i есть либо дуга, либо точка.

Тогда $CM_p(X)$ замкнуто и нигде не плотно в $C_p(X)$.

Доказательство. Результат легко следует из теорем 2.4 и 5.3. $\square$

Пример 5.5. $CM_p(\mathbb{I}^2)$ не замкнуто в $C_p(\mathbb{I}^2)$. Существует последовательность $\{f_n\} \subset CM_p(\mathbb{I}^2)$ такая, что $\{f_n\}$ поточечно сходится к непрерывной функции f , при этом f не монотонна.

Все функции $\{f_n\}$ и функция f задаются кусочно линейно. Во избежании громоздких формул, опишем графики этих функций, как подмножества $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим следующие точки в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} A &= (0; 0; 0), & B &= (1/6; 1/6; 1), & C &= (1/3; 0; 0), & D &= (2/3; 0; 0), \\ E &= (5/6; 1/6; 1), & F &= (1; 0; 0), & G &= (0; 1; 0), & H &= (1/3; 1; 0), \\ I &= (1/6; 5/6; 1), & J &= (2/3; 1; 0), & K &= (1; 1; 0), & L &= (5/6; 5/6; 1), \\ M &= (1/6; 5/6 - 2/(n+5); 1), & N &= (1/3; 5/6 - 1/(n+5); 0), \\ O &= (1/3; 5/6 - 3/(n+5); 0), & P &= (2/3; 5/6 - 1/(n+5); 0), \\ Q &= (5/6; 5/6 - 2/(n+5); 1), & R &= (2/3; 5/6 - 3/(n+5); 0). \end{aligned}$$

График функции f_n зададим, как объединение выпуклых многоугольников $ABC, DEF, GHI, JKL, MNPQ, MOQR, AGIB, KLEF, BCOM, MIHN, DEQR, PQLJ, HJPN, CDRO$. График функции f зададим, как объединение выпуклых многоугольников $ABC, DEF, GHI, JKL, AGIB, KLEF, BCHI, DELJ, CDJH$ (рис. 8).

Нетрудно проверить, что все функции f_n монотонны, а функция f не монотонна, и предел последовательности $\{f_n\}$ равен f .

Теорема 5.6. Пусть X — нормальное счетно компактное пространство. Тогда $CM(X)$ замкнуто в $C(X)$.

Доказательство. Предположим, что последовательность функций $\{f_n\} \subset CM(X)$ равномерно сходится к функции $f \in C(X)$. Покажем, что функция f монотонна.

Пусть $c \in \mathbb{R}$ и $f^{-1}(c) \neq \emptyset$. Положим $\varepsilon_n = 1/3^n$. Для всякого n найдется $N(n)$ такое, что для всех $x \in X$ выполняется

$$|f(x) - f_{N(n)}(x)| < \frac{\varepsilon_n}{2},$$

причем можно считать, что $N(n+1) > N(n)$. Докажем, что

$$f^{-1}(c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{N(n)}^{-1}([c - \varepsilon_n, c + \varepsilon_n]). \quad (7)$$

Если $f(x^*) = c$, то $|f(x^*) - f_{N(n)}(x^*)| < \varepsilon_n/2$. Значит, $f_{N(n)}(x^*) \in [c - \varepsilon_n, c + \varepsilon_n]$ для всех n . Обратно, если для всех n имеем $c - \varepsilon_n \leq f_{N(n)}(x^*) \leq c + \varepsilon_n$, то $c = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{N(n)}(x^*) = f(x^*)$.

Докажем, что

$$f_{N(n+1)}^{-1}([c - \varepsilon_{n+1}, c + \varepsilon_{n+1}]) \subseteq f_{N(n)}^{-1}([c - \varepsilon_n, c + \varepsilon_n]).$$

Пусть $x^* \in f_{N(n+1)}^{-1}([c - \varepsilon_{n+1}, c + \varepsilon_{n+1}])$, т.е. $|f_{N(n+1)}(x^*) - c| \leq \varepsilon_{n+1}$. По выбору $N(n)$ и $N(n+1)$ имеем, что

$$|f_{N(n+1)}(x^*) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}, \quad |f_{N(n)}(x^*) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

Из этих трех неравенств получаем, что

$$|f_{N(n)}(x^*) - c| \leq \varepsilon_{n+1} + \frac{\varepsilon_n}{2} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{2} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) \varepsilon_n = \varepsilon_n.$$

Значит, $x^* \in f_{N(n)}^{-1}([c - \varepsilon_n, c + \varepsilon_n])$.

Для всякого n множество $f_{N(n)}^{-1}([c - \varepsilon_n, c + \varepsilon_n])$ связно и замкнуто, поскольку функция $f_{N(n)}$ монотонна и непрерывна.

Таким образом, мы представили $f^{-1}(c)$ в виде (7), т.е. счетного пересечения вложенных друг в друга связных замкнутых множеств в нормальном счетно компактном пространстве, следовательно, это множество связно согласно предложению 1.8.

Монотонность функции f установлена. Поскольку характер $C(X)$ счетен, то $CM(X)$ замкнуто в $C(X)$. $\square$

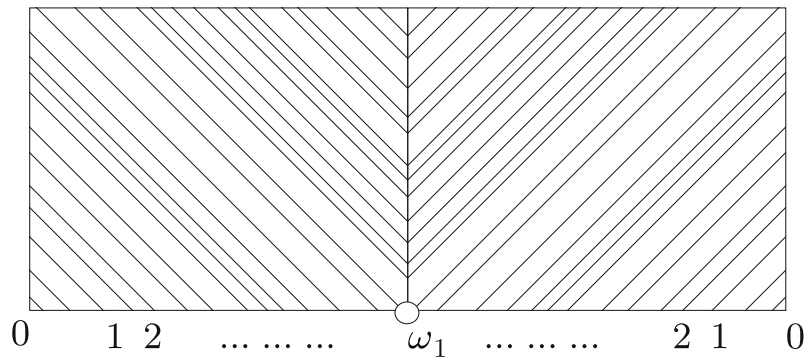
Пример 5.7. Существует псевдокомпакт X такой, что $CM(X)$ не замкнуто в $C(X)$.

Пусть V есть длинный отрезок (см. пример 3.19). На прямой сумме $V \oplus V$ рассмотрим отношение эквивалентности E , отождествляющее точки ω_1 этих пространств. Рассмотрим факторпространство $Y = (V \oplus V)/E$ и тихоновское произведение $Z = Y \times \mathbb{I}$. И, наконец, положим $X = Z \setminus \{(\omega_1, 0)\}$ (рис. 9). Нетрудно убедиться в том, что пространство X псевдокомпактно.

Рассмотрим следующую последовательность монотонных функций на пространстве X , предполагая, что $x \in Y$, а $y \in \mathbb{I}$:

$$f_n((x, y)) = \begin{cases} y - \frac{1}{n}, & \text{если } y \geq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } y < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Положим $f((x, y)) = y$. Заметим, что последовательность ограниченных монотонных непрерывных функций f_n равномерно сходится к ограниченной непрерывной функции f . Предельная функция f не является монотонной, поскольку $f^{-1}(0) = \{(x, 0) \mid x \in Y \setminus \{\omega_1\}\}$ есть несвязное множество.

Рис. 9. Пространство X из примера 5.7

6. МЕТРИЗУЕМОСТЬ $CM_p(X)$

Классический общеизвестный результат C_p -теории (см. [4, теорема I.1.1]) гласит, что $|X| = \chi(C_p(X)) = \omega(C_p(X))$. Из него следует эквивалентность следующих условий:

- 1) $C_p(X)$ метризуемо;
- 2) характер $C_p(X)$ равен $\aleph_0$;
- 3) вес $C_p(X)$ равен $\aleph_0$;
- 4) X счетно.

В этом разделе устанавливаются критерии метризуемости $CM_p(X)$ для линейно упорядоченных пространств X (теоремы 6.7 и 6.9) и их обобщений (следствие 6.5).

Предложение 6.1. Пусть $(X, <)$ — связное компактное линейно упорядоченное пространство. Тогда $CM_p(X) \approx CM(X)$, точнее, топология поточечной сходимости совпадает с топологией равномерной сходимости.

Доказательство. Пусть $X = \{x : a \leq x \leq b\}$. Топология равномерной сходимости не слабее топологии поточечной сходимости. Поэтому покажем, что топология $CM_p(X)$ не слабее топологии $CM(X)$. Зафиксируем $f \in CM(X)$ и $\delta > 0$. Если $f \equiv \text{const}$, то нетрудно убедиться, что

$$\mathcal{O}(f, \delta, a, b) \subset \mathcal{O}(f, \delta).$$

Без ограничения общности можно считать, что f — монотонно неубывающая функция. Разобьем отрезок $[f(a); f(b)]$ на интервалы, диаметра меньше δ :

$$f(a) = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = f(b).$$

Выберем точки $x_i \in f^{-1}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нетрудно убедиться, что

$$\mathcal{O}(f, \delta, a, x_1, x_2, \dots, x_n, b) \subset \mathcal{O}(f, \delta).$$

Предложение доказано. □

Предложение 6.2. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, где X_i — связные линейно упорядоченные компакты, X не обязательно связное пространство. Рассмотрим семейство кусочно монотонных функций на X :

$$\mathcal{F} = \left\{ g \in C(X) : g|_{X_i} \text{ — монотонная функция для всех } i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Тогда топология поточечной сходимости совпадает с топологией равномерной сходимости на множестве $\mathcal{F}$.

Доказательство. Как и выше, достаточно показать, что топология поточечной сходимости не слабее топологии равномерной сходимости. Зафиксируем функцию $f \in \mathcal{F}$ и $\delta > 0$. Для каждого

$i = 1, 2, \dots, n$ рассмотрим семейство $\mathcal{F}_i = \{g|_{X_i} : g \in \mathcal{F}\}$. Поскольку $\mathcal{F}_i \subset CM(X_i)$, то согласно предложению 6.1 найдется конечный набор точек $\{x_l^{(i)}\}$ такой, что

$$\mathcal{O}(f, \delta, \{x_l^{(i)}\}) \cap \mathcal{F}_i \subset \mathcal{O}(f, \delta) \cap \mathcal{F}_i.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\mathcal{O}\left(f, \delta, \bigcup_{i=1}^n \{x_l^{(i)}\}\right) \subset \mathcal{O}(f, \delta).$$

Предложение доказано. $\square$

Следствие 6.3. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, где X_i — связные линейно упорядоченные компакты. Тогда $CM_p(X) \approx CM(X)$, точнее, топология поточечной сходимости совпадает с топологией равномерной сходимости.

Доказательство. Каждое X_i можно представить в виде $X_i = [a_i; b_i]$, где $[a_i; b_i] = \{x \in X : a_i \leq x \leq b_i\}$.

Вначале покажем, что $\text{ord } X < \aleph_0$. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Без ограничения общности можно считать, что $x \in X_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, и $x \notin X_i$, $i = k+1, k+2, \dots, n$. Рассмотрим произвольную окрестность $U \in \mathcal{N}(x)$ такую, что $U \cap \bigcup_{i=k+1}^n X_i = \emptyset$. Поскольку все X_i линейно упорядочены, то найдутся такие интервалы (или полуинтервалы) $(c_i; d_i) \subset X_i$, что $x \in (c_i; d_i) \subset U$, $i = 1, 2, \dots, k$. Рассмотрим открытое множество

$$V = \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^k ([a_i; c_i] \cup [d_i; b_i]) \right) \cap U.$$

Ясно, что $x \in V \subset U$ и $\text{Fr}(V) \subset \{c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_k, d_k\}$. Следовательно, $\text{ord } X < \aleph_0$.

Согласно теореме 2.4 $CM(X)$ монотонно на семействе $\{X_i : i = 1, \dots, n\}$.

Таким образом, семейство $CM(X)$ вложено в семейство $\mathcal{F}$ из предложения 6.2. Следовательно, топология поточечной сходимости совпадает с топологией равномерной сходимости. $\square$

Напомним, что если $Y \subset X$ и $\mathcal{F}(X)$ есть семейство функций на X , то через $\mathcal{F}(Y|X)$ будем обозначать семейство сужений на Y функций из $\mathcal{F}(X)$.

Теорема 6.4. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где X_i — связные линейно упорядоченные компакты, и $CM(X)$ монотонно на $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Тогда $CM_p(X)$ метризуемо.

Доказательство. Обозначим $Y_n = \bigcup_{i=1}^n X_i$. Рассмотрим семейства функций

$$\mathcal{F}_n = CM_p(Y_n|X)$$

и отображения $\phi_n : CM_p(X) \rightarrow \mathcal{F}_n$, задаваемые формулами

$$\phi_n(f) = f|_{Y_n}, \quad f \in CM_p(X).$$

Так как семейство $CM(X)$ монотонно на $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, то пространства $\mathcal{F}_n$ метризуемы согласно предложению 6.2 как подпространства $C(Y_n)$. Нетрудно убедиться, что семейство $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ разделяет точки и замкнутые множества в $CM_p(X)$. Следовательно, диагональное произведение

$$\phi = \Delta\phi_n : CM_p(X) \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

является гомеоморфным вложением [3, теорема 2.3.20]. Пространство $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ метризуемо как счетное произведение метризуемых пространств, поэтому $CM_p(X)$ метризуемо. $\square$

Из теорем 2.4 и 6.4 получаем следующий результат.

Следствие 6.5. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где X_i — связные линейно упорядоченные компакты, и $\text{ord } X < \mathfrak{c}$. Тогда $CM_p(X)$ метризуемо.

Следствие 6.6. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где X_i либо дуга, либо точка. Тогда $CM_p(X)$ является метризуемым пространством со счетной базой.

Доказательство. Согласно теореме 2.4, $CM(X)$ монотонно на $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Как и выше, рассмотрим семейства $\mathcal{F}_n$, отображения ϕ_n и диагональное вложение $\phi = \Delta\phi_n$. Поскольку $CM_p(\mathbb{I})$ является метризуемым пространством со счетной базой, этим свойством обладает пространство $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ и пространство $CM_p(X)$. $\square$

Теорема 6.7. Пусть $(X, <)$ — линейно упорядоченное пространство. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $CM_p(X)$ метризуемо полной метрикой;
- 2) $CM_p(X)$ метризуемо;
- 3) характер $CM_p(X)$ равен $\aleph_0$;
- 4) псевдохарактер $CM_p(X)$ равен $\aleph_0$;
- 5) $\chi(CM_p(X), \theta) = \aleph_0$;
- 6) $\psi(CM_p(X), \theta) = \aleph_0$;
- 7) X σ -компактно;
- 8) $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i; b_i]$, где $[a_i; b_i] = \{x \in X : a_i \leq x \leq b_i\}$ — компакт, $[a_i; b_i] \subset [a_{i+1}; b_{i+1}]$.

Доказательство. Очевидно, что $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 6), 3) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6), 8) \Rightarrow 7)$.

Покажем, что из 7) следует 8) и 1). Пусть $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — компакты. Обозначим $D_i = \bigcup_{n=1}^i F_n$. Ясно, что $D_i \subset D_{i+1}$ и D_i — компакт. Пусть $a_i = \min D_i$, а $b_i = \max D_i$. Рассмотрим множества $X_i = \{x \in X : a_i \leq x \leq b_i\}$. Ясно, что $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ и $X_i \subset X_{i+1}$. Следовательно, 8) доказано. Множества X_i суть связные линейно упорядоченные компакты. В силу предложения 1.5, семейство $CM(X)$ монотонно на $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. В силу того, что $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, из теоремы 6.4 следует метризуемость $CM_p(X)$. Нетрудно убедиться, что метрика d , построенная в теореме 6.4, полна.

Покажем, что из 6) следует 8). Пусть $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность окрестностей функции $\theta \equiv 0$ в $CM_p(X)$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \{\theta\}$. Можно считать, что это стандартные базовые окрестности:

$U_k = \mathcal{O}(\theta, \varepsilon_k, x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k)$. Обозначим $F_i = \bigcup_{k=1}^i \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k\}$. Если в X есть минимальный или максимальный элемент, то добавим их во все множества F_i . Ясно, что $F_i \subset F_{i+1}$. Далее, для каждого i выберем в конечном множестве F_i минимальный элемент a_i и максимальный элемент b_i . Рассмотрим множества $X_i = \{x \in X : a_i \leq x \leq b_i\}$. Эти множества суть связные линейно упорядоченные компакты. Поскольку $F_i \subset F_{i+1}$, то $X_i \subset X_{i+1}$. Наконец, покажем, что $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Предположим, что найдется точка $y \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. Заметим, что y не является ни максимальным, ни минимальным элементом в X (поскольку они попадают во все X_i). Так как $y \notin X_1$, то либо $y < a_1$, либо $y > b_1$. Без ограничения общности можно считать, что $y > b_1$. Тогда для всех i имеем $y > b_i$. Выберем точку z так, что $z > y$. Согласно теореме 1.6 найдется монотонная непрерывная функция $f : X \rightarrow \mathbb{I}$ такая, что $f(y) = 0$, $f(z) = 1$. Так как при $x \leq y$ имеем $f(x) = 0$, то для всех k $f \in U_k$. А поскольку $f \neq \theta$, то получаем противоречие. $\square$

Напомним, что V_0 обозначает длинную прямую, а V — длинный отрезок из примера 3.19. V_0 является не σ -компактным линейно упорядоченным пространством, V — линейно упорядоченный компакт веса $\aleph_1$.

Пример 6.8. Псевдохарактер $CM_p(V_0)$ равен $\aleph_1$. Действительно, рассмотрим семейство открытых множеств

$$W_{\alpha,n} = \mathcal{O}(\theta, 1/n, p_\alpha) \cap CM_p(V_0), \quad \alpha < \omega_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь через p_α мы обозначили точку $(\alpha, 0) \in V_0$.

Нетрудно убедиться, что $\bigcap_{\alpha,n} W_{\alpha,n} = \{\theta\}$ и мощность семейства $\{W_{\alpha,n}\}$ равна $\aleph_1$.

Поскольку пространство V_0 не является σ -компактным, то согласно теореме 6.7 получаем, что псевдохарактер $CM_p(V_0)$ несчетен. Следовательно, псевдохарактер $CM_p(V_0)$ равен $\aleph_1$.

Теорема 6.9. Пусть $(X, <)$ — линейно упорядоченное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $CM_p(X)$ — метризуемое полной метрикой сепарабельное пространство;
- 2) $CM_p(X)$ — метризуемое сепарабельное пространство;
- 3) $X \approx [0; 1]$, либо $X \approx [0; 1)$, либо $X \approx (0; 1)$.

Доказательство. Очевидно, что из 1) следует 2). Покажем, что из 2) следует 3). Согласно теореме 6.7 пространство X представляется в виде $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i; b_i]$, где $[a_i; b_i] = \{x \in X : a_i \leq x \leq b_i\}$.

Отметим, что пространство $CM_p^i([a_i; b_i])$ всех непрерывных монотонно возрастающих функций можно вложить в качестве замкнутого подпространства в $CM_p(X)$:

$$f \in CM_p^i([a_i; b_i]) \longleftrightarrow f^* \in CM_p(X), \quad f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } a_i \leq x \leq b_i, \\ f(b_i), & \text{если } x > b_i, \\ f(a_i), & \text{если } x < a_i. \end{cases}$$

Поэтому можно утверждать, что пространство $CM_p^i([a_i; b_i])$ линделефово. Если пространство всех монотонно возрастающих функций над линейно упорядоченным компактом X линделефово, то компакт X метризуем (см. [4, теорема IV.10.10]). Отметим, что всякий метризуемый линейно упорядоченный континуум $[a_i; b_i]$ гомеоморфен отрезку $\mathbb{I}$ (см. [3, 6.3.2b]). В этом случае $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i; b_i]$ обладает счетной базой, а следовательно, вкладывается в $\mathbb{R}$ (см. [3, 6.3.2c]). Всякое связное подмножество $\mathbb{R}$ гомеоморфно либо $[0; 1]$, либо $[0; 1)$, либо $(0; 1)$. Таким образом, 3) доказано.

Покажем, что из 3) следует 1). Ясно, что X в этом случае представляется в виде счетного объединения пространств, гомеоморфных $\mathbb{I}$. Согласно теореме 6.7 $CM_p(X)$ метризуемо полной метрикой, а согласно теореме 6.6 $CM_p(X)$ обладает счетной базой. $\square$

Пример 6.10. Вес $CM_p(V)$ равен $\aleph_1$.

В силу теоремы 6.9 получаем, что вес $CM_p(V)$ несчетен. Рассмотрим произвольную счетную базу $\{B_n\}$ в $\mathbb{R}$ и семейство открытых множеств в $CM_p(V)$:

$$W_{\alpha,n,q} = \{f \in CM_p(V) : f(p_{\alpha,q}) \in B_n\}, \quad 0 \leq \alpha \leq \omega_1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{Q} \cap [0; 1).$$

Здесь через $p_{\alpha,q}$ мы обозначили точку $(\alpha, q) \in V$. Нетрудно убедиться, что семейство $\{W_{\alpha,n,q}\}$ имеет мощность $\aleph_1$ и образует предбазу пространства $CM_p(V)$.

7. ПРОСТРАНСТВА ГУРЕВИЧА, ЛОКАЛЬНАЯ КОМПАКТНОСТЬ И σ -СЧЕТНАЯ КОМПАКТНОСТЬ $CM_p(X)$

В этом разделе устанавливаются условия, при которых пространство $CM_p(X)$ обладает свойствами локальной компактности, σ -компактности, σ -счетной компактности и свойством Гуревича. Известные результаты C_p -теории, полученные в работах Н. В. Величко, В. В. Ткачука, Д. Б. Шахматова и А. В. Архангельского (см. [4, теоремы I.2.1, I.2.4, II.2.10]) устанавливают эквивалентность следующих условий:

- 1) $C_p(X)$ локально компактно;

- 2) $C_p(X)$ σ -компактно;
- 3) $C_p(X)$ σ -счетно компактно;
- 4) $C_p(X)$ обладает свойством Гуревича;
- 5) X конечно.

Основной результат этого раздела — теорема 7.10.

Определение. Отображение $f : X \rightarrow Y$ обладает *свойством Дарбу*, если для всякого связного подмножества $C \subset X$ образ $f(C)$ связан.

Поскольку непрерывный образ связного множества является связным множеством, то всякое непрерывное отображение обладает свойством Дарбу. Вообще говоря, существуют и разрывные отображения, обладающие свойством Дарбу.

Определение. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *периферийно непрерывным*, если для любого $x \in X$ и для любых окрестностей U и V точек x и $f(x)$ соответственно, найдется открытая окрестность W точки x такая, что $\overline{W} \subset U$ и $f(\text{Fr } W) \subset V$.

Очевидно, что любое непрерывное отображение является периферийно непрерывным.

Теорема 7.1. Пусть f — монотонное отображение $X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) f обладает свойством Дарбу;
- 2) f является периферийно непрерывным;
- 3) f является непрерывным.

Доказательство. Достаточно доказать импликации 1) $\Rightarrow$ 3) и 2) $\Rightarrow$ 3). Предположим, что отображение f разрывно в некоторой точке $p \in X$. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $U \in \mathcal{N}(p)$ существует $x \in U$, для которого $|f(x) - f(p)| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим множества $A = f^{-1}([f(p) + \varepsilon; +\infty))$ и $B = f^{-1}((-\infty; f(p) - \varepsilon])$. В силу монотонности f это связные множества. Заметим, что $p \in \overline{A \cup B}$. Следовательно, $p \in \overline{A}$ или $p \in \overline{B}$. Без ограничения общности можно считать, что $p \in \overline{A}$. Рассмотрим множество $C = \{p\} \cup A$. Поскольку A связно, а $p \in \overline{A}$, то C — связное множество.

Для доказательства импликации 1) $\Rightarrow$ 3) отметим, что $f(C) = f(p) \cup f(A)$ представляется в виде объединения непустых отделимых множеств, т.е. несвязно. Получаем противоречие со свойством Дарбу.

Для доказательства импликации 2) $\Rightarrow$ 3) выберем произвольно $q \in A$ и окрестность $U \in \mathcal{N}(p)$ такую, что $q \notin U$. Из определения периферийной непрерывности следует, что существует $W \in \mathcal{N}(p)$ такая, что $\overline{W} \subset U$ и $f(\text{Fr } W) \subset (f(p) - \varepsilon; f(p) + \varepsilon)$. Следовательно, $\text{Fr } W \cap C = \emptyset$. Но тогда C можно представить в виде объединения двух непустых открытых дизъюнктивных множеств $C = (W \cap C) \cup (C \setminus \overline{W})$. Отметим, что $p \in W \cap C$, а $q \in C \setminus \overline{W}$. Получаем противоречие со связностью C . $\square$

Если $(E, <)$ — линейно упорядоченное пространство, то через $CM^i(E)$ будем обозначать семейство всех непрерывных неубывающих функций на E . Это пространство, наделенное топологией равномерной сходимости, будем обозначать $CM^i(E)$, а наделенное топологией поточечной сходимости — $CM_p^i(E)$.

Теорема 7.2. Пусть $f \in CM(X)$, $E = f(X) \subset \mathbb{R}$, $g \in C(X)$. Если для любых $x, y \in X$ из того, что $f(x) \leq f(y)$ следует, что $g(x) \leq g(y)$, то существует единственная функция $h \in CM^i(E)$ такая, что $g = h \circ f$.

Доказательство. Опишем построение функции h . Если $x, y \in f^{-1}(c)$, то $g(x) \leq g(y)$ и $g(y) \leq g(x)$, т.е. $g(x) = g(y)$. Для каждого $c \in E$ определим $h(c) = g(f^{-1}(c))$. Построение функции h корректно, и, очевидно, $g = h \circ f$. Покажем, что функция h монотонна. Пусть $c_1 \leq c_2$. Тогда $h(c_1) = g(f^{-1}(c_1))$, $h(c_2) = g(f^{-1}(c_2))$. Выберем $x \in f^{-1}(c_1)$, $y \in f^{-1}(c_2)$. Поскольку $f(x) \leq f(y)$, то $g(x) \leq g(y)$, а значит $h(c_1) \leq h(c_2)$. Покажем, что h обладает свойством Дарбу. Пусть $A \subset E$, A связно. $h(A) = g(f^{-1}(A))$. Поскольку f монотонна, то $f^{-1}(A)$ связно, а поскольку g непрерывна, то

$g(f^{-1}(A))$ — связное множество. Следовательно, согласно теореме 7.1 h — непрерывная функция. Единственность h очевидна. $\square$

Предложение 7.3. Пусть f — монотонная функция, g — непрерывная функция. Если для всех $x, y \in X$ из $f(x) \leq f(y)$ следует, что $g(x) \leq g(y)$, то при всех $a, b \geq 0$ функция $a \cdot f + b \cdot g$ монотонна.

Доказательство. Из посылок предложения следует, что $a \cdot f(x) + b \cdot g(x) \leq a \cdot f(y) + b \cdot g(y)$. А значит, согласно теореме 7.2 функция $(a \cdot f + b \cdot g)$ монотонна как композиция монотонных функций. $\square$

Следствие 7.4. Пусть $f \in CM(X)$, $g \in C(X)$. Если для всех $x, y \in X$ из того, что $f(x) \leq f(y)$ следует, что $g(x) \leq g(y)$, то g — монотонная функция.

Теорема 7.5. Если $CM_p(X)$ содержит функцию, отличную от константы, то $CM_p(X)$ содержит подпространство Y , замкнутое в $C_p(X)$ и гомеоморфное $CM_p^i(\mathbb{I})$.

Доказательство. Пусть $t \in CM_p(X)$, t не является константой. Тогда согласно предложению 1.2 существует функция $f \in CM_p(X)$ такая, что $f(X) = \mathbb{I}$. Рассмотрим следующее множество:

$$Y = \left\{ g \in C_p(X) : \text{для любых } x, y \in X \text{ из } f(x) \leq f(y) \text{ следует, что } g(x) \leq g(y) \right\}.$$

Покажем, что $C_p(X) \setminus Y$ открыто. Пусть $g \in C_p(X) \setminus Y$. Тогда найдутся точки $x, y \in X$, для которых $f(x) \leq f(y)$, а $g(x) > g(y)$. Пусть $\varepsilon = \frac{g(x) - g(y)}{2}$. Нетрудно убедиться, что вся окрестность $\mathcal{O}(g, \varepsilon, x, y)$ целиком содержится в $C_p(X) \setminus Y$.

Итак, Y замкнуто в $C_p(X)$. В силу следствия 7.4 $Y \subset CM_p(X)$.

Установим взаимно однозначное соответствие между Y и $CM^i(\mathbb{I})$. Согласно теореме 7.2 для каждой функции $g \in Y$ существует единственная функция $h \in CM^i(\mathbb{I})$ такая, что $g = h \circ f$. Обозначим эту функцию через $h = F(g)$. Убедимся, что $F(Y) = CM^i(\mathbb{I})$. Действительно, для всякой функции $h \in CM^i(\mathbb{I})$ функция $g = h \circ f$ лежит в Y в силу того, что h — неубывающая функция. Покажем, что отображение F взаимно однозначно. Пусть $g_1, g_2 \in Y$, $x \in X$, $g_1(x) \neq g_2(x)$, $c = f(x)$. Обозначим $h_1 = F(g_1)$, $h_2 = F(g_2)$. Тогда $h_1(f(x)) \neq h_2(f(x))$, т.е. $h_1(c) \neq h_2(c)$, а значит, $h_1 \neq h_2$.

Рассмотрим произвольную функцию $g \in Y$ и ее образ $h = F(g)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и точку $x \in X$. Пусть $c = f(x)$.

Рассмотрим элементы U и V предбаз пространств Y и $CM_p^i(\mathbb{I})$:

$$U = \mathcal{O}(g, \varepsilon, x) \cap Y, \quad V = \mathcal{O}(h, \varepsilon, c) \cap CM_p^i(\mathbb{I}).$$

Покажем, что $F(U) = V$. Пусть $g_1 \in U$, $h_1 = F(g_1)$. Тогда $|g(x) - g_1(x)| < \varepsilon$, т.е. $|h(f(x)) - h_1(f(x))| < \varepsilon$, а значит, $|h(c) - h_1(c)| < \varepsilon$. Таким образом, $h_1 \in V$, следовательно, $F(U) \subset V$. Пусть $h_1 \in V$. Рассмотрим $g_1 = F^{-1}(h_1)$. Имеем $g_1 = h_1 \circ f$. Тогда $|h(c) - h_1(c)| < \varepsilon$. Имеем:

$$|g(x) - g_1(x)| = |h(f(x)) - h_1(f(x))| = |h(c) - h_1(c)| < \varepsilon.$$

Следовательно, $g_1 \in U$, а значит, $V \subset F(U)$.

Итак, отображение F переводит элементы предбазы Y в элементы предбазы $CM_p^i(\mathbb{I})$. Обратное отображение F^{-1} также переводит элементы предбазы $CM_p^i(\mathbb{I})$ в элементы предбазы Y . Следовательно, отображение F взаимно непрерывно, тем самым, гомеоморфность Y и $CM_p^i(\mathbb{I})$ доказана. $\square$

Предложение 7.6. $CM_p^i(\mathbb{I}) \approx CM^i(\mathbb{I})$.

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 6.1. $\square$

Предложение 7.7. Пространство $CM^i(\mathbb{I})$ не является локально компактным.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и построим последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{O}(\theta, \varepsilon) \cap CM^i(\mathbb{I})$, где $\theta \equiv 0$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \\ n \cdot \varepsilon \cdot x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Если, от противного, $\overline{\mathcal{O}(\theta, \varepsilon)}$ компактно, то из последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $f_{n_k} \rightarrow f^*$. Поскольку $f_n(0) = 0$, то $f^*(0) = 0$, а так как $f_n(x) = \varepsilon$ при $x \in [1/n; 1]$, то $f^*(x) = \varepsilon$ при $x > 0$. Следовательно, функция f^* разрывна. Полученное противоречие доказывает предложение. $\square$

Предложение 7.8. *Пространство $CM^i(\mathbb{I})$ не является σ -счетно компактным.*

Доказательство. Следующие рассуждения близки к рассуждениям, приведенным в [4, гл. I, § 2]. Будем доказывать методом от противного. Предположим, что $CM^i(\mathbb{I})$ σ -счетно компактно. Рассмотрим пространство $Z = \{f \in CM^i(\mathbb{I}) : f(0) = 0\}$. Это замкнутое подмножество $CM^i(\mathbb{I})$. Следовательно, оно σ -счетно компактно. Поскольку, для метризуемых пространств условия счетной компактности и компактности эквивалентны, пространство можно представить в виде $Z = \bigcup_{k=1}^\infty Z_k$, где все Z_k компактны.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и номер k . Покажем, что найдется такое число $n = n(k)$, что для всех $f \in Z_k$ существует точка $x_f \geq 1/n$, для которой $f(x_f) < \varepsilon$. Предположим противное, т.е. для всех n найдется функция $f_n \in Z_k$ такая, что для всех $x \geq 1/n$ имеем $f_n(x) \geq \varepsilon$. Из последовательности $\{f_n\}$, в силу компактности Z_k , выделим сходящуюся подпоследовательность $f_{n_i} \rightarrow f^*$. Получаем, что $f^* \in Z$, значит, $f^*(0) = 0$. Из свойств f_n следует, что $f^*(x) \geq \varepsilon$ для всех $x > 0$. Получаем противоречие с непрерывностью f^* .

Далее, для каждого k и $\varepsilon_k = 1/2^k$ выберем число $n_k = n(k)$ в соответствии с доказанным выше. Рассмотрим непрерывную монотонно возрастающую функцию

$$g_k(x) = \begin{cases} \varepsilon_k, & \text{если } \frac{1}{n_k} \leq x \leq 1, \\ n_k \cdot \varepsilon_k \cdot x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{1}{n_k}. \end{cases}$$

Отметим, что $g_k(0) = 0$ и $|g_k(x)| \leq 1/2^k$ для всех $x \in \mathbb{I}$.

Нетрудно убедиться, что функция $g(x) = \sum_{k=1}^\infty g_k(x)$ будет непрерывной и монотонно возрастающей. Из того, что $g(0) = 0$, заключаем, что $g \in Z$.

Для каждого номера k и каждого $x \geq 1/n_k$ имеем $g(x) \geq \varepsilon_k$. Следовательно, по построению n_k получаем, что $g \notin Z_k$. Итак, $g \notin Z = \bigcup_{k=1}^\infty Z_k$. Полученное противоречие и доказывает предложение. $\square$

Предложение 7.9. *Пространство $CM^i(\mathbb{I})$ не является пространством Гуревича.*

Доказательство. Поскольку $CM^i(\mathbb{I})$ является замкнутым подмножеством полного сепарабельного метрического пространства $C(\mathbb{I})$, то $CM^i(\mathbb{I})$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Следовательно, $CM^i(\mathbb{I})$ — аналитическое пространство, т.е. непрерывный образ пространства иррациональных чисел $\mathbb{J}$. А. В. Архангельский [5] показал, что если пространство Гуревича аналитично, то оно σ -компактно. Согласно предложению 7.8 $CM^i(\mathbb{I})$ не σ -компактно, следовательно, не является пространством Гуревича. $\square$

Теорема 7.10. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) $CM_p(X)$ локально компактно;
- 2) $CM_p(X)$ σ -компактно;
- 3) $CM_p(X)$ σ -счетно компактно;
- 4) $CM_p(X)$ является пространством Гуревича;

5) пространство X функционально m -вырождено.

Доказательство. Очевидно, что из 5) следует 1), 2), 3) и 4). Ясно, что из 2) следует 3). Покажем, что из 1) следует 5), из 3) следует 5) и из 4) следует 5).

Предположим от противного, что $CM_p(X)$ содержит функцию, отличную от константы. Тогда, согласно теореме 7.5, $CM_p(X)$ содержит замкнутое подпространство Y , гомеоморфное $CM_p^i(\mathbb{I})$. В силу предложения 7.6, Y гомеоморфно $CM^i(\mathbb{I})$. Если $CM_p(X)$ локально компактно, σ -счетно компактно или является пространством Гуревича, то этим свойством обладает и Y . Но согласно предложениям 7.7, 7.8 и 7.9 $CM^i(\mathbb{I})$ не обладает этими свойствами. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куратовский К. Топология. Том 1. — М.: Мир, 1966.
2. Куратовский К. Топология. Том 2. — М.: Мир, 1969.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
4. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
5. Архангельский А. В. Пространства Гуревича, аналитические множества и веерная теснота пространств функций// Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 3. — С. 525–528.
6. Охезин Д. С. Топологические пространства с большим запасом монотонных функций// Изв. ин-та мат. и инф. Удмурт. гос. ун-та. — 1997. — 4.
7. Охезин Д. С. Разделение точек при помощи монотонных функций// В сб.: Материалы конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ. — 1997.
8. Охезин Д. С. Семейства монотонных функций, разделяющие точки// Молодежная конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики». — Екатеринбург, 1998. — С. 11–12.
9. Охезин Д. С. Функционально m -отделимые пространства// Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2002.
10. Охезин Д. С. Пространства монотонных непрерывных функций// Математический и прикладной анализ. — Изд-во ТюмГУ, 2003. — С. 119–147.
11. Charatonic J. J. On feebly monotone and related classes of mappings// Topology Appl. — 2000. — 105. — С. 15–29.
12. Charatonic J. J., Charatonic W. J. Semi-confluent mappings// Math. Pannonica. — 2001. — 12, № 1. — С. 39–54.
13. Charatonic J. J., Charatonic W. J. Monotone-open mappings of rational continua// Bol. Soc. Mat. Mexicana (3). — 1997. — 3.
14. Charatonic W. J. Openness and monotonicity of induced mappings// Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — 127, № 12.
15. Dijkstra J. J., van Mill J. Extending monotone mappings// Compos. Math. — 1998. — 77. — С. 201–210.
16. Nadler S.B., Jr. Continuum Theory: An Introduction/ Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. — New York: Marcel Dekker, 1992. — 158.
17. Whyburn G. T. Non-alternating transformations// Amer. J. Math. — 1934. — 45, № 2. — С. 294–302.
18. Whyburn G. T. Analytic topology// Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. — Providence, 1942. — 28.
19. Whyburn G. T. Cut points of connected sets and of continua// Trans. Amer. Math. Soc. — 1930. — 32, № 1. — С. 147–154.

Д. С. Охезин

Институт математики и механики УрО РАН

E-mail: Dmitry.Ohezin@usu.ru

МОДИФИКАЦИИ РАВНОМЕРНОЙ БАЗЫ И ВОПРОСЫ КЛАССИФИКАЦИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

© 2005 г. С. А. ПЕРЕГУДОВ

Аннотация. Понятие равномерной базы, введенное П. С. Александровым в 1960 г., оказалось глубоко связанным с самыми различными свойствами топологических пространств. Модификации этого понятия привели к появлению новых метризованных критериев и нового направления в классификации топологических пространств. В статье дается обзор результатов, полученных в этом направлении.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Равномерные базы. Модификация (первые шаги)	162
2. Слабо равномерные и счетно слабо равномерные базы	163
3. Слабо равномерные базы и L -пространства	167
4. Мощность слабо равномерных семейств и число Суслина. Мощность пространств со слабо равномерной базой. Другие кардинальные характеристики	168
5. Слабо равномерные и счетно слабо равномерные покрытия и регулярность радоновских мер	172
6. Слабо равномерные базы с условием симметризуемости	172
7. Слабо равномерные и счетно слабо равномерные базы и непрерывные отображения	173
8. Острые базы и слабо измельчающиеся последовательности покрытий	173
9. Дальнейшие обобщения и результаты	174
10. Нётеровский тип топологических пространств	180
11. Некоторые проблемы	182
Список литературы	182

1. РАВНОМЕРНЫЕ БАЗЫ. МОДИФИКАЦИЯ (ПЕРВЫЕ ШАГИ)

В работе под пространством, если не оговорено противное, подразумевается топологическое T_1 -пространство. В случае паракомпактных и компактных пространств предполагается T_2 -отделимость. В 1960 г. П. С. Александров ввел понятие равномерной базы. База $\mathcal{B}$ топологического пространства X называется *равномерной*, если любое бесконечное множество ее элементов, содержащих какую-либо точку $x \in X$, является базой пространства X в точке x (см. [1]). Иначе говоря, база $\mathcal{B}$ является равномерной, если для любой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности O_x множество $\{B \in \mathcal{B} : x \in B \wedge (X - O_x) \cap B \neq \emptyset\}$ конечно.

Отметим, что в определении равномерной базы предполагается, что в ней не содержатся многоточечные множества, состоящие из изолированных точек (см. [1]).

Теорема 1.1 (см. [1]). *Топологическое пространство имеет равномерную базу тогда и только тогда, когда оно является метакompактным пространством с измельчающейся последовательностью покрытий.*

Напомним, что последовательность $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ открытых покрытий пространства X называется *измельчающейся*, если для каждой точки $x \in X$ семейство $\{\text{St}(x, \mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ образует базу пространства X в точке x . Регулярное пространство с измельчающейся последовательностью покрытий называется *муровским пространством*. Из паракомпактности коллективно нормального метакompактного пространства (см. [38]) и метризуемости паракомпактного муровского пространства (см. [28]) вытекает следующая теорема.

Теорема 1.2 (см. [1]). *Регулярное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно коллективно нормально и имеет равномерную базу.*

А. В. Архангельским был получен следующий критерий.

Теорема 1.3 (см. [3]). *Топологическое пространство имеет равномерную базу тогда и только тогда, когда оно является открытым компактным образом метрического пространства.*

Им же было введено понятие регулярной базы, являющееся модификацией понятия равномерной базы, и получен новый метризационный критерий. База $\mathcal{B}$ топологического пространства X называется *регулярной*, если для каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U существует такая окрестность V точки x , что множество $\{B \in \mathcal{B} : B \cap V \neq \emptyset \wedge B \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}$ конечно.

Теорема 1.4 (см. [3]). *Топологическое пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно обладает регулярной базой.*

Изучение отдельных свойств равномерной базы и пространств с равномерной базой позволяет получить весьма тонкую классификацию топологических пространств и вместе с тем получить критерии метризуемости как общего характера, так и частные критерии для различных классов топологических пространств.

Равномерная база является *точечно-счетной* и содержит σ -*точечно-конечную* базу (см. [1]). Она также является базой счетного порядка и содержит θ -базу. База $\mathcal{B}$ топологического пространства X называется базой *счетного порядка*, если для любой точки $x \in X$ и любой строго убывающей последовательности $(B_n : n \in \omega)$ элементов базы, содержащих x , семейство $\{B_n : n \in \omega\}$ является базой пространства X в точке x (см. [2]). Система $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ семейств открытых подмножеств пространства X называется θ -базой, если для любой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности V_x существуют такие $n \in \omega$ и $B \in \mathcal{B}_n$, что $x \in B \subset V_x$ и $\text{ord}(x, \mathcal{B}_n) < \omega$ (см. [49]). Заметим, наконец, что равномерная база является открыто-конечной (в различных работах использовались такие названия как нётеровская, сильно нётеровская и II-равномерная). База $\mathcal{B}$ топологического пространства X называется *открыто-конечной*, если для любого непустого открытого множества G семейство $\{B \in \mathcal{B} : G \subset B\}$ конечно или, что равносильно, для каждого $B' \in \mathcal{B}$ семейство $\{B \in \mathcal{B} : B' \subset B\}$ конечно. Аналогично определяется *открыто-счетная* (слабо нётеровская) база (см. [10]).

Достаточно полный обзор результатов, связанных с упомянутыми выше модификациями понятия равномерной базы дан в работах А. В. Архангельского [4, 5], Г. Грюнхаге [33], Д. Б. Шахматова [47].

В дальнейшем доказательства теорем и утверждений приводятся фрагментарно, так как работа имеет обзорный характер. Используются общепринятые в теоретико-множественной топологии обозначения. Через $|A|$ обозначается мощность множества A . Символы CH, GCH, SH и MA — аббревиатуры для континуум-гипотезы, обобщенной континуум-гипотезы, гипотезы Суслина и аксиомы Мартина соответственно; ZFC — стандартная система аксиом теории множеств (аксиомы Цермело–Френкеля с аксиомой выбора). Используются следующие основные кардинальные инварианты топологического пространства X : $w(X)$ — вес, $\pi w(X)$ — π -вес, $nw(X)$ — сетевой вес, $\chi(X)$ — характер, $\pi\chi(X)$ — π -характер, $d(X)$ — плотность, $t(X)$ — теснота, $c(X)$ — число Суслина (клеточность), $s(X)$ — спред, $sh(X)$ — число Шанина, $l(X)$ — число Линделёфа. Если $\varphi(X)$ — кардинальный инвариант, то $h\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \subset X\}$. Отметим, что $s(X) = hc(X)$. Замыкание множества A обозначается $\bar{A}$. Определения используемых в статье топологических и теоретико-множественных понятий можно найти в [19] и [17] соответственно.

2. СЛАБО РАВНОМЕРНЫЕ И СЧЕТНО СЛАБО РАВНОМЕРНЫЕ БАЗЫ

Семейство $\mathcal{S}$ открытых множеств топологического пространства X называется *слабо равномерным* (соответственно *счетно слабо равномерным*), если для любого бесконечного (соответственно несчетного) семейства $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ множество $\bigcap \mathcal{S}'$ содержит не более одной точки. Очевидно, это требование равносильно тому, что любая пара различных точек пространства X содержится в конечном

(соответственно не более чем в счетном) множестве элементов из семейства $\mathcal{S}$. Понятия равномерной базы и счетно слабо равномерной базы были введены Р. Хитом и У. Линдгреном (см. [35]) как естественные обобщения понятий равномерной базы и точечно-счетной базы.

Теорема 2.1 (см. [35]). *Пространство со слабо равномерной базой имеет G_δ -диагональ.*

Отсюда получается ряд следствий (см. [35]), показывающих нетривиальность такого обобщения.

Следствие 2.2. *Линейно упорядоченное пространство со слабо равномерной базой метризуемо.*

Следствие 2.3. *Регулярное счетно-компактное пространство со слабо равномерной базой метризуемо.*

Следствие 2.4. *Паракомпактное пространство со слабо равномерной базой уплотняется на метрическое пространство.*

Следствие 2.5. *Паракомпактное p -пространство со слабо равномерной базой метризуемо.*

Более общим является следующее утверждение.

Следствие 2.6. *θ -измельчаемое (субметакомпактное) p -пространство со слабо равномерной базой является муровским пространством.*

Теорема 2.7 (см. [35]). *Хаусдорфово полуметризуемое (т.е. симметризуемое с первой аксиомой счетности) пространство со слабо равномерной базой имеет измельчающуюся последовательность покрытий.*

Из теорем 2.1 и 2.7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.8 (см. [14]). *Паракомпактное Σ -пространство со слабо равномерной базой и первой аксиомой счетности метризуемо.*

Г. Беннет и Д. Латцер [25] охарактеризовали обобщенно линейно упорядоченные пространства со слабо равномерной базой.

Теорема 2.9 (см. [25]). *Обобщенно линейно упорядоченное пространство имеет слабо равномерную базу тогда и только тогда, когда оно имеет квазиизмельчение (что равносильно существованию в пространстве θ -базы) и G_δ -диагональ.*

Следующие примеры показывают, насколько класс пространств со слабо равномерной базой шире класса пространств с равномерной базой.

Пример 2.10 (см. [35]). Существует кружевное (следовательно, паракомпактное) пространство X со слабо равномерной базой, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности.

Пусть $\mathcal{F}$ обозначает семейство всех конечных подмножеств множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Для каждого $F \in \mathcal{F}$ определим семейство

$$\mathcal{B}_F = \{\mathbb{R}\} \cup \{G \in \mathcal{F} : F \subset G\}.$$

Тогда семейство

$$\mathcal{B} = \{\{F\} : F \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathcal{B}_F : F \in \mathcal{F}\}$$

будет слабо равномерной базой топологии на множестве $X = \{\mathbb{R}\} \cup \mathcal{F}$. Построенное пространство является кружевным и не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Пример 2.11 (см. [35]). Существует неметризуемое паракомпактное пространство с первой аксиомой счетности и слабо равномерной базой.

Таким пространством является прямая Майкла.

Пример 2.12 (см. [30]). Существует муровское пространство X со слабо равномерной базой без равномерной базы (следовательно, не метакомпактное).

Пусть Y — подмножество мощности $\aleph_1$ числовой прямой $\mathbb{R}$ и P — всюду плотное счетное множество полуплоскости, лежащей над $\mathbb{R}$. На множестве $S = Y \cup P$ топология определяется следующим

образом. Точки $p \in P$ — изолированные точки, а базу окрестностей точки $y \in Y$ при $0 < n < \omega$ образуют множества $G_n(y) = \{y\} \cup (D_n(y) \cap P)$, где $D_n(y)$ — круг радиуса $1/n$ на верхней полу-плоскости, касающийся прямой $\mathbb{R}$ в точке y . Затем точки из множества P «расщепляются». При этом используется следующая лемма.

Лемма. Если Y — некоторое множество мощности $\aleph_1$, то существуют такое семейство $\mathcal{H}$ счетных бесконечных подмножеств множества Y и его разбиение $\mathcal{H} = \bigcup \{\mathcal{H}_n : 0 < n < \omega\}$, что если $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ и $H_1 \neq H_2$, то $|H_1 \cap H_2| < \aleph_0$, и если $Y' \subset Y$ и $|Y'| = \aleph_1$, то для каждого n существует такое $H \in \mathcal{H}_n$, что $|Y' \cap H| = \aleph_0$.

Требуемое пространство X теперь строится следующим образом. Пусть $P = \{p_n : 0 < n < \omega\}$. Пространство X состоит из точек (p_n, H) , где $H \in \mathcal{H}_n$, и точек множества Y . Точки (p_n, H) — изолированные точки в пространстве X , а база окрестностей для точки y из Y определяется как семейство, состоящее из множеств $G'_n(y) = \{y\} \cup \{(p_i, H) : p_i \in G_n(y), y \in H\}$, где $0 < n < \omega$.

Пример 2.13 (см. [30]). В предположении $\text{MA} + \aleph_2 < 2^{\aleph_0}$ существует нормальное муровское пространство X со слабо равномерной базой без точечно-счетной базы.

Конструкция такого пространства повторяет построение примера 2.12, но вместо использованной там леммы применяется следующая лемма.

Лемма ($\text{MA} + \aleph_2 < 2^{\aleph_0}$). Если Y — некоторое множество мощности $\aleph_2$, то существуют такое семейство $\mathcal{H}$ подмножеств множества Y и его разбиение $\mathcal{H} = \bigcup \{\mathcal{H}_n : 0 < n < \omega\}$, что если $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ и $H_1 \neq H_2$, то $|H_1 \cap H_2| < \aleph_0$, и если $Y' \subset Y$ и $|Y'| = \aleph_2$, то для каждого n существует такое $H \in \mathcal{H}_n$, что $|Y' \cap H| = \aleph_1$.

Пример 2.14 (см. [13]). Существует муровское пространство со слабо равномерной базой, произведение которого на отрезок числовой прямой не имеет слабо равномерной базы.

Таким пространством является пространство X из примера 2.12.

Действительно, пусть I — отрезок числовой прямой (или любое пространство со счетной базой и без изолированных точек). Покажем, что $X \times I$ не имеет слабо равномерной базы. Пусть $\mathcal{R} = \{R_n : 0 < n < \omega\}$ — счетная база отрезка I и

$$\mathcal{S} = \left\{ \{x\} : x \text{ — изолированная точка пространства } X \right\} \cup \left\{ G'_n(y) : 0 < n < \omega, y \in Y \right\}$$

— слабо равномерная база пространства X . Возьмем произвольную базу $\mathcal{B}$ в пространстве $X \times I$. Рассмотрим открытое покрытие

$$\mathcal{U} = \left\{ G'_1(y) \times I : y \in Y \right\} \cup \left\{ \{x\} \times I : x \in X \setminus Y \right\}$$

пространства $X \times I$. Впишем в него открытое покрытие $\mathcal{B}'$, состоящее из элементов базы $\mathcal{B}$. Для каждого $y \in Y$ обозначим через B_y элемент из $\mathcal{B}'$, содержащийся в $G'_1(y) \times I$ с условием $y \in \text{Pr}_1(B_y)$. Далее, для каждого $y \in Y$ найдем такие $G'_{n(y)}$ и $R_{m(y)}$, что $G'_{n(y)} \times R_{m(y)} \subset B_y$. Так как Y несчетно, найдется такое несчетное множество $Y' \subset Y$, что $\bigcap \{G'_{n(y)}(y) : y \in Y'\} \neq \emptyset$. Далее, найдутся такие натуральное число m и несчетное множество $Y'' \subset Y'$, что $m(y) = m$ для всех $y \in Y''$. Итак, мы имеем несчетное множество $Y'' \subset Y$ и натуральное число m , такие, что $G'_{n(y)}(y) \times R_m \subset B_y$ для всех $y \in Y''$ и $\bigcap \{G'_{n(y)}(y) : y \in Y''\} \neq \emptyset$. Пусть $p_k \in \bigcap \{G'_{n(y)}(y) : y \in Y''\}$. Из сформулированной при построении примера 2.12 леммы следует, что найдется $H \in \mathcal{H}_k$, для которого $|Y'' \cap H| = \aleph_0$. Положим $Y''' = Y'' \cap H$. Имеем $(p_k, H) \in G'_{n(y)}(y)$ для каждого $y \in Y'''$; следовательно, открытое множество $\{(p_k, H)\} \times R_m$ содержится в множестве B_y для каждого $y \in Y'''$. Но $\{B_y : y \in Y'''\}$ — бесконечное семейство. Отсюда следует, что $\mathcal{B}$ не является открыто конечной базой, а так как в пространстве $X \times I$ нет изолированных точек, то $\mathcal{B}$ не будет и слабо равномерной.

Пример 2.15 (см. [13]). В предположении $\text{MA} + \aleph_2 < 2^{\aleph_0}$ существует нормальное муровское пространство со слабо равномерной базой, произведение которого на отрезок числовой прямой не имеет счетно слабо равномерной базы.

Таким пространством является пространство X из примера 2.13.

Действительно, пусть I — отрезок числовой прямой (или любое пространство с первой аксиомой счетности, не имеющее изолированных точек). Если пространство $X \times I$ имеет счетно слабо равномерную базу, то эта база, ввиду отсутствия изолированных точек, будет открыто счетной и, в силу первой аксиомы счетности, точечно-счетной. Следовательно, и пространство X должно иметь точечно-счетную базу.

Пример 2.16 (см. [14]). Существует хаусдорфово (не регулярное) финально компактное пространство со слабо равномерной базой без первой аксиомы счетности.

(Вопрос о существовании регулярного финально компактного пространства со слабо равномерной базой без первой аксиомы счетности (см. [14]) остается открытым.)

В основе конструкции примера лежат два пространства. Первое из них — кружевное пространство X со слабо равномерной базой, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности, из примера 2.10. Второе — единичный отрезок I с топологией Майкла [39], которая получается, если естественную топологию отрезка дополнить всеми подмножествами вполне несовершенного множества (имеющего мощность $2^{\aleph_0}$) (см. [8]). Отрезок I с такой топологией, очевидно, является регулярным финально компактным пространством со слабо равномерной базой. Рассмотрим топологическую сумму счетного семейства $\{Y_n : n \in \omega\}$ копий отрезка I с топологией Майкла. Через Z_n обозначим множество изолированных точек пространства Y_n . В пространстве X рассмотрим убывающую последовательность $(S_n : n \in \omega)$ окрестностей точки $\mathbb{R}$ с $\bigcap \{S_n : n \in \omega\} = \{\mathbb{R}\}$ и $S_0 = X$. В пространстве $X \oplus (\bigoplus \{Y_n : n \in \omega\})$ для каждого $n \in \omega$ склеим попарно точки множества $S_n \setminus S_{n+1}$ и множества Z_n , т.е. каждую точку $x \in S_n \setminus S_{n+1}$ склеим с некоторой точкой $z(x) \in Z_n$, причем различные точки $x, y \in S_n \setminus S_{n+1}$ склеим с различными же точками $z(x), z(y) \in Z_n$. В результате мы получим пространство P , которое финально компактно, имеет слабо равномерную базу и несчетный характер в точке $\mathbb{R}$. Очевидно, P — хаусдорфово нерегулярное пространство.

Если пространство имеет слабо равномерную базу, то будет ли каждая база в этом пространстве содержать слабо равномерную базу? Такой вопрос был поставлен в [35]. В той же работе авторы замечают, что Ван Дауэн привел пример метрического пространства без изолированных точек, в котором существует база, не содержащая точечно-счетной базы. Очевидно, слабо равномерная база имеет счетную кратность в каждой неизолированной точке счетного характера. Следовательно, ответ на вопрос отрицателен.

Как известно, псевдокомпактное пространство с σ -точечно-конечной базой метризуемо и, следовательно, компактно [48]. Также известно, что существуют псевдокомпактные неметризуемые пространства с точечно-счетной базой [18]. Вопрос о компактности псевдокомпактного пространства со слабо равномерной базой до последнего времени оставался открытым. Лишь недавно Б. Бэйли и Г. Грюнхаге [29] нашли его отрицательное решение. Построенный ими пример дает ответ и на другие вопросы, о чем будет сказано ниже.

Авторы в работе [23] формулируют вопрос: каждое ли пространство со слабо равномерной базой субметакомпактно? Цитированный выше пример Б. Бэйли и Г. Грюнхаге [29] дает отрицательный ответ и на этот вопрос. Пространство в примере псевдокомпактно и имеет слабо равномерную базу, но не компактно. Однако каждое псевдокомпактное субметакомпактное пространство со слабо равномерной базой является компактным пространством (см. [41]).

Авторы работы [35] ставили также вопрос о метризуемости локально компактного хаусдорфова пространства со слабо равномерной базой. Положительный ответ (уже в случае счетно слабо равномерной базы) был дан в [12]. Ниже будет показано, что этот результат распространяется на более общие классы пространств.

Пример 2.13 показывает, что в ZFC недоказуемо утверждение о существовании точечно-счетной базы в пространстве с первой аксиомой счетности и слабо равномерной базой. Очевидно, в неизолированных точках пространства с первой аксиомой счетности кратность слабо равномерного (даже счетно слабо равномерного) семейства счетна. Проблему создают изолированные точки.

Теорема 2.17 (см. [30]). *Если мощность множества изолированных точек в пространстве с первой аксиомой счетности и слабо равномерной базой не превосходит $\aleph_1$, то пространство имеет точечно-счетную базу.*

Теорема 2.18 (см. [21]). *В предположении СН пространство с первой аксиомой счетности и слабо равномерной базой имеет точечно-счетную базу, если мощность множества изолированных точек не превосходит $\aleph_\omega$.*

Авторы работы [23] поставили точку в этих исследованиях. Они заметили, что если GCH дополнить комбинаторным принципом $\square_\lambda$ для каждого сингулярного кардинала λ , то никакие ограничения на мощность множества изолированных точек не потребуются. Анализ доказательства привел их к формулировке комбинаторного принципа, названного аксиомой замкнутой непрерывной ϵ -цепи (аббревиатура CECA), эквивалентного комбинации GCH и некоторых ослаблений принципов $\square_\lambda$. Аксиома CECA совместна с ZFC.

Теорема 2.19 (см. [23]). *В предположении CECA каждое пространство со слабо равномерной базой и первой аксиомой счетности имеет точечно-счетную базу.*

Рассмотренные выше следствия из теоремы 2.1, связанные с тем, что пространства со слабо равномерной базой имеют G_δ -диагональ, а также теоремы 2.7 и 2.8, имеют аналоги в пространствах с точечно-счетной базой. Слабо равномерные базы и точечно-счетные базы являются счетно слабо равномерными. Оказывается, что эти результаты можно получить уже в случае пространств со счетно слабо равномерной базой.

Теорема 2.20 (см. [14]). *Паракомпактное Σ -пространство со счетно слабо равномерной базой и первой аксиомой счетности метризуемо.*

Теорема 2.21 (см. [14]). *θ -Измельчаемое (субметакомпактное) p -пространство со счетно слабо равномерной базой является муровским пространством.*

Теорема 2.22 (см. [14]). *Регулярное счетно-компактное пространство со счетно слабо равномерной базой метризуемо.*

Теорема 2.23 (см. [12]). *Регулярное локально сепарабельное пространство со счетно слабо равномерной базой метризуемо.*

Из последних двух теорем вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.24 (см. [14]). *Регулярное локально счетно-компактное пространство со счетно слабо равномерной базой метризуемо.*

Теорема 2.25 (см. [14]). *Хаусдорфово симметризуемое пространство со счетно слабо равномерной базой имеет измельчающуюся последовательность покрытий.*

Топологическое пространство называется *квазиметакомпактным* (соответственно, *квазиметалиндефовым*), если в каждое его открытое покрытие можно вписать слабо равномерное (соответственно, счетно слабо равномерное) покрытие. Детальный анализ структуры пространств из примеров 2.12 и 2.13 позволяет построить следующие примеры.

Пример 2.26 (см. [13]). *Существует муровское не метакомпактное пространство со слабо равномерной базой, произведение которого на отрезок числовой прямой не квазиметакомпактно.*

Пример 2.27 (см. [13]). *В предположении $MA + \aleph_2 < 2^{\aleph_0}$ существует нормальное не металиндефово муровское пространство со слабо равномерной базой, произведение которого на отрезок числовой прямой не квазиметалиндефово.*

3. СЛАБО РАВНОМЕРНЫЕ БАЗЫ И L -ПРОСТРАНСТВА

L -Пространством называется наследственно финально компактное несепарабельное пространство.

Топологическое пространство X называется *сильным L -пространством*, если для каждого натурального числа n пространство X^n является L -пространством (см. [37]). Существуют хаусдорфовы (нерегулярные) L -пространства (см. [34]). Прямая Суслина является примером регулярного L -пространства (см. [16]). Проблема существования регулярных L -пространств в ZFC остается нерешенной. Представляют интерес задачи существования L -пространств с дополнительными

топологическими свойствами. Так в 1967 г. Пономарев показал, что в предположении $\neg\text{SH}$ существует регулярное L -пространство с точечно-счетной базой (см. [15]). Вместе с тем Сент-Миклоши доказал, что в предположении $\text{MA} + \neg\text{CH}$ регулярных L -пространств с первой аксиомой счетности не существует (см. [46]). Таким образом, задача о существовании регулярных L -пространств с точечно-счетной базой оказывается неразрешимой в ZFC. Для пространств со слабо равномерной базой ситуация оказывается следующей.

Теорема 3.1 (см. [14]). *В классе хаусдорфовых пространств сильных L -пространств со слабо равномерной базой не существует.*

Автору удалось построить в предположении CH некоторую ослабленную версию L -пространства. Это пространство наследственно финально компактно только относительно слабо равномерной предбазы.

Пример 3.2 (см. [42]). В предположении CH существует хаусдорфово пространство X с точечно-счетной слабо равномерной предбазой $\mathcal{H}$ со следующими свойствами:

- (а) $|\mathcal{H}| = \aleph_1$;
- (б) для каждого $Z \subset X$ любое точечно-конечное подсемейство семейства $\mathcal{H}/Z$ счетно;
- (с) для каждого $Z \subset X$ любое покрытие пространства Z элементами семейства $\mathcal{H}/Z$ содержит счетное подпокрытие.

Очевидно, что пространство X имеет точечно-счетную слабо равномерную базу и несепарабельно.

Теорема 3.3 (см. [42]). *В предположении $\text{MA} + \neg\text{CH}$ не существует пространства X с точечно-счетной слабо равномерной предбазой $\mathcal{H}$ со свойствами (а)–(с) из примера 3.2.*

Из теоремы 3.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.4 (см. [42]). *В предположении $\text{MA} + \neg\text{CH}$ в классе пространств со слабо равномерной базой L -пространств не существует.*

В построении примера 3.2 и в доказательстве теоремы 3.3 используется двойственность некоторых свойств отображений и множеств. Так, например, рассматривается двойственность, основанная на очевидной связи слабо равномерных и почти дизъюнктивных семейств. Действительно, пусть $\mathcal{S}$ — семейство открытых множеств в пространстве X и $\mathcal{S}_x = \{S \in \mathcal{S} : x \in S\}$. Тогда $\mathcal{S}$ слабо равномерно если и только если семейство $\{\mathcal{S}_x : x \in X\}$ почти дизъюнктивно (т.е. пересечение двух различных элементов является конечным множеством).

4. Мощности слабо равномерных семейств и число Суслина.

Мощности пространств со слабо равномерной базой.

ДРУГИЕ КАРДИНАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Очевидно, что мощность счетно слабо равномерного семейства не превосходит плотность пространства. Число же Суслина не является верхней границей мощностей слабо равномерных семейств, как показывает пример Пикслея—Роя несепарабельного пространства с равномерной базой и условием Суслина (см. [44]). Однако в некоторых классах пространств мощность слабо равномерных семейств ограничивается числом Суслина.

Теорема 4.1 (см. [13]). *Мощность слабо равномерного семейства в обобщенно линейно упорядоченном пространстве X не превосходит $c(X)$.*

Теорема 4.2 (см. [13]). *Мощность слабо равномерного семейства в пространстве X , имеющем базу конечного ранга, не превосходит $c(X)$.*

Теорема 4.3 (см. [13]). *В p -пространстве X с условием Бэра мощность слабо равномерного семейства не превосходит $c(X)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ — слабо равномерное семейство в X . Для каждого $n \in \omega$ положим $F_n = \{x \in X : \text{ord}(x, \mathcal{S}) \leq n\}$, $V_n = \text{int } F_n$ и $\Phi_n = F_n \setminus V_n$. Очевидно, F_n — замкнутое множество и

Φ_n — замкнутое нигде не плотное множество для всех $n \in \omega$. Пусть $V = \bigcup \{V_n : n \in \omega\}$. Так как все точки из V являются точками конечной кратности,

$$\left| \left\{ S \in \mathcal{S} : S \cap V \neq \emptyset \right\} \right| \cdot \aleph_0 = \left| \left\{ S \cap V : S \in \mathcal{S} \right\} \right| \cdot \aleph_0.$$

Но в пространстве X с условием Бэра мощность точечно-конечного семейства открытых множеств не превосходит $c(X)$ (см. [7]). Следовательно, $\left| \{S \cap V : S \in \mathcal{S}\} \right| \leq c(X)$ и

$$\left| \{S \in \mathcal{S} : S \cap V \neq \emptyset\} \right| \leq c(X). \quad (1)$$

Для каждой точки $x \in X$ имеем $\left| \{S \in \mathcal{S} : x \in S\} \right| \leq c(X)$, так как семейство $\{S \setminus \{x\} : S \in \mathcal{S}, x \in S\}$ точечно-конечно. Пусть $I(X)$ обозначает множество всех изолированных точек пространства X . Тогда

$$\left| \{S \in \mathcal{S} : S \cap I(X) \neq \emptyset\} \right| \leq c(X). \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем неравенство

$$\left| \{S \in \mathcal{S} : S \cap (V \cup I(X)) \neq \emptyset\} \right| \leq c(X). \quad (3)$$

Рассмотрим семейство $\mathcal{S}' = \{S \in \mathcal{S} : S \cap (V \cup I(X)) = \emptyset\}$ и открытое в X множество $R = \bigcup \mathcal{S}'$. Так как X — p -пространство, то согласно критерию Берка (см. [27]) существует такая последовательность $(\mathcal{G}_n : n \in \omega)$ открытых покрытий $\mathcal{G}_n$ пространства X , что если $x \in G_n \in \mathcal{G}_n$ для всех $n \in \omega$, то $\bigcap \{\bar{G}_n : n \in \omega\}$ — компактное множество и для любого открытого множества $O \supset \bigcap \{\bar{G}_n : n \in \omega\}$ найдется такое $m \in \omega$, что $\bigcap \{\bar{G}_n : n \leq m\} \subset O$. Пусть $\mathcal{H}'_0$ — семейство всех открытых множеств пространства X , содержащихся с замыканием в множестве $R \setminus \Phi_0$ и в элементах покрытия $\mathcal{G}_0$ одновременно. Выделим в $\mathcal{H}'_0$ максимальное дизъюнктное семейство $\mathcal{H}_0$. Множество $R_0 = \bigcup \mathcal{H}_0$ всюду плотно в R , так как Φ_0 нигде не плотно. Далее рассмотрим семейство $\mathcal{H}'_1$ всех открытых множеств пространства X , содержащихся с замыканием в множествах $H \setminus \Phi_1$ при $H \in \mathcal{H}_0$ и в элементах покрытия $\mathcal{G}_1$ одновременно. Выделим из $\mathcal{H}'_1$ максимальное дизъюнктное семейство $\mathcal{H}_1$. Множество $R_1 = \bigcup \mathcal{H}_1$ будет всюду плотным в R , так как Φ_0 и Φ_1 — нигде не плотные множества. Продолжая это построение, мы получим такую последовательность дизъюнктных открытых семейств $(\mathcal{H}_n : n \in \omega)$ в R , что для каждого $n \in \omega$ выполняются следующие условия:

- (а) $\mathcal{H}_{n+1}$ вписано с замыканием в $\mathcal{H}_n$;
- (б) $R_n = \bigcup \mathcal{H}_n$ — открытое всюду плотное в R множество;
- (с) $R_n \cap \Phi_n = \emptyset$.

В силу условия Бэра и свойства (б) множество $R' = \bigcap \{R_n : n \in \omega\}$ всюду плотно в R . Из свойства (с) следует, что R' не содержит точек конечной кратности семейства $\mathcal{S}$ и, кроме того, по построению R' не содержит изолированных точек пространства X . По определению слабо равномерного семейства каждая точка, в которой оно имеет бесконечную кратность, имеет счетный псевдохарактер и, следовательно, счетный характер, ибо X — p -пространство. Тогда для каждой точки $p \in R'$ семейство $\{S \in \mathcal{S} : p \in S\}$ счетно и $\{S \cap R' : S \in \mathcal{S}\}$ — точечно-счетное семейство, разделяющее точки из R' , т.е. для любых точек $x, y \in R'$ при $x \neq y$ найдется такое $S \in \mathcal{S}$, что $x \in S \cap R'$ и $y \notin S \cap R'$. Из построения и свойства (а) следует, что R' разбивается на компактные множества вида

$$C = \bigcap \{H_n : n \in \omega\} = \bigcap \{\bar{H}_n : n \in \omega\},$$

где $H_n \in \mathcal{H}_n$ и $\bar{H}_{n+1} \subset H_n$ для каждого $n \in \omega$. Рассмотрим такое множество C . Пусть $S^* \in \mathcal{S}$ и $S^* \cap C \neq \emptyset$. Так как $\{S \cap R' : S \in \mathcal{S}\}$ разделяет точки в R' , найдется минимальное конечное покрытие $\mathcal{D}$ множества C , состоящее из элементов семейства $\mathcal{S}$ и содержащее в качестве элемента множество S^* . Так как $C \subset \bigcup \mathcal{D}$, то для некоторого $m \in \omega$ имеем $H_m \subset \bigcup \mathcal{D}$, где H_m — множество из последовательности $(H_n : n \in \omega)$, для которой $C = \bigcap \{H_n : n \in \omega\}$. Для доказательства этого утверждения заметим, что каждый элемент H_n такой последовательности содержится с замыканием в $\bigcap \{\bar{G}_k : k \leq n\}$, где $G_k \in \mathcal{G}_k$. Допустим, что $H_n \setminus \bigcup \mathcal{D} \neq \emptyset$ для всех $n \in \omega$. Выбирая из $H_n \setminus \bigcup \mathcal{D}$ точку x_n , мы получим последовательность $(x_n : n \in \omega)$ с точками $x_n \in \bigcap \{G_k : k \leq n\}$. По определению последовательности $(\mathcal{G}_n : n \in \omega)$ последовательность $(x_n : n \in \omega)$ имеет точку накопления p в X . Так как все элементы такой последовательности, начиная с n -го, лежат в $\bar{H}_n$,

то $p \in \bar{H}_n$ для всех $n \in \omega$. Следовательно, $p \in \bigcap \{\bar{H}_n : n \in \omega\} = C$. Получили противоречие. Итак, для некоторого $m \in \omega$ имеем $H_m \subset \bigcup \mathcal{D}$ и, таким образом, S^* принадлежит некоторому конечному минимальному покрытию множества H_m . Так как $\{S \cap R : S \in \mathcal{S}\}$ точечно-счетно, то по лемме Мищенко [9] семейство конечных минимальных покрытий множества $H_m \in \mathcal{H}_m$ элементами из $\{S \cap R : S \in \mathcal{S}\}$ счетно. Так как

$$\left| \bigcup \{\mathcal{H}_n : n \in \omega\} \right| \leq c(X),$$

то доказано, что

$$|\{S \cap R : S \in \mathcal{S}\}| \leq c(X).$$

Но кратность $\mathcal{S}$ в точках из R не более чем счетна, поэтому

$$|\{S \in \mathcal{S} : S \cap R \neq \emptyset\}| \leq c(X).$$

Из последнего неравенства и неравенства (3) следует, что $|\mathcal{S}| \leq c(X)$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 4.4 (см. [13]). *В локально полном в смысле Чеха вполне регулярном пространстве X мощность слабо равномерного семейства не превосходит $c(X)$.*

Следствие 4.5 (см. [41]). *В псевдокомпактном пространстве X со слабо равномерной базой $w(X) = c(X)$ и, следовательно, мощность любого счетно слабо равномерного семейства не превосходит $c(X)$.*

Теорема 4.6 (см. [13]). *В регулярном счетно-компактном пространстве X мощность слабо равномерного семейства не превосходит $c(X)$.*

Доказательство. Доказательство теоремы 4.6 аналогично доказательству теоремы 4.3. Пусть $\mathcal{S}$, F_n , V_n , Φ_n , V , $\mathcal{S}'$ и R — те же, что и в теореме 4.3. Так как регулярное счетно-компактное пространство удовлетворяет условию Бэра, то аналогично неравенству (3) теоремы 4.3 получается неравенство

$$|\{S \in \mathcal{S} : S \cap (V \cup I(X)) \neq \emptyset\}| \leq c(X). \quad (4)$$

Пусть $\mathcal{H}'_0$ — семейство всех открытых множеств пространства X , содержащихся с замыканием в множестве $R \setminus \Phi_0$ и $\mathcal{H}_0$ — максимальное дизъюнктное подсемейство семейства $\mathcal{H}'_0$. Множество $G_0 = \bigcup \mathcal{H}_0$ всюду плотно в R , так как Φ_0 — нигде не плотное множество. Рассмотрим далее семейство $\mathcal{H}'_1$ всех открытых подмножеств пространства X , содержащихся с замыканием в множествах $H \setminus \Phi_1$ при $H \in \mathcal{H}_0$. Выделим из $\mathcal{H}'_1$ максимальное дизъюнктное семейство $\mathcal{H}_1$. Множество $G_1 = \bigcup \mathcal{H}_1$ будет всюду плотным в R , так как Φ_0 и Φ_1 — нигде не плотные множества. Продолжая построение, мы получим такую последовательность $(\mathcal{H}_n : n \in \omega)$ дизъюнктных открытых семейств $\mathcal{H}_n$ в X , что для каждого $n \in \omega$ выполняются следующие условия:

- (а) семейство $\mathcal{H}_{n+1}$ вписано с замыканием в $\mathcal{H}_n$;
- (б) $G_n = \bigcup \mathcal{H}_n$ — всюду плотное множество в R ;
- (с) $G_n \cap \Phi_n = \emptyset$.

В силу теоремы Бэра и свойства (б) множество $R' = \bigcap \{G_n : n \in \omega\}$ всюду плотно в R . Из (с) следует, что R' не содержит точек конечной кратности семейства $\mathcal{S}$. Следовательно, в каждой точке из R' пространство X имеет счетный псевдохарактер, а так как X регулярно и счетно компактно, — то и счетный характер. Отсюда, как и в доказательстве теоремы 4.3, следует, что семейство $\{S \cap R : S \in \mathcal{S}\}$ точечно счетно и разделяет точки множества R' . Из построения R' и свойства (а) следует, что R' разбивается на замкнутые, и, следовательно, счетно-компактные, подмножества вида

$$C = \bigcap \{H_n : n \in \omega\} = \bigcap \{\bar{H}_n : n \in \omega\},$$

где $H_n \in \mathcal{H}_n$ для всех $n \in \omega$. Каждое такое множество C сепарабельно, так как открытое в C семейство $\{S \cap C : S \in \mathcal{S}\}$ точечно счетно и разделяет точки из C . Но тогда

$$|\{S \in \mathcal{S} : S \cap C \neq \emptyset\}| \leq \aleph_0$$

и каждое множество $S \in \mathcal{S}$, имеющее непустое пересечение с C , принадлежит некоторому минимальному конечному покрытию $\mathcal{D}$ множества C , состоящему из элементов семейства $\mathcal{S}$. Если

$C = \bigcap \{H_n : n \in \omega\}$, то $H_m \subset \bigcup \mathcal{D}$ для некоторого $m \in \omega$. В противном случае мы найдем для каждого $n \in \omega$ точку $x_n \in H_n \setminus \bigcup \mathcal{D}$ и получим бесконечное множество $\{x_n : n \in \omega\}$. Но для каждого $n \in \omega$ имеем

$$\{x_k : k \in \omega, k > n\} \subset \bar{H}_n$$

и предельная точка p множества $\{x_n : n \in \omega\}$, существующая в силу счетной компактности пространства X , принадлежит $\bar{H}_n$ при каждом $n \in \omega$. Следовательно $p \in C$, что невозможно. Итак, $H_m \subset \bigcup \mathcal{D}$ для некоторого $m \in \omega$. Теперь, как и в доказательстве теоремы 4.3, получается неравенство

$$|\{S \in \mathcal{S} : S \cap R \neq \emptyset\}| \leq c(X),$$

которое вместе с неравенством (4) завершает доказательство теоремы. $\square$

Теорема 4.7 (см. [13]). *В предположении $\text{MA} + \neg \text{CH}$ в полном в смысле Чеха пространстве с условием Суслина счетно слабо равномерное семейство счетно.*

Следующие две теоремы позволяют обнаруживать «хорошие» свойства пространств, обладающих «хорошими» свойствами локально. Для пространства X положим

$$p(X) = \aleph_0 \cdot \sup \{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ — слабо равномерное семейство в } X\},$$

$$\tilde{p}(X) = \aleph_0 \cdot \sup \{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ — счетно слабо равномерное семейство в } X\}.$$

Теорема 4.8 (см. [13]). *Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{S}$ — его слабо равномерное покрытие и $p(S) \leq \alpha$ для каждого $S \in \mathcal{S}$ и некоторого бесконечного кардинала α . Тогда в $\mathcal{S}$ можно вписать такое слабо равномерное покрытие $\mathcal{G}$, что*

$$|\{G \in \mathcal{G} : G \cap G' \neq \emptyset\}| \leq \alpha$$

для всех $G' \in \mathcal{G}$.

Теорема 4.9 (см. [13]). *Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{S}$ — его счетно слабо равномерное покрытие и $\tilde{p}(S) \leq \alpha$ для каждого $S \in \mathcal{S}$ и некоторого бесконечного кардинала α . Тогда в $\mathcal{S}$ можно вписать такое счетно слабо равномерное покрытие $\mathcal{G}$, что*

$$|\{G \in \mathcal{G} : G \cap G' \neq \emptyset\}| \leq \alpha$$

для всех $G' \in \mathcal{G}$.

Следствие 4.10 (см. [13]). *Если регулярное пространство X имеет счетно слабо равномерное покрытие сепарабельными метризуемыми подпространствами, то X метризуемо.*

Отсюда непосредственно следует теорема 2.23.

Следствие 4.11 (см. [13]). *Регулярное, локально удовлетворяющее условию Суслина, локально обобщенно линейно упорядоченное пространство с σ -слабо равномерной базой метризуемо.*

Следствие 4.12 (см. [13]). *Регулярное, локально удовлетворяющее условию Суслина, локально полное в смысле Чеха квазиметакомпактное пространство сильно паракомпактно.*

Следствие 4.13 (см. [13]). *Регулярное локально сепарабельное квазиметалиндефово пространство сильно паракомпактно.*

Теорема 4.14 (см. [14]). *Мощность пространства X со слабо равномерной базой не превосходит $2^{l(X)}$.*

Утверждение теоремы не является непосредственным следствием известной теоремы Архангельского о мощности топологических пространств, так как, во-первых, в утверждении требуется только T_1 -отделимость, а во-вторых, как замечено выше, существуют пространства со слабо равномерной базой, не удовлетворяющие первой аксиоме счетности.

Наличие счетно слабо равномерной базы в пространстве приводит к равенству различных кардинальных инвариантов пространства.

Теорема 4.15 (см. [14]). Если X — пространство со счетно слабо равномерной базой, то $\chi(B, X) \leq \chi(X)$ для каждого компактного множества B .

Теорема 4.16 (см. [14]). Пусть пространство X имеет счетно слабо равномерную базу. Тогда $hl(X) = s(X)$, $sh(X) = d(X) = w(X)$. Кроме того, если $w(X) = 2^\tau$ при $\tau \geq \aleph_1$, то $sh(X) = d(X) = w(X) = |X|$.

5. СЛАБО РАВНОМЕРНЫЕ И СЧЕТНО СЛАБО РАВНОМЕРНЫЕ ПОКРЫТИЯ И РЕГУЛЯРНОСТЬ РАДОНОВСКИХ МЕР

Радоновской мерой в хаусдорфовом пространстве называется борелевская локально конечная внутренне регулярная мера. Внутренняя регулярность меры μ означает, что

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(B) : B \subset A, B \text{ компактно} \}$$

для каждого борелевского множества A . Радоновская мера μ называется регулярной, если она внешне регулярна, т.е.

$$\mu(A) = \inf \{ \mu(G) : A \subset G, G \text{ — открытое множество} \}$$

для каждого борелевского множества A .

Теорема 5.1 (см. [13]). Пусть μ — радоновская σ -конечная мера в хаусдорфовом пространстве X . Тогда μ — регулярная мера, если выполняется одно из следующих условий:

- (а) X квазиметакомпактно;
- (б) X имеет счетно слабо равномерную базу;
- (с) $[MA + \neg CH]$ X квазиметалиндефово.

Теорема 5.2 (см. [13]). Регулярная распыленная мера μ в хаусдорфовом пространстве X со счетно слабо равномерной базой σ -конечна (распыленность меры μ означает, что $\mu(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$).

Следствие 5.3 (см. [13]). Регулярность распыленной радоновской меры в хаусдорфовом пространстве со счетно слабо равномерной базой эквивалентна ее σ -конечности.

6. СЛАБО РАВНОМЕРНЫЕ БАЗЫ С УСЛОВИЕМ СИММЕТРИЗУЕМОСТИ

Пусть $\mathcal{B}$ — слабо равномерная база пространства X и $I(X)$ — множество всех изолированных точек пространства X . Положим $\mathcal{B}_0 = \emptyset$ и далее по индукции

$$\mathcal{B}_{n+1} = \left(\text{семейство всех максимальных по включению элементов из } \mathcal{B} \setminus \bigcup \{ \mathcal{B}_i : i \leq n \} \right) \cup \bigcup \{ \{x\} : x \in I(X) \}.$$

Очевидно, при каждом n , если $0 < n < \omega$, то $\mathcal{B}_n$ — открытое покрытие пространства X , $\bigcup \{ \mathcal{B}_n : n < \omega \} = \mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \{ \{x\} : x \in I(X) \}$ при $i \neq j$, если $0 < i, j < \omega$. Положим теперь

$$o(x, y) = \min \{ 0 < n < \omega : (\forall B \in \mathcal{B}_n) \{x, y\} \not\subset B \}$$

для точек $x, y \in X$ при $x \neq y$ и определим функцию ρ на $X \times X$ следующим правилом:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1/o(x, y), & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Легко видеть, что выполняются следующие условия:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 3) $x \in \bar{A} \Rightarrow \rho(x, A) = 0$.

Если ρ является симметрикой, то база $\mathcal{B}$ называется базой с условием симметризуемости.

Теорема 6.1 (см. [13]). *Топологическое пространство со слабо равномерной базой имеет слабо равномерную базу с условием симметризуемости тогда и только тогда, когда оно имеет измельчающуюся последовательность покрытий.*

7. СЛАБО РАВНОМЕРНЫЕ И СЧЕТНО СЛАБО РАВНОМЕРНЫЕ БАЗЫ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

При непрерывных отображениях слабо равномерные базы ведут себя не лучшим образом. Примеры из [45] показывают, что свойство пространств иметь слабо равномерную базу не сохраняется при совершенных отображениях в классе наследственно паракомпактных пространств, а в предположении СН в классе наследственно паракомпактных финально компактных пространств. Пример 3.3 из [24] показывает, что открытый компактный образ хаусдорфова (не регулярного) пространства с равномерной базой может не иметь слабо равномерной базы, будучи коллективно нормальным (линейно упорядоченным). Вопрос о сохранении свойства пространства иметь слабо равномерную базу при открытых компактных отображениях в классе вполне регулярных пространств, сформулированный в [35], остается открытым. Имеется, однако, и несколько положительных результатов.

Теорема 7.1 (см. [13]). *Открытый конечнократный образ пространства со слабо равномерной базой имеет слабо равномерную базу.*

Теорема 7.2 (см. [13]). *Открытый S -образ пространства со счетно слабо равномерной базой имеет счетно слабо равномерную базу.*

Теорема 7.3 (см. [13]). *Если X — хаусдорфово пространство со счетно слабо равномерной базой и $f : X \rightarrow Y$ — открытое компактное отображение на Y , то Y имеет счетно слабо равномерную базу.*

8. ОСТРЫЕ БАЗЫ И СЛАБО ИЗМЕЛЬЧАЮЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОКРЫТИЙ

База $\mathcal{B}$ топологического пространства X называется *острой* (sharp), если для каждой последовательности $(B_n : n \in \omega)$ попарно различных элементов базы с $x \in B_n$ для каждого $n \in \omega$ семейство $\{\cap_{i \leq n} B_i : n \in \omega\}$ образует базу пространства в точке x . Понятие острой базы введено в работе [20] Б. Олеси, А. В. Архангельского и Дж. Кэлбрикса. Очевидно, равномерная база — острая и острая база является слабо равномерной, однако понятие слабо равномерной базы много шире. Каждое пространство с острой базой удовлетворяет первой аксиоме счетности и, более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.1 (см. [21]). *Каждое пространство с острой базой имеет точечно-счетную базу.*

Вместе с тем регулярное пространство с острой базой не обязательно является муровским.

Пример 8.2 (см. [20]). *Существует вполне регулярное пространство с острой базой, не имеющее измельчающейся последовательности покрытий.*

Это пространство не является субметакомпактным. Таким образом, задача о субметакомпактности пространств со слабо равномерной базой получает здесь еще одно отрицательное решение, причем в усиленном варианте.

Семейство $\{\mathcal{G}_n : n \in \omega\}$ открытых покрытий пространства X называется *слабо измельчающейся последовательностью покрытий*, если для каждой последовательности $(G_n : n \in \omega)$ множеств $G_n \in \mathcal{G}_n$ и точки $x \in G_n$ для всех $n \in \omega$ семейство $\left\{ \bigcap_{i \leq n} G_i : n \in \omega \right\}$ образует базу пространства X в точке x .

Теорема 8.3 (см. [20]). *Топологическое пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно паракомпактно и имеет слабо измельчающуюся последовательность покрытий.*

Теорема 8.4 (см. [20]). *Топологическое пространство с острой базой имеет слабо измельчающуюся последовательность покрытий.*

Из последних теорем следует, что не существует регулярных L -пространств с острой базой или, более общо, не существует регулярных L -пространств со слабо измельчающейся последовательностью покрытий. В [20] авторы сформулировали ряд задач. В частности: будет ли метризуемо псевдокомпактное пространство с острой базой и будет ли пространство $X \times [0, 1]$ иметь острую базу, если пространство X имеет острую базу? Пример из цитированной выше работы [29] дает отрицательные ответы на оба вопроса:

Пример 8.5 (см. [29]). Существует такое псевдокомпактное пространство X с острой базой, что $X \times [0, 1]$ не имеет острой базы.

Следовательно, X не субметакомпактно, ибо, как было замечено выше, псевдокомпактное субметакомпактное пространство со слабо равномерной базой компактно, и мы имеем еще один пример пространства с острой базой, не являющегося субметакомпактным.

9. ДАЛЬНЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Интерес к задачам о слабо равномерных базах, проявленный топологами, привел к дальнейшим обобщениям этого понятия. В [23] авторы определяют n -слабо равномерное семейство как такое семейство $\mathcal{B}$ открытых множеств топологического пространства X , что для любого множества $A \subset X$ с $|A| = n$ семейство $\{B \in \mathcal{B} : A \subset B\}$ конечно, и строят следующий пример.

Пример 9.1 (см. [23]). Для каждого натурального числа $n \geq 1$ существует муровское пространство X_n , которое имеет $(n + 1)$ -слабо равномерную базу, но не имеет n -слабо равномерной базы.

При построении используется пространство X из примера 2.12. Пусть $K_n = \{(p_n, H) : H \in \mathcal{H}_n\}$ и $K = \bigcup \{K_n : 0 < n < \omega\}$. Тогда $X = Y \cup K$. Пусть теперь k — натуральное число и $k \geq 1$. Положим $X_k = Y \cup (K \times k)$. Точки из $K \times k$ объявляются изолированными. Обозначим $B_n(y)$ множество $G'_n(y) \setminus \{y\}$ и положим $G_n^k(y) = \{y\} \cup (B_n(y) \times k)$ для $y \in Y$. Семейство

$$\mathcal{G}_n = \{G_n^k(y) : y \in Y\} \cup \{\{x\} : x \in K \times k\}$$

будет, очевидно, открытым покрытием пространства X_n , а последовательность $(\mathcal{G}_n : 0 < n < \omega)$ — измельчающейся последовательностью открытых покрытий этого пространства. Заметим, что элементы из $\mathcal{G}_n$ — открыто-замкнутые множества. Следовательно, X_n — муровское пространство. База $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{G}_n : 0 < n < \omega\}$ будет его $(k + 1)$ -слабо равномерной базой. Действительно, пусть $A \subset X_k$ и $|A| = k + 1$. Если $|A \cap Y| \geq 2$, то

$$|\{B \in \mathcal{B} : A \subset B\}| = 0.$$

Если $|A \cap Y| = 1$, то пусть $\{y\} = A \cap Y$. Выберем n так, чтобы $G_n^k(y) \cap A = \{y\}$. Тогда

$$|\{B \in \mathcal{B} : A \subset B\}| \leq n,$$

так как для каждого m только один элемент из $\mathcal{G}_m$ содержит y . Наконец, если $A \cap Y = \emptyset$, то пусть $A = \{(x_1, n_1), \dots, (x_{k+1}, n_{k+1})\}$, где $x_i \in K$ и $n_i \in k$ для $1 \leq i \leq k + 1$. Выберем $i, j \leq k + 1$ так, чтобы $n_i = n_j$. Тогда

$$\{B \in \mathcal{B} : A \subset B\} \subset \{B \in \mathcal{B} : \{(x_i, n_i), (x_j, n_j)\} \subset B\}.$$

Но из $(x_j, n_j) \in G_n^k(y)$ следует, что $x_j \in G'_n(y)$. Следовательно,

$$\left| \{B \in \mathcal{B} : \{(x_i, n_i), (x_j, n_j)\} \subset B\} \right| = \left| \{G'_n(y) : \{x_i, x_j\} \subset G'_n(y)\} \right| < \aleph_0,$$

так как $\{G'_n(y) : y \in Y, 0 < n < \omega\}$ — слабо равномерное семейство в пространстве X из примера 2.12 (см. [30]). Остается показать, что X_k не имеет k -слабо равномерной базы. Пусть $\mathcal{V}$ — какая-либо база пространства X_k , все множества которой содержатся в элементах из $\mathcal{G}_1$. Для каждого $y \in Y$ выберем $V_y \in \mathcal{V}$ и $n(y)$ так, что $G_{n(y)}^k \subset V_y$. Тогда в пространстве X открытое покрытие $\mathcal{U} = \{G'_{n(y)}(y) : y \in Y\} \cup \{\{x\} : x \in K\}$ вписано в $\{G'_1(y) : y \in Y\} \cup \{\{x\} : x \in K\}$. Следовательно, существует такая точка $x \in K$, что $\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ — бесконечное семейство (см. [30]). Но тогда и множество $\{y \in Y : x \in G'_{n(y)}(y)\}$ бесконечно. Положим $A = \{x\} \times k$. Тогда $|A| = k$ и

для каждого $i \in k$ имеем $(x, i) \in G_{n(y)}^k(y) \subset V_y$. Следовательно, множество $\{y \in Y : A \subset V_y\}$ бесконечно и база $\mathcal{V}$ пространства X_k не является k -равномерной.

Семейство $\mathcal{B}$ открытых множеств топологического пространства X авторы называют $<\omega$ -слабо равномерным, если для любого множества $A \subset X$ с $|A| \geq \aleph_0$ существует такое конечное подмножество $F \subset A$, что семейство $\{B \in \mathcal{B} : F \subset B\}$ конечно. Очевидно, что n -слабо равномерное семейство является $<\omega$ -слабо равномерным для любого натурального числа $n \geq 1$.

Пример 9.2 (см. [23]). Существует пространство F , которое имеет $<\omega$ -слабо равномерную базу, но не имеет n -слабо равномерной базы для любого натурального числа $n \geq 1$.

В качестве F возьмем топологическую сумму пространств X_k из примера 9.2. Очевидно, что пространство F обладает всеми требуемыми свойствами.

Теорема 9.3 (см. [23]). *В предположении СЕСА каждое пространство X , в котором каждая неизоллированная точка является точкой накопления счетного множества и которое имеет $<\omega$ -слабо равномерную базу, имеет точечно-счетную базу.*

В доказательстве теоремы используется следующее следствие СЕСА.

Лемма (СЕСА). Пусть κ — кардинал и семейство множеств $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ таково, что для каждого $I \in [\kappa]^{\aleph_0}$ существует такое конечное подмножество $J \subset I$, что

$$\left| \bigcap \{A_\alpha : \alpha \in J\} \right| < \aleph_0.$$

Тогда для каждого $\alpha < \kappa$ существует такое $A'_\alpha \in [A_\alpha]^{\leq \aleph_0}$, что семейство $\{A_\alpha \setminus A'_\alpha : \alpha < \kappa\}$ точечно-конечно.

Теорема 2.19 является непосредственным следствием теоремы 9.3.

Доказательство теоремы 9.3. Пусть $\mathcal{B}$ — $<\omega$ -слабо равномерная база пространства X . Покажем, что $\mathcal{B}$ имеет счетную кратность в каждой неизоллированной точке x . Выберем счетное множество $C \subset X \setminus \{x\}$, для которого $x \in \bar{C}$. Для каждого множества $B \in \mathcal{B}$, содержащего точку x , множество $C \cap B$ бесконечно и, следовательно, существует такое множество $F_B \in [C \cap B]^{<\aleph_0}$, что семейство $\{A \in \mathcal{B} : F_B \subset A\}$ конечно. Так как семейство $[C]^{<\aleph_0}$ счетно и для каждого $F \in [C]^{<\aleph_0}$ существует только конечное множество $B \in \mathcal{B}$ с $F_B = F$, заключаем, что семейство $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ счетно.

Переходим к изолированным точкам. Пусть $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ — множество всех изолированных точек пространства X и пусть $A_\alpha = \{B \in \mathcal{B} : x_\alpha \in B\}$. Если I — бесконечное подмножество кардинала κ , то найдется такое конечное множество $J \subset I$, что

$$\left| \{B \in \mathcal{B} : \{x_\alpha : \alpha \in J\} \subset B\} \right| < \aleph_0,$$

т.е.

$$\left| \bigcap \{A_\alpha : \alpha \in J\} \right| < \aleph_0.$$

Из сформулированного выше следствия СЕСА заключаем, что для каждого $\alpha < \kappa$ существует такое $A'_\alpha \in [A_\alpha]^{\leq \aleph_0}$, что семейство $\{A_\alpha \setminus A'_\alpha : \alpha < \kappa\}$ точечно-конечно, т.е. каждый элемент базы B принадлежит $A_\alpha \setminus A'_\alpha$ лишь для конечного множества индексов α . Следовательно, для каждого $B \in \mathcal{B}$ существует такое конечное множество $I(B)$ изолированных точек, что для каждого $\alpha < \kappa$

$$\{B \in \mathcal{B} : x_\alpha \in B \setminus I(B)\} \subset A'_\alpha, \quad |A'_\alpha| \leq \aleph_0.$$

Следовательно, $\mathcal{B}_1 = \{B \setminus I(B) : B \in \mathcal{B}\}$ — точечно-счетное семейство открытых подмножеств пространства X , которое образует базу в каждой неизоллированной точке пространства. Тогда семейство $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_1 \cup \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ — точечно-счетная база пространства X . $\square$

Г. Беннетом и Д. Латцером доказана следующая теорема.

Теорема 9.4 (см. [26]). *Линейно упорядоченное топологическое пространство, имеющее $<\omega$ -слабо равномерную базу, метризуемо.*

Кроме того, в [26] приведена следующая характеристика обобщенно линейно упорядоченных пространств с $<\omega$ -равномерной базой.

Теорема 9.5 (см. [26]). *Обобщенно линейно упорядоченное пространство X имеет $<\omega$ -равномерную базу тогда и только тогда, когда оно имеет квазиизмельчение и обладает свойством N .*

Говорят, что пространство X имеет свойство N , если существует такая последовательность $(\mathcal{G}_n : n \in \omega)$ открытых покрытий пространства X , что для каждого бесконечного множества $S \subset X$ существуют такие конечное множество $F \subset S$, точка $p \in F$ и $n \in \omega$, что $F \subsetneq St(p, \mathcal{G}_n)$.

В [26] построены аналоги примеров 9.1 и 9.2 для обобщенно линейно упорядоченных пространств.

Пример 9.6 (см. [26]). Для каждого $n \geq 2$ существует наследственно паракомпактное обобщенно линейно упорядоченное пространство, в котором существует $(n + 1)$ -слабо равномерная база, но не существует n -слабо равномерной базы.

Пример 9.7 (см. [26]). Существует обобщенно линейно упорядоченное пространство, которое имеет $<\omega$ -слабо равномерную базу, но не имеет n -слабо равномерной базы для любого натурального числа n .

Топологическое пространство называется n -метакомпактным (соответственно, $<\omega$ -метакомпактным), если в каждое его открытое покрытие можно вписать n -слабо равномерное (соответственно, $<\omega$ -слабо равномерное) покрытие. Таким образом, квазиметакомпактные пространства — это 2-метакомпактные пространства.

Теорема 9.8 (см. [23]). *В предположении СЕСА любое $<\omega$ -метакомпактное пространство является металиндефовым и, следовательно, каждое квази-метакомпактное пространство — металиндефово.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.3.

Теорема 9.9 (см. [43]). *Пусть $n \geq 1$ — натуральное число. Каждое псевдокомпактное пространство с n -слабо равномерной базой полно по Чеху и удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Следствие 9.10 (см. [43]). *Пусть $n \geq 1$ — натуральное число. Каждое псевдокомпактное субметакомпактное пространство с n -слабо равномерной базой метризуемо.*

Теорема 9.11 (см. [43]). *Пусть $n \geq 2$ — натуральное число и пространство X имеет n -слабо равномерную базу. Тогда $|X| \leq \exp_{n-1}(l(X))$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — n -слабо равномерная база пространства X . Положим $\tau = l(X)$. Воспользуемся теоремой Эрдеша—Радо: $(\exp_{n-1}(\tau))^+ \rightarrow (\tau^+)_\tau^n$ (см. [31]). Допустим, что $|X| > \exp_{n-1}(\tau)$. Рассмотрим отображение

$$P : [X]^n \rightarrow \omega, \quad A \mapsto |\{B \in \mathcal{B} : A \subset B\}|.$$

Существует однородное относительно P множество H мощности τ^+ . Легко видеть, что H является дискретным замкнутым подмножеством пространства X . Противоречие. $\square$

Теорема 4.14 является частным случаем доказанной теоремы.

Наиболее полное обобщение слабой равномерности было дано в [21, 22]. Пусть κ и λ — кардиналы. Говорят, что семейство $\mathcal{B}$ множеств есть κ -в- $\leq \lambda$ (κ -in- $\leq \lambda$), если для любого множества A мощности κ семейство $\{B \in \mathcal{B} : A \subset B\}$ содержит не более λ множеств. Аналогично определяется свойство κ -в- $< \lambda$ (κ -in- $< \lambda$). Вместо « κ -в- $\leq \aleph_0$ » говорят « κ -в-счетном».

Отвечая на вопросы авторов статьи [21], З. Балох и Г. Грюнхаге доказывают следующие теоремы.

Теорема 9.12 (см. [22]). *Компактное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно имеет $\aleph_0$ -в-счетном базу.*

Теорема 9.13 (см. [22]). *Топологическое пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда оно является паракомпактным p -пространством с $\aleph_0$ -в-счетном T_1 -разделяющим открытым покрытием.*

Теорема 9.14 (см. [22]). *Если хаусдорфово локально компактное пространство X имеет $\aleph_0$ -в-счетную базу, то его производное множество X^d метризуемо.*

Пространство Мрувки Ψ имеет $\aleph_0$ -в-счетную (даже $\aleph_0$ -в- ≤ 1) базу. Следовательно, теорема 9.8 не может быть усилена до метризуемости X .

Теорема 9.15 (см. [22]). *Локально компактное хаусдорфово пространство без изолированных точек метризуемо тогда и только тогда, когда оно имеет $2^{\aleph_0}$ -в-счетную базу.*

Пример 9.16 (см. [22]). В предположении СН существует регулярное счетно-компактное неметризуемое пространство с $\aleph_0$ -в-счетной базой.

Таким пространством является счетно-компактное наследственно финально плотное пространство в 2^{ω_1} , которое, как показали А. Хайнал и И. Юхас (см. [34]), существует в предположении СН.

Напомним, что p есть наименьшая мощность такого семейства $\mathcal{F}$ подмножеств ординала ω , что $\bigcap \mathcal{F}'$ бесконечно для каждого конечного $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, но не существует бесконечного $A \subset \omega$ с конечной разностью $A \setminus F$ для каждого $F \in \mathcal{F}$.

Теорема 9.17 (см. [22]). *В предположении $p > \aleph_1$ регулярное счетно-компактное пространство, имеющее $\aleph_0$ -в-счетную T_1 -разделяющее открытое покрытие, метризуемо.*

Приведем изящное доказательство, полученное авторами. Пусть X — счетно-компактное регулярное пространство и $\mathcal{B}$ — его $\aleph_0$ -в-счетная T_1 -разделяющая открытая база. Положим

$$X^* = \{x \in X : \exists D \in [X]^{\aleph_0} (x \in \bar{D} \setminus D)\}.$$

Заметим, что $\bar{A} \subset X^*$ для всех $A \in [X]^{\aleph_0}$. Следовательно, X^* счетно-компактно. Покрытие $\mathcal{B}$ точно счетно на X^* . Действительно, допустим, что $y \in X^*$ и $|\mathcal{B}_y| > \aleph_0$. Пусть $D \in [X]^{\aleph_0}$, $y \in \bar{D} \setminus D$ и пусть $\mathcal{B}'_y \in [\mathcal{B}_y]^{\aleph_1}$. Так как $p > \aleph_1$, существует такое бесконечное $A \subset D$, что $A \setminus B$ конечно для каждого $B \in \mathcal{B}'_y$. Но тогда существует несчетное $\mathcal{B}''_y \subset \mathcal{B}'_y$ с $|\bigcap \mathcal{B}''_y| = \aleph_0$, противоречие. Так как X^* счетно компактно и $\mathcal{B}$ точно счетно на X^* , X^* компактно, метризуемо и

$$\left| \{B \in \mathcal{B} : B \cap X^* \neq \emptyset\} \right| \leq \aleph_0.$$

Следовательно $X^* — G_\delta$ -множество в X . Заметим, что точки множества $X \setminus X^*$ — изолированные точки, ибо в противном случае нашлась бы точка $x \in X \setminus X^*$, являющаяся предельной точкой некоторого счетного множества, а значит, $x \in X^*$. Следовательно, множество $X \setminus X^*$ счетно и $nw(X) \leq \aleph_0$. Значит, X компактно и метризуемо.

Теорема 9.18 (см. [43]). *Пусть $n \geq 1$ — натуральное число. Регулярное локально сепарабельное пространство, имеющее n -в-счетную базу, метризуемо.*

Для удобства ссылок в доказательстве этой и следующей теорем используются три леммы.

Лемма 9.19. *Пусть $n \geq 1$ — натуральное число. Открытое n -в-счетное семейство в сепарабельном пространстве счетно.*

Далее через $I(X)$ обозначается множество всех изолированных точек пространства X .

Лемма 9.20. *Пусть $n \geq 1$ — натуральное число, X — пространство с n -в-счетной базой $\mathcal{B}$ и пусть $|I(X)| = \tau$, где τ — несчетный кардинал. Тогда X имеет такую n -в-счетную базу $\mathcal{B}^*$, что для каждой точки $x \in I(X)$ справедливо неравенство $\text{ord}(x, \mathcal{B}^*) < \tau$.*

Доказательство. В случае $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geq 2$ и $I(X) = \{x_\xi : \xi < \tau\}$. Определим

$$\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B} : x_0 \in B\}.$$

Пусть $\eta < \tau$ и для каждого $\xi < \eta$ определено семейство $\mathcal{B}_\xi \subset \mathcal{B}$. Тогда мы определяем семейство

$$\mathcal{B}_\eta = \{B \in \mathcal{B} : x_\eta \in B, B \notin \mathcal{B}_\xi \text{ для } \xi < \eta\}.$$

Теперь положим

$$\mathcal{B}_\xi^1 = \{B \setminus \{x_\xi\} : B \in \mathcal{B}_\xi\}$$

для каждого $\xi < \tau$ и

$$\mathcal{B}^1 = \bigcup \{\mathcal{B}_\xi^1 : \xi < \tau\}.$$

Очевидно, что если $A \subset I(X)$ и $|A| = n - 1$, то

$$\left| \{B \in \mathcal{B}^1 : A \subset B\} \right| < \tau.$$

Повторяя такое построение $n - 1$ раз, мы получим такое семейство $\mathcal{B}^{(n-1)}$, что

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^{(n-1)} \cup \{B \in \mathcal{B} : B \cap I(X) = \emptyset\} \cup \{\{x\} : x \in I(X)\}$$

будет базой, удовлетворяющей условию леммы. $\square$

Лемма 9.21. Пусть $n \geq 1$ — натуральное число, X — пространство с n -в-счетном базой $\mathcal{B}$ и пусть $|I(X)| \leq \aleph_0$. Тогда X имеет такую n -в-счетную базу $\mathcal{B}^*$, что для каждой точки $x \in I(X)$ справедливо неравенство $\text{ord}(x, \mathcal{B}^*) \leq \aleph_0$.

Доказывается так же, как лемма 9.20.

Доказательство теоремы 9.18. Согласно лемме 9.19 каждое пространство, удовлетворяющее условиям теоремы, локально метризуемо. Следовательно, каждая его n -в-счетная база имеет счетную кратность в предельных точках. Проведем индукцию по мощности множества всех изолированных точек. Пусть пространство X удовлетворяет условиям теоремы. Если $|I(X)| \leq \aleph_0$, то по лемме 9.21 пространство X имеет точечно-счетную базу. Поэтому X распадается в дизъюнктное семейство открытых метризуемых подпространств и, следовательно, метризуемо. Пусть теперь $|I(X)| = \tau$, τ — несчетный кардинал. Допустим, что утверждение теоремы выполняется для каждого кардинала $\lambda < \tau$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: τ — регулярный кардинал. Согласно леммам 9.19 и 9.20 существует n -в-счетная база $\mathcal{B}^*$, имеющая кратность $< \tau$ в каждой точке пространства X . Без ограничения общности можно считать, что элементы базы $\mathcal{B}^*$ — сепарабельные подпространства пространства X . Для каждого $B^* \in \mathcal{B}^*$ определим теперь семейство $\mathcal{E}(B^*)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(B^*) &= \{B^*\}, \quad \mathcal{E}_1(B^*) = \{B \in \mathcal{B}^* : B \cap B^* \neq \emptyset\}, \quad \dots, \\ \mathcal{E}_n(B^*) &= \left\{ B \in \mathcal{B}^* : B \cap \bigcup \mathcal{E}_{n-1}(B^*) \neq \emptyset \right\}, \quad \dots, \\ \mathcal{E}(B^*) &= \bigcup \{\mathcal{E}_n(B^*) : n \in \omega\}. \end{aligned}$$

Ясно, что $|\mathcal{E}(B^*)| < \tau$ и $\bigcup \mathcal{E}(B^*)$ имеет менее чем τ изолированных точек. Согласно индуктивному предположению $\bigcup \mathcal{E}(B^*)$ — метризуемое подпространство пространства X . Таким образом, пространство X имеет открытое дизъюнктное покрытие, состоящее из метризуемых пространств. Следовательно, X метризуемо.

Случай 2: τ — сингулярный кардинал. Тогда существует кардинал $\lambda < \tau$ и такое разбиение $\{I_\xi : \xi < \tau\}$ множества $I(X)$, что $|I_\xi| = \tau_\xi < \tau$. Пусть $\mathcal{B}^*$ — база пространства X с теми же свойствами, что и в случае 1. Фиксируем ординал $\xi < \lambda$. Для каждой точки $a \in I_\xi$ положим

$$\mathcal{S}_a = \{B \in \mathcal{B}^* : a \in B\}.$$

Определим

$$A_\eta = \bigcup \{ \mathcal{S}_a : |\mathcal{S}_a| < \tau_\eta \}.$$

Так как $|I(A_\eta)| < \tau$, согласно индуктивному предположению A_η — метризуемое подпространство пространства X . Кроме того, оно открыто в X . Следовательно, пространство

$$G_\xi = \bigcup \{ B \in \mathcal{B}^* : B \cap I_\xi \neq \emptyset \} = \bigcup \{ A_\eta : \eta < \lambda \}$$

имеет базу, кратность которой в каждой его точке не превосходит λ . Отсюда следует, что пространство

$$G = \bigcup \{ G_\xi : \xi < \lambda \} = \bigcup \{ B \in \mathcal{B}^* : B \cap I(X) \neq \emptyset \}$$

имеет базу $\mathcal{U}$, кратность которой в каждой его точке не превосходит λ . Так как G — открытое подпространство пространства X , можно предположить, что элементы базы — сепарабельные пространства. Метод, использованный в случае 1, позволяет доказать, что G — метризуемое подпространство пространства X . $X \setminus G$ содержится в открытом подпространстве пространства X , не содержащем изолированных точек и, следовательно, метризуемом. Тогда X , будучи объединением двух открытых локально сепарабельных метризуемых подпространств, будет метризуемо. $\square$

Теорема 9.22 (см. [43]). Пусть $n \geq 1$ — натуральное число. Регулярное счетно-компактное пространство, имеющее n -в-счетном T_1 -разделяющее открытое покрытие, метризуемо.

Доказательство. Пусть X — регулярное счетно-компактное пространство и $\mathcal{B}$ — его n -в-счетном T_1 -разделяющее открытое покрытие. Обозначим через $D(X)$ множество всех предельных точек пространства X . Очевидно, что если $x \in D(X)$, то

$$\text{ord}(x, \mathcal{B}) \leq \min \{ |A| : x \text{ — точка накопления множества } A \}.$$

Рассмотрим множество

$$Z = \{ x \in D(X) : \text{ord}(x, \mathcal{B}) \leq \aleph_0 \}.$$

Так как X — регулярное счетно-компактное пространство, $\bar{Z} = D(X)$. Теперь по аналогии с доказательством теоремы Мищенко (см. [9]), используя лемму 9.19, можно доказать, что существует такое счетное множество $Y \subset Z$, что $\bar{Y} = D(X)$. Следовательно,

$$|\{ B \in \mathcal{B} : B \cap D(X) \neq \emptyset \}| \leq \aleph_0.$$

Без ограничения общности можно считать, что если $B \in \mathcal{B}$ и $B \cap D(X) = \emptyset$, то B — одноточечное множество. Таким образом, $\mathcal{B}$ — точечно-счетное T_1 -разделяющее открытое покрытие регулярного счетно-компактного пространства X . Следовательно, (см. [33]) пространство X метризуемо. $\square$

Следствие 9.23 (см. [21]). Пусть $n \geq 1$ — натуральное число. Регулярное счетно-компактное пространство, имеющее n -в-счетном базу, метризуемо.

Следствие 9.24 (см. [43]). Пусть $n \geq 1$ — натуральное число. Регулярное пространство, имеющее n -в-счетном открытое покрытие сепарабельными метризуемыми подпространствами, метризуемо.

Следствие 9.25 (см. [43]). Пусть $n \geq 1$ — натуральное число. Регулярное локально счетно-компактное пространство, имеющее n -в-счетном базу, метризуемо.

Следствие 9.26 (см. [22]). Пусть $n \geq 1$ — натуральное число. Хаусдорфово локально компактное пространство, имеющее n -в-счетном базу, метризуемо.

З. Балох и Г. Грюнхаге изучают следующий вопрос (см. [22]): будет ли компактным изначально κ -компактное пространство с κ -в- $\leq \kappa$ базой? Как показывают пример 9.16 и теорема 9.17, в случае $\kappa = \aleph_0$ ответ зависит от дополнительных теоретико-множественных предположений. В следующих двух теоремах авторы получают положительные результаты.

Теорема 9.27 (см. [22]). Пусть κ — бесконечный кардинал. Если X — разреженное изначально κ -компактное пространство с κ -в- $\leq \kappa$ T_1 -разделяющим открытым покрытием, то X — компактное пространство веса $\leq \kappa$.

Теорема 9.28 (см. [22]). Пусть X — инициально $2^{\aleph_0}$ -компактное пространство с $2^{\aleph_0}$ -в- $\leq 2^{\aleph_0}$ T_1 -разделяющим открытым покрытием. Тогда X — компактное пространство веса $\leq 2^{\aleph_0}$.

Иной характер имеет следующее утверждение.

Теорема 9.29 (см. [22]). Для каждого бесконечного кардинала κ предположение $2^{\aleph_0} = \kappa^+$ совместимо с существованием некомпактного инициально κ -компактного пространства с κ -в- $\leq \kappa$ базой.

10. НЁТЕРОВСКИЙ ТИП ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Изучение открыто-конечных и открыто-счетных семейств и, в частности, баз привело к определению соответствующих кардинальнозначных инвариантов, тесно связанных с другими кардинальными характеристиками топологических пространств, особенно компактных (см. [40]). Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{B}$ — открытое семейство в пространстве X . Для множества G обозначим через $\mathcal{B}_G$ семейство $\{B \in \mathcal{B} : G \subset B\}$. Определим *нётеровский тип семейства* $\mathcal{B}$ как кардинал

$$\text{Nt}(\mathcal{B}) = \min \left\{ \alpha : \alpha \text{ — бесконечный кардинал} \right. \\ \left. \text{и } |\mathcal{B}_G| < \alpha \text{ для каждого непустого открытого множества } G \subset X \right\}.$$

Определим *нижний нётеровский тип семейства* $\mathcal{B}$ как кардинал

$$\text{INt}(\mathcal{B}) = \sup \left\{ |\mathcal{B}_G| : G \text{ — непустое открытое подмножество пространства } X \right\} \cdot \aleph_0.$$

Кардинал

$$\min \left\{ \text{Nt}(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ — база пространства } X \right\}$$

называется *нётеровским типом пространства* X и обозначается $\text{Nt}(X)$. Кардинал

$$\min \left\{ \text{INt}(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ — база пространства } X \right\}$$

называется *нижним нётеровским типом пространства* X и обозначается $\text{INt}(X)$. Аналогично могут быть определены *нётеровский π -тип* $\text{N}\pi\text{t}(X)$ и *нижний нётеровский π -тип* $\text{IN}\pi\text{t}(X)$, если вместо баз рассматривать π -базы. Пространство X называется *нётеровским*, если $\text{Nt}(X) = \aleph_0$ и *слабо нётеровским*, если $\text{INt}(X) = \aleph_0$. Кардинал

$$\text{rank}(\mathcal{B}) = \sup \left\{ |\mathcal{B}'| : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}, \bigcap \mathcal{B}' \neq \emptyset, \mathcal{B}' \text{ — антицепь} \right. \\ \left. \text{(относительно теоретико-множественного включения)} \right\}$$

называется *рангом семейства* $\mathcal{B}$. *Ранговый вес пространства* X определяется как кардинал

$$w_r(X) = \min \left\{ \text{rank}(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ — база пространства } X \right\} \cdot \aleph_0.$$

Аналогично определяется *ранговый π -вес* $\pi w_r(X)$ пространства X .

Теорема 10.1 (см. [40]). Пусть X — топологическое пространство. Тогда

$$w(X) = \text{INt}(X) \cdot \pi w(X), \quad \text{INt}(X) \cdot \chi(X) = \text{INt}(X) \cdot \pi \chi(X).$$

Теорема 10.2 (см. [40]). Пусть X — топологическое пространство. Если $\text{Nt}(X) < \chi(X)$, то $w_r(X) = \chi(X)$.

Доказательство. Очевидно, для каждой базы $\mathcal{B}$ пространства X и каждой точки $x \in X$ мы имеем

$$\text{ord}(x, \mathcal{B}) \leq \chi(x, X) \cdot \text{INt}(\mathcal{B}).$$

Следовательно, если $\text{Nt}(X) < \chi(X)$, то $w_r(X) \leq \chi(X)$. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная база пространства X и пусть $\mathcal{B}'$ — такая база, что $\text{Nt}(\mathcal{B}') = \text{Nt}(X)$. Пусть τ — любой кардинал, удовлетворяющий условию $\text{Nt}(X) \leq \tau < \chi(X)$. Выберем такую точку $x \in X$, что $\chi(x, X) \geq \tau^+$. Положим

$\mathcal{B}'_x = \{B' \in \mathcal{B}' : x \in B'\}$ и для каждого множества $B' \in \mathcal{B}'_x$ выберем такое множество $B'' \subset B'$, что $B'' \in \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Получим такое семейство $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}$, что $\text{Nt}(\mathcal{B}'') \leq \text{Nt}(X)$ и $x \in \cap \mathcal{B}''$. Кроме того, очевидно, $|\mathcal{B}''| \geq \tau^+$. Выделим максимальную антицепь $\mathcal{B}''_0$ из $\mathcal{B}''$. Рассмотрим семейство всех таких множеств $B \in \mathcal{B}''$, что B содержится как собственное подмножество в некотором множестве из $\mathcal{B}''_0$. Выделим максимальную антицепь $\mathcal{B}''_1$ из этого семейства. Продолжая этот процесс, мы получим $\text{Nt}(X)$ -последовательность $(\mathcal{B}''_\xi : \xi < \text{Nt}(X))$, каждый элемент $\mathcal{B}''_\xi$ которой является максимальной антицепью в семействе $\{B \in \mathcal{B}'' : B \text{ содержится в качестве собственного подмножества в каком-нибудь множестве из } \mathcal{B}''_\gamma \text{ для всех } \gamma < \xi\}$. Семейство

$$\mathcal{B}''_{\text{Nt}(X)} = \bigcup \{\mathcal{B}''_\xi : \xi < \text{Nt}(X)\}$$

плотно в $\mathcal{B}''$. Поэтому оно является базой точки x в пространстве X . Тогда $|\mathcal{B}''_{\text{Nt}(X)}| \geq \tau^+$ и, следовательно, существует такой ординал $\xi < \text{Nt}(X)$, что $|\mathcal{B}''_\xi| \geq \tau^+$. Это означает, что $\text{rank}(\mathcal{B}) \geq \tau^+$. Так как это справедливо для любого кардинала τ , удовлетворяющего неравенствам $\text{Nt}(X) \leq \tau < \chi(X)$, то $\text{rank}(\mathcal{B}) \geq \chi(X)$. Поскольку $\mathcal{B}$ — произвольная база пространства X , заключаем, что $w_r(X) \geq \chi(X)$. Учитывая полученное ранее неравенство $w_r(X) \leq \chi(X)$, имеем $w_r(X) = \chi(X)$. $\square$

Следствие 10.3 (см. [40]). *Если X — нётеровское пространство, то $w_r(X) = \chi(X)$.*

Теорема 10.4 (см. [40]). *Пусть X — компактное пространство. Если $\text{Nt}(X)$ — регулярный кардинал и $w(X) = \text{Nt}(X)$, то $w_r(X) = w(X)$.*

Доказательство. Действительно, допустим, что $w_r(X) < w(X)$. Тогда пространство X содержит такое всюду плотное множество A , что $\pi\chi(x, X) \leq w_r(X)$ для каждой точки $x \in A$ (см. [6]). Выберем такую базу $\mathcal{B}$ пространства X , что $\text{Nt}(\mathcal{B}) = \text{Nt}(X)$. Очевидно, $\text{ord}(x, \mathcal{B}) < \text{Nt}(X)$ в каждой точке $x \in A$. Используя известный метод доказательства теоремы Мищенко (см. [9, 11]), построим последовательность $(S_n : n \in \omega)$ подмножеств множества A , удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) если $n, m \in \omega$ и $n < m$, то $S_n \subset S_m$;
- 2) $|S_n| < w(X)$ для всех $n \in \omega$;
- 3) если $n \in \omega$, $B' \subset \{B \in \mathcal{B} : B \cap S_n \neq \emptyset\}$, $|B'| < \aleph_0$ и $A \setminus \bigcup B' \neq \emptyset$, то $S_{n+1} \cap (A \setminus \bigcup B') \neq \emptyset$.

Из этих условий следует, что множество $S = \bigcup \{S_n : n \in \omega\}$ всюду плотно в X . Кроме того, $|S| < w(X)$ и $\text{ord}(x, \mathcal{B}) < w(X)$ для каждой точки $x \in S$. Тогда $w(X) < w(X)$, противоречие. Следовательно, $w_r(X) = w(X)$. $\square$

Теорема 10.5 (см. [40]). *Пусть X — компактное пространство. Тогда*

$$\begin{aligned} w(X) &= \text{Int}(X) \cdot \pi w(X) = \text{Int}(X) \cdot \pi \chi(X) = \text{Int}(X) \cdot t(X) = \text{Int}(X) \cdot \chi(X) = \\ &= \text{Int}(X) \cdot w_r(X) = \text{Int}(X) \cdot s(X) = \text{Int}(X) \cdot \text{hd}(X) = \text{Int}(X) \cdot \text{hl}(X). \end{aligned}$$

Следствие 10.6 (см. [40]). *Пусть X — компактное слабо нётеровское пространство. Тогда*

$$w(X) = \pi w(X) = w_r(X) = \chi(X) = \pi \chi(X) = t(X) = s(X) = \text{hd}(X) = \text{hl}(X).$$

Следствие 10.7 (см. [40]). *Пусть X — хаусдорфово локально компактное, слабо нётеровское пространство. Тогда $w_r(X) = \chi(X)$.*

Следствие 10.8 (см. [40]). *Пусть X — компактное пространство. Если $\text{Nt}(X)$ — слабо недо-стижимый кардинал, то $w_r(X) = w(X)$.*

Пространство ординалов $X = \omega_1 \cup \{\omega_1\}$ не слабо нётеровское, так как, очевидно, $\chi(X) = \aleph_1$ и $w_r = \aleph_0$ (см. [6]). Пространство $X = I^\tau$ — нётеровское (см. [10]) и, следовательно, $\text{Int}(X) = \text{Nt}(X) = \aleph_0$ и, согласно теореме 10.5, $w_r = \tau \cdot \aleph_0$. Пусть X обозначает «две стрелки» Александрова. Известно (см. [32]), что $w_r(X) = \aleph_0$. Тогда из теоремы 10.5 следует, что $\text{Int}(X) = w(X) = 2^{\aleph_0}$, а так как $\text{cf}(2^{\aleph_0}) > \omega$, получаем $\text{Nt}(X) = (2^{\aleph_0})^+$.

П. А. Бирюковым [6] рассматривался вопрос: существует ли такое компактное пространство X , что $|X| > 2^{w_r(X)}$? Из теоремы 10.4 следует, что для такого пространства должны выполняться условия $Nt(X) = w(X)^+$ или $Nt(X) = w(X)$ — сингулярный кардинал. Отметим в связи с вопросом Бирюкова еще следующее утверждение.

Следствие 10.9 (см. [40]). *В предположении МА, если X — компактное пространство и $Nt(X) \leq 2^{\aleph_0}$, то $|X| \leq 2^{w_r(X)}$.*

11. НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ

1 (см. [35]). Имеет ли слабо равномерную базу открытый компактный образ пространства со слабо равномерной базой в классе вполне регулярных пространств?

2 (см. [14]). Существует ли регулярное финально компактное пространство несчетного характера со слабо равномерной базой?

3 (см. [14]). Совместно ли с ZFC существование L -пространств со слабо равномерной базой?

4 (см. [22]). Совместно ли с ZFC, что каждое счетно-компактное пространство без изолированных точек, имеющее $2^{\aleph_0}$ -в-счетном базу, метризуемо?

5 (см. [6]). Существует ли такое компактное пространство X , что $|X| > 2^{w_r(X)}$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С. О метризации топологических пространств// Бюлл. Польской Акад. наук, сер. мат. — 1960. — 8, № 3. — С. 135–140.
2. Архангельский А. В. Некоторые метризационные теоремы// Усп. мат. наук. — 1963. — 18, № 5. — С. 139–145.
3. Архангельский А. В. Отображения и пространства// Усп. мат. наук. — 1966. — 21, № 4. — С. 133–184.
4. Архангельский А. В. Компактность// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фунд. направления. — М.: ВИНТИ, 1989. — 50. — С. 5–128.
5. Архангельский А. В. Паракомпактность и метризация. Метод покрытий в классификации пространств// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фунд. направления. — М.: ВИНТИ, 1989. — 51. — С. 5–80.
6. Бирюков П. А. Ранги семейств множеств и свойства топологических пространств// Докл. АН СССР. — 1981. — 257. — С. 777–779.
7. Величко Н. В. О мощности открытых покрытий топологических пространств// Fund. Math. — 1973. — 53. — С. 271–282.
8. Куратовский К. Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966.
9. Мищенко А. С. Пространства с точечно-счетной базой// Докл. АН СССР. — 1962. — 144. — С. 985–988.
10. Перегудов С. А. О некоторых свойствах семейств открытых множеств и покрытий// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1976. — 3. — С. 25–33.
11. Перегудов С. А., Шапировский Б. Э. Об одном классе бикompактов// Докл. АН СССР. — 1976. — 230. — С. 279–282.
12. Перегудов С. А. О метризуемости в классе топологических пространств со слабо равномерной базой// Бюлл. Польской Акад. наук, сер. мат. — 1980. — 28, № 11–12. — С. 609–612.
13. Перегудов С. А. О некоторых обобщениях понятия равномерной базы// В сб.: Отображения и функторы. — М.: Изд. Моск. ун-та, 1984. — С. 102–117.
14. Перегудов С. А. Слабо равномерные базы и 1 аксиома счетности// Мат. заметки. — 1986. — 40, № 3. — С. 331–340.
15. Пономарев В. И. О метризуемости финально компактных пространств с точечно-счетной базой// Докл. АН СССР. — 1967. — 174. — С. 1274–1277.
16. Смирнов Ю. М. К теории финально компактных пространств// Укр. мат. ж. — 1951. — 3, № 1. — С. 52–60.
17. Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств/ под ред. Барвайса Дж. — М.: Наука. — 1982.
18. Шахматов Д. Б. О псевдокомпактных пространствах с точечно-счетной базой// Докл. АН СССР. — 1984. — 279, № 5. — С. 825–829.

19. *Энгелькин П.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
20. *Alleche B., Arhangel'skii A., Calbrix J.* Weak developments and metrization// *Topology Appl.* — 2000. — 100. — С. 23–38.
21. *Arhangel'skii A. V., Just W., Reznichenko E., Szeptyczski P. J.* Sharp bases and weakly uniform bases versus point countable bases// *Topology Appl.* — 2000. — 100. — С. 39–46.
22. *Balogh Z., Gruenhage G.* Base multiplicity in compact and generalized compact spaces// *Topology Appl.* — 2001. — 115, № 2. — С. 139–151.
23. *Balogh Z., Davis S., Just W., Shelah S., Szeptyczski P. J.* Strongly almost disjoint sets and weakly uniform bases// *Trans. Amer. Math. Soc.* — 2000. — 352. — С. 4971–4987.
24. *Bennet H., Berney R.* Subparacompactness and G_δ -diagonals// *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1971. — 30, № 3.
25. *Bennett H., Lutzer D.* Ordered spaces with special bases// *Fund. Math.* — 1998. — 158. — С. 289–299.
26. *Bennett H., Lutzer D.* Spaces with $<\omega$ -weakly uniform bases// *Topology Proc.* — 2003. — 27, № 1. — С. 39–49.
27. *Burke D. K.* On p -spaces and $w\Delta$ -spaces// *Pacif. J. Math.* — 1970. — 35. — С. 285–296.
28. *Bing R. H.* Metrization of topological spaces// *Can. J. Math.* — 1951. — 3. — С. 175–186.
29. *Bailey B., Gruenhage G.* On a question concerning sharp bases// to appear.
30. *Davis S. W., Reed G. M., Wage M. L.* Further results on weakly uniform bases// *Houston J. Math.* — 1976. — 2, № 1. — С. 57–63.
31. *Erdős P., Rado R.* A partition calculus in set theory// *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1956. — 62. — С. 427–489.
32. *Gruenhage G., Nyikos P.* Spaces with bases of countable rank// *Gen. Top. Appl.* — 1978. — 8. — С. 233–257.
33. *Gruenhage G.* Generalized metric spaces// *Handbook of set-theoretic topology/ Kunen K., Vaughan J. E., eds.* — 1984. — С. 425–501.
34. *Hajnal A., Juhasz I.* On hereditarily α -Lindelöf and hereditarily α -separable spaces// *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* — 1968. — 11. — С. 115–124.
35. *Heath R. W., Lindgren W. E.* Weakly uniform bases// *Houston J. Math.* — 1976. — 2, № 1. — С. 85–90.
36. *Juhasz I.* A survey of S and L spaces// *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai.* — 1978. — 23. — С. 675–688.
37. *Juhasz I.* A survey of S and L spaces/ Preprint. — *Math. Inst. Hungarian Acad. Sci.* 1979. — № 15/1979.
38. *Michael E.* Point-finite and locally finite coverings// *Can. J. Math.* — 1955. — 7. — С. 275–279.
39. *Michael E.* Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable Cartesian products// *Comp. Math.* — 1971. — 23. — С. 199–214.
40. *Peregudov S. A.* On the Noetherian type of topological spaces// *Comment. Math. Univ. Carolinae.* — 1997. — 38, № 3. — С. 581–586.
41. *Peregudov S. A.* On pseudocompactness and other covering properties// *Questions Answers Gen. Topology.* — 1999. — 17. — С. 153–155.
42. *Peregudov S. A.* On Boolean algebras of many-valued mappings// *Topology Proc.* — 1999. — 24. — С. 407–419.
43. *Peregudov S. A.* On n -in-countable bases// *Comment. Math. Univ. Carolinae.* — 2000. — 41, № 1. — С. 175–178.
44. *Pixley C., Roy P.* Uncompletable Moore spaces// *Proc. Auburn. Topol. Conf.* — 1969. — С. 75–85.
45. *Popov V. V.* A perfect map need not preserve a G_δ -diagonal// *Gen. Top. Appl.* — 1977. — 7. — С. 31–33.
46. *Szentmiklossy Z.* S-Spaces and L-spaces under Martin's axiom// *Topology Appl.* — 1983. — 16, № 3. — С. 243–251.
47. *Shakhmatov D. B.* Compact spaces and their generalizations// *Recent Progress in General Topology/ Husek M., van Mill J., eds.* — 1992. — С. 573–640.
48. *Uspenskii V. V.* Pseudocompact spaces with a σ -point-finite base// *Comment. Math. Univ. Carolinae.* — 1984. — 25. — С. 261–264.
49. *Wicke H. and Worrell J.* Characterizations of developable topological spaces// *Can. J. Math.* — 1965. — 17. — С. 820–830.

С. А. Перегудов

Государственный университет управления, кафедра прикладной математики

E-mail: spaatp@aviel.ru