ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 35

ТРУДЫ ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ «ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XIV»

ВОРОНЕЖ, 2003 Г.

ЧАСТЬ 2

Тбилиси
2005

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)
Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)
Е. С. Голод (Московский государственный университет)
И. Т. Кигурадзе (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)
А. Лашхи (Грузинский технический университет)
Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
А. В. Овчинников (Московский государственный университет)
В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
А. В. Сарычев (Университет Флоренции)
Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

©Институт кибернетики Академии наук Грузии, 2005

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 35

ТРУДЫ ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ «ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XIV»

ВОРОНЕЖ, 2003 Г.

ЧАСТЬ 2

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი
2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

О формализме интеграла Лебега—Стилтьеса и относительных производных в теории обобщенной задачи Штурма—Лиувилля (*Ю. В. Покорный, М. Б. Клюева, О. Ю. Покорная*) 3
Мнимая чистота основ (*Ю. В. Покорный, Н. Х. Розов*) 14
Теоремы усреднения для систем с разрывными решениями (*А. Н. Покровский*) 18
О нулях одного семейства функций Миттаг-Леффлера (*А. Ю. Попов*) 28
Спектральные задачи для уравнений с разрывными монотонными операторами (*Д. К. Потапов*) 31
О свойствах представления уравнения Фоккера—Планка в базисе функций Эрмита (*Е. В. Радкевич*) 33
Методические вопросы применения компьютерных технологий и продуктов в учебном процессе средней школы (*Н. Х. Розов*) 39
Некоторые замечания о бисингулярных краевых задачах (*Н. Х. Розов*) 44
Спектральные методы исследования вырожденных дифференциально-операторных уравнений. I (*А. Г. Руткас*) 48
Операторы Штурма—Лиувилля с сингулярными потенциалами (*А. М. Савчук*) 65
Об аналоге теоремы Жордана—Дирихле для разложений по собственным функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием (*А. П. Хромов*) 67
О равносходимости спектральных разложений интегральных операторов (*А. П. Хромов*) . . 77
О распространении акустических волн в среде, состоящей из вязкой жидкости и упругого материала (*А. С. Шамаев, В. А. Самарин*) 83
Спектральный анализ задачи Редже (*А. А. Шкаликов*) 90
Алгебры операторов на банаховых пространствах над телом кватернионов и алгеброй октонионов (*С. В. Людковский*) 98

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 3–13

О ФОРМАЛИЗМЕ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА—СТИЛТЬЕСА И ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ТЕОРИИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

© 2005 г. **Ю. В. ПОКОРНЫЙ, М. Б. КЛЮЕВА, О. Ю. ПОКОРНАЯ**

Для непрерывных на $[0,l]$ решений дифференциального уравнения

$$-\left(pu'\right)' + (Q' - \lambda M')u = F' \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{1}$$

где штрихи обозначают обобщенное дифференцирование, а для функций $p(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ и $F(x)$ предполагается ограниченность вариации, изучается возможность адекватного описания в виде поточечно задаваемого (т.е. обыкновенного) уравнения

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(p\frac{d}{dx}u\right) + (q - \lambda m)u = f, \tag{2}$$

где обозначено $q = \dfrac{d}{d\sigma}Q$, $m = \dfrac{d}{d\sigma}M$, $f = \dfrac{d}{d\sigma}F$, и где $\sigma(x)$ — строго возрастающая на $[0,l]$ функция, определяемая лишь по «внешним» параметрам Q, M, F задачи (1), а символ $\dfrac{d}{d\sigma}$ означает поточечное σ-дифференцирование. В каждом из концов $[0,l]$ уравнение (1) превращается в традиционное краевое условие Штурма—Лиувилля. Переход к поточечной форме (2) позволяет изучать качественные свойства решений уравнения (1) (например, распределение и перемежаемость нулей, осцилляцию и пр.), характерные для классической теории Штурма—Лиувилля.

Всюду далее предполагается, что $\inf\limits_{(0,l)} p > 0$ и что Q и M не убывают на $[0,l]$, что наиболее характерно для приложений. Например, для «стилтьесовской струны» $p(x)$ характеризует локальное натяжение, $Q(x)$ определяется упругой реакцией на $[0,x]$ внешней среды, функция $M(x)$ — распределенная на $[0,x]$ масса (если речь идет об упругих колебаниях, когда $F(x) \equiv \mathrm{const}$), а $F(x)$ — там же приложенная внешняя нагрузка.

Общие термины, не характерные для теории обыкновенных дифференциальных уравнений, согласуются с [3, 4, 11, 13].

1. Пусть $u(x)$ — непрерывное на $[0,l]$ решение уравнения (1). Так как Q, M и F принадлежат пространству $BV[0,l]$ функций ограниченной вариации, то все слагаемые в (1) (первое — вслед за остальными) можно отождествлять с риссовыми мерами — функционалами на $C[0,l]$. Поэтому $p(x)u'(x) \in BV[0,l]$. Из равенства дифференциалов Стилтьеса $d[pu'(x)] = u(x)[dQ(x) - \lambda dM(x)] - dF(x)$ вытекает и равенство для соответствующих функций сегмента $[\alpha,\beta]$.

$$[p(x)u'(x)]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta u\, d(Q - \lambda M) - \int_\alpha^\beta dF, \tag{3}$$

где интегралы можно понимать по Риману—Стилтьесу.

Равенство (3) для дальнейшего служит отправным. Уравнение (1) из (3) получается чисто формальным (обобщенным) дифференцированием по β (или α). Так как $p \in BV[0,l]$ и $p \gg 0$ внутри

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-00418 и гранта Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) № E00-1.0-154..

$(0,l)$, то из включения $(pu'(x)) \in BV[0,l]$ следует, что производная $u'(x)$ должна иметь ограниченную вариацию на $[0,l]$. Таким образом, необходимые условия непрерывного решения $u(x)$ — его абсолютная непрерывность на $[0,l]$ и ограниченность вариации его обычной (лебеговой) производной $u'(x)$. Всюду далее эти условия предполагаются выполненными.

Замечание 1. Согласно (3) порождающая (pu')-меру функция $(pu')(x)$ должна иметь точно определенное значение при $x=0$ (и при $x=l$). Рассмотрим вначале $(pu')(x)$ как обычное произведение $p(x)\cdot u'(x)$. В отличие от правой производной $u'_+(0)$, обычная производная $u(x)$ в крайней точке $x=0$, строго говоря, неопределена, а для $u'(x)$, как элемента $L[a,b]$, значение $u'(0)$ может быть каким угодно. В этом плане для любой абсолютно непрерывной на $[0,l]$ функции $u(x)$ корректный смысл значения $p(0)u'(0)$ возможен лишь при $p(0)=0$ (необходимость условия $p(l)=0$ мотивируется аналогично). Если на (pu') посмотреть как на обобщенное произведение $p(x)$ на обобщенную производную $u'(x)$, то порождающий (pu') дифференциал Стилтьеса dg определяется функцией $g(x)=\int\limits_0^x p\,du$, которая при $u(\cdot)\in C[0,l]$ не зависит от значений $p(0)$ и $p(l)$. Точнее говоря, для любых двух $p_1(x)$ и $p_2(x)$ из $BV[0,l]$, различающихся лишь в точках $x=0$, $x=l$ (т.е. имеющих там разные скачки), и для любой $u(\cdot)\in C[0,l]$ соответствующие им обобщенные функции (p_1u') и (p_2u') совпадают как элементы $C^*[0,l]$. Таким образом, равенства $p(0)=0$ и $p(l)=0$ никак не обуславливают процедуру $(pu'):C[0,l]\to C^*[0,l]$. В дальнейшем мы будем всюду предполагать условие $p(0)=p(l)=0$ выполненным.

Всюду далее речь идет (если не оговорено противное) о решениях, удовлетворяющих (1) на замкнутом отрезке $[0,l]$. Включение концов, учитывающее возможные скачки Q,M,F при $x=0$ и $x=l$ — один из главных аспектов работы.

2. Если Q,M и F являются σ-абсолютно непрерывными относительно некоторой возрастающей функции $\sigma(x)$, то в (3) все слагаемые справа, а значит, — и выражение слева оказываются σ-абсолютно непрерывными по соответствующей σ-мере. В качестве такой функции σ мы можем взять, например,

$$\sigma(x)\equiv x+Q(x)+\kappa(x)+M(x)+F_+(x)+F_-(x),$$

где первое слагаемое взято, чтобы обеспечить строгую монотонность σ, а через F_+ и F_- обозначены неубывающие функции из жорданова представления $F=F_+-F_-$. Функция $\kappa(x)=\theta(x-0)+\theta(x-l+0)$ (здесь $\theta(x)$-функция Хевисайда) имеет разрывы лишь на концах $[0,l]$.

Замечание 2. Из σ-абсолютной непрерывности (pu') следует, что в каждой точке $\xi\in[0,l]$ функция u' имеет односторонние пределы при $x\to\xi$ слева или справа, совпадающие с односторонними производными. Поэтому как для этих пределов, так и для производных уместно единое обозначение $u'(\xi+0)$ и $u'(\xi-0)$. При этом $u'(x+0)$ определена всюду и непрерывна справа на $[0,l)$, а $u'(x-0)$ — непрерывна слева всюду на $(0,l]$. Если x_0 — точка непрерывности $\sigma(x)$, то из σ абсолютной непрерывности (pu') вытекает справедливость равенства $p(x_0+0)u'(x_0+0)=p(x_0-0)u'(x_0-0)$. Таким образом, $u'(x+0)=u'(x-0)$, кроме, может быть, не более чем счетного множества точек, то есть множества лебеговой меры нуль. Как левая, так и правая производные удовлетворяют (3) всюду на $(0,l]$ и $[0,l)$ соответственно.

Мы используем далее обозначение из [3] для скачка функции $z(x)$ в точке ξ в виде $[z](\xi)$, полагая тем самым $[z](\xi)=z(\xi+0)-z(\xi-0)$.

На правом конце ($x=l$) при $\alpha=l-0$ и $\beta=l$ равенство (3) принимает вид

$$p(l-0)u'(l-0)+\left([Q](l)-\lambda[M](l)\right)u(l)=[F](l) \tag{4}$$

Здесь мы воспользовались замечанием 1, заменив $[pu']\,(l)$ на $-p(l-0)u'(l-0)$. Соотношение (4) при $[F](l)=0$ превращается в классическое условие Штурма—Лиувилля, наиболее распространенное при $[M](l)=0$, когда оно принимает вид $k_1u'(l)-k_2u(l)=0$. Аналогично в левом конце формой (3) уравнения (1) поглощается и другое условие того же типа

$$-p(+0)u'(+0)+\left([Q]-\lambda[M]\right)[0]u(0)=[F](0). \tag{5}$$

В любой внутренней точке $\xi \in S(\sigma)$ имеем из (3)

$$-\left[pu'\right](\xi) + \left([Q] - \lambda[M]\right)(\xi)u(\xi) = [F](\xi). \tag{6}$$

Последнее соотношение в форме $u'(\xi+0) - u'(\xi-0) = ku(\xi)$ хорошо известно в теории импульсных систем (см. [12]) как условие склейки (при $k > 0$). Как отмечается в [2], совпадение знаков у решений и скачков их производных позволяет многие естественные свойства гладких решений распространять на кусочно гладкие. Возможность присутствия в таких условиях как неоднородностей произвольного знака, так и спектрального параметра, ранее не обсуждались.

Рассмотрим теперь более внимательно уравнение (1) на концах, определяемое равенствами (4), (5). Назовем точку $x = 0$ (или $x = l$) *закрепленным концом* уравнения (1), если его решения обусловлены равенством $u(0) = 0$ (или $u(l) = 0$). Если закреплен левый конец, то (5) сводится к равенству $-p(+0)u'(+0) = [F](0)$. Последнее наряду с $u(0) = 0$ обуславливает задачу Коши в точке $x = 0$. Таким образом, закрепление левого конца «выключает» уравнение (1) на этом конце и скачки коэффициентов Q, M и F в этом конце никакого отпечатка на решения уравнения (1) не могут наложить. Уравнение (1) в этом случае сохраняет смысл лишь при $x > 0$. Аналогично с правым концом, если он закреплен.

Пусть левый конец не закреплен. Если Q и M скачков в нуле не имеют, то равенство (5) принимает вид $-p(+0)u'(+0) = [F](0)$, откуда при $[F](0) = 0$ следует (т.к. $p(+0) > 0$) условие $u'(+0) = 0$, именуемое обычно(с другой мотивацией) условием свободного конца. Характерно, что это так называемое «условие свободного конца» может быть неоднородным. Если один из коэффициентов Q, M имеет в нуле скачок, то условие (5) определяет содержательную связь между $u(+0)$ и $u'(+0)$, имеющую (при $[F](0) = 0$) форму классического условия штурм-лиувиллевского типа. Ситуация на правом конце аналогична.

Вывод. Сказанное означает, что уравнение (1) на замкнутом сегменте ведет себя как традиционная краевая задача. Привычные краевые условия заменяются здесь самим уравнением на концах. Тем самым традиционный для ОДУ взгляд, при котором заданное на замкнутом промежутке уравнение обычно *дополняется* до краевой задачи какими-либо краевыми условиями (уравнение — само по себе, а условия — сами по себе) недостаточно точен. На самом деле рассматриваемые в ОДУ уравнения существенно заданы лишь на интервале, а на концы они распространяются лишь по непрерывности. Дополнение уравнения краевыми условиями на концах означает фактически существенное распространение уравнения на границу с соответствующим доопределением (скачками) коэффициентов.

Замечание 3. Функция $H(\alpha,\beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} u(x)d\sigma(x)$ по каждой из своих переменных имеет ограниченную вариацию, а потому в каждой точке имеет оба односторонних предела (кроме концов, где такие пределы только односторонние). Стандартное обозначение таких пределов с использованием (под знаком функции) символов $\alpha+0, \alpha-0$ и, соответственно $\beta+0, \beta-0$ приводит к появлению этих символов в качестве пределов интегрирования. Однако это не значит, что интегралы с такими «пределами» являются несобственными. Например, $\int\limits_{\alpha-0}^{\beta+0} ud\sigma$ означает, что на промежутке интегрирования $[\alpha,\beta]$ точка α учтена со своей σ–мерой, равной скачку $\sigma(\alpha+0)-\sigma(\alpha-0)$. Если же нижний предел обозначен через $\alpha+0$, то интеграл по тому же промежутку взят с нулевой σ–мерой точки $x = \alpha$, то есть как бы в предположении о непрерывности σ в точке $x = \alpha$ относительно этого промежутка. Традиционные комментарии подобных символов, транслируемые из общей теории интеграла, достаточно размыты: опуская в обозначениях нуль (пишут $\alpha+$ и $\alpha-$ вместо $\alpha+0$ и $\alpha-0$) и, переводя связь с односторонними пределами в глубокий подтекст, обычно говорят о том, «включена или не включена точка $x = \alpha$ в промежуток интегрирования», хотя главное здесь — учтен или не учтен в интеграле скачок σ в точке α.

3. Множество σ-абсолютно непрерывных на $[0,l]$ функций будем обозначать через A_σ. Каждая из функций $z(x)$ из A_σ непрерывна в каждой точке, где непрерывна $\sigma(x)$. Очевидно, $A_\sigma \subset BV[0,l]$. Будем обозначать в дальнейшем через D_σ множество абсолютно непрерывных на $[0,l]$ функций

$u(x)$, производные которых имеют ограниченное изменение на $[0,l]$ и, более того, для каждой из которых функция $p(x)u'(x)$ является σ-абсолютно непрерывной.

Отождествление функций ограниченной вариации с риссовыми мерами приводит к игнорированию собственных значений этих функций в точках разрыва (кроме концов). По этой причине обычно вместо BV рассматривают пространство $NBV \subset BV$ функций, непрерывных справа внутри $(0,l)$. В связи с вводимым ниже σ-дифференцированием нам потребуется более четкая информация о левой и правой окрестностях скачков. С этой целью мы введем новое множество $\overline{[0,l]}_\sigma$, сепарирующее $[0,l]$ относительно точек разрыва σ, на котором все функции из A_σ окажутся непрерывными.

Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва $\sigma(x)$. Очевидно, $S(\sigma)$ содержит точки разрыва любой функции из A_σ, в том числе и точки разрыва Q, M и F. Заменим каждую точку $\xi \in S(\sigma)$ парой символов $\xi - 0$ и $\xi + 0$ (расщепление ξ), помещая эту пару на «место ξ», т.е. между интервалами $[0,\xi)$ и $(\xi,l]$, полагая для этого $x < \xi - 0 < \xi + 0 < s$ для любых $x < \xi < s$ из $[0,l]$. При этом мы полагаем $l+0 = l$, т.е. вместо пары $\{l-0, l+0\}$ у нас будет пара $\{l-0, l\}$. Аналогично, символ «-0» отождествляем с точкой $x = 0$, т.е. точка $x = 0$ заменяется парой $\{0,+0\}$. Полученное множество, где каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ «расщеплена» на две, обозначается через $\overline{[0,l]}_\sigma$. Подчеркнем, что это множество определяется лишь «внешними» параметрами уравнения (1).

Обозначим через $[0,l]_\sigma$ отрезок $[0,l]$ из которого выброшены все внутренние точки разрыва $\sigma(x)$. Введем на $[0,l]_\sigma$ метрику

$$\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)| \quad (x, y \in [0,l]_\sigma) \tag{7}$$

Соответствующее метрическое пространство очевидным образом не полно. Его пополнение приводит в точности к $\overline{[0,l]}_\sigma$, что дает нам право символы $\xi - 0$ и $\xi + 0$ (элементы пополнения) называть точками. Упорядоченность при таком пополнении сохраняется. Топология на $\overline{[0,l]}_\sigma$ индуцируется исходной, т.е. метрикой (7). Значения любой функции $z(x)$ из A_σ естественным образом расширяются на $\overline{[0,l]}_\sigma$. Прежние предельные значения $z(\xi - 0)$ и $z(\xi + 0)$ теперь становятся собственными, что делает функцию $z \in A_\sigma$ непрерывной на $\overline{[0,l]}_\sigma$. На $\overline{[0,l]}_\sigma$ очевидным образом продолжается и σ-мера. Любая точка из $S(\sigma)$ превращается в $\overline{[0,l]}_\sigma$ в собственный сегмент $[\xi - 0, \xi + 0]$ (состоящий всего лишь из пары этих точек) с мерой $\sigma[\xi + 0, \xi - 0] = \sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0)$. Сказанное делает верным

Предложение 1. *На D_σ уравнение* (1) *равносильно* (3) *при любых $\alpha < \beta$ из $\overline{[0,l]}_\sigma$.*

Перевод разговора с прежнего сегмента $[0,l]$ на множество $\overline{[0,l]}_\sigma$, превращение символов $\xi \pm 0$ в собственные элементы проясняют структуру особенностей, порождаемых скачками, и на корню снимают возможность всех недоразумений, связанных с интегралами с переменными пределами, без использования которых теория обыкновенных дифференциальных уравнений немыслима.

Любая функция $u(x)$ из D_σ может при желании рассматриваться как элемент пространства A_σ, если при этом не забывать, что $u(\xi - 0) = u(\xi + 0)$ при всех $\xi \in S(\sigma)$.

Определение 1. Заданную на $[0,l]$ σ-суммируемую функцию $\varphi(x)$ назовем σ-производной от функции $\Phi(x) \in BV[0,l]$, если почти для всех (по σ-мере) ξ, x из $\overline{[0,l]}_\sigma$

$$\Phi(x) = \Phi(\xi) + \int_\xi^x \varphi d\sigma,$$

где интеграл понимается по Лебегу—Стилтьесу.

Будем обозначать $\varphi = \dfrac{d\Phi}{d\sigma}$. Введенное понятие переносит на случай функции ограниченной вариации (точнее — на случай порождаемой ею функции сегмента) определение производной функции множества из общей теории интеграла. Согласно теореме Радона—Никодима (см., напр., [4, стр. 199]) для σ-дифференцируемости Φ необходима и достаточна σ-абсолютная непрерывность Φ. Подчеркнем, что $\varphi(x)$, как функция точки, задана на $[0,l]$ почти всюду по σ-мере и обязательно —

в точках разрыва $\sigma(x)$ (т.е. в точках из $S(\sigma)$), в то время как $\sigma(x)$ и $\Phi(x)$, связанные с мерами (функциями множества), заданы на $\overline{[0,l]}_\sigma$, не имеют для нас смысла в точках из $S(\sigma)$. По определению σ-производной для любой точки ξ разрыва σ (т.е. при $\xi \in S(\sigma)$)

$$\Phi(\xi+0) - \Phi(\xi-0) = \frac{d\Phi}{d\sigma}(\xi)(\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0)). \tag{8}$$

В любой из других точек существуют обычные правая и левая относительные производные $\frac{d\Phi}{d\sigma}(\xi+0)$ и $\frac{d\Phi}{d\sigma}(\xi-0)$, определяемые как пределы отношений $\frac{\Phi(\xi+\varepsilon)-\Phi(\xi)}{\sigma(\xi+\varepsilon)-\sigma(\xi)}$ при $\varepsilon \uparrow 0$ или $\varepsilon \downarrow 0$, причем почти всюду эти производные совпадают. Таким образом, главное отличие производной по Радону—Никодиму от обычной производной — определенность ее в точках разрыва Φ отношением скачков.

Теперь мы можем представить (3) в виде (2). Важно отметить, что уравнение (2) определено поточечно, хотя внешние параметры p, Q, M, F и промежуточная производная $\left(p\frac{du}{dx}\right)$ есть функции из A_σ, определенные на $\overline{[0,l]}_\sigma$. Тем не менее задача Коши для уравнения (2) может ставиться в любой точке $\xi \in \overline{[0,l]}_\sigma$

$$u(\xi) = u_0, \quad u'(\xi) = u_1. \tag{9}$$

В точках $\xi \pm 0$ при $\xi \in S(\sigma)$ возникают две разные задачи, поскольку $u'(\xi-0)$ и $u'(\xi+0)$, вообще говоря, различны. Заметим, что задача Коши имеет смысл лишь в случае, когда уравнение (2) рассматривается только на $(0,l)$.

Пример 1. Для функции Хевисайда обычное дифференцирование приводит к δ-функции. Если же в качестве σ взять кусочно-гладкую функцию со скачком в точке $x=0$ (что необходимо для σ-абсолютной непрерывности θ), например, $\sigma(x) = x + \theta(x)$, то $\frac{d\theta}{d\sigma}$ описывается π-функцией вида

$$\pi(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Пример 2. Уравнение

$$-u'' + \gamma\delta(x-\xi)u = \delta(x-\eta) \qquad (0 < \xi, \eta < l)$$

возникает для струны, упруго подпертой в точке ξ и находящейся под воздействием единичной внешней силы, локализованной в точке η. Соответствующая обобщенная форма (1) для этого случая имеет вид

$$-\left(u'\right)' + \gamma\left(\theta(x-\xi)\right)' = \left(\theta(x-\eta)\right)',$$

а для уравнения (2) с обозначением (10) имеет при $\sigma(x) \equiv \theta(x-\xi) + \theta(x-\eta) + x$ определенную в каждой точке $x \in [0,l]$ форму

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(u'\right) + \gamma\pi(x-\xi)u = \pi(x-\eta),$$

причем в точке $x = \xi$ оно принимает вид

$$-\left(u'(\xi+0) - u'(\xi-0)\right) + \gamma u(\xi) = 0.$$

4. Получив корректное описание уравнения (3), мы можем перейти к его анализу. Всюду далее сохраняются предположения об ограниченности изменения p, Q, M, F, причем $\inf p > 0$ и Q, M не убывают ($p(0) = p(l) = 0$). Решения (2) ищутся в D_σ, где σ определяется по коэффициентам уравнения (1). Если желателен произвол в выборе F, то σ строится по Q и M, а F выбирается произвольно из A_σ.

Рассмотрим вначале уравнение (1) на интервале $(0,l)$.

Теорема 1. *Для уравнения* (2) *(и, следовательно, для уравнения* (1)*) любая начальная задача* (9) *имеет в* $C[0,l]$ *единственное решение* $u(x,\lambda)$*, которое при каждом* λ *принадлежит* D_σ *и является целой по* λ *функцией.*

Доказательство. Фиксируя λ и полагая $Q_\lambda = Q - \lambda M$, имеем из (3) для решения $u(x)$

$$u'(x) = \frac{1}{p(x)} \int_\xi^x u dQ_\lambda + v(x), \tag{11}$$

где обозначено $v(x) = \dfrac{1}{p(x)} [-u_1 + F(x) - F(\xi)]$. Приписывая коэффициентам p, Q, M и F на концах предельные значения, для непрерывного на $[0, l]$ решения уравнения (1) мы будем иметь (12) для всех ξ, x из $[0, l]$. Заметим, что в силу непрерывности $u(x)$ интегрирование в (11) производится по Риману—Стилтьесу. Последующее в (11) обычное интегрирование в пределах от ξ до x после изменения в двойном интеграле порядка интегрирования, дает

$$u(x) = \int_\xi^x g(x, \tau) u(\tau) dQ_\lambda(\tau) + z(x), \tag{12}$$

где положено $g(x, \tau) = \int_\tau^x \dfrac{ds}{p(s)}$, а через $z(x)$ обозначены не зависящие от $u(x)$ члены $z(x) = u_0 + \int_\xi^x v(\tau) d\tau$. Ввиду непрерывности $z(x)$ и совокупной непрерывности $g(x, \tau)$ мы имеем в (12) интегральное уравнение (типа Вольтерра) в $C[0, l]$. Легко проверяется, что спектральный радиус оператора

$$(K_\lambda u)(x) = \int_\xi^x g(x, \tau) u(\tau) dQ_\lambda(\tau) \tag{13}$$

равен нулю, откуда следует однозначная разрешимость (12) и равномерная сходимость к решению соответствующего ряда Неймана

$$u = (I - K_\lambda)^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} (K_\lambda)^n z$$

Если в последнем представлении заменить согласно (13) Q_λ на $Q - \lambda M$, то для решения $u_\lambda(x)$ уравнения (12) мы получим степенной по λ ряд, равномерно по x сходящийся при любом λ, что и означает требуемую регулярность u_λ по λ. Принадлежность $u_\lambda(x)$ пространству D_σ следует из представления (12) и вытекающего из него тождества (11). Теорема доказана. □

Следствие 1. *При $F = \mathrm{const}$ (т.е. $F' = 0$) соответствующее однородное уравнение* (1) *для любых нулевых в $\overline{[0, l]}_\sigma$ начальных условиях имеет только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.*

Следствие 2. *Многообразие решений уравнения* (1) *двумерно.*

Напомним, что в этом пункте речь шла о случае, когда уравнение (1) задано на интервале $(0, l)$. Вопрос о возможности продолжения решений из соответствующего двумерного многообразия в концевые точки так, чтобы удовлетворить уравнению (1) в этих точках — вопрос о разрешимости соответственно возникающей краевой задачи.

5. Описанное выше поточечное толкование уравнения (1) позволяет проводить качественный анализ его решений и связанных с ним краевых задач. Ограничимся несколькими примерами — распределением нулей у решений однородного уравнения

$$-(pu')' + Q'u = 0 \tag{14}$$

и связанных с ним неравенств. Мы сохраняем условие неубывания Q на $[0, l]$. Решения мы подразумеваем в D_σ, где в данном случае $\sigma(x) \equiv x + Q(x) + \kappa(x)$.

Нетрудно видеть, что для любого нетривиального решения $u(x)$ уравнения (14) каждая нулевая точка ξ является простой, т.е. равенство $u(\xi) = 0$ влечет $u'(\xi \pm 0) \neq 0$. По этой причине каждое такое решение имеет не более конечного числа нулей. По той же причине нетривиальное решение (14) не может аннулироваться ни в одном из незакрепленных концов.

Будем называть, как обычно, уравнение (14) (а вместе с ним и дифференциальное выражение $Lu = -(pu')' + Q'u$ неосциллирующим на $[0,l]$, если любое нетривиальное решение (14) имеет на $[0,l]$ не более одного нуля.

Предложение 2. *Уравнение* (14) *не осциллирует на* $[0,l]$.

Доказательство. В предположении противного для некоторого решения $u(x)$ $(\not\equiv 0)$ имеем два соседних нуля $\xi < \eta$, между которыми $u(x) > 0$. Согласно (3) для всех x из $\overline{[0,l]}_\sigma$ верно

$$p(x)u'(x) = p(\xi+0)u'(\xi+0) + \int\limits_{\xi+0}^{x} u(s)dQ(s). \tag{15}$$

Из строгой положительности правой части на (ξ,η) следует возрастание $u(x)$ на (ξ,η), что несовместимо с равенством $u(\xi) = u(\eta) = 0$. □

Предложение 3. *Любая функция* $u(x) \not\equiv 0$ *из* D_σ, *удовлетворяющая* (14) *на одном из полуинтервалов* $[0,l)$ *или* $(0,l]$, *не имеет нулей на* $[0,l]$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ — какое-либо решение (14) на $(0,l]$. Уравнение (14) согласно (3) в точке $x = l$ принимает вид

$$-p(l-0)u'(l-0) = u(l)[Q](l). \tag{16}$$

Если $u(l) = 0$, то из (16) следует, что $u'(l-0) = 0$ и, значит, $u(x) \equiv 0$. Пусть $u(l) > 0$ и предположим, что ξ — ближайший к l нуль $u(x)$. Тогда $u(x) > 0$ на $(\xi,l]$. Значит, $u'(\xi+0) > 0$ и тождество (15) обеспечивает строгую положительность $u'(x)$ всюду на $\overline{[0,l]}_\sigma$ правее $\xi+0$, включая и $x = l-0$, что несовместимо с (16), где $-p(l-0)u'(l-0) < 0$, в то время как $u(l) > 0$ и $[Q](l) \geqslant 0$. □

Предложение 4. *Уравнение* (14) *имеет нетривиальное решение только лишь в случае, если* $Q(x) \equiv \mathrm{const}$, *причем любое такое решение есть константа на* $[0,l]$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ $(\not\equiv 0)$ — решение (14). По предыдущему $u(x)$ вообще не имеет нулей на $[0,l]$. Пусть, для определенности, $u(x) > 0$ на $[0,l]$. Тогда $u(0) > 0$ и, согласно представлению (3) для уравнения (14) в левом конце $u'(+0) = \dfrac{[Q](0)u(0)}{p(+0)} \geqslant 0$. Отсюда, согласно тождеству (15), используемому при $\xi = +0$, следует $u'(l-0) \geqslant 0$. Таким образом, если $Q(x) \not\equiv \mathrm{const}$ (т.е. имеет хотя бы одну точку роста на $[0,l]$), то $u'(l-0) > 0$. Но последнее несовместимо с (16). Если же $Q(x) \equiv \mathrm{const}$ на $[0,l]$, то (15) при $\xi = +0$ принимает вид $p(x)u'(x) = p(+0)u'(+0)$. Значит, $p(l-0)u'(l-0) = p(+0)u'(+0)$. Но из (16) следует, что $u'(l-0) = 0$. Тогда $p(x)u'(x) \equiv 0$ на $[0,l]$. Следовательно, $u'(x) \equiv 0$ на $[0,l]$. □

Теорема 2. *Пусть* $Q \not\equiv \mathrm{const}$ *на* $[0,l]$. *Пусть хотя бы один из концов* $[0,l]$ *регулярен (есть точка непрерывности) для* $Q(x)$. *Тогда существует строго положительная на* $[0,l]$ *функция* $\varphi \in D_\sigma$, *для которой внутри* $(0,l)$

$$(Lu) = -\frac{1}{\varphi}\left(\varphi^2\left(p\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\varphi}\right)\right)\right)' \tag{17}$$

или, по другому, выражение

$$L_\sigma u \equiv -\frac{d}{d\sigma}\left(p\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{d\sigma}\right)u \tag{18}$$

представимо в виде

$$(Lu)(x) \equiv -\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d}{d\sigma}\left(\varphi^2(x)\left(p(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{\varphi(x)}\right)\right)\right) \tag{19}$$

для любой $u(x)$ *из* D_σ.

Доказательство. Исключая тривиальный случай, предположим, что $Q \not\equiv \mathrm{const}$. Покажем, что в условиях теоремы уравнение (14) имеет строго положительное на $[0,l]$ решение. Тогда справедливость (17) и (19) проверяется простой выкладкой. Пусть оба конца $[0,l]$ регулярны для p и Q. Обозначим через $u(x)$ и $v(x)$ решения начальных задач $u(0)=0$, $u'(0)=1$ и, соответственно, $v(l)=0$, $v'(l)=-1$, будем иметь согласно предположению (2) $u(x)>0$ и $v(x)>0$ на $(0,l)$, а поэтому $\varphi(x)\equiv u(x)+v(x)>0$ на всем $[0,l]$ (включая концы).

Пусть p и Q нерегулярны, например, в правом конце. Полагая для искомого решения $\varphi(l)=1$, мы должны в силу (16) однозначно выразить и $\varphi'(l-0)$, что в силу теоремы 1 определяет на $(0,l)$ решение (14), без проблем продолжаемое (в смысле уравнения) в точку $x=0$. Согласно предложению 3, $\varphi(x)$ нигде не имеет нулей, т.е. $\varphi(x)>0$ на $[0,l]$. Аналогично, для начального значения $u(0)=1$ выражаем $u'(+0)=\dfrac{[Q](0)}{p(+0)}$. Решение этой задачи Коши для (14), определяемое на $(0,l)$ теоремой 1, в силу предложения 3 положительно на $[0,l]$. Теорема доказана. □

6. Рассмотрим дифференциальное неравенство

$$-(pu')'+Q'u\geqslant 0, \tag{20}$$

понимая под ним уравнение $Lu=F'$ с какой-либо неубывающей F. Решениями (3) считаются решения уравнения $L_\sigma u=\dfrac{dF}{d\sigma}$, где полагается $\sigma\equiv x+Q(x)+F(x)+\kappa(x)$, так что F автоматически оказывается σ-абсолютно непрерывной, т.е. лежит в A_σ. Решением (20) является, например, функция Грина (если она существует) для уравнения $Lu=F'$, ибо функция Грина заведомо должна удовлетворять уравнению $(Lu)(x)=\delta(x-a)$.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 любое нетривиальное решение неравенства* (20) *не имеет на* $(0,l)$ *ни одного нуля.*

Доказательство. Воспользовавшись представлением (19), имеем по определению σ-производной (при $\dfrac{dF}{d\sigma}=L_\sigma u$) для функции

$h(x)=\varphi^2(x)p(x)\dfrac{d}{dx}\dfrac{u(x)}{\varphi(x)}$ тождество

$$h(x)=h(+0)-\int\limits_{+0}^{x}\varphi\,dF,$$

откуда следует, что функция $h(x)$ не возрастает на $[0,l]$ и имеет не более одной перемены знака. Значит, для некоторой точки ξ функция $h(x)$ слева от ξ неотрицательна, а справа от ξ неположительна. Это же свойство справедливо и для функции $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u(x)}{\varphi(x)}\right)$. С другой стороны, если $u(x)$ обращается в какой либо точке x_0 в нуль, то из предположенного неравенства $u(x)\geqslant 0$ следует, что $x_0\to\min u$ и, очевидно, $x_0\to\min\dfrac{u}{\varphi}$. Но тогда содержащий точку x_0 максимальный сегмент ω, на котором $\dfrac{u(x)}{v(x)}=0$ реализует в своей окрестности перемену знака у $\left(\dfrac{u}{\varphi}\right)'$ с минуса на плюс, что противоречит предыдущему. При совпадении ξ с одним из концов $[0,l]$ рассуждения упрощаются. Теорема доказана. □

Следующее утверждение является аналогом классической теоремы сравнения Штурма. (Мы снимаем здесь предположение о неубывании Q).

Теорема 4. *Пусть* $u(x)$ *и* $v(x)$ *— нетривиальные решения в* $(0,l)$ *уравнений*

$$-(pu')'+Q_1'u=0,\quad -(pu')'+Q_2'u=0$$

и пусть $Q_1'\geqslant Q_2'$ *в том смысле, что* $(Q_1-Q_2)(x)$ *не убывает. Тогда между любыми нулями* $u(x)$ *функция* $v(x)$ *меняет знак* (*естественно, обращается при этом в нуль*).

Доказательство вполне аналогично классическому. Пусть α и β — соседние нули $u(x)$. Предположим, что $u(x) > 0$ на (α, β) и $v(x) > 0$ на $[\alpha, \beta]$. Как нетрудно проверить,

$$(pu'v)|_\alpha^\beta - (puv')|_\alpha^\beta = \int\limits_\alpha^\beta uvd(Q_1 - Q_2).$$

Интеграл справа здесь заведомо неотрицателен, а выражение слева ввиду равенств $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ имеет вид $(pu'v)|_\alpha^\beta = p(\beta)v(\beta)u'(\beta) - p(\alpha)v(\beta)u'(\alpha)$, отрицательность чего очевидна ввиду неравенств $v(\alpha) > 0$, $v(\beta) > 0$, $u'(\alpha) > 0$, $u'(\beta) < 0$.

7. Намеченный путь позволяет обсудить достаточно широкий круг качественных вопросов, причем с большей глубиной (например, — об осцилляционно-штурмовских свойствах спектра), на чем здесь мы не останавливаемся.

В порядке комментариев естественности основных предположений работы (ограниченности вариаций коэффициентов и производных решений) рассмотрим вариационную постановку «стилтьесовской» струны. Форма $u_0(x)$ нагруженной струны дает минимум потенциальной энергии, обычно записываемой в виде

$$U(u) = \int\limits_0^l \left(\frac{pu'^2}{2} + \frac{qu^2}{2} - fu \right) dx,$$

при каких либо краевых уловиях, регулирующих виртуальную форму $u(x)$ на концах. Здесь $q(x)$ и $f(x)$ — плотности (интенсивности) внешней упругой реакции и внешнего воздействия. Переход от qdx и fdx к dQ, dF резко расширяет постановку, допуская сингулярные особенности у прежних (обобщенных вообще говоря) коэффициентов — плотностей q и f. Интегралы $\int_0^l u^2 dQ$ и $\int_0^l u dF$ вполне физичны, как и предположение об ограниченности изменения Q и F, делающие эти интегралы корректными по Риману—Стилтьесу. Более того, здесь мы можем уже позволить функциям Q и F иметь разрывы на концах, что в рамках обобщенных производных $q = Q'$, $f = F'$ делает исходное представление $U(u)$ весьма туманным. В новой форме

$$U(u) = \int\limits_0^l \frac{pu'^2}{2} dx + \int\limits_{[0,l]} \frac{u^2}{2} dQ - \int\limits_{[0,l]} u dF$$

остается не совсем ясным смысл первого интеграла. Он может вроде бы считаться как по сегменту $[0, l]$, так и по интервалу $(0, l)$, ведь мера концов нулевая. И ясно вроде бы, что интересующие нас функции $u(x)$ должны иметь суммируемые с квадратом производные (с весом p). Однако возможность ненулевых скачков Q и F в остальных интегралах заставляет полагать,что для физически реальных ситуаций функция (pu') может иметь особенности, лишающие первое слагаемое смысла.

Более сильной формой для $U(u)$ является следующая

$$U(u) = \int\limits_{[0,l]} \frac{pu'^2}{2} du + \int\limits_{[0,l]} \frac{u^2}{2} dQ - \int\limits_{[0,l]} u dF,$$

где для непрерывных $u(x)$ предположение об ограниченности вариации pu' придает первому интегралу корректный смысл по Риману—Стилтьесу. Слабая линеаризация (по Лагранжу) приводит на минимали U к равенству

$$\int\limits_{[0,l]} hd(-pu' + \int udQ - F) + [pu'h]_0^l = 0,$$

что в силу произвола h приводит к равенству $-pu' + \int udQ - F = \text{const}$, вполне адекватному (3), и к равенствам $(pu')(0) = (pu')(l) = 0$.

8. В интересах спектральной тематики, связанной с проблематикой квантовой механики (для уравнения Шредингера), обобщенному уравнению типа (1) посвящено необозримое количество работ (см., напр., библиографию в [2, 4, 5, 7, 10, 13]), где в основном удавалось обойтись общими методами функционального анализа, не требующими поточечной спецификации уравнения. Введение поточечно-обобщенной процедуры дифференцирования $\dfrac{d}{dM(x)}$ (с неубывающей $M(x)$) было осуществлено Феллером [14], изучавшим в интересах диффузионных процессов уравнение

$$-\frac{d}{dM}u'_+ = \lambda u \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{21}$$

(см. также соответствующие комментарии в [2]), где u'_+ — правая производная.

Такое же внешне уравнение строилось и изучалось в цикле работ М.Г. Крейна и И.С. Каца (см. обзор [6]) в связи с проблематикой обратных задач для стилтьесовской струны. Используя формализм интеграла Лебега—Стилтьеса, авторы [6] уравнение (21) предлагали как внешний символ интегродифференциального уравнения

$$u'_+(x) = u'_-(0) - \lambda \int\limits_0^{x+0} u(s)dM(s), \tag{22}$$

где $u'_-(0)$ — произвольно задаваемое число, служащее для продолжения $u'_+(x)$ влево от точки $x = 0$. Далее $u'_-(0)$ фигурирует в [6] при постановке «левой задачи Коши» в точке $x = 0$ при построении спектральной функции.

Уравнению (22) соответствует случай $F' = Q' = 0$ обобщенного уравнения (1), принимающего вид

$$-\left(p\frac{du}{dx}\right)' = \lambda M'u \tag{23}$$

Вытекающее из (3) представление для (23) (при $\alpha = 0, \beta = x+0$) должно выглядеть в обозначениях из [6] так

$$p(x+0)u'_+(x) = -\lambda \int\limits_0^{x+0} u(s)dM(s),$$

где слева $p \equiv 1$. Это совпадало бы с (22), если бы $u'_-(0) = 0$. Заметим, что в работе [6] $u'_-(0)$ по существу используется при исследовании струны, несущей на левом конце колечко массы m_0, но при этом авторы как раз и накладывают условие $u'_-(0) = 0$. Судя по (22), авторы [6] решили скомпенсировать скачок в нуле интегрального слагаемого (порождаемый скачком M) и придумали скачок в нуле для u', полагая $[u'](0) = u'_+(0) - u'_-(0)$, не подозревая о том, что этот скачок уже есть, так как $[pu]'(0) = p(+0)u'(+0)$.

9. Развитый выше подход, реализуя основные соображения [8], не только сводит обобщенное уравнение (1) к поточечному (2), но и за счет множества $\overline{[0,l]}_\sigma$ сохраняет важнейшую роль распределений, сепарируя процедуру $\dfrac{d}{d\sigma}\dfrac{d}{dx}$ в три слоя: решения — обычные функции на $[0,l]$, их производные — распределения, описываемые на множестве $\overline{[0,l]}_\sigma$, а вторые производные — опять поточечно задаваемые функции, но полученные дифференцированием распределений — производных по «универсальной» для (1) σ-мере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хоэг-Крон Р., Хольден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. — М.: Мир, 1991.
2. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1991.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. — М.: ИЛ, 1962.
5. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы: модели и приложения. — М.: Наука, 1991.
6. *Кац И. С., Крейн М. Г.* Дополнение II к книге [6]. — С. 648–733.

7. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. — М., 1970.
8. *Покорный Ю. В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в теории обыкновенных дифференциальных уравнений// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 2. — С. 167–169.
9. *Рисс Ф., Секефальди-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1978.
10. *Розенфельд А. С.,Яхинсон Б. И.* Преходные процессы и обобщенные функции. — М.: Наука, 1996.
11. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.
12. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
13. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. — М.: Мир, 1965.
14. *Feller W.* Generalized second order differential operators and their lateral conditions// Ill. J. Math. — 1957. — *1*. — С. 459–504.

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 14–17

МНИМАЯ ЧИСТОТА ОСНОВ

© 2005 г. **Ю. В. ПОКОРНЫЙ, Н. Х. РОЗОВ**

Развиваясь на протяжении тысячелетий, математика лишь к концу XIX века подвела под свое здание логический фундамент, связанный с арифметизацией основных представлений. Имея аксиоматический характер, этот фундамент сделал математику *чистой*, превратив ее в дедуктивную науку силлогизмов. Ученые, живущие в толще рафинированных теорий, получили право на ощущение их самодостаточности, что во многом изменило отношение к преподаванию математики и как бы сняло ответственность за освоение математических абстракций, связав успешность обучения с наличием математических способностей. Даже элементарную математику начали пытаться излагать с позиции высшей. Получился заколдованный круг: чтобы разобраться в основах, надо овладеть достаточно высокой математической культурой, что невозможно, формально говоря, без владения основами. В реальной практике преподавания выход из этого круга часто приводит к ряду серьезных нелепостей, привычно не замечаемых математической общественностью. Ниже пойдет речь о некоторых из них, связанных с изначальным введением основополагающих понятий. В том числе и о понятии числа.

1. Уже на первых шагах курса анализа обычно объясняется, что $\frac{dy}{dx}$ — никакое не отношение дифференциалов, что это — архаичное (Лейбницево) обозначение производной и что правильнее писать $y'(x)$ или $f'(x)$, если $y = f(x)$. Однако несколько позже, когда начинается элементарная теория дифференциальных уравнений, обнаруживается, что, например, уравнение с разделяющимися переменными $\dfrac{dy}{dx} = P(x)Q(y)$ решается разделением переменных, т.е. переходом к «уравнению» $\dfrac{dy}{Q(y)} = P(x)\,dx$ и последующим его интегрированием. При этом, что небезинтересно, левая и правая часть интегрируются по различным переменным: слева — по dy, справа — по dx.

А что такое дифференциал независимой переменной, т.е. dx? В канонизированных учебниках Фихтенгольца равенство $dx = \Delta x$ *доказывается* рассуждениями о дифференциале функции $f(x) \equiv x$: так как для нее $f(x + \Delta x) - f(x) \equiv \Delta x$, то и $df = \Delta x$, т.е. $dx = \Delta x$. Однако в лучших учебниках начала XX века (Гурса, Валле—Пусен) по честному писалось «принято полагать $dx = \Delta x$», причем рассуждение «доказательства Фихтенгольца» приводилось как правдоподобное рассуждение в пользу *договоренности* $dx = \Delta x$.

Присутствие dx в интеграле Римана объясняется еще более мистически. Традиционные определения связывают $\int_a^b f(x)\,dx$ с пределом интегральных сумм $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, а точки ξ_i берутся из $[x_i, x_{i+1}]$ произвольно. Однако к моменту введения интеграла студенты располагают лишь простейшей скалярной топологией в R^1, в то время, как сумма S_n оказывается не числовой последовательностью от n, а последовательностью функций от $\{x_i\}_1^{n-1}$, $\{\xi_i\}_1^n$, каждая из которых определена на некоем многограннике P_n из R^{2n-1}. Корректность даже описания такого предельного перехода S_n при $n \to \infty$ нуждается совершенно в другом уровне знаний, далеко превышающем предел числовой последовательности или предел функции из R в R.

Натыкаясь в анализе и физике на dx на каждом шагу, студенты обычно не подозревают даже о роли аксиомы Архимеда $[(0 \leqslant \alpha < \frac{1}{n})\forall n] \Rightarrow (\alpha = 0)$, запрещающей dx быть реальной величиной (как у Лейбница, Ньютона, Эйлера и других). Они даже не узнают, как правило, что аксиома Архимеда — всего лишь удобная для математиков договоренность. Хотя неархимедовы континуумы и пробиваются в математику то в форме обобщенных функций, то в форме нестандартного анализа, то с помощью дифференциалов Стилтьеса.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

Перечень подобных оплошностей в преподавании математики можно было бы продолжить. Их еще больше, а сами подобные оплошности — еще грубее в более низких этажах математического здания. Того здания, которое выстраивается традиционным преподаванием математики.

Откуда все это? И можно ли этого избежать?

2. «У математиков существует склонность, уже владея законченной математической теорией, стыдиться ее происхождения. По сравнению с кристаллической ясностью развития теории, начиная с уже готовых ее основных понятий и допущений, кажется грязным и неприятным занятием копаться в происхождении этих основных понятий и допущений . . . Поэтому на разных ступенях обучения с разной степенью смелости проявляется одна и та же тенденция: как можно скорее разделаться с введением основных понятий и терминов и далее использовать только эти понятия и термины.» Эти слова принадлежат Колмогорову [6], поддержавшему протест Лебега против подобной тенденции [7]. Цитируем далее [6]: «отрыв в преподавании математических понятий от их происхождения приводит к *полной беспринципности и логической дефективности*». И из [7]: «слишком много учителей математики, из уважения к логике, считают себя обязанными изображать математику, как неизбежное развертывание голой дедукции...» Далее Лебег добавляет: «если послушать некоторых учителей, то можно подумать, что Ньютон ничего не понимал в вопросах интегрирования, что Эйлер не знал рядов, что Лагранж не знал даже, что такое функция» [2, с. 205] [6]. Приведенные слова были сказаны еще до появления в свет знаменитой серии переизданий учебников Фихтенгольца.

Однако суть проблемы, поднятой знаменитыми математиками XX века, гораздо глубже, чем традиция «стыдиться происхождения основных понятий», избегая «грязного и неприятного занятия копаться в происхождении этих понятий». Стыдливых математиков заменила толпа людей с менее тонким научным обонянием, превративших «грязное и неприятное занятие» во вполне доходное дело издания всяческой методической и околоматематической литературы. И широкой публике, не доросшей до высшего анализа, объясняется, что до 18 века как бы и ученых-математиков не было. Ведь дроби тогда не считали числами, а отрицательных чисел в упор не хотели видеть. Единицу и ноль тоже числами не считали. А великий (якобы) математик XVII в. Дж.Валлис *доказывал*, что $-1 > \infty$. А древние греки не знали рациональных чисел: правда Пифагор доказал, что $\sqrt{2}$ — число не рациональное, но он, похоже, и сам этого не понял. А древние египтяне и халдеи тоже не знали наших дробей — результат деления $5 : 6$ записывали не в виде $\frac{5}{6}$, как положено, а $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Да и арабы в дробях темные были — предпочитали египетские вместо обыкновенных.

3. Для всей математики понятие числа является основополагающим. «Число есть все!» — считали пифагорийцы. Однако, что же известно о числе? Откуда оно возникло?

Даже в серьезной литературе для широкого читателя весьма часто используется формула

(Φ_1) Натуральные числа возникают при счете, дробные — при измерении.

Для искушенных и привередливых читателей имеется другое объяснение:

(Φ_2) Натуральное число может быть определено по Кантору (мощность конечного множества) или схемой Пеано. Рациональные числа на базе натуральных строятся совсем просто: тело рациональных чисел определяется как минимальное алгебраическое тело, содержащее целые числа.

Математикам-профессионалам подобный взгляд представляется вполне удовлетворительным, как бы снимая вопрос о природе чисел. Вещественная ось строится стандартной процедурой пополнения (по Дедекинду, Коши или еще как-либо). А для всего анализа вещественная ось — основной плацдарм. Если стоять на нем, то нечего удивляться, что уже и в литературе для учителей объясняется «правильное определение».

(Φ_3) Натуральными называются целые положительные числа, а дробями — рациональные числа.

Но ведь числами люди владели уже многие тысячелетия назад. Когда о формально-логических конструкциях никто и слыхом не слышал. Да и ученых в современном смысле, как социального слоя, не было, не говоря уже о методической науке. Люди уверенно пользовались числами при решении самых разнообразных задач. Откуда они эти числа взяли? Как их для себя открыли?

Ведь если говорить о связи математики с интуицией человека, о возвращении математическим понятиям их первоначального математического смысла (за что боролись крупнейшие ученые всех времен — Даламбер, Карно, Остроградский, Лобачевский, Лебег, Лузин, Колмогоров, Понтрягин, Арнольд и многие другие), то без ответа на эти вопросы не обойтись.

4. С точки зрения интуитивного доверия наиболее привлекательна формула (Φ_1): «Числа возникают при счете». Что может быть проще? Однако, если присмотреться, она ничего толком не говорит. «Ноги возникают при ходьбе!» «Рот возникает при еде!» Ясно, что числа *используются* при счете. А потом они куда деваются, чтобы опять *возникнуть* при новом счете?

Ясно, что число есть продукт *«операции счета»*. Историки от науки (и от математики) достаточно активно исследовали вопрос о том, как люди дошли-додумались до счета. Популяризуемая точка зрения (см., напр., [2,5]) «Люди отличались любознательностью и природной потребностью к счету и измерению». В подтверждение приводятся предания о древних числолюбцах (типа Кирика Новгородского), изобретавших большие числа. О серьезности такого объяснения судить еще труднее, чем о (Φ_1). Можно ли поверить в то, что первобытный человек, окруженный враждебной средой в борьбе за выживание при первой же возможности начинал что-либо считать или измерять?! Ведь потребность нужно удовлетворять!

Профессиональные историки-математики пришли к выводу (см., напр., [1]), что «на первых стадиях развития числа оно представляет собой числа-свойства или числа-качества» (по типу обычных прилагательных), характеризующих «совокупность со стороны ее целостности». Счет был, если так можно выразиться, интуитивным (вся ли семья в сборе, все ли вещи подготовлены). При малом количестве слов-числительных это был все-таки счет, при необходимости — с поименным перечислением. Замена конкретных имен номерами еще не происходила — не было нужды.

Отметим, что главная тенденция историко-математической науки — увязывание возникновения математики с возникновением нумерации. Это — проекция отмеченного выше взгляда сверху вниз: коль скоро число — первичное понятие в современной математике, значит, оно и возникнуть должно было первым. А потом уже дробь и все остальное.

В историю математики не так часто вторгались математики-профессионалы. Но каждый раз их математическая интуиция позволяла на много порядков глубже вникнуть в известные историко-математические фрагменты, радикально меняя набрякшие штампы и возвышая гений предков [3,4]. Из историко-математической литературы подобной проницательностью обладает книга [8]. Именно ею навеян главный тезис статьи.

Первый пласт математических знаний возник в виде арифметики дробей. Числа-номера были инициированы необходимостью решения задач в долях.

5. Мы будем исходить из общепризнанного тезиса: «Как и все другие науки, математика возникла из практических нужд людей» (Ф. Энгельс). Поэтому мы не будем спешить отрывать чистую математику от практических нужд, т.е. от реальных задач. На наш взгляд, эволюция математики — это не эволюция абстракций, а развитие методов и приемов решения реальных задач.

А теперь мы поставим вопрос:

Можно ли, не умея считать (более чем до четырех), суметь разделить несколько (например — девять) буханок хлеба на некоторое число (например — пять) человек? Если при этом мы имеем представление о половине и можем любой кусок разделить (разломать) на пополам?!

Даже школьникам внушается, что для этого нужно и считать уметь, и дробями владеть, так как ответ единственно верный (якобы!) $9:5=9/5=1\frac{1}{5}=1,2$. Если же человек и до пяти считать не может — как же он тогда решит?

Однако практическое решение исходной задачи безо всякого счета выглядит так: сначала всем по кругу дается по одной буханке. На второй круг не хватает. Что делать? Каждая из оставшихся буханок делится пополам, половинок оказывается достаточно (их восемь) для раздачи всем и еще несколько половинок осталось нерозданными. С ними поступают аналогично. После этого каждый получает по буханке, по половинке и еще по пол-половинке, да еще небольшой кусочек, который и делить смысла нет — раскрошится, проще им делильщика премировать.

Итак, у всех на глазах поделено, всем досталось по одинаковой (один как) порции. Весь фокус — в рецепте действий: если кусков не хватает, надо раздвоить каждый, и новых, пусть и меньших, кусков станет намного больше, их может хватить на всех.

Рецепт простой, но совершенно нетривиальный — не зря же он не приходит в голову всяким методистам. Да и историкам так же. Ведь все они хором недоумевают — откуда взялись египетские дроби? А ведь наш ответ $9 : 5 \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})$ всего лишь на 5% отличается от точного. Не этот ли и подобные рецепты были затем оформлены в виде аликвотных (египетских) дробей? А ведь подобные записи комментируются историко-математиками с позиций двоичных дробей с современной точки зрения.

Наша гипотеза. Аликвотные (египетские) дроби с появлением письменности просто зафиксировали известные и хорошо отработанные рецепты распределения поровну.

Проблема правильного (честного) деления — дележа стояла всегда уже на уровне семьи, далее — в масштабах общины, поселения, племени. Позднее предельно актуальной стала задача распределения по паям (по вкладу — трудовому, имущественному и пр.). При пропорциональном делении приходилось учитывать и количество одинаковых долей, входящих в чью-то часть — доли абсолютно одинаковые, имен не имеют, а учитывать их количество надо. Значит, без подсчета не обойтись. Вот и стимул для наращивания представлений о количестве, т.е. о количествах-именах, о числах-номерах.

Математические знания (т.е. знания–рецепты с математической, как теперь ясно, подкладкой) зародились в глухой древности, когда не то что учеными, но и письменностью не пахло. Они развивались на протяжении десятков тысячелетий и сохранились, не канув в Лету, только за счет постоянной нужды в них, постоянной востребованности. До позднего средневековья они дожили прежде всего благодаря их постоянной практической нужды. Вырывать их из жизни, из натуры нача ли уже деятели от науки, в первую очередь — методисты от науки. В результате современная математика, используя во многом терминологию и символику XVIII века, хотя и очистилась во многом от мистики и предрассудков, но, забыв о корнях, создала взамен ряд странных мифов и нелепиц в области основ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башмакова И. Г., Юшкевич А. П.* Происхождение систем счисления// Энциклопедия элементарной математики. Т. 1. — М-Л., 1951.
2. *Беллюстин В.* Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. — Москва–Петроград. — 1923.
3. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. — М.: ИЛ, 1963.
4. *Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся наука. — М.:Физматгиз. 1959.
5. *Депман И. Я.* История арифметики. — М., Госпедгиз, 1959.
6. *Колмогоров А. Н.* Предисловие редактора к книге: *Лебег Г.* Об измерении величин. — М.: Госпедгиз, 1930.
7. *Лебег Г.* Об измерении величин. — М.: Госпедгиз, 1930.
8. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1973.
9. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. — М., 1961.

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 18–27

ТЕОРЕМЫ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

© 2005 г. **А. Н. ПОКРОВСКИЙ**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Формулировка простейшего варианта задачи 18
2. Вспомогательные предложения 19
3. Доказательство теоремы 1 26
4. Более сложная система 27
Список литературы 27

1. Формулировка простейшего варианта задачи

Пусть задана область $D \subset \mathbb{R}^{l+n}$ с границей C:

$$D = \{D_u : u \in \mathbb{R}^n\}, \qquad D_u = \{y : c_1(y,u) < 0;\ y \in \mathbb{R}^l\},$$
$$C = \{C_u : u \in \mathbb{R}^n\}, \qquad C_u = \{y : c_1(y,u) = 0;\ y \in \mathbb{R}^l\},$$

где $c_1(y,u)$ — дважды дифференцируемая функция. Внутри D на конечном расстоянии от C в $\mathbb{R}^{l+n}$ задано гладкое многообразие H, диффеоморфное границе C области D:

$$H = \{H_u : u \in \mathbb{R}^n\}, \quad H_u = \{y : y = h(y_c,u);\ y_c \in C_u \subset \mathbb{R}^l\}.$$

В D задана система уравнений

$$\frac{dy}{dt} = g(y,u), \qquad y(0) = y^0 \in H_{u(0)}, \quad y, y^0, g \in \mathbb{R}^l, \tag{1}$$
$$\frac{du}{dt} = \varepsilon b(u, \varepsilon t), \quad u(0) = u^0, \qquad\qquad u, u^0, b \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Полагаем, что $g(y,u)$ непрерывна и ограничена в $D \cup C$, непрерывно дифференцируема внутри D и вдоль границы C, $b(u, \varepsilon t)$ непрерывно дифференцируема по аргументам.

При достижении решением системы (1), (2) границы C области D решение совершает скачок. Моменты разрывов t^k, $k = 1, 2, \ldots$, определяются условиями

$$c_1(y(t^k - 0), u(\varepsilon t^k - 0)) \leqslant 0, \quad c_1(y(t^k + 0), u(\varepsilon t^k + 0)) \geqslant 0. \tag{3}$$

Величина скачков задается формулами

$$y(t^k + 0) = h\big(y(t^k - 0), u(\varepsilon t^k + 0)\big), \tag{4}$$
$$u(\varepsilon t^k + 0) = u(\varepsilon t^k - 0) + \varepsilon a\big(u(\varepsilon t^k - 0), \varepsilon t^k\big), \tag{5}$$

где $a(u, \varepsilon t)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

В случае $u = u^0 = \mathrm{const}$ решение (1), (4) может совершать разрывные колебания. Обозначим через $U_+ \in \mathbb{R}^n$ множество тех $u = u^0 = \mathrm{const}$, при которых существуют разрывные колебания, и в U_+ выделим подмножество $U_+^0 \subset U_+$ тех u, для которых выполняется условие

$$\infty > \psi_1^{\max} \geqslant \frac{dc_1(y(t), u^0)}{dt} = \frac{\partial c_1}{\partial y} g(y, u^0) \geqslant \psi_1^0 > 0. \tag{6}$$

При колебаниях происходит мгновенное отображение C в H по формуле (4), а затем отображение H в C в соответствии с уравнением (1). Таким образом, при $u = u^0 = \mathrm{const}$ определено отображение $\Pi_u : C \to C$.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

Условие А. Существует непустое множество $U_+^1 \subset U_+$ такое, что при $u \in U_+^1$, $u = \text{const}$ отображение Π_u имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку $\overline{\overline{y}}_c(u) \in C_u$ с непустой областью притяжения $V^1(\overline{\overline{y}}_c(u))$.

Если $u = \text{const}$ и выполняется условие А, то в системе (1), (4) существует разрывный предельный цикл с периодом $T(u)$ и частотой $\nu(u) = 1/T(u)$.

Усредненная система для $\bar{u}(\tau)$, где $\tau = \varepsilon t$, имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{d\bar{u}}{d\tau} = b(\bar{u},\tau) + a(\bar{u},\tau)\nu(\bar{u}), \quad \bar{u}(0) = u^0, \\ u^0, \bar{u} \in U_+^0 \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1.\end{gathered} \tag{7}$$

Теорема 1. *Если для системы уравнений* (1), (2), (4), (5) *выполняются условие* А *и условие* (6), *функция* $g(y,u)$ *отделена от* 0, *функции* $a(u,\tau)$, $b(u,\tau)$ *равномерно ограничены вместе с частными производными в области* $u \in U_+^0 \cap U_+^1$, $0 < \tau < \tau_1$, *многообразия* H *и* C *расположены на конечном расстоянии друг от друга в* $\mathbb{R}^{l+n}$ *и* $y^0 \in h\big(V^1(\overline{\overline{y}}_c(u^0)), u^0\big)$, *то для любого* $\zeta > 0$ *найдется такое* $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_0(\zeta) > 0$, *что при* $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}_0$ *верна оценка*

$$|u(\varepsilon t) - \bar{u}(\varepsilon t)| \leqslant \zeta, \quad 0 < t < \frac{\tau_1}{\varepsilon}. \tag{8}$$

2. Вспомогательные предложения

В дальнейшем будем рассматривать только ту часть области D, которая находится между поверхностями H и C.

Лемма 1. *Если при* $(y,u) \in D \cup C$, $u = u^0 = \text{const}$, *выполняется условие* (6), *то непродолжимое решение* (1) $y(t; y^0, u^0)$ *достигает границы* C. *Время достижения* $T(y^0,u^0)$ *границы* C *и достигнутая точка границы* $y_c(y^0,u^0) \equiv y(T(y^0,u^0); u^0, y^0) \in C$ *являются непрерывно дифференцируемыми функциями аргументов.*

Доказательство. Зададим дважды дифференцируемые функции $c_i(y,u)$, $i = \overline{2,l}$, функционально независимые от $c_1(y,u)$ и между собой в $D \cup C$ и введем в D_u новые переменные $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_l)$, $\eta \in \mathbb{R}^l$, определяемые формулами

$$\eta = c(y,u), \quad y = \varphi(\eta,u), \quad \varphi(c(y,u),u) = y. \tag{9}$$

Так как $c(y,u) = (c_1, c_2, \ldots, c_l)$, граница C, задаваемая уравнением $c_1(y,u) = 0$, переходит в плоскость $\eta_1 = 0$. Обозначим через

$$\eta' = (\eta_2, \ldots, \eta_l), \quad \eta = (\eta_1; \eta') \tag{10}$$

новые координаты точек границы C: $\eta' \in \mathbb{R}^{l-1}$. Область D переходит в полупространство $\eta_1 < 0$. Введем обозначения

$$\psi(\eta;u) = \frac{\partial c}{\partial y} g(y,u)\Big|_{y=\varphi(\eta,u)}, \quad \psi \in \mathbb{R}^l. \tag{11}$$

Функция $\psi(\eta;u) = (\psi_1, \ldots, \psi_l)$ непрерывна при $\eta_1 \leqslant 0$, $u \in U_+$; функции $\psi_i(\eta,u)$, $i = \overline{2,l}$, дифференцируемы при $\eta_1 \leqslant 0$; $\psi_1(\eta;u)$ дифференцируема по η при $\eta_1 < 0$, дифференцируема по $\eta_2, \ldots, \eta_l$ при $\eta_1 = 0$. Согласно условию (6) $\psi_1(\eta;u) \geqslant \psi_1^0 > 0$ при $\eta_1 \leqslant 0$. Следовательно, $\eta_1(t)$ строго монотонно возрастает и достигает границы $\eta_1 = 0$ за конечное время $T(y^0,u^0)$.

После замены (9) уравнения (1) при $u = u^0 = \text{const}$ переходят в

$$\frac{d\eta}{dt} = \psi(\eta;u), \quad \eta(0) = \eta^0 = c(y^0,u^0), \quad (y^0,u^0) \in H. \tag{12}$$

Вследствие условия (6) $\dfrac{d\eta_1}{dt} \geqslant \psi_1^0 > 0$, и функция $\eta_1(t)$ монотонна. Примем η_1 за новую независимую переменную в дифференциальных уравнениях (12):

$$\begin{aligned} &\frac{d\eta_i}{d\eta_1} = \frac{\psi_i(\eta, u^0)}{\psi_1(\eta, u^0)}, \qquad \eta_i(\eta_1^0, u^0) = c_i(y^0, u^0), \quad i = \overline{2,l}, \\ &\frac{dt}{d\eta_1} = \frac{1}{\psi_1(\eta, u^0)}, \qquad t(\eta_1^0, u^0) = 0; \quad t(0, u^0) = T(y^0, u^0). \end{aligned} \tag{13}$$

Правые части (13) непрерывны по η_1 и непрерывно дифференцируемы по $\eta_2, \ldots, \eta_l$ при $\eta_1^0 \leqslant \eta_1 \leqslant 0$. Продолжим правые части (13) непрерывно по η_1 и дифференцируемо по $\eta_2, \ldots, \eta_l$ в сколь угодно малую окрестность плоскости $\eta_1 = 0$ в область $\eta_1 \geqslant 0$. По известной теореме (см. [2, теорема 18]) решения (13) $t(\eta_1, u^0)$, $\eta_i(\eta_1, u^0)$, $i = \overline{2,l}$, непрерывно дифференцируемы по начальным условиям $\eta_i(0, u^0) = \eta_i^0$, $i = \overline{2,l}$, и по параметру u^0 при $\eta_1 = 0$. Вследствие дифференцируемости $c(y, u)$ и $\varphi(\eta, u)$ функции $y_c(y^0, u^0) = \varphi(0, \eta'(y^0, u^0); u^0)$ и $T(y^0, u^0) = t(0; u^0)$ непрерывно дифференцируемы по y^0, u^0, что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *При $u^0 \in U_+^0$, $(y^0, u^0) \in H$ существуют*

$$T_{\min} = \min_{\substack{u^0 \in U_+^0 \\ y^0 \in H_{u^0}}} T(y^0, u^0), \quad T_{\max} = \max_{\substack{u^0 \in U_+^0; \\ y^0 \in H_{u^0}}} T(y^0, u^0)$$

такие, что

$$T_{\min} \leqslant T(y^0, u^0) \leqslant T_{\max}.$$

Обозначим $\nu(y^0, u^0) = 1/T(y^0, u^0)$, $r = T_{\max}/T_{\min} = T_{\max}\nu_{\max}$. Существуют $\nu_{\min}$, $\nu_{\max}$ такие, что

$$\nu_{\min} \leqslant \nu(y^0, u^0) \leqslant \nu_{\max}.$$

Лемма 2. *Если выполняются условия* (6) *и*

$$|a(u, \tau)| \leqslant a_m, \quad |b(u, \tau)| \leqslant b_m$$

при $u \in U_+^0$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, то на каждом интервале длиной $T_{\max}$ выполняются условия

$$\begin{aligned} &|u(\varepsilon t) - u(\varepsilon t_0)| \leqslant \varepsilon B_0, \qquad t \in [t_0,\ t_0 + T_{\max}], \\ &\sum_{j \leqslant M} |\Delta u(\varepsilon t_*^j)| \leqslant \varepsilon B_1, \qquad t_*^j \in [t_0, t_0 + T_{\max}], \end{aligned} \tag{14}$$

где B_0, B_1 — константы, $\Delta u(\varepsilon t_*^j) = u(\varepsilon t_*^j + 0) - u(\varepsilon t_*^j - 0)$.

Доказательство. Количество M скачков $u(\varepsilon t)$ на интервале t длиной $T_{\max}$ не превосходит величины $r = T_{\max}/T_{\min}$. Суммарная величина скачков не превосходит εB_1 при $B_1 = r a_m$. Из уравнения (2) и условия скачков находим

$$|u(\varepsilon t) - u(\varepsilon t_0)| \leqslant \left| \varepsilon \int_{t_0}^{t} b(u(\varepsilon t_1), t_1) dt_1 \right| + \varepsilon B_1 \leqslant \varepsilon (b_m T_{\max} + r a_m),$$

что совпадает с (14) при $B_0 = b_m T_{\max} + r a_m$). □

Обозначение 1. Для сокращения записи будем обозначать «крышкой» над символом решение (1) при $u(\varepsilon t) = u^0 = \text{const}$ и все величины, относящие к этому случаю; при $u = u(\varepsilon t)$ решение (1) и связанные с ним величины будем обозначать теми же символами без «крышки», например, $\hat{y}(t)$, $y(t)$; $\hat{t}^k$, t^k; $u^k = u(\varepsilon t^k)$. В этих обозначениях

$$\hat{t}^1 = T(y^0, u^0), \quad t^1 = T(y^0, u(\varepsilon t)), \quad \hat{y}_c^1 = y_c(y^0, u^0), \quad y_c^1 = y_c(y^0, u(\varepsilon t)).$$

Лемма 3. *Если $u(\varepsilon t)$ удовлетворяет условию* (14), *$u(0) = u^0$, $u(\varepsilon t) \in U_+^0$, то решение* (1) *$y(t)$ достигает границы C в момент $t = t^1 = T(y^0, u(et))$ в точке $y(T) = y_c(y^0, u(\varepsilon t))$ и существуют такие $K_{1,1}$, $K_{1,2}$ и $\varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$*

$$|T(y^0, u(\varepsilon t)) - T(y^0, u^0)| \leqslant K_{1,1}, \quad |y_c(y^0, u(\varepsilon t)) - y_c(y^0, u^0)| \leqslant \varepsilon K_{1,2}. \tag{15}$$

Замечание 1. Обозначение 1 позволяет записать (15) в виде

$$|t^1 - \hat{t}^1| \leqslant \varepsilon K_{1,1}, \quad |y_c^1 - \hat{y}_c^1| \leqslant \varepsilon K_{1,2}. \tag{16}$$

Доказательство. 1. При $t = 0$ имеем $u = u^0$, $y = y^0$. На каждом участке непрерывности $u(\varepsilon t)$ применима теорема о дифференцируемости решения (2) по параметру ε и по начальным условиям (см. [2, теорема 18]). Так как участков конечное число и выполняется (14), найдутся такие A_0 и ε_0, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ для тех t, $0 \leqslant t \leqslant T_{\max}$, для которых одновременно существуют $y(t)$, $\hat{y}(t)$, выполняется оценка

$$|y(t) - \hat{y}(t)| \leqslant A_0 \varepsilon.$$

2. Для $\alpha > 0$ найдется такое $\bar{\varepsilon}_1(\alpha) > 0$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}_1(\alpha)$ и при $t = T(y^0, u^0) - \varepsilon A_1$, где

$$A_1 = \frac{1}{\psi_1^0}\left(A_0 \left|\frac{\partial c_1}{\partial y}\right| + B_0 \left|\frac{\partial c_1}{\partial u}\right| + \alpha\right),$$

одновременно выполняются неравенства

$$c_1(\hat{y}(t), u^0) < 0, \quad c_1(y(t), u(\varepsilon t)) < 0.$$

Первое неравенство очевидно из определения $T = T(y^0, u^0)$. Для доказательства второго представим $y(t)$ и $u = u(\varepsilon t)$ в виде

$$y(t) = \hat{y}(T) + \big[y(t) - \hat{y}(t)\big] - \big[\hat{y}(T) - \hat{y}(t)\big], \quad u = u^0 + (u - u^0),$$

и выпишем члены первого порядка по ε для дифференцируемых функций $y(t)$, $c_1(y(t), u)$, используя (1), (2) и (14). Найдем при $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}_1(\alpha)$:

$$c_1\big(y(t), u(\varepsilon t)\big) = -\varepsilon A_1 \frac{\partial c_1}{\partial y} g(y, u^0) + \frac{\partial c_1}{\partial y}\big[y(t) - \hat{y}(t)\big] + \frac{\partial c_1}{\partial u}(u - u^0) + o(\varepsilon).$$

Отсюда получим

$$c_1\big(y(t), u(\varepsilon t)\big) \leqslant -\varepsilon\alpha + o(\varepsilon) < 0.$$

3. Обозначим $\hat{T} = T(y^0, u^0)$, $t = \hat{T} - \varepsilon A_1$, $t' = \hat{T} + \varepsilon A_2$, где

$$A_2 = A_1 \frac{\psi_1^{\max}}{\psi_1^0}, \quad \psi_1^{\max} \geqslant \psi_1(\eta, u) \geqslant \psi_1^0 > 0,$$

и предположим, что $T(y^0, u(\varepsilon t)) \geqslant t'$, т.е. что $c_1(y(t'), u(\varepsilon t')) \leqslant 0$. Подставляя в $c_1(y, u)$ тождества

$$y(t') = \hat{y}(\hat{T}) + \big[\hat{y}(t) - \hat{y}(\hat{T})\big] + \big[y(t) - \hat{y}(t)\big] + \big[y(t') - y(t)\big],$$
$$u(\varepsilon t') \equiv u = u^0 + [u - u^0], \quad c_1(\hat{y}(\hat{T}), u^0) = 0,$$

и используя неравенства

$$\frac{\partial c_1}{\partial y}\big[\hat{y}(t) - \hat{y}(\hat{T})\big] \geqslant -\varepsilon A_1 \psi_1^{\max}, \quad \psi_1^{\max} \geqslant \frac{\partial c_1}{\partial y} g(y, u) \geqslant \psi_1^0,$$

находим оценку при $\alpha > 0$:

$$c_1\big(y(t'), u(\varepsilon t')\big) > \varepsilon\alpha - o(\varepsilon).$$

При $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}_2(\alpha)$ получаем $c_1\big(y(t'), u(\varepsilon t')\big) > 0$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно, $T < t'$, и сопоставляя с выводом пункта 2, находим неравенство

$$\hat{T} - \varepsilon A_1 < T\big(y^0, u(\varepsilon t)\big) < \hat{T} + \varepsilon A_2, \quad A_2 \geqslant A_1.$$

Поэтому в первом условии (15) можно положить

$$K_{1,1} = A_2, \quad \varepsilon_1 = \min\Big\{\varepsilon_0,\ \bar{\varepsilon}_1(\alpha),\ \bar{\varepsilon}_2(\alpha)\Big\}.$$

4. По определению, $y_c\big(y^0, u(\varepsilon t)\big) = y(T)$, $y_c(y^0, u^0) = \hat{y}(\hat{T})$. Пусть $t = \hat{T} - \varepsilon A_1$. Оценка правой части тождества

$$y(T) - \hat{y}(\hat{T}) = \big[y(t + (T - t)) - y(t)\big] + \big[y(t) - \hat{y}(t)\big] + \big[\hat{y}(t) - \hat{y}(\hat{T})\big]$$

приводит к неравенству

$$|y(T) - \hat{y}(\hat{T})| \leqslant \varepsilon[A_0 + (2A_1 + A_2)g_m], \quad g_m \geqslant |g(y,u)|.$$

Поэтому во втором неравенстве (15) можно положить

$$K_{1,2} = A_0 + (2A_1 + A_2)g_m, \quad \varepsilon = \min\Big\{\varepsilon_0,\ \bar{\varepsilon}_1(\alpha),\ \bar{\varepsilon}_2(\alpha)\Big\},$$

что и завершает доказательство леммы 3. □

Замечание 2. Для любой кусочно-дифференцируемой $u(\varepsilon t) \in U_+^0$ решения (1) задают отображение $Q : H \to C$ многообразия начальных значений $y^0 \in H$ в точки $y_c \in C$ границы C области D. Это отображение удовлетворяет условиям (15), а при $u = u^0 = \text{const}$ дифференцируемо. Из точек $(y_c, u) \in C$ достижимой части границы C области D формулами (4), (5) задано дифференцируемое отображение $R : C \to H$. Композиция отображений $\Pi = QR : C \to C$ задает непрерывное отображение C в себя и соответствует одному циклу разрывных колебаний. Колебания продолжаются, пока $u(\varepsilon t) \in U_+$.

Обозначение 2. Последовательные моменты времени достижения границы C области D, определяемые условиями (3), обозначены t^k, $k = 1, 2, \ldots$; значения y на границе C обозначим $y_c^k \equiv y(t^k - 0) = y_c(t^k)$; значения $u(\varepsilon t)$ в момент достижения границы обозначим $u^k \equiv u(\varepsilon t^k + 0)$.

Нижними индексами y, u обозначим максимумы по $u^0 \in U_+^0$ и по $y^0 \in D_{u^0}$ норм матриц частных производных непрерывно дифференцируемых функций $T(y^0, u^0)$, $y_c(y^0, u^0)$ и $h(y^0, u^0)$ аргументов y^0, u^0, например

$$T_y = \max_{u^0 \in U_+^0} \max_{y^0 \in D_{u^0}} \left\| \frac{\partial T(y^0, u^0)}{\partial y^0} \right\|.$$

Лемма 4. *При $u(\varepsilon t) \in U_+^0$ для каждого целого $k \geqslant 1$ существуют такие $\varepsilon_1 > 0$, $K_{k,1} < \infty$, $K_{k,2} < \infty$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и при выполнении условий* (14) *верны оценки*

$$|t^k - \hat{t}^k| \leqslant \varepsilon K_{k,1}, \quad |y_c^k - \hat{y}_c^k| \leqslant \varepsilon K_{k,2}. \tag{17}$$

Доказательство. Для $k = 1$ неравенства (17) совпадают с (15). Пусть оценки (17) уже выполнены для $k - 1$. Начальными значениями на участках $t^{k-1} < t < t^k$ и $\hat{t}^{k-1} < t < \hat{t}^k$ для $y(t)$ и $\hat{y}(t)$ будут $h(y_c^{k-1}, u^{k-1})$ и $h(\hat{y}^{k-1}, u^0)$ соответственно. Наряду с $y(t)$ и $\hat{y}(t)$ рассмотрим решение (1) при $u = u^{k-1} = \text{const}$ с начальным условием $y(t^{k-1}) = h(y_c^{k-1}, u^{k-1})$. Согласно лемме 2

$$\Big|t^k - T^{k-1} - T(h(y_c^{k-1}, u^{k-1}), u^{k-1})\Big| \leqslant \varepsilon K_{1,1},$$
$$\Big|y_c^k - y_c(h(y_c^{k-1}, u^{k-1})u^{k-1})\Big| \leqslant \varepsilon K_{1,2}.$$

Обозначения 1 и 2 позволяют записать

$$\hat{t}^k - \hat{t}^{k-1} = T(h(y_c^{k-1}, u^0)u^0), \quad \hat{y}_c^k = y_c(h(\hat{y}_c^{k-1}, u^0), u^0).$$

Оценка тождеств

$$t^k - \hat{t}^k = t^{k-1} - \hat{t}^{k-1} + \Big[t^k - t^{k-1} - T(h(y_c^{k-1}, u^{k-1}), u^{k-1})\Big] +$$
$$+ \Big[T(h(y_c^{k-1}, u^{k-1}), u^{k-1}) - T(h(\hat{y}_c^{k-1}, u^0), u^0)\Big],$$
$$y_c^k - \hat{y}_c^k = \Big[y_c^k - y_c(h(y_c^{k-1}, u^{k-1}), u^{k-1})\Big] +$$
$$+ \Big[y_c(h(y_c^{k-1}, u^{k-1}), u^{k-1}) - y_c(h(\hat{y}_c^{k-1}, u^0), u^0)\Big]$$

приводит к оценкам (17), если положить

$$K_{k,1} = K_{k-1,1} + K_{1,1} + T_y h_y K_{k-1,2} + (k-1)B_0(T_u + T_y h_u),$$
$$K_{k,2} = K_{k-1,2} y_{cy} h_y + K_{1,2} + (k-1)B_0(y_{cu} + y_{cy} h_u). \tag{18}$$

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Если выполняется условие* A, *то* $\overline{\overline{y}}_c(u)$ *— дифференцируемая функция при* $u \in U_+^1$.

Доказательство. Гладкое преобразование координат (9) $y \to \eta$, $\eta \in \mathbb{R}^l$ переводит C_u в область $C_u^* \subset \mathbb{R}^{l-1}$ плоскости $\eta_1 = 0$, $\eta' = (\eta_2, \ldots, \eta_l) \in C_u^*$. Это преобразование переводит $H_u \subset D_u$ в $H_u^* \subset \mathbb{R}^l$, $h(y,u)$ в $h^*(0,\eta';u)$. Отображение Π_u переходит в Π_u^* : $C_u^* \to C_u^*$; неподвижная точка $\overline{\overline{y}}_c(u)$ отображения Π_u переходит в неподвижную точку $\overline{\overline{\eta}}_c(u) = (0, \overline{\overline{\eta}}'_c(u))$ отображения Π_u^*. Пусть непрерывно дифференцируемое отображение Π_u^* задано дифференцируемой функцией $\pi(\eta', u)$. Обозначим

$$P_{l-1}(u) = \left.\frac{\partial \pi(\eta', u)}{\partial \eta'}\right|_{\eta' = \overline{\overline{\eta}}'_c(u)}.$$

Дифференцируя по u уравнение неподвижной точки $\pi(\overline{\overline{\eta}}'_c(u), u) = \overline{\overline{\eta}}'_c(u)$, получаем выражение для матрицы производных от $\overline{\overline{\eta}}'_c(u)$:

$$\frac{\partial \overline{\overline{\eta}}'_c(u)}{\partial u} = (E_{l-1} - P_{l-1})^{-1} \left.\frac{\partial \pi}{\partial u}\right|_{\eta' = \overline{\overline{\eta}}'_c(u)} = \overline{\overline{\eta}}'_c(u). \tag{19}$$

Собственные числа матрицы P_{l-1} по условию A должны лежать внутри единичного круга, что достаточно для существования обратной матрицы в (19). Из дифференцируемости $\overline{\overline{\eta}}'_c(u)$ и гладкости преобразования (9) следует дифференцируемость $\overline{\overline{y}}_c(u)$. □

Обозначение 3. При $y^0 = h(\overline{\overline{y}}_c(u), u)$, $u \in U_+^1$, $u = u^0 = \text{const}$ введём сокращённые обозначения функций из леммы 1:

$$T(u) = T\big(h(\overline{\overline{y}}_c(u), u), u\big), \quad \nu(u) = \nu\big(h(\overline{\overline{y}}_c(u), u), u\big). \tag{20}$$

$T(u)$ и $\nu(u)$ — непрерывно дифференцируемые функции (см. лемму 5).

Обозначим через U_+^{10} замкнутую связную ограниченную область в $\mathbb{R}^n$ такую, что $U_+^{10} \subseteq U_+^0 \cap U_+^1$.

Лемма 6. *Если* $u^0, u(\varepsilon t) \in U_+^{10}$ *и* $y(0) = y^0 \in h\big(V^1(\overline{\overline{y}}_c(u^0)), u^0\big)$, *то для любого* $\beta > 0$ *существуют такие* $k = k^0 \geqslant 1$ *и* $\bar{\varepsilon}_1 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}_1$

$$\Big|y_c(t^{k^0} - 0) - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^{k^0} - 0)\big)\Big| = \Big|y_c^{k^0} - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^{k^0} - 0)\big)\Big| \leqslant \beta. \tag{21}$$

Доказательство. Из асимптотической устойчивости отображения Π_{u^0} следует существование такого $k = k^0$, что

$$\big|\hat{y}_c^{k^0} - \overline{\overline{y}}_c(u^0)\big| \leqslant \frac{\beta}{3}.$$

Согласно лемме 4 существует такое $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\beta) > 0$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1(\beta)$ и $\varepsilon_1(\beta) = \beta/(3K_{k^0,2})$ имеем

$$\big|y_c^{k^0} - \hat{y}_c^{k^0}\big| \leqslant \frac{\beta}{3}.$$

Согласно лемме 5 найдётся такое $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\beta)$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$

$$\big|\overline{\overline{y}}_c(u(\varepsilon t^{k^0} - 0)) - \overline{\overline{y}}_c(u^0)\big| \leqslant \frac{\beta}{3},$$

т.е. можно принять

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\beta) = \beta \overline{\overline{y}}_{cu} k^0 T_{\max} \frac{B_0}{3}.$$

Используя тождество

$$y_c^{k^0} - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon y^{k^0} - 0)\big) = \Big[y_c^{k^0} - \hat{y}_c^{k^0}\Big] + \Big[\hat{y}_c^{k^0} - \overline{\overline{y}}_c(u^0)\Big] + \Big[\overline{\overline{y}}_c(u^0) - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^{k^0} - 0)\big)\Big],$$

получаем при $\bar{\varepsilon}_1 = \min\big\{\varepsilon_1(\beta), \varepsilon_2(\beta)\big\}$ оценку (21). □

Замечание 3. При $l = 1$ имеем $k^0 = 1$, $y_c^1 = \overline{\overline{y}}_c(u^0)$ и $\beta = K\varepsilon$.

Лемма 7. *Для любого $\gamma > 0$ найдутся такие $\beta = \beta > 0$ и $\bar\varepsilon_2 = \bar\varepsilon_2(\gamma) > 0$, что если для $k = k^0$ выполняется неравенство* (21)*, то при $0 < \varepsilon \leqslant \bar\varepsilon_2(\gamma)$ для $k \geqslant k^0$ выполняется условие*

$$\left|y_c(t^k - 0) - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^k - 0)\big)\right| \leqslant \gamma, \tag{22}$$

пока $u(\varepsilon t) \in U_+^{10}$.

Доказательство. Из асимптотической устойчивости отображения Π_u, $u \in U_+^1$, следует существование такого $k^1 > k^0$, что при $k^0 \leqslant k \leqslant k^1$, $u = u(\varepsilon t^{k^0} - 0) = \mathrm{const}$

$$\left|\hat y_c^k - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^{k^0} - 0)\big)\right| \leqslant \frac{\gamma}{3}, \quad \left|\hat y_c^{k^1} - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^{k^0} - 0)\big)\right| \leqslant \frac{\beta}{3}.$$

По лемме 6 выберем $\bar\varepsilon_1(\beta)$ так, чтобы при $0 < \varepsilon \leqslant \bar\varepsilon_1(\beta)$ выполнялось неравенство

$$\left|y_c^k - \hat y_c^k\right| \leqslant \frac{\beta}{3}.$$

Здесь $\hat y_c^k$ вычисляется при $u = u(\varepsilon t^{k^0} - 0) = \mathrm{const}$; начальное условие при $t = t^{k^0}$ имеет вид $y = y_c^{k^0}$. По лемме 6 найдем $\varepsilon_2(\beta)$ такое, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2(\beta)$

$$\left|\overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^k - 0)\big) - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^{k^0} - 0)\big)\right| \leqslant \frac{\beta}{3}.$$

Используя тождество

$$y_c^k - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^k - 0)\big) = \Big[y_c^k - \hat y_c^k\Big] + \Big[\hat y_c^k - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^{k^0} - 0)\big)\Big] + \Big[\overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^{k^0} - 0)\big) - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^k - 0)\big)\Big]$$

и неравенство $\gamma \geqslant 3\beta$, получим при $k^0 \leqslant k < k^1$, $\bar\varepsilon_2(\gamma) = \min\{\varepsilon_1(\beta), \varepsilon_2(\beta)\}$ оценку (22), а при $k = k^1$ оценку (21). Затем, заменяя k^0 на k^1 и повторяя рассуждения, получим растущую последовательность индексов, для которых выполняется (22), а в конце интервала — (21), пока $u(\varepsilon t) \in U_+^{10}4$, что и требовалось доказать. □

Замечание 4. При $l = 1$ в оценке (22) γ можно заменить на $\varepsilon\bar K_2$, $\bar K_2 < \infty$.

Лемма 8. *При $u(\varepsilon t) \in U_+^{10}$ для любого $\kappa > 0$ найдутся такие $k^0 \geqslant 1$ и $\bar\varepsilon_3 = \bar\varepsilon_3(\kappa)$, что при $k \geqslant k^0$, $0 < \varepsilon \leqslant \bar\varepsilon_3$ выполняется оценка*

$$\left|(t^{k+1} - t^k)\nu(u^k) - 1\right| \leqslant \kappa. \tag{23}$$

Доказательство. Используя обозначения 2 и 3, запишем

$$\left|t^{k+1} - t^k - T(u^k)\right| \leqslant \left|t^{k+1} - t^k - T(h(y_c^k, u^k), u^k)\right| + \left|T(h(y_c^k, u^k), u^k) - T(h(\overline{\overline{y}}_c(u^k), u^k), u^k)\right|.$$

Первое слагаемое оценивается в лемме 3 величиной $\varepsilon K_{1,1}$. Второе слагаемое благодаря дифференцируемости функций $T(y,u)$ (лемма 1) и $h(y,u)$ оценивается величиной $T_y h_y |y_c^k - \overline{\overline{y}}_c(u^k)|$. Далее,

$$\left|y_c^k - \overline{\overline{y}}_c(u^k)\right| \leqslant \left|y_c^k - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^k - 0)\big)\right| + \left|\overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^k - 0)\big) - \overline{\overline{y}}_c\big(u(\varepsilon t^k + 0)\big)\right|,$$

так как $u^k \equiv u(\varepsilon t^k + 0)$. Из лемм 7 и 5, используя (14), получаем

$$\left|y_c^k - \overline{\overline{y}}_c(u^k)\right| \leqslant \gamma + \overline{\overline{y}}_{cu} B_1 \varepsilon;$$

окончательно

$$\left|t^{k+1} - t^k - T(u^k)\right| \leqslant T_y h_y \gamma + (K_{1,1} + T_y h_y \overline{\overline{y}}_{cu} B_1)\varepsilon.$$

Выберем $\gamma = \kappa T_{\min}/2T_y h_y$; $\bar\varepsilon_2(\gamma)$, $\beta(\gamma)$ из леммы 7, $\bar\varepsilon_1(\beta)$, $k^0(\beta)$ из леммы 6 и положим

$$\varepsilon_3 = \frac{\kappa T_{\min}}{2\big(K_{1,1} + T_y h_y \overline{\overline{y}}_{cu} B_1\big)}.$$

При $\bar\varepsilon_3 = \min\big\{\bar\varepsilon_1, \bar\varepsilon_2, \varepsilon_3\big\}$ выполняется оценка

$$\left|t^{k+1} - t^k - T(u^k)\right| \leqslant \kappa T_{\min}. \tag{24}$$

Умножая (24) на $\nu(u^k)$, $\nu(u^k) \leqslant \nu_{\max} = 1/T_{\min}$ (следствие 1), получаем требуемую оценку (23). □

Замечание 5. При $l = 1$ в (23) и (24) можно заменить κ на $\varepsilon\bar{K}_3$, $\bar{K}_3 < \infty$.

Обозначение 4. Обозначим через $\sigma(t)$ функцию Хевисайда

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{25}$$

Для последовательности t^k, $k = 1, 2, \ldots$, заданной обозначениями 2, введем ступенчатую функцию $k(t)$ — число точек t^k, не превосходящих t: $t^{k(t)} \leqslant t < t^{k(t)+1}$. Тогда

$$k(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(t - t^i) \leqslant t\nu_{\max}. \tag{26}$$

Через $d(t, \varepsilon)$, $d \in \mathbb{R}^n$ обозначим разность

$$d(t,\varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=1}^{k(t)} a\big(u(\varepsilon t^k - 0), \varepsilon t^k\big) - \int_0^{\varepsilon t} a\big(u(\xi), \xi\big)\nu\big(u(\xi)\big)d\xi, \tag{27}$$

где $\nu(u)$ определено формулой (20), $a(u, \tau) \in \mathbb{R}^n$ из (5).

Лемма 9. *Если выполняются условие* (14)*, условие* A *и оценки*

$$|a(u,\tau)| \leqslant a_m, \quad \left|\frac{\partial a}{\partial \tau}\right| \leqslant a_\tau, \quad \left\|\frac{\partial a}{\partial u}\right\| \leqslant a_u, \tag{28}$$

при $u \in U_+^{10}$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, *то для любого* $\delta > 0$ *найдется такое* $\bar{\varepsilon}_4 = \bar{\varepsilon}_4(\delta)$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}_4$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_1/\varepsilon$ *выполняется неравенство*

$$|d(t,\varepsilon)| \leqslant \delta. \tag{29}$$

Доказательство. Отметим, что $u = u(\varepsilon t)$, $\nu(u)$, $a(u, \varepsilon t)$ имеют лишь конечное число разрывов на интервале $0 \leqslant t \leqslant \tau_1/\varepsilon$ при $\varepsilon > 0$; поэтому интеграл Римана в (27) существует. Рассмотрим интегральную сумму

$$S(t) = \sum_{k=1}^{k(t)-1} a\big(u(\varepsilon t^k - 0), \varepsilon t^k\big)\nu\big(u(\varepsilon t^k + 0)\big)(t^{k+1} - t^k)\varepsilon, \tag{30}$$

а также верхнюю и нижнюю суммы Дарбу

$$S^*(t) = \sum_{k=1}^{k(t)-1} a_k^*\nu_k^*(t^{k+1} - t^k)\varepsilon, \quad S_*(t) = \sum_{k=1}^{k(t)-1} a_{*k}\nu_{*k}(t^{k-1} - t^k)\varepsilon,$$

где

$$a_k^*\nu_k^* = \sup_{t^k \leqslant t \leqslant t^{k+1}} a\big(u(\varepsilon t), \varepsilon t\big)\nu\big(u(\varepsilon t)\big); \quad a_{*k}\nu_{*k} = \inf_{t^k \leqslant t \leqslant t^{k+1}} a\big(u(\varepsilon t), \varepsilon t\big)\nu(u(\varepsilon t)).$$

Вследствие непрерывной дифференцируемости $a(u, \tau)$ и $\nu(u)$ и условия (14) выполняется неравенство

$$a_k^*\nu_k^* - a_{*k}\nu_{*k} \leqslant \varepsilon q,$$

где

$$q = a_\tau r + (a_u\nu_{\max} + a_m\nu_m^{'})B_0, \quad r = \nu_{\max}T_{\max}, \quad \nu_m^{'} = \max_{u \in U_+^1} \left\|\frac{\partial \nu}{\partial u}\right\|.$$

Разность верхней и нижней сумм Дарбу оценивается величиной

$$|S^*(t) - S_*(t)| = \left|\sum_{k=1}^{k(t)-1} \big(a_k^*\nu_k^* - a_{*k}\nu_{*k}\big)(t^{k+1} - t^k)\varepsilon\right| \leqslant \varepsilon q\tau_1,$$

и разность между интегралом в (27) и суммой (30) не превосходит величины

$$|d_1(t)| = \left| S(t) - \int_0^{\varepsilon t} a\big(u(\xi),\xi\big)\nu\big(u(\xi)\big)d\xi \right| \leqslant \varepsilon(q\tau_1 + 3a_m r). \tag{31}$$

Далее оценим разность

$$d_2(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^{k(t)} a\big(u(\varepsilon t^k - 0), \varepsilon t^k\big) - S(t) =$$

$$= \varepsilon a\big(u(\varepsilon t^{k(t)} - 0), \varepsilon t^{k(t)}\big) + \varepsilon \sum_{k=1}^{k(t)-1} a\big(u(\varepsilon t^k - 0), \varepsilon t^k\big)\Big[1 - \nu\big(u(\varepsilon t^k + 0)\big)(t^{k+1} - t^k)\Big].$$

Разобьем здесь сумму на две части:

$$\sum_{k=1}^{k^0-1} + \sum_{k=k^0}^{k(t)-1}.$$

Используя оценки (23), (26) и выбирая k^0 как в лемме 8, по заданному $\kappa > 0$, получим оценку

$$|d_2(t)| \leqslant \varepsilon(k^0 - 1)a_m(1 + r) + \kappa a_m \varepsilon(k(t) - 1 - k^0) + \varepsilon a_m <$$

$$< \varepsilon k^0 a_m(1 + r) + \kappa a_m \nu_{\max} \varepsilon t \leqslant \varepsilon k^0 a_m(1 + r) + \kappa a_m \nu_{\max} \tau_1. \tag{32}$$

Складывая оценки (31) и (32), получим для $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau_1/\varepsilon$ оценку

$$|d(t)| < \varepsilon(q\tau_1 + 3a_m r) + \varepsilon k^0 a_m(1 + r) + \kappa a_m \nu_{\max} \tau_1. \tag{33}$$

Зададим любое $\delta > 0$ и выберем $\kappa = \delta\tau_1 a_m \nu_{\max}/3$; по κ найдем k^0 и $\bar{\varepsilon}_3(\kappa)$ из леммы 8 и затем выберем ε_4 так, чтобы при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_4$ выполнялись оба неравенства

$$3\varepsilon(q\tau_1 + 3a_m r) \leqslant \delta, \quad 3\varepsilon k^0 a_m(1 + r) \leqslant \delta.$$

Тогда при $\bar{\varepsilon}_4 = \min\{\varepsilon_4; \bar{\varepsilon}_3(\kappa)\}$ из (33) следует оценка (29) из утверждения леммы 9. □

3. Доказательство теоремы 1

Интегрируя уравнения (7) и уравнения (2) с условиями (5) от 0 до t, вычитая первый результат из второго, и учитывая обозначение (27), получим:

$$u(\varepsilon t) - \bar{u}(\varepsilon t) = d(t,\varepsilon) + \int_0^{\varepsilon t} \Big[b(u(\xi),\xi) - b(\bar{u}(\xi),\xi)\Big]d\xi +$$

$$+ \int_0^{\varepsilon t} \Big[a(u(\xi),\xi)\nu(u(\xi)) - a(\bar{u}(\xi),\xi)\nu(\bar{u}(\xi))\Big]d\xi. \tag{34}$$

При оценке правой части (34) используем равномерную ограниченность и дифференцируемость функций $a(u,\tau)$, $b(u,\tau)$ из условия теоремы и лемму 9. В результате получим интегральное неравенство

$$\big|u(\varepsilon t) - \bar{u}(\varepsilon t)\big| \leqslant b_0 \int_0^{\tau} |u(\xi) - \bar{u}(\xi)|d\xi + \delta, \tag{35}$$

где $b_0 = b_u + a_u\nu_{\max} + a_{\max}\nu_u$.

Решение интегрального неравенства (35) имеет вид (см. [3, теорема 1])

$$|u(\varepsilon t) - \bar{u}(\varepsilon t)| \leqslant \delta \exp(b_0\tau_1), \quad 0 \leqslant \varepsilon t \leqslant \tau_1. \tag{36}$$

Для любого $\zeta > 0$ зададим $\delta = \zeta \exp(-b_0\tau_1)$, из леммы 9 найдем $\bar{\varepsilon}_4(\delta)$ и положим $\bar{\varepsilon}_0(\zeta) = \bar{\varepsilon}_4(\delta)$. Тогда (36) совпадает с утверждением теоремы 1.

Замечание 6. При $l = 1$ в утверждении теоремы 1 можно заменить ζ на $\varepsilon\bar{K}_0$, $\bar{K}_0 < \infty$ (см. [1, теорема 5]).

4. Более сложная система

Предположим, что $l = \sum\limits_{i=1}^{N} l_i$, $l_i \geqslant 1$. Пусть задано N областей $D_i \subset \mathbb{R}^{l_i} \times \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,N}$, с границами C_i, определяемыми дважды дифференцируемыми функциями $c_{1i}(y_i, u)$, $y_i \in \mathbb{R}^{l_i}$, $u \in \mathbb{R}^n$:

$$C_i = \Big\{ y_i, u : C_{1i}(y_i, u) = 0;\ y_i \in \mathbb{R}^{l_i},\ u \in \mathbb{R}^n \Big\}, \quad i = \overline{1,N}.$$

Внутренняя часть областей D_i задается условиями

$$c_{1i}(y_i, u) < 0, \quad i = \overline{1,N}.$$

Внутри D_i заданы уравнения

$$\frac{dy_i}{dt} = g_i(y_i, u(\varepsilon t)), \quad y_i(0) = y_i^0, \quad y_i, y_i^0, g_i \in \mathbb{R}^{l_i}, \tag{37}$$

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon b(u, \varepsilon t), \qquad u(0) = u^0, \quad u, u^0, b \in \mathbb{R}^n. \tag{38}$$

Моменты разрывов t_i^k и величина скачков задаются уравнениями

$$c_{1i}(y_i(t_i^k - 0), u(\varepsilon t_i^k - 0)) \leqslant 0, \quad c_{1i}(y_i(t_i^k + 0), u(\varepsilon t_i^k + 0)) \leqslant 0, \tag{39}$$

$$y_i(t_i^k + 0) = h_i(y_i(t_i^k - 0), u(\varepsilon t_i^k + 0)), \tag{40}$$

$$u(\varepsilon t_i^k + 0) = u(\varepsilon t_i^k - 0) + \varepsilon a_i(u(\varepsilon t_i^k - 0), \varepsilon t_i^k)/N. \tag{41}$$

На функции g_i, h_i, c_{1i}, a_i, b накладываются те же требования дифференцируемости и ограниченности, что и в теореме 1. Усредненная система имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{d\bar{u}(\tau)}{d\tau} = b(\bar{u}, \tau) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i(\bar{u}, \tau)\nu_i(\bar{u}), \quad \bar{u}(0) = u^0; \\ u^0, \bar{u} \in U_+^0 \cap U_+^1 \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1. \end{gathered} \tag{42}$$

Теорема 2. *Если для каждой из подсистем* (37) *выполняется условие* A, $y_i^0 \in h_i(V_i^1(\overline{\overline{y}}_{ci}(u^0), u^0))$, $i = \overline{1,N}$, *функции* $g_i(y_i, u)$ *отделены от* 0, *многообразия* H_i *и* C_i *расположены на конечном расстоянии друг от друга в* $\mathbb{R}^{l_i+n}$, *то для любого* $\zeta > 0$ *найдется такое* $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_0(\zeta) > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}_0$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_1/\varepsilon$ *справедлива оценка*

$$|u(\varepsilon t) - \bar{u}(\varepsilon t)| < \zeta. \tag{43}$$

Доказательство буквально повторяет доказательство теоремы 1 с тем лишь отличием, что леммы 1–7 применяются к каждой из N подсистем, а обозначения (27), (30) и леммы 8, 9 модифицируются очевидным образом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покровский А. Н.* Процессы управления в нервных клетках/ Учебное пособие. — Л.: Изд. ЛГУ, 1987.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1975.
3. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1985.

А. Н. Покровский
НИИ вычислительной математики и процессов управления им. В. И. Зубова
Санкт-Петербургского государственного университета
E-mail: anpokr@petrodvorets.spb.ru

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 28–30

О НУЛЯХ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

© 2005 г. **А. Ю. ПОПОВ**

В ряде разделов математики заметную роль играют функции Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)},$$

где $\rho>0$, $\mu\in\mathbb{C}$, Γ — гамма-функция. Основные их свойства и разнообразные применения изложены в монографии [1] (см. также [7]). Вопрос о распределении нулей функций Миттаг-Леффлера представляет самостоятельный интерес. Его исследованию было посвящено немало публикаций; отметим среди них работы [2, 6, 9–11]. Эта проблематика актуальна также в связи с тем, что при некоторых значениях параметров ρ и μ нули функции $E_\rho(z,\mu)$ являются собственными числами дифференциальных операторов специального вида [3, 4].

И. В. Тихонов и Ю. С. Эйдельман [8] недавно доказали критерий однозначности разрешимости одного класса обратных задач.

Пусть $\mathscr{E}$ — банахово пространство, D — всюду плотное линейное подпространство $\mathscr{E}$, $A:D\to\mathscr{E}$ — замкнутый линейный оператор, $N\in\mathbb{N}$. Согласно теореме Тихонова—Эйдельмана обратная задача

$$\begin{cases}\dfrac{d^Nu}{dt^N}=Au+p, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ u^{(k)}(0)=u_k, & 0\leqslant k\leqslant N-1,\quad u(1)=u_N,\end{cases}$$

($u:[0,1]\to D$, $p\in\mathscr{E}$ не известны, $u_k\in\mathscr{E}$, $0\leqslant k\leqslant N$, заданы) не может иметь более одного решения (u,p) тогда и только тогда, когда ни одно из собственных чисел оператора A не попадает в множество нулей функции $E_{1/N}(z,N+1)$.

Для того чтобы применять приведенный результат в конкретных ситуациях, необходимо знать, где расположены нули $E_{1/N}(z,N+1)$. Функции $E_{1/N}(z,s)$ при $N,s\in\mathbb{N}$ являются элементарными (см. [6]). Например, интересующие нас функции $E_{1/N}(z,N+1)$, $N\in\mathbb{N}$, выражаются через $E_{1/N}(z,1)$ по формуле

$$E_{1/N}(z,N+1)=\frac{E_{1/N}(z,1)-1}{z},$$

а функция $E_{1/N}(z,1)$, взятая от аргумента $z=-w^N$, является квазиполиномом следующего вида:

$$\frac{N}{2}E_{1/N}(-w^N,1)=\sum_{k=1}^{[N/2]}\exp\left(w\cos\frac{\pi(2k-1)}{N}\right)\cos\left(w\sin\frac{\pi(2k-1)}{N}\right)+\delta e^{-w},$$

где $\delta=1/2$, если N нечетно, и $\delta=0$, если N четно. Таким образом, при $N\geqslant 3$ отыскать нули $E_{1/N}(z,N+1)$ в «явном» виде вряд ли возможно. Поэтому возникает задача об исследовании расположения нулей этих функций и получения для них возможно более точных неравенств. Решению этой задачи и посвящена настоящая статья.

Коротко расскажем об известных на сегодняшний день результатах о нулях $E_\rho(z,\mu)$ в интересующем нас случае $\rho<1/2$. Вопрос об асимптотическом поведении нулей функций Миттаг-Леффлера при всех допустимых значениях параметров ρ и μ полностью решен А. М. Седлецким [6]. Он доказал, что если расположить все нули $E_\rho(z,\mu)$ в последовательность $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ в порядке неубывания модулей, то при $\rho<1/2$ справедлива асимптотика

$$z_n=-\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\left(n+\frac{1}{2}+\rho(\mu-1)+\alpha_n\right)\right)^{1/\rho},\quad n\to\infty,\tag{1}$$

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

где величины $|\alpha_n|$ экспоненциально убывают с ростом n. Если к тому же $\mu > 0$, то все нули z_n при $n \geqslant n_0$ вещественны, отрицательны и просты. Значение $n_0 = n_0(\rho, \mu)$ и постоянных в символах O в оценках для $|\alpha_n|$ в работе [6] не вычислялись.

В связи с упомянутыми приложениями становится актуальным исследование всех нулей $E_\rho(z, \mu)$, а не только достаточно больших по модулю. В начале 20 в. было установлено [10,11], что все нули $E_\rho(z, 1)$ при $\rho < 1/2$ вещественны, отрицательны и просты. В появившейся несколько лет назад статье И. В. Островского и И. Н. Переселковой [9] была поставлена задача об описании множества $\mathscr{W}$, состоящего по определению из всех пар (ρ, μ), при которых функция $E_\rho(z, \mu)$ имеет только лишь отрицательные и простые нули. В [9] было отмечено, что если $(\rho, \mu) \in \mathscr{W}$, то $\rho \leqslant 1/2$ и доказано включение

$$\left\{(2^{-m}, \mu) \mid m \in \mathbb{N},\ 0 < \mu < 1 + 2^m\right\} \subset \mathscr{W}.$$

В [9] была высказана гипотеза, что

$$\mathscr{W} = \left\{(\rho, \mu) \mid 0 < \rho \leqslant 1/2,\ 0 < \mu < 1 + 1/\rho\right\}.$$

Как выяснилось, при $1/\rho = N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 3$, эта гипотеза неверна: множество $\mathscr{W}$ содержит пары $(1/N, N + 1)$ $\forall N \geqslant 3$. Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *При любых $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 3$, все нули функций $E_{1/N}(z, N+1)$ вещественны, просты и лежат на луче $(-\infty,\ -(2N)!/N!)$.*

Отметим, что упомянутую гипотезу Островского—Переселковой нельзя «подправить», поставив вместо строгого неравенства $\mu < 1 + 1/\rho$ нестрогое. Сказанное подтверждает следующее утверждение.

Предложение 1. *Все нули функции $E_{1/4}(z, 9)$ вещественны, отрицательны и просты.*

Вместе с тем, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *При любых $\rho \in (0, 1/2)$, $\mu > 1 + \left(\rho^2 \ln 2\right)^{-1}$ функция $E_\rho(z, \mu)$ имеет нули, не лежащие на действительной оси.*

Теперь приведем неравенства для нулей $E_{1/N}(z, N+1)$. Ввиду того, что закономерности расположения нулей с «малыми» и «большими» модулями различны, разобьем количественные результаты на две теоремы. Расположим нули $E_{1/N}(z, N + 1)$ в порядке возрастания их модулей. Полученную последовательность обозначим $\{z_n(N)\}_{n=1}^{\infty}$. В теоремах 2 и 3 предполагается, что $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 3$, $\rho = 1/N$.

Теорема 2. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant \max(1, [N/6])$ справедлива формула*

$$z_n(N) = -\left(\frac{\pi n + \pi/2 + \alpha_n(N)}{\sin \pi\rho}\right)^N, \tag{2}$$

где $\alpha_n(N) \in \mathbb{R}$ и

$$|\alpha_n(N)| \leqslant \begin{cases} \exp\left(-\pi n \operatorname{ctg}(\pi\rho)\right), & 3 \leqslant N \leqslant 5, \\ \exp\left(-2\pi n \sin(2\pi\rho)\right), & 6 \leqslant N \leqslant 900, \\ 1{,}01 \exp\left(-2\pi n \sin(2\pi\rho)\right), & 900 < N. \end{cases} \tag{3}$$

Оценка, полученная А. М. Седлецким в [6] для $|\alpha_n|$ в общем случае, при $\rho = 1/N$, $N \in \mathbb{N}$, $\mu = N + 1$ имеет вид

$$\alpha_n(N) = O(\exp(-\pi n \operatorname{ctg} \pi\rho)), \qquad 3 \leqslant N \leqslant 5,$$
$$\alpha_n(N) = O(\exp(-2\pi n \sin 2\pi\rho)), \qquad 6 \leqslant N.$$

Таким образом, в теореме 2 при $\rho = 1/N$, $\mu = N+1$ указано, начиная с какого номера n применимы оценки нулей из [6] и предъявлена постоянная в символе O. Заметим, что асимптотики (1) и (2)–(3) не противоречат друг другу, поскольку в [6] нумерация нулей шла не с $n = 1$, а с $n = 0$.

Все же при $N \geqslant 12$ теорема 2 ничего не говорит о нескольких первых нулях $z_n(N)$, $n \leqslant [N/6]-1$. Поэтому доказывается теорема о расположении нулей $E_{1/N}(z, N+1)$ с указанными номерами. Перед тем, как ее сформулировать, введем несколько обозначений. Для любого $n \in \mathbb{N}_0$ положим

$$R_n(N) = \frac{((n+2)N)!}{((n+1)N)!}, \quad q_n(N) = \frac{6R_n(N)}{5R_{n+1}(N)} \min\left(1, N(n+1)^{-2}\right). \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть $N \geqslant 12$. Тогда для нулей с номерами $1 \leqslant n \leqslant [N/6]-1$ справедливы неравенства*

$$-R_{n-1}(N)(1+q_{n-1}(N)) < z_n(N) < -R_{n-1}(N). \tag{5}$$

Исследуем точность оценок (5). Из (4) вытекает, что

$$\begin{gathered}\frac{R_n(N)}{R_{n+1}(N)} = \prod_{\nu=1}^{N}\left(\frac{(n+1)N+\nu)}{(n+2)N+\nu}\right) = \prod_{\nu=1}^{N}\left(1 - \frac{N}{(n+2)N+\nu}\right) < \\ < \exp\left(-\sum_{\nu=1}^{N}\frac{N}{(n+2)N+\nu}\right) = \exp\left(-\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{n+2+\nu/N}\right) < \exp(-N/(n+3)).\end{gathered} \tag{6}$$

Отсюда находим

$$\lim_{N\to\infty}\left(\max_{1\leqslant n\leqslant N/6} q_n(N)\right) = 0.$$

Из сказанного заключаем, что относительная погрешность оценок (5) при $N \to \infty$ стремится к нулю равномерно по $n \in [1, [N/6]-1]$.

Доказательства сформулированных результатов автор предполагает опубликовать дополнительно, поскольку они носят достаточно сложный технический характер. Здесь же отметим лишь основные идеи.

Доказательства теорем 1–3 (с немного ослабленными оценками в теоремах 2 и 3) опубликованы в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М., 1966.
2. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* О построении некоторых специальных биортогональных систем// Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. — 1959. — *12*. — С. 17–42.
3. *Джрбашян М. М.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма—Лиувилля// Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. — 1970. — *5*. — С. 71–96.
4. *Нахушев А. М.* Задача Штурма—Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах// Докл. АН СССР. Сер. мат. — 1977. — *234*. — С. 308–311.
5. *Попов А. Ю.* О спектральных значениях одной краевой задачи и нулях функции Миттаг-Леффлера// Диффер. уравн. — 2002. — *38*, № 5. — С. 611–621.
6. *Седлецкий А. М.* Асимптотические формулы для нулей функции типа Миттаг-Леффлера// Anal. Math. — 1994. — *20*. — С. 117–132.
7. *Соломенцев Е. Д.* Миттаг-Леффлера функция// В кн.: Математическая энциклопедия. Т. 3. — М., 1982. — С. 707.
8. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера.// Диффер. уравн. — 2002. — *38*, № 5. — С. 637–644.
9. *Ostrovski I. V., Peresyolkova I. N.* Non-asymptotic results on distribution of zeros of the function $E_\rho(z,\mu)$// Anal. Math. — 1997. — *23*. — С. 283–296.
10. *Polya G.* Bemerkung über die Mittag-Lefflerschen Funktionen $E_\alpha(z)$// Tôhoku Math. J. — 1921. — *19*. — С. 241–248.
11. *Wiman A.* Über die Nullstellen der Funktionen $E_\alpha(x)$// Acta Math. — 1905. — *29*. — С. 217–234.

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 31–32

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

© 2005 г. **Д. К. ПОТАПОВ**

Рассматривается уравнение

$$Au = \lambda Tu \tag{1}$$

с параметром $\lambda > 0$, где A — линейный самосопряженный оператор из E в E^* (E — вещественное рефлексивное банахово пространство), $T : E \to E^*$ — антимонотонное отображение, ограниченное на E (возможно, разрывное), $T(0) = 0$. Очевидно наличие нулевого решения уравнения (1) при любом λ. Ищутся $\lambda > 0$, для которых уравнение (1) имеет ненулевые решения (такие λ называют собственными значениями уравнения (1)). При этом ядро оператора A может быть ненулевым.

Вариационным методом доказывается теорема о существовании полуоси собственных значений и наличие для каждого такого значения собственного вектора, который является точкой радиальной непрерывности оператора T.

Пусть E — вещественное рефлексивное банахово пространство, E^* — сопряженное с E пространство. Через (z, x) будем обозначать значение функционала $z \in E^*$ на элементе $x \in E$.

Определение 1. Отображение $T : E \to E^*$ называется *квазипотенциальным*, если существует функционал $f : E \to \mathbb{R}$, для которого верно равенство

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 (T(x+th), h)dt \quad \forall x, h \in E.$$

При этом f называют *квазипотенциалом* оператора T.

Определение 2. Отображение $T : E \to E^*$ называется *радиально непрерывным в точке* $x \in E$, если для любого $h \in E$ имеем

$$\lim_{t\to 0}(T(x+th), h) = (Tx, h).$$

Определение 3. Элемент $x \in E$ будем называть *точкой разрыва* оператора T, если найдется $h \in E$, для которого либо $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th), h)$ не существует, либо

$$\lim_{t\to 0}(T(x+th), h) \neq (Tx, h).$$

Определение 4. Элемент $x \in E$ называют *регулярной точкой* для оператора $T : E \to E^*$, если для некоторого $h \in E$ имеем

$$\overline{\lim_{t\to +0}}\,(T(x+th), h) < 0.$$

Определение 5. Отображение $T : E \to E^*$ называется *монотонным* на E, если

$$(Tx - Ty, x - y) \geqslant 0 \quad \forall x, y \in E.$$

Отображение $T : E \to E^*$ называют *антимонотонным*, если отображение $-T$ монотонно.

Определение 6. *Секвенциальным замыканием* локально ограниченного отображения $F : E_1 \to E_2$ (E_1, E_2 — банаховы пространства) называется отображение SF из E_1 в E_2 (вообще говоря, многозначное), значение SFx ($x \in E_1$) которого совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества всех слабо предельных точек в E_2 последовательностей вида (Fx_n), где $x_n \to x$ в E_1.

Получен следующий результат.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

Теорема 1. *Предположим, что*

1) A *— линейный самосопряженный оператор из* E *в* E^* (E *— вещественное рефлексивное банахово пространство*), *пространство* E *представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств* E_1 *и* $E_2, E_1 = \ker A$, *причем существует постоянная* $\alpha > 0$ *такая, что* $(Au, u) \geqslant \alpha\|u\|^2\ \forall u \in E_2$;
2) *отображение* T *антимонотонное, квазипотенциальное и ограниченное на* E, *а его квазипотенциал* f *равен нулю в нуле и для некоторого* $u_0 \in E$ *значение* $f(u_0) > 0$; *если* $E_1 \neq \{0\}$, *то дополнительно предполагается, что* $\lim\limits_{\substack{u\in E_1\\ \|u\|\to+\infty}} f(u) = -\infty$.

Тогда найдется $\lambda_0 > 0$ *такое, что для любого* $\lambda > \lambda_0$ *существует* $u_\lambda \in E$,

$$u_\lambda \neq 0, \quad f^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v\in E} f^\lambda(v), \quad f^\lambda(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - \lambda f(u)$$

и любое такое u_λ *удовлетворяет включению* $Au_\lambda \in \lambda STu_\lambda$, *где* ST *— секвенциальное замыкание оператора* T.

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы* 1 *и любая точка разрыва оператора* T *при* $\lambda > \lambda_0 > 0$ *регулярная для* $Q_\lambda u = Au - \lambda Tu$, *то для* $\lambda > \lambda_0$ *элемент* u_λ, *удовлетворяющий равенству* $f^\lambda(u_\lambda) = \inf\limits_{v\in E} f^\lambda(v)$, *является точкой радиальной непрерывности оператора* T *и решением уравнения* (1).

Общие результаты применяются к исследованию основных краевых задач для полулинейных уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной монотонной ограниченной нелинейностью. Для них устанавливается существование луча положительных собственных значений и наличие для каждого такого значения собственной функции, значения которой являются почти всюду точками непрерывности нелинейности по фазовой переменной.

Проблеме непустоты множества упорядоченных пар — собственное значение и соответствующая собственная функция — и изучению структуры этого множества для основных краевых задач для уравнений эллиптического типа с разрывной нелинейностью посвящено значительное число работ. Наиболее общие результаты в этом направлении были получены в [1–3]. По сравнению с [2,3] в [1] ослаблены ограничения на точки разрыва нелинейности, входящей в уравнение. В данной статье в отличие от [1] компактность оператора T не предполагается, а по сравнению с [2, 3] допускается, что исследуемые краевые задачи могут быть резонансными.

Автор благодарен профессору В. Н. Павленко за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* О существовании луча положительных собственных значений для полулинейных уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями// Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XI/ Сб. тр. Воронеж. весенней мат. школы, посв. 60-летнему юбилею Ю. В. Покорного. Часть II. — Воронеж: ВГУ, 2000. — С. 96–102.
2. *Chang K. C.* Free boundary problems and the set-valued mappings// J. Differ. Equat. — 1983. — *49*, № 1. — С. 1–28.
3. *Marano S. A.* Elliptic eigenvalue problems with highly discontinuous nonlinearities// Proc. Amer. Math. Soc. — 1997. — *125*, № 10. — С. 2953–2961.

Д. К. Потапов
Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики — процессов управления
E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 33–38

О СВОЙСТВАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА—ПЛАНКА В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ ЭРМИТА

© 2005 г. **Е. В. РАДКЕВИЧ**

1. Введение. Исследование асимптотической устойчивости решений задачи Коши для систем моментов Грэда кинетического уравнения Фоккера-Планка [7, 9, 10] (системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами):

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},B\right)M(t,x):=I\frac{\partial M(t,x)}{\partial t}+\sum A^{(j)}\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}+BS_GM(t,x)=0. \tag{1}$$

приводит к проблеме устойчивости полиномомиальных пучков порядка (m,N) [1, 2, 4–6] их дисперсионных уравнений:

$$\mathscr{P}(\tau,\xi)-i\mathscr{Q}(\tau,\xi)=0, \tag{2}$$

где

$$\mathscr{P}(\tau,\xi)=P_0(\tau,\xi)+\sum_{j\geqslant 1,N\geqslant 2j}^{[N/2]}(-1)^j\gamma_{2j}P_{2j}(\tau,\xi),$$
$$\mathscr{Q}(\tau,\xi)=\gamma_1P_1(\tau,\xi)+\sum_{j\geqslant 1,N\geqslant 2j+1}(-1)^j\gamma_{2j+1}P_{2j+1}(\tau,\xi),$$

$P_j(\tau,\xi)$ — однородные полиномы порядка $m-j$ с равными единице старшими коэффициентами по τ. Здесь $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и $\dfrac{\partial}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $S_G,A^{(1)},\ldots,A^{(n)}$ — вещественные $(m\times m)$-матрицы, I — единичная $(m\times m)$-матрица, B — большой параметр.

Если вектор-функция $M(t,x)$ является решением системы, то любая его компонента $m_\alpha(t,x)$ является решением скалярного уравнения

$$R\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},B\right)m_\alpha(t,x):=\det\left(L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},B\right)\right)m_\alpha(t,x)=0, \tag{3}$$

и исследование асимптотической устойчивости задачи Коши для системы $L\left(\dfrac{\partial}{\partial t},\dfrac{\partial}{\partial x},B\right)$ сводится к аналогичному вопросу для скалярного оператора $R\left(\dfrac{\partial}{\partial t},\dfrac{\partial}{\partial x},B\right)$. Как хорошо известно, всякое решение скалярного уравнения представляется в виде интеграла Фурье

$$(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(t,\xi,B)\exp\Big(i(\xi\,x+\tau(\xi,B)\,t)\Big)d\xi,$$

где $\tau=\tau(\xi,B)$ является корнем дисперсионного уравнения (1) вида

$$\mathscr{R}(\tau,\xi,B):=i^{-m}R(i\tau,i\xi,B)=R(\tau,\xi,-iB)=0.$$

Пучок полиномов (2) называется *устойчивым*, если все его корни лежат в открытой верней полуплоскости комплексной плоскости, т.е.

$$\mathscr{R}(\tau,\xi,B)\neq 0,\quad \operatorname{Im}\tau\leqslant 0,\quad |\tau|+|\xi|>0. \tag{4}$$

Условие устойчивости (4) эквивалентно асимптотической устойчивости задачи Коши для исходной системы.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

2. Полиномиальные пучки систем моментов Грэда. Анализ полиномиальных пучков (2) дисперсионных уравнений систем моментов Грэда для кинетических уравнениний Больцмана [1,2,4,6] и Фокера—Планка [5] показал, что они обладают чрезвычайно жесткой структурой:

1) постоянные γ_j удовлетворяют условиям Рауса—Гурвица [3],
2) однородные полиномы $P_j(\tau,\xi)$ гиперболичны по τ и корни соседних полиномов нестрого разделяют друг друга.

При предварительном анализе дисперсионных уравнений систем моментов Грэда мы сталкиваемся со следующими проблемами.

1) Какова причина воспроизводства на каждом шаге метода моментов Грэда цепочки гиперболических однородных полиномов дисперсионного уравнения, для которой корни соседних полиномов нестрого разделяют друг друга?
2) Как меняется при фиксированном j мнимая часть корней $\omega_j^N(\xi) = \operatorname{Im}\tau_j(\xi)$ когда $N \to \infty$? Как меняется минимум мнимых частей так называемых погранслойных корней ($\operatorname{Im}\tau_j(\xi) = O(1)$ если $\xi \to 0$,) отвечающий за скорость стремления неравновесных переменных в состояние равновесия при увеличении числа уравнений $N \to \infty$ в системе моментов?

Покажем, что при любом N справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть старший полином P_0 пучка* (2) *имеет вещественные корни постоянной кратности и матрица $\sum\limits_{j=1}^{d} \xi\, A_j$ системы* (1) *имеет элементарные делители только первой степени* (*условия теоремы И. Г. Петровского о приведении матрицы к каноническому виду*). *Релаксационная матрица $\mathscr{B}_N = -\mathscr{S}_N$, где $\mathscr{S}_N$ — матрица представления оператора столкновения в базисе первых N функций Эрмита, диагональна. Ее диагональные коэффициенты*

$$b_{jj} = 0,\ j = 1,\dots,N_b, \quad b_{jj} > 0,\ j = N_b+1,\dots,N.$$

Здесь N_b — число базовых, равновесных переменных.

1) *Тогда полиномы P_0, P_1 полиномиального пучка* (2) *дисперсионного уравнения систем моментов Грэда составляют правильную гиперболическую пару полиномов, т.е. они гиперболичны, кратные корни общие, на единицу меньшей кратности у P_1, нестрого разделяют друг друга.*
2) *Полином P_N, $N = m - N_b$, строго гиперболический, тогда полиномы P_{N-1}, P_N полиномиального пучка* (2) *составляют строго гиперболическую пару полиномов, т.е. они строго гиперболичны и их корни строго разделяют друг друга.*
3) *Полином P_N нестрого гиперболический, тогда полиномы P_{N-1}, P_N образуют правильную нестрого гиперболическую пару полиномов. В этом случае все полиномы P_j, $j = 0,\dots,N$, цепочки имеют общий вещественный корень.*

Не ослабляя общности, достаточно привести доказательство этого утверждения для случая $N_b = 1$, отвечающего системе моментов Грэда уравнения Фоккера—Планка. Докажем справедливость пунктов 2 и 3. Проверка справедливости пункта 1 аналогична (общий случай см. в [5]).

Рассмотрим крайние полиномы P_{N-2}, P_{N-1}. Положим $\mathscr{B}_N = -\mathscr{S}_N$. Для одномерного уравнения Фоккера—Планка ($n = 1$) матрица $\mathscr{B}_N$ диагональная, с диагональными коэффициентами $b_{jj} = j - 1$. В младшем полиноме $P_{N-1}(\tau,\xi)$ собраны члены детерминанта

$$\det\Big(\tau\, E - \sum_{j=1}^{d} \xi_j A^j + i\mathscr{B}_N\Big),$$

содержащие $(-i)^{N-1}$. Очевидно,

$$P_{N-1}(\tau,\xi) = \tau, \quad \gamma_{N-1} = \prod_{j=2}^{N} b_{jj} = (N-1)!.$$

Полином P_{N-2} отвечает членам детерминанта с $(-i)^{N-2}$. Нетрудно видеть, что

$$\gamma_{N-2}P_{N-2}(\tau,\xi)=\sum_{k=2}^{N}\prod_{j\neq k,1}b_{jj}\det\begin{pmatrix}\tau & \sum\limits_{j=1}^{3}\xi_j a_{1k}^j\\ \sum\limits_{j=1}^{3}\xi_j a_{k1}^j & \tau-\tau_k+\sum\limits_{j=1}^{3}\xi_j a_{kk}^j\end{pmatrix}=$$
$$=\prod_{j=2}^{N}b_{jj}\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{b_{kk}}\det\begin{pmatrix}\tau & \sum\limits_{j=1}^{3}\xi_j a_{1k}^j\\ \sum\limits_{j=1}^{3}\xi_j a_{k1}^j & \tau-\tau_k+\sum\limits_{j=1}^{3}\xi_j a_{kk}^j\end{pmatrix}.$$

Здесь a_{kl}^j — коэффициенты матриц A^j, $j=1,2,3$. Отсюда следует, что скобка Пуассона

$$\left[\gamma_{N-2}P_{N-2},P_{N-1}\right]=$$
$$\prod_{j=2}^{N}b_{jj}\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{b_{kk}}\left\{\tau\left(2\tau-\tau_k+\sum_{j=1}^{3}\xi_j a_{kk}^j\right)-\tau\left(\tau-\tau_k+\sum_{j=1}^{3}\xi_j a_{kk}^j\right)+\sum_{j=1}^{3}\xi_j a_{1k}^j\sum_{j=1}^{3}\xi_j a_{k1}^j\right\}=$$
$$=\prod_{j=2}^{N}b_{jj}\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{b_{kk}}\left(\tau^2+\sum_{j=1}^{3}\xi_j a_{1k}^j\sum_{j=1}^{3}\xi_j a_{k1}^j\right)=$$
$$=\sum_{k=2}^{N}\prod_{j\neq k,1}^{N}b_{jj}\tau^2+\prod_{j=2}^{N}b_{jj}\left\langle\widehat{\mathscr{B}}\left(\sum_{j=1}^{3}\xi_j A^j\right)e_1,\left(\sum_{j=1}^{3}\xi_j A^j\right)e_1\right\rangle>0\quad\forall(\tau,\xi)\neq 0,$$

коэффициенты диагональной матрица $\widehat{\mathscr{B}}$ размера $N\times N$

$$\widehat{b_{11}}=0,\quad \widehat{b_{jj}}=1/b_{jj},\quad j=2,\ldots,N.$$

Следовательно, полином P_{N-2} строго гиперболический и его корни строго разделяются корнем $\tau=0$ полинома P_{N-1},

$$\gamma_{N-2}=\sum_{k=2}^{N}\prod_{j\neq k,1}^{N}b_{jj}.$$

Пример 1. В двумерном случае $n=2$ для первых шести моментов методом Грэда аппроксимация решения кинетического уравнения Фоккера–Планка

$$\Big(\partial_t+c_k\partial_{x_k}\Big)f(t,x,c)=\partial_{c_k}\Big(c_k+\partial_{c_k}\Big)f(t,x,c)$$

по первым шести функциям Эрмита ищем в виде

$$f_2(x,t,c)=m_0(x,t)\Psi_0(c)+m_{10}(x,t)\Psi_{10}(c)+m_{01}(x,t)\Psi_{01}(c)+$$
$$+\frac{1}{2}m_{20}(x,t)\Psi_{20}(c)+m_{11}(x,t)\Psi_{11}(c)+\frac{1}{2}m_{02}(x,t)\Psi_{02}(c).\tag{5}$$

где $\Psi(c)_\alpha$ — функции Эрмита [3,8].

Получаем систему 6 уравнений с постоянными коэффициентами

$$\Big(E\partial_t+\partial_{x_1}A_1+\partial_{x_2}A_2+B\Big)M_6(x,t)=0,$$
$$M_6=(m_0,m_{10},m_{01},m_{20},m_{11},m_{02})^T\tag{6}$$

относительно первых шести моментов. Здесь E- единичная матрица,

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 := \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix}, \qquad E := \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

Решение типа плоской волны $M_6 = R_6 \exp(i(t\tau + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2))$, R_6 — постоянный собственный вектор, приводит к дисперсионному уравнению

$$\det\Big(E\tau + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 - iB\Big) = P_0 - \gamma_2 P_2 + \gamma_4 P_4 - i(\gamma_1 P_1 - \gamma_3 P_3 + \gamma_5 P_5),$$

$$\gamma_1 = 8, \quad \gamma_2 = 25, \quad \gamma_3 = 38, \quad \gamma_4 = 28, \quad \gamma_5 = 1,$$

$$P_0(\tau,\xi_1,\xi_2) = \tau^2\Big(\tau^4 - 4(\xi_1^2+\xi_2^2)\tau^2 + 3(\xi_2^2+\xi_1^2)^2\Big),$$

$$P_1(\tau,\xi_1,\xi_2) = \tau\Big(\tau^4 - \frac{11}{4}(\xi_1^2+\xi_2^2)\tau^2 + (\xi_2^2+\xi_1^2)^2\Big),$$

$$P_2(\tau,\xi_1,\xi_2) = \tau^4 - \frac{42}{25}(\xi_1^2+\xi_2^2)\tau^2 + \frac{4}{25}(\xi_1^2+\xi_2^2)^2,$$

$$P_3(\tau,\xi_1,\xi_2) = \tau\Big(\tau^2 - \frac{16}{19}(\xi_1^2+\xi_2^2)\Big), \quad P_4(\tau,\xi_1,\xi_2) = \tau^2 - \frac{2}{7}(\xi_1^2+\xi_2^2), \quad P_5 = \tau.$$

Получили нестрого гиперболический пучок из шести полиномов: полиномы P_j пучка — нестрого гиперболические и корни соседних нестрого разделяют друг друга:

$$[P_0,P_1](\tau,\xi) = \tau^2\Big(\tau^8 - \frac{29}{4}\tau^6(\xi_1^2+\xi_2^2) + \frac{39}{4}\tau^4(\xi_1^2+\xi_2^2)^2 - \frac{11}{4}\tau^2(\xi_1^2+\xi_2^2)^3 + 3(\xi_1^2+\xi_2^2)^4\Big),$$

$$\min_{\tau^2+|\xi|^2=1}\Big(\tau^8 - \frac{29}{4}\tau^6(\xi_1^2+\xi_2^2) + \frac{39}{4}\tau^4(\xi_1^2+\xi_2^2)^2 - \frac{11}{4}\tau^2(\xi_1^2+\xi_2^2)^3 + 3(\xi_1^2+\xi_2^2)^4\Big) = 0.63046179,$$

$$\min_{\tau^2+|\xi|^2=1}[P_0,P_1] = 3, \quad \min_{\tau^2+|\xi|^2=1}[P_1,P_2] = \frac{33}{20},$$

$$\min_{\tau^2+|\xi|^2=1}[P_2,P_3] = \frac{581}{475}, \quad \min_{\tau^2+|\xi|^2=1}[P_3,P_4] = \frac{163}{133}, \quad \min_{\tau^2+|\xi|^2=1}[P_4,P_5] = \frac{2}{7}$$

3. Алгоритм Рауса для параметрического пучка. Полиномиальный пучок

$$\mathscr{P}(\tau,\xi) - i\mathscr{Q}(\tau,\xi) = 0, \tag{7}$$

где

$$\mathscr{P}(\tau,\xi) = \sum_{\substack{j\geqslant 0\\ N\geqslant 2j}} (-1)^j \gamma_{2j} P_{2j}(\tau,\xi), \quad \mathscr{Q}(\tau,\xi) = \sum_{\substack{j\geqslant 0\\ N\geqslant 2j+1}} (-1)^j \gamma_{2j+1} P_{2j+1}(\tau,\xi),$$

однородных полиномов P_j порядка $m-j$ с вещественными коэффициентами будем называть *пучком Грэда* порядка (m,N), если:

1) полиномы P_{2j}, $j \geqslant 0$, и полиномы P_{2j+1}, $j \geqslant 0$, имеют одну четность, т.е.

$$P_{2j}(\tau,\xi) = \begin{cases} g_j(\tau^2,\xi), & (m-2j) \text{ четное}, \\ \tau f_j(\tau^2,\xi), & (m-2j) \text{ нечетное}, \end{cases}$$

$$P_{2j+1}(\tau,\xi) = \begin{cases} g_j(\tau^2,\xi), & (m-2j-1) \text{ четное}, \\ \tau f_j(\tau^2,\xi), & (m-2j-1) \text{ нечетное}; \end{cases}$$

2) для коэфициентов γ_j справедливо правило Рауса—Гурвица;
3) скобка Пуассона удовлетворяет неравенству

$$[P_0, \partial_\tau(P_0)](\tau,\xi) \geqslant 0 \quad \forall (\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{d+1};$$

4) скобки Пуассона соседних полиномов удовлетворяют неравенству

$$[P_j, P_{j+1}](\tau,\xi) \geqslant 0 \quad \forall (\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad j = 0,\dots,N-1,$$

т.е. полиномы P_j, $j = 0,\dots,N$, нестрого гиперболичны и корни соседних полиномов P_j, P_{j+1} нестрого разделяют друг друга.

Покажем, что свойства 1–4 пучка Грэда позволяют перенести классическую процедуру Рауса [3] на параметрические пучки (7).

Лемма 2. *Для любого однородного строго гиперболического полинома*

$$p(\tau,\xi) = \tau f(\tau^2,\xi)$$

порядка $m = 2j+1$ и любого однородного гиперболического полинома

$$q(\tau,\xi) = g(\tau^2,\xi)$$

порядка $2j$, корни которого нестрого разделяют корни $p(\tau,\xi)$:

$$[p,q](\tau,\xi) \geqslant 0, \quad (\tau,\xi) \neq 0,$$

в любой точке $\xi \in R^d$ полином p не кратен q, справедливо представление

$$p(\tau,\xi) = \mu_{p,q}\tau q(\tau,\xi) - \gamma_{p,q}(\xi) b_{p,q}(\tau,\xi), \tag{8}$$

где $\gamma_{p,q}(\xi)$ — положительная однородная функция порядка 2, постоянная $\mu_{p,q} = p_0/q_0$ равна отношению старших коэффициентов полиномов p и q, функция $b_{p,q}(\tau,\xi) \in \mathscr{O}P_G^{2j-1}$ со старшим коэффициентом по τ, равным единице.

Также для любого однородного строго гиперболического полинома

$$p(\tau,\xi) = f(\tau^2,\xi)$$

порядка $m = 2(j+1)$ и любого однородного гиперболического полинома

$$q(\tau,\xi) = \tau\, g(\tau^2,\xi)$$

порядка $2j+1$, корни которого нестрого разделяют корни $p(\tau,\xi)$, в любой точке $\xi \in \mathbb{R}^d$ полином p не кратен q, справедливо представление (8).

Теорема 1. *Пучок Грэда* (7)*, для которого*

$$[P_{N-1}, P_N](\tau,\xi) > 0 \quad \forall (\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad (\tau,\xi) \neq 0,$$

и для которого постоянные $\gamma_j > 0$ удовлетворяют неравествам

$$\gamma_j \leqslant\ c_j(\gamma_1, \cdots, \gamma_{j-1}),$$

с достаточно малыми c_j, являются устойчивым.

Основным этапом доказательства теоремы является следующая лемма.

Лемма 3. *Для любого пучка Грэда существует аналог алгоритма Рауса построения семейства положительных непрерывных функций $\varrho_j(\xi)$, $j = 1, \dots, m$, и полиномов*

$$\pi_j(\tau,\xi) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{[(m-j)/2]} a_{kj}(\xi)\tau^{2k}, & m-j \text{ четное}, \\ \tau \sum\limits_{k=0}^{[(m-j-1)/2]} a_{kj}(\xi)\tau^{2k}, & m-j \text{ нечетное}, \end{cases} \qquad j = 1, \dots, m,$$

с непрерывными коэффициеентами, таких что

$$[\mathscr{P}, \mathscr{Q}](\tau,\xi) = \sum_{j=1}^{m} \varrho_j(\xi)\pi_j^2(\tau,\xi).$$

Заключение. Таким образом, нам удалось выделить класс устойчивых полиномиальных пучков, названных нами пучками Грэда, которые воспроизводятся, как показали прямые вычисления в иерархии систем моментов Грэда для кинетических уравнений Больцмана и Фоккера—Планка.

Мы установили, что второе условие в определении пучка Грэда (справедливость условий Рауса—Гурвица для старших коэффициентов полиномов P_j пучка) является следствием диссипативности матрицы представлений оператора столкновений в базисе функций Эрмита.

Вторым следствием диссипативности матрицы представлений оператора столкновений в базисе функций Эрмита была установлена неотрицательность скобок Пуассона крайних пар соседних полиномов пучка дисперсионного уравнения.

Осталась проблема воспроизвдства причин неотрицательности скобок Пуассона всех пар соседних полиномов пучка на каждом шаге построения аппроксимации кинетического уравнения системой моментов Грэда, что мы отмечаем для всех просчитанных нами примеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волевич Л. Р., Радкевич Е. В.* Устойчивые пучки гиперболических полиномов и асимптотическая устойчивость задачи Коши для некоторых систем неравновесной термодинамики// Тр. Моск. мат. о-ва. — 2004. — *65*. — С. 69–113.
2. *Волевич Л. Р., Радкевич Е. В.* Равномерные оценки решений задачи Коши для гиперболических уравнений с малым параметром при старших производных// Дифференц. уравн. — 2003. — *39*, № 4. — С. 1–14.
3. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. — Новосибирск, 1994.
4. *Захарченко П. А., Радкевич Е. В.* О гиперболических пучках систем моментов Грэда неравновесной термодинамики// Тр. семин. И. Г. Петровского. — 2004. — *24*. — С. 67–94.
5. *Захарченко П. А., Радкевич Е. В.* О корректности аппроксимаций уравнения Фоккера—Планка системами моментов// Докл. РАН. — 2004. — *397*, № 6. — С. 762–766.
6. *Радкевич Е. В.* Корректность математических моделей механики сплошных сред и термодинамика// Совр. мат. Фундам. напр. — 2003 — *3*. — С. 5–33.
7. *Grad H.* On the kinetic theory of rarefied gases// Commun. Pure Math. — New York: Wiley, 1949. — *2*.
8. *Hermite Ch.* Oeuvres I. — Paris, 1905. — С. 397–414.
9. *Levermore C. D.* Moment closure hierarchies for kinetic theories// J. Stat. Phys. — 1996. — *83*. — С. 1021–1065.
10. *Muller, Ruggeri T.* Extended Thermodynamics. — Springer-Verlag, 1993.

Е. В. Радкевич
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: evrad@land.ru

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 39–43

МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРОДУКТОВ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

© 2005 г. **Н. Х. РОЗОВ**

Сегодня много говорится о компьютеризации учебных заведений, в частности — сельских школ, о ликвидации компьютерной неграмотности обучающих и обучающихся, о том, как готовить и повышать квалификацию учителей новой предметной области — информатики, как учить пользоваться все усложняющимся программных обеспечением, как работать в Интернете и т. д. Но, по нашему мнению, совершенно недостаточное внимание уделяется важнейшей, первоочередной проблеме — обучению преподавателей любого предметного профиля использованию современных компьютерных технологий в каждодневной работе с учениками, разработке методики применения информационных, телекоммуникационных, компьютерных и мультимедийных продуктов в учебном процессе.

Эта проблема является исключительно актуальной. Если мы уже сейчас не примем действенных, эффективных мер для обучения как уже работающих, так и будущих учителей-предметников реальному внедрению компьютерных технологий и образовательных продуктов в различные формы учебного процесса (в классную работу, во внеклассную работу, в дополнительную работу с учащимися и т. д.), то существует высокая вероятность того, что школьное преподавание будет по-прежнему осуществляться мелом на доске, рядом с которой лишь появится гора цветных пластмассовых коробочек с образовательными дисками.

1. Прежде всего, нельзя не учитывать скептического взгляда большой части наличного состава практических учителей (прежде всего старшего возраста) на компьютеризацию школьного образования.

Преподавательский корпус всегда являются консервативным по отношению к нововведениям (что скорее является плюсом), с этим нельзя не считаться. Уместно процитировать Эрнеста Ренана, который как-то сказал: «Из всех людей педагог труднее всего поддается обращению в новую веру и у него есть своя религия — его рутина и вера в излюбленных старых авторитетов. Это вполне удовлетворяет его и душит в нем все другие потребности». Можно соглашаться или не соглашаться с эмоциональной формулировкой Ренана, но суть остается.

Тем более, что для преподавательского консерватизма в отношении компьютеризации учебного процесса существуют веские, объективные причины. Достаточно сказать о житейской разобщенности современного российского учителя (особенно в сельской местности и вообще вне крупных научно-образовательных центров) и персонального компьютера — по материальным причинам весьма значительное число учителей не может ни иметь компьютер дома, ни тем более свободно пользоваться Интернетом. Все эти причины не способствуют спонтанному развитию «взаимопонимания» учителя и компьютера, отрицательно сказываются на реализации информатизации учебного процесса. К сожалению, надеяться на самообразование преподавателей в этом вопросе нет перспектив.

2. Сейчас настало время активно разрабатывать общие методические принципы и конкретные методические приемы использования компьютерных технологий и продуктов в учебном процессе. Эти общие принципы и конкретные приемы должны стать обязательной компонентой частной методики всех школьных предметов.

На наш взгляд, в педагогических университетах следует незамедлительно разработать и ввести для студентов каждого факультета годовые курсы лекций (с необходимым объемом практических занятий), которые были бы посвящены именно использованию компьютеров, компьютерных

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

и мультимедийных продуктов в данном предметном преподавании, т.е. методике компьютеризации обучения конкретному предмету. Начинать надо не с технической компьютеризации школ, многие их которых располагают малоподготовленным преподавательским персоналом, а с полноценного обучения тех людей, которые завтра придут в школу. Нельзя повторить старый отрицательный опыт реформы математического образования, когда вместо переориентации студентов педагогических институтов первоочередной задачей было избрано написание новых учебников для основной школы.

Курс, о котором идет речь, не должен быть посвящен углубленному изучению учителями особенностей высшего пилотажа «техники вождения компьютера». Он не ориентируется и на изучение различных конкретных языков программирования — лозунг «Программирование — вторая грамотность» благополучно канул в вечность, сегодня о нем уже никто не вспоминает. Этот курс создается для того, чтобы будущие преподаватели-предметники постигли технологии самостоятельного (а совсем не параллельно рука об руку с преподавателем информатики) применения в своей предстоящей повседневной работе нового учебного инструмента, новой формы ведения урока, новых типов представления учебных материалов, научились эффективно и творчески использовать те обучающие продукты, которые им представляют разработчики.

Необходимо точно и разумно определить тот минимум технического, технологического и методического обучения массового учителя-предметника, который должен быть ему дан в части «вождения компьютера». Иногда проскальзывает точка зрения, что учителя химии, истории и др. должны в совершенстве овладеть тонкостями работы на компьютере. Это не выглядит реалистично. Ведь несерьезно было бы ставить вопрос так: пусть учитель информатики овладеет химией, историей и проч., станет «на равных» с учителями-предметниками. Учитель и так достаточно перегружен, у него катастрофически мало времени и возможностей для того, чтобы повышать свой психолого-педагогический и предметно-профессиональный уровень, а тем более — чтобы осваивать нечто, выходящее за рамки своего предмета. Поэтому «грузить» учителей требованием овладеть избыточной информацией по посторонним к их прямой деятельности вопросам не следует — во всяком случае, люди этого делать не будут.

3. Исключительно серьезный вопрос — определить этапы интервенции компьютера в учебный процесс. Он также вызывает разночтения и разные понимания. Одни считают, что к компьютеру надо приучать детей с самого молодого возраста, другие уверены, что с компьютером спешить не надо. Вопрос не такой простой, как могло бы показаться.

Известен старый анекдот. Учительница спрашивает первоклассника: «Петя, у тебя есть два калькулятора, Миша дал тебе еще три. Сколько калькуляторов у тебя стало?» На что Петя отвечает: «Не знаю, мой калькулятор сломался». В качестве предостережения против поспешных рекомендаций о глобальном и раннем использовании компьютеров можно сослаться на информацию, которую наш известнейший математик академик В. И. Арнольд привел в одной из своих статей. Проведенный Американским математическим обществом опрос показал, что число учителей (подчеркнем: учителей, а не учеников) математики средних школ США, умеющих делить число «полтора» на число «четверть», составило примерно два процента от общего количества опрошенных. А уж по компьютеризации нам с Америкой тягаться довольно трудно.

Четкие, методически продуманные этапы интервенции компьютера в учебный процесс должны быть ясно осмыслены, обоснованы педагогическими, психологическими, медицинскими и другими соображениями. Например, на определенном этапе компьютер должен брать на себя роль калькулятора и даже исполнителя аналитических преобразований — это не оспаривается и является неизбежным. Однако передача формально-аналитических действий машине разумна только в том случае, когда человек уже твердо понимает те действия, которые выполняет машина. В недавнем прошлом всех инженеров обучали работе на логарифмической линейке, она была основным орудием грамотного, творческого инженера. Но это нисколько не свидетельствовало о низком уровне его «арифметических познаний».

4. Представляется актуальным и еще один аспект проблемы. Сейчас появляется огромное количество более или менее удачных компьютерных и мультимедийных продуктов. Но практически всегда отсутствуют методические материалы по их использованию.

Пользователь вместе с продуктом получает обычно лишь рекламный листок, в котором ярко расписаны достоинства этого продукта; в лучшем случае он получает еще и инструкцию, как продукт инсталлировать. Между тем, разработчикам, которые берутся за действительно важную и трудную работу по созданию образовательных продуктов, следует воспринять аксиому, сложившуюся при создании хороших школьных учебников: параллельно с такими учебниками всегда издавались специальные методические пособия для учителя, сборники дидактических материалов и т. д.

Почему считается нормой, что «массовый» учитель-предметник может взять диск, установить его на компьютер и дальше использовать по своему усмотрению? Не будем забывать: прежде чем продукт использовать, учитель должен располагать большим свободным временем для того, чтобы все осмыслить, увязать, понять — а ведь он не является «компьютерным профессионалом». Поэтому можно утверждать, что компьютерный учебный продукт, не сопровождаемый методической разработкой — это неполноценный компьютерный продукт.

5. Перейдем формированию комплекса принципов, которым целесообразно было бы следовать при разработке образовательного компьютерного продукта для школы.

Прежде всего, необходимо, чтобы такие продукты были не целостными, а блочными, или модульными. Учитель, сколько-нибудь творчески относящийся к своему делу, не просто «урокодатель», он не ведет свои занятия в точности абзац за абзацем по одному учебнику, всегда вставляет собственные разработки, использует материалы из многих книг. Поэтому не стоит рассчитывать, что учитель станет в своей деятельности послушно следовать целостному компьютерному продукту. В лучшем случае могут быть использованы лишь какие-то отдельные фрагменты, которые данному учителю в этом продукте понравились, отвечают его духу, его стилю, его пониманию. Но ведь извлечь понравившийся кусок из продукта — подчас совершенно нетривиальная проблема. И хорошо было бы разработчикам предусматривать легкую реализацию пользователем такой возможности.

Одновременно с разработкой больших, «глобальных» продуктов весьма перспективно создавать и такие, которые можно назвать «набором миниатюр». Поясним эту мысль, рассмотрев для примера геометрическую задачу. Даны два одинаковых деревянных куба. Как в первом из них просверлить сквозную дыру так, чтобы второй через нее прошел насквозь? (Естественно, что после сверления дыры от первого куба должно остаться некое физически связанное целое тело.) Ее формальное решение хорошо известно, но многие ли из его знающих могут ясно представить себе то тело, которое останется от первого куба после просверливания дыры? Как-то это тело склеить из картона или слепить из пластилина — весьма нетривиальная вещь. Компьютер же позволяет такого типа задачи сделать наглядно обозримыми, эффективно помогая развитию геометрического воображения.

Подобные «миниатюры» дали бы возможность школьному курсу математики отойти от бесконечных надоевших окружностей и тетраэдров, от бесчисленных формальных задач. Школьник должен увидеть геликоид, удивиться обезьяньему седлу, восхититься другими замечательными поверхностями, которые действительно существуют и которые ему совершенно недоступны. Конечно, есть книги, в которых некоторые из этих поверхностей (и кривых) нарисованы, но рисунок не позволяет их «повертеть» и созерцать «со всех сторон». Компьютер в этом плане открывает совершенно неограниченные возможности познать красоту и разнообразие геометрии мира. Между тем, существует множество компьютерных «репетиторских» курсов по математике — и не известен ни один, который давал бы возможность украсить преподавание школьного курса.

Следующий момент — «прибамбасность» обучающих компьютерных продуктов. К сожалению, многие разработчики увлекаются тем, что пытаются задействовать как можно больше возможностей современного программного обеспечения. Это — малоперспективный подход. Надо уважать труд и ценить время учителя-предметника и понять: чем меньше времени требуется затратить на предварительное изучение правил работы с продуктом, тем легче учителю освоить и эффективно внедрить этот продукт в учебный процесс. Если исходить из того, что учитель-предметник должен в совершенстве, как продвинутый пользователь, освоить Windows-2000, заодно и TEX, а кстати и C++, то не очень понятно, сколько времени останется учителю на углубленное изучение своего

собственного предмета, на совершенствование своего педагогического мастерства. Высший профессионализм разработчика как раз в том и должен заключаться, чтобы созданная им программа автоматически выполняла максимум нужных манипуляций с материалом при минимуме простых команд пользователя.

6. Еще одна важная проблема, которой частично занимаются энтузиасты, но хаотично и несистематично: планомерное, целенаправленное создание виртуальных компьютерных лабораторных работ, в первую очередь для сельских школ.

Пусть физики (или химики) не спешат возмущаться, считая, что настоящее изучение их предмета невозможно, если настоящую работу руками с реальными объектами заменить паллиативом. Нельзя не помнить, что в сельской школе на самом деле далеко не всегда на всех учеников хватает обычных учебников (не будем говорить о библиотеке или методических книгах для учителя), там практически нет предметных кабинетов даже с примитивной лабораторной базой. Там отсутствуют не только компьютеры — подчас нет и телефона. Поэтому когда говорят о реализации программы «оснастить компьютером» сельскую школу (кто-то подсчитал, что в среднем на одну сельскую школу будет приходиться даже полтора компьютера), то хочется узнать, что дальше будет с этим компьютером, что конкретно школьники из него извлекут. Если он не будет сопровожден хорошими лабораторными работами по физике, химии, биологии, качественными продуктами по географии, истории и т. д., то этот компьютер в лучшем случае превратит школу в развлекательный Интернет-клуб (если, конечно, есть телефон).

7. Очень существенной при создании обучающих продуктов является задача всестороне и точно учесть психологические особенности учеников.

Дело в том, что молодежь к компьютерам относится очень благожелательно. Она их любит, она им доверяет, она их даже обожествляет, одухотворяет, если хотите. Хорошо бы разумно использовать это отношение школьников к компьютерам — планируя учебный процесс так, чтобы определенная часть занятий, и прежде всего определенная часть домашних занятий, была ориентирована на работу с компьютером (по крайней мере для тех, кто может себе это позволить). Во всяком случае это представляется гораздо более перспективным, чем технология использования убогих рабочих тетрадей. Привлечение компьютера к выполнению домашних заданий (обучающие продукты, тренинг-программы, поиск нужной и полезной информации в Интернете и т. д.) исподволь будет содействовать повышению активности в самой учебе — ведь не секрет, что наблюдаемый у «массового школьника» интерес к компьютерам намного превышает его интерес к обучению в школе.

Другой серьезной психолого-педагогической проблемой является использование компьютеров для проверки и самопроверки знаний. Ученики обладают разным психологическим статусом и многие из них болезненно относятся к замечаниям, очень боятся потерпеть фиаско на глазах у класса. В диалоге с компьютером ничего подобного не происходит: компьютер не считает, сколько было неудачных попыток решения задачи, не делает никаких замечаний, не читает нотаций. Более того, если программа сделана разумным образом, он еще и подскажет, что и как надо сделать, и даже объяснит, в чем ты ошибся. Некоторые программы такого характера уже есть, но в этом направлении надо плодотворно продолжать работать.

8. В заключение хотелось бы упомянуть одну организационную проблему, связанную с компьютеризацией образовательного процесса. Необходимо решать вопрос о введении должности заместителя директора школы по информатизации. В его обязанности входили бы поиск необходимых электронных обучающих продуктов, помощь в разработке методик их использования, объединение в компьютерном классе на одном уроке и предметника, и преподавателя информатики и многое другое. Есть и иные проблемы, которые нужно четко сформулировать и попытаться их решить на административно-правовом уровне.

Не все безусловно согласятся со всем сказанным. Не по каждому из затронутых (и тем более — из незатронутых) вопросов имеются конкретные практические предложения. Но пора начинать широкий разговор о создании методики использования компьютерных технологий и обучающих компьютерных продуктов в учебном процессе, а не просто обсуждать достоинства и недостатки

каждого конкретного продукта. Наконец, настало время совершенно четко определить программу и порядок сертификации компьютерных образовательных продуктов с точки зрения возможности их применения именно в реальном учебном процессе, их предметного и научного содержания, их методического качества и наличия сопровождающей методической поддержки, которая давала бы возможность учителям-предметникам их эффективно использовать.

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 44–47

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О БИСИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

© 2005 г. **Н. Х. РОЗОВ**

Исследования сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений к настоящему времени составили полнокровную самостоятельную область математики, представляющую большой теоретический интерес, ставящую серьезные вычислительные проблемы и имеющую важные практические приложения. Речь идет об изучении широкого круга проблем, касающихся свойств решений дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных) с малым параметром при старшей производной. Сущность понятия сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений, зависящей от малого параметра, можно попытаться сформулировать так: «при стремлении параметра к нулю разрешающий оператор Коши для основного массива значений времени и начальных условий из ограниченных множеств (или оператор последования Пуанкаре) сходится в подходящей топологии к предельному объекту, действующему в пространстве меньшей размерности» (см. [6]). Это весьма общее и потому не очень четкое описание представления о сингулярно возмущенных системах в каждом отдельном случае наполняется вполне конкретным и точным содержанием.

С момента зарождения теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений прошло всего шесть с половиной десятков лет. По-видимому, впервые вопрос о связи решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения с малым множителем при производной наивысшего порядка с решениями «вырожденного» дифференциального уравнения (получающегося из исходного, если в нем формально заменить параметр нулем) был поставлен Ченом [12] в 1935 г., а пионерская статья, рассматривающая тот же вопрос в нелинейном случае, опубликована Нагумо [11] в 1939 г. Однако в самостоятельную математическую теорию изучение сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений превратилось после классических работ А. Н. Тихонова [8–10].

Сегодня сингулярно возмущенным обыкновенным дифференциальным уравнениям и сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям в частных производных посвящены тысячи журнальных публикаций и сотни монографий. Свой вклад в развитие этой теории внесли многие крупнейшие советские математики: Д. В. Аносов, Н. С. Бахвалов, А. Б. Васильева, М. И. Вишик, А. А. Дородницын, А. М. Ильин, С. А. Ломов, Л. А. Люстерник, Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, О. А. Олейник и др.

В последнее время пристальный интерес стали привлекать к себе задачи, особенностью которых является то обстоятельство, что «вырожденная» задача, соответствующая исходно рассматриваемой сингулярной задаче, сама обладает той или иной «сингулярностью». Этот класс задач, следуя [4], естественно называть «бисингулярными».

В настоящей работе мы не ставим своей целью дать какой-либо обзор всего многообразия современных работ по бисингулярным задачам, Речь пойдет лишь о некоторых соображениях и подходах к теории бисингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Линейные бисингулярные задачи. Рассмотрим вопрос о построении асмптотического решения краевой задачи для сингулярно возмущенного линейного уравнения второго порядка

$$\varepsilon x'' + p(t)x' + h(t,x) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \ t \in \operatorname{int} I. \tag{1}$$

Как известно, процесс построения асимптотического решения начинается с определения на рассматриваемом отрезке $I = [-1,1]$ нулевого приближения с помощью вырожденного уравнения

$$p(t)x' + h(t,x) = 0. \tag{2}$$

Если $p(t) \neq 0$ на I, то при выполнении известных классических предположений уравнение (2) имеет решения, продолжимые на весь отрезок I. В этом случае к уравнению (1) применима теория так называемого «регулярного вырождения» (см. [1,2]).

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

Принципиально иная ситуация возникает в случае, когда исходное уравнение (1) является бисингулярным, т.е. когда вырожденное уравнение (2) само имеет особенности, или сингулярности. Типичные «сингулярности» заключаются, например, в следующем: функция $p(t)$ обращается в нуль в некоторых точках отрезка I; функции $p(t)$ и $h(t,x)$ в некоторых точках отрезка I испытывают разрывы и т. д. Тогда задача определения нулевого приближения и, следовательно, построения асимптотического решения бисингулярной краевой задачи (1) существенно усложняется. В частности, она требует подробного исследования свойств решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями коэффициентов.

Мы приведем здесь один простой результат, относящийся к этому кругу вопросов. Отметим, что некоторые достаточно общие рассмотрения линейных дифференциальных уравнений с особенностями проведены в [3].

Теорема 1. *Допустим, что* $p(t) \in C^1(I)$, $h(t,x) \in C^1(I \times \mathbb{R})$,

$$p(0) = 0, \quad p(t) \neq 0 \ \text{ на } \ I \setminus \{0\}, \tag{3}$$

уравнение $h(0,x) = 0$ *имеет единственный корень* $x = a$, *причем*

$$h'_x(0,a) > 0. \tag{4}$$

Тогда для уравнения (2) *возможны следующие конфигурации решений*:

1) *«Правый веник с ручкой» — если*

$$p(t) < 0 \text{ на } I_- = [-1,0) \text{ и на } I_+ = (0,1].$$

В этом случае у уравнения (2) *существует континуум решений, определенных на* I, *причем:*

(i) *на* I_- *все эти решения совпадают между собой, так что имеется единственная интегральная кривая на* I_-, *выходящая из некоторой однозначно определяемой точки* $(-1, x_0)$ *и приходящая в фиксированную точку* $(0,a)$;

(ii) *на* I_+ *все эти решения различны между собой, так что имеется пучок непересекающихся интегральных кривых на* I_+, *выходящих из фиксированной точки, и эту точку с произвольной точкой* $(1,\xi)$ *соединяет единственная интегральная кривая*;

(iii) *любое из этих решений имеет при* $t = 0$ *производную* $-h'_t(0,a)/h'_x(0,a)$.

2) *«Левый веник с ручкой» — если*

$$p(t) > 0 \text{ на } I_- \text{ и на } I_+.$$

В этом случае у уравнения (2) *существует континуум решений, определенных на* I, *причем их описание идентично приведенному в п.* 1) *с заменой* I_- *на* I_+ *и* ∓ 1 *на* ± 1.

3) *«Веники без ручек» — если*

$$p(t) > 0 \text{ на } I_- \text{ и } p(t) < 0 \text{ на } I_+.$$

В этом случае у уравнения (2) *существует континуум решений, определенных на* I, *причем и на* I_-, *и на* I_+ *имеются пучки интегральных кривых, описанных в п.* 1).

4) *«Ручки без веников» — если*

$$p(t) < 0 \text{ на } I_- \text{ и } p(t) > 0 \text{ на } I_+.$$

В этом случае у уравнения (2) *существует единственное решение, определенное на* I *и проходящее через однозначно определяемые точки* $(-1, x_-)$ *и* $(1, x_+)$ *и фиксированную точку* $(0,a)$, *причем при* $t = a$ *это решение имеет производную* $-h'_t(0,a)/[p'(0) + h'_x(0,a)]$.

5) *Если*

$$p(t) > 0 \text{ на } I_- \text{ и } p(t) < 0 \text{ на } I_+ \text{ и, кроме того, } p'(0) + h'_x(0,a) < 0,$$

то уравнение (2) *не имеет решений, определенных на* I.

Теорема 2. *Допустим, что* $p(t) \in C^m(I)$, $h(t,x) \in C^m(I \times \mathbb{R})$ *и выполнены условия* (3), (4). *Тогда все описанные в теореме* 1 *решения уравнения* (2), *определенные на отрезке* I, *принадлежат пространству* $C^\nu(I)$, *где* $\nu = \min(m,k)$,

$$k = \sup\{n \in \mathbb{N} : np'(0) + h'_x(0,a) > 0\}.$$

Используя описание решений уравнения (2) с особенностями коэффициентов, для решения исходной краевой задачи, состоящей из бисингулярного уравнения (1) (в предположениях теоремы 2) и граничных условий при $t = -1$ и $t = 1$, можно строить асимптотическое представление, содержащее $[\nu/2]$ членов.

Ситуация существенно усложняется, когда коэффициенты вырожденного уравнения допускают еще и разрывы. Так, если в уравнении (2) функция $p(t)$ имеет на I только один нуль и только одну точку разрыва первого рода (отличную от своего нуля), то возникает 16 различных случаев (см. [7]).

2. Нелинейные бисингулярные задачи. Рассмотрим вопрос о построении асмптотического решения краевой задачи для сингулярно возмущенного нелинейного уравнения второго порядка

$$\varepsilon^2 y'' = f(x,y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{5}$$

$$y(0) = A_0, \quad y(1) = A_1, \tag{6}$$

в предположении, что нелинейная правая часть — разрывная функция:

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & \text{если } y < 0, \\ h(x,y), & \text{если } y \geqslant 0. \end{cases}$$

Допустим, что

$$g(x,y) \in C^\infty\big([0,1] \times (-\infty, 0]\big), \quad h(x,y) \in C^\infty\big([0,1] \times [0,\infty)\big)$$

и будем считать, что $A_0 < 0$, $A_1 > 0$.

Решением задачи (5), (6) будем называть любую функцию $y = y(x,\varepsilon)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, которая при всех $x \in [0,1]$ обладает абсолютно непрерывной первой производной, удовлетворяет уравнению (5) при $y \neq 0$ и подчинена краевым условиям (6).

Эта краевая задача также является бисингулярной: вырожденное уравнение имеет особенность, возникающую из-за разрывности функции в ее правой части. Задачи подобного типа возникают, например, при описании свободного падения тела с высоты в несколько десятков километров (см. [5]).

Теорема 3. *Пусть для задачи* (5), (6) *существуют нижняя* $\alpha(x,\varepsilon)$ *и верхняя* $\beta(x,\varepsilon)$ *барьерные функции. Тогда эта краевая задача имеет решение, удовлетворяющее неравенству*

$$\alpha(x,\varepsilon) \leqslant y(x,\varepsilon) \leqslant \beta(x,\varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Теорема 4. *Предположим, что выполнены следующие условия*:

1) *уравнения* $g(x,y) = 0$ *и* $h(x,y) = 0$ *определяют соответственно функции* $y = \varphi_i(x)$, $x \in [0,1]$, $i = 0,1$, *такие, что*

$$\varphi_0(x) < 0, \quad g(x,\varphi_0(x)) = 0, \quad \varphi_1(x) > 0, \quad h(x,\varphi_1(x)) = 0, \quad x \in [0,1];$$

2) *выполнены неравенства*

$$g'_y(x,\varphi_0(x)) \geqslant p > 0, \quad h'_y(x,\varphi_1(x)) \geqslant p > 0, \quad x \in [0,1];$$

3) *функция*

$$\psi(x) = \int\limits_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,\omega)\,d\omega$$

имеет единственный нуль $x = x_0 \in (0,1)$;

4) *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\varphi_i(x_0)}^{s} f(x_0,\omega)\,d\omega > 0, \quad 0 \leqslant |s| < |\varphi_i(x_0)|, \ i = 0,1;$$

5) *выполнено неравенство*

$$\varphi'_0(x_0)g(x_0,0) - \varphi'_1(x_0)h(x_0,0) + \psi'(x_0) \neq 0.$$

Тогда существует решение $y = Y(x,\varepsilon)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, *краевой задачи* (5), (6), *имеющее внутренний переходный слой в окрестности точки* $x = x_0$.

Замечания 1. Если функция $\psi(x)$ имеет n нулей на интервале $(0,1)$ и для каждого из них выполняются условия 4) и 5), то у краевой задачи (5), (6) существует 2^{n-1} решений с внутренними переходными слоями.

2. Если функция $\psi(x)$ не имеет нулей на интервале $(0,1)$, то у краевой задачи (5), (6) существует решение с краевым слоем — в окрестности точки $x = 1$, если $\psi(x) > 0$, или в окрестности точки $x = 0$, если $\psi(x) < 0$.

3. Если $\psi(x) = 0$ при всех $x \in [0,1]$, то у краевой задачи (5), (6) может существовать бесконечно много решений с внутренними переходными слоями.

Теорема 5. *Допустим, что выполнены условия* 1)–5) *теоремы* 4. *Кроме того, пусть точки* A_0 *и* A_1 *находятся соответственно в области влияния точки покоя присоединенного уравнения*

$$s'' = f(x_0, \varphi_i(x_0) + s), \quad i = 0, 1.$$

Тогда для решения краевой задачи (5), (6), *существующего согласно теореме* 4, *может быть эффективно построено асимптотическое при* $\varepsilon \to 0$ *представление вида*

$$y_k(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \left[y_i(x) + u_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + v_i\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) + w_i\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)\right],$$

причем справедлива оценка

$$\big|Y(x,\varepsilon) - y_k(x,\varepsilon)\big| + \varepsilon\big|Y'(x,\varepsilon) - y_k'(x,\varepsilon)\big| \leqslant M\varepsilon^{k+1}, \quad x \in [0,1].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
2. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметро// Усп. мат. наук. — 1957. — *12*, № 5. — С. 3–75.
3. *Глушко В. П.* Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. — Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1972.
4. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.
5. *Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
6. *Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Периодические жвижения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. — М.: Физматлит, 1995.
7. *Розов Н. Х., Сушко В. Г.* Метод барьерных функций и асимптотические решения сингулярно возмущенных краевых задач// Докл. РАН. — 1993. — *332*, № 3. — С. 294–296.
8. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра// Мат. сб. — 1948. — *22*, № 2. — С. 193–204.
9. *Тихонов А. Н.* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры// Мат. сб. — 1950. — *27*, № 1. — С. 147–156.
10. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержашие малые параметры при производных// Мат. сб. — 1952. — *31*, № 3. — С. 575–586.
11. *Nagumo M.* Über das Verhalten des Integrals von $\lambda y'' + f(x,y,y',\lambda) = 0$ für $\lambda \to 0$// Proc. Phys. Math. Soc. Japan, Ser. 3. — 1939. — *21*. — С. 529–534.
12. *Tschen Yu-Whu.* Über das Verhalten der Losungen einer Folge von Differentialgleichungsproblem, welche im Limes ausarten// Comp. Math. — 1935. — *2*, № 3. — С. 378–401.

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 48–64

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ. I

© 2005 г. **А. Г. РУТКАС**

Аннотация. Приводится обзор результатов по вырожденным дифференциально-операторным уравнениям, полученным преимущественно харьковскими и донецкими авторами, начиная с 1970-х годов. Рассматриваются приложения к эволюционным задачам электродинамики и математической теории цепей, включая построение математических моделей соответствующих физических систем.

1. Введение

1.1. Разрешимость векторных линейных дифференциальных уравнений

$$A\frac{du}{dt} + Bu(t) = f(t) \tag{1.1}$$

с вырожденными, вообще говоря, матрицами или линейными операторами в конечномерных пространствах была исследована К. Вейерштрассом в случае регулярного пучка $\lambda A+B$ ($\det(\lambda A+B) \not\equiv 0$) и Л. Кронекером в случае сингулярного пучка ($\det(\lambda A + B) \equiv 0$ или A, B — прямоугольные матрицы). Уже в регулярном случае, несмотря на сохранение свойства единственности решения задачи Коши, проявляется принципиальное отличие в теореме существования по сравнению с уравнением

$$\frac{du}{dt} = Tu(t) + f(t), \tag{1.2}$$

разрешенным относительно производной. Например, для уравнения (1.1) в пространстве $\mathbb{C}^n$ с единичной матрицей B и нильпотентной клеткой Жордана A ранга $n-1$ задача Коши либо не имеет решения ни при каком начальном векторе, либо имеет решение только для одного начального вектора при специальном условии на функцию $f(t)$. Таким образом, размерность начального многообразия и размерность аннулятора оператора A могут принимать любое значение от 1 до n независимо друг от друга, и лишь для обратимого оператора A сумма этих размерностей заведомо равна n.

В 1954 г. С. Л. Соболев рассмотрел уравнение вида (1.1) с конкретными операторами A, B в частных производных [33]. В настоящее время уравнения вида (1.1) в B-пространствах называются либо *абстрактными уравнениями Соболева*, либо *вырожденными* (иногда — *неявными*) дифференциально-операторными уравнениями. Ниже предполагается, что A, B — линейные замкнутые операторы с областями определения D_A, D_B в банаховом пространстве X и со значениями в банаховом пространстве Y. Область определения операторного пучка $L(\lambda) = \lambda A + B$ обозначается через D ($D = D_A \cap D_B$). Точка $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется *регулярной* для пучка, если оператор $L(\lambda_0) : D \to Y$ имеет ограниченный обратный $L^{-1}(\lambda_0) = R(\lambda_0) \in \mathscr{L}(Y, X)$. *Конечным спектром* $\sigma = \sigma(A, B)$ пучка называется дополнение $\sigma = \mathbb{C} \setminus \varrho$ до множества $\varrho = \varrho(A, B)$ всех (конечных) регулярных точек. Точка $\lambda = \infty$ считается регулярной точкой пучка $L(\lambda)$, если во внешности некоторого круга $|\lambda| > r$ все точки регулярны и резольвента имеет оценку $\|R(\lambda)\| \leqslant \dfrac{K}{|\lambda|}$, $|\lambda| > r$. В противном случае точка $\lambda = \infty$ считается спектральной для пучка и *полный спектр* $\tilde{\sigma}$ равен $\tilde{\sigma} = \sigma \cup \{\infty\}$. Через $\sigma_p = \sigma_p(A, B)$ обозначается множество собственных чисел пучка.

Естественно, в бесконечномерных пространствах ситуация с разрешимостью неявного уравнения (1.1) оказывается более сложной сравнительно с явным уравнением (1.2), с общей теорией которого можно ознакомиться в [13, 15]. Однако при сравнении уравнений (1.1) и (1.2) можно высказать и некоторые обнадеживающие замечания.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

Во-первых, более широкий класс уравнений (1.1) замкнут относительно линейной замены $u(t) = Sy(t)$, а также относительно умножения уравнения (1.1) слева на невырожденный оператор (в отличие от подкласса уравнений вида (1.2)). Если $\lambda_0 \in \varrho(A, B)$, то замена $u(t) = R(\lambda_0)y(t)$ преобразует (1.1) в уравнение

$$A_0 \frac{dy}{dt} + B_0 y(t) = f(t), \quad A_0 = AR(\lambda_0), \quad B_0 = BR(\lambda_0) \tag{1.3}$$

с ограниченными операторами $A_0, B_0 \in \mathscr{L}(Y, Y)$. Поэтому существование, единственность, построение решений и некоторые другие вопросы для уравнений вида (1.1) сводятся к аналогичным вопросам для уравнения того же класса с ограниченными операторами. В связи с этим в [21] рассмотрен подкласс уравнений (1.1) с ограниченными операторами A, B. В [36–38] и затем в более поздних работах [39–41, 43], посвященных вырожденным уравнениям с нелинейностью

$$A \frac{du}{dt} + Bu(t) = f(t, u), \tag{1.4}$$

используется следующий прием редукции к уравнению с ограниченными операторами. После замены $u(t) = e^{\lambda_0 t} R(\lambda_0) v(t)$ уравнение (1.4) с замкнутыми операторами A, B, и в частности, линейное уравнение (1.1), переходит в уравнение

$$T \frac{dv}{dt} + v(t) = \varphi(t, v) \tag{1.5}$$

с одним ограниченным оператором $T \in \mathscr{L}(Y, Y)$. Здесь

$$T = AR(\lambda_0), \quad \varphi(t, v) = e^{-\lambda_0 t} f(t, e^{\lambda_0 t} R(\lambda_0) v), \quad \lambda_0 \in \varrho(A, B), \quad R(\lambda_0) = (\lambda_0 A + B)^{-1}.$$

Во-вторых, линейное уравнение (1.1) можно исследовать методами классического и локального (асимптотического) преобразований Лапласа с тем же успехом, что и уравнение (1.2) [6, 8, 17, 21, 26, 34–36].

Будем говорить, что задача Коши для уравнения

$$A \frac{du}{dt} + Bu(t) = 0 \tag{1.6}$$

детерминирована, если каждое решение $u(t)$ однозначно определяется своим начальным значением $u(0)$.

Наше третье замечание состоит в следующем: в случае детерминированности существует подпространство $X_0 (\subset X)$, содержащее значения всех решений уравнения (1.6), на котором операторы A, B плотно определены, оператор $A\big|_{X_0}$ *не вырождается* и неявное вырожденное уравнение (1.6) эквивалентно явному уравнению

$$\frac{du}{dt} = Tu(t) \tag{1.7}$$

в подпространстве X_0. Этот факт доказан в [21] для корректной задачи, но его легко установить для любой детерминированной задачи. В работах [6, 8, 17, 21, 26] X_0 называется *подпространством решений*. Оно является замыканием (в норме X) *начального многообразия* $D_0 = D_0(A, B)$ задачи Коши для уравнения (1.6), т.е. линеала $\{u(0)\}$ начальных значений всевозможных решений $u(t)$ уравнения (1.6). Действительно, каждая точка $u(t_0)$, $t_0 > 0$ на траектории $u(t)$ является начальной для решения $u_1(t) = u(t+t_0)$. По другой терминологии D_0 есть множество *допустимых начальных векторов* задачи Коши для уравнения (1.6).

Эволюционный оператор $V_t : u(0) \to u(t)$, $t \geqslant 0$, с областью определения D_0 действует в X_0 и в случае корректной задачи допускает замыкание $\overline{V_t}$ до сильно непрерывной полугруппы операторов в X_0, перестановочных с $R_\lambda A$ на плотном в X_0 линеале [21, 26]. Различные признаки унитарности и сжимаемости операторов $\overline{V_t}$, т.е. признаки консервативности и диссипативности неявной динамической системы (1.6), получены в [17, 21, 26, 27] в терминах исходных операторов A, B. К сожалению, использование $\overline{V_t}$ для построения решений неоднородного уравнения (1.1) по

формуле Коши

$$u(t) = \overline{V_t} u_0 + \int_0^t \overline{V}_{t-s} f(s) ds \tag{1.8}$$

возможно только в том случае, когда значения правой части $f(t)$ располагаются в подпространстве решений X_0 однородного уравнения, что в реальных физических задачах обычно не имеет места [21,22,30–32]. Заметим, что спустя 20 лет и более после исследования семейства операторов $\overline{V_t}$ в [17,21] некоторые авторы рассматривают для специального подкласса уравнений (1.6) «вырожденные полугруппы», которые представляют собой расширение оператора $\overline{V_t}$ с подпространства X_0 на все пространство X за счет нулевых значений на прямом дополнении к X_0. Такое расширение полугруппы не изменяет класса функций $f(t)$, допускающих использование формулы (1.8), и не содержит дополнительной информации сравнительно с V_t. Точно так же не дает видимых преимуществ новое название «фазовое пространство» для X_0 вместо прежнего «подпространство решений».

1.2. Вторая часть Введения содержит краткую информацию о некоторых вопросах, которые не обсуждаются в последующих разделах текста и не затрагиваются в работах других авторов вплоть до настоящего времени. Многие результаты автора и его коллег для уравнения (1.1) и вырожденного абстрактного уравнения второго порядка

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + Bu(t) = 0, \tag{1.9}$$

а также используемые ограничения на операторы A, B связаны с прикладными задачами электродинамики и математической теории цепей [22, 25, 28, 30, 32, 44]. Эта связь в равной степени относится к бесконечномерным и конечномерным задачам. Первоначально была предпринята попытка включить передающие электрические цепи в теорию открытых систем М. С. Лившица, интерпретируя частотную передаточную функцию цепи как характеристическую функцию несамосопряженного оператора [14]. Оказалось, это включение невозможно в классе *всех конечных цепей*. С помощью теории графов в [18, 19] были найдены топологические и физические ограничения, при которых передаточная функция цепи $w(\lambda)$ совпадает с характеристической функцией несамосопряженного оператора T [14] *в гильбертовом пространстве*:

$$w(\lambda) = E - i\Gamma^+(T - \lambda E)^{-1}\Gamma, \quad \frac{T - T^*}{i} = \Gamma\Gamma^+. \tag{1.10}$$

Этот же оператор T является коэффициентом в явном эволюционном уравнении (1.2) для внутреннего состояния $u(t)$ электрической цепи. В результате стало возможным применение спектральной теории несамосопряженных операторов к анализу электрических цепей и соответствующих им уравнений вида (1.2). Из представления (1.10) и ограниченности T следует, что оператор-функция $w(\lambda)$ голоморфна и ограничена в окрестности точки $\lambda = \infty$, а соответствующий радиотехнический фильтр (электрическая цепь) является «прозрачным» для высокочастотных колебаний.

Если же передаточная функция $w(\lambda)$ имеет полюс $\lambda = \infty$ (фильтр не пропускает высокочастотные колебания), то представление (1.10) с ограниченным оператором T невозможно, а эволюционное уравнение состояния не имеет вида (1.2).

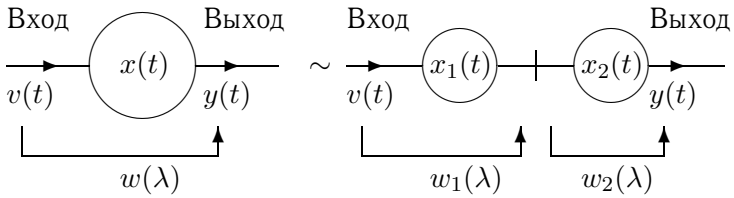
Аналогично для линейной стационарной системы [11, п. 2.3].

$$\dot{x} = ax + bv, \quad y = cx + dv \tag{1.11}$$

с входом $v(t)$, выходом $y(t)$, внутренним сосоянием $x(t)$ передаточная матрица-функция

$$w(\lambda) = d + c(\lambda E - a)^{-1}b \tag{1.12}$$

голоморфна и ограничена в окрестности $\lambda = \infty$. Система (1.11) называется $(abcd)$-системой. Согласно результату Р. Калмана [11, п. 10] любую рациональную матрицу-функцию $w(\lambda)$, голоморфную и ограниченную на бесконечности, можно представить в виде (1.12), т.е. восстановить коэффициентные матрицы a, b, c, d системы (1.11), в которой дифференциальное уравнение для вектора состояния $x(t)$ является разрешенным относительно производной.



$$X = X_1 \dot{+} X_2, \quad w = w_2 w_1.$$

Рис. 1

Естественно поставить вопрос: какой вид имеет линейная стационарная система, у которой норма передаточной матрицы-функции возрастает при $\lambda \to \infty$? Согласно [23, 24] такая система описывается уравнениями

$$A\dot{x} + Bx = Lv, \tag{1.13}$$

$$y = M\dot{x} + Nx + Kv \tag{1.14}$$

и передаточная функция $w(\lambda)$ представляется в виде

$$w(\lambda) = K + (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1}L. \tag{1.15}$$

Отношение двух пучков в (1.15) позволяет обеспечить любое поведение $w(\lambda)$ на бесконечности в отличие от резольвенты одного оператора a в (1.12). Как и в теореме Р. Калмана синтеза системы (1.11), операторы A, B, L, M, N, K системы (1.13), (1.14) синтезируются по заданной функции $w(\lambda)$ [23, 24]. Одним из основных фактов спектральной теории несамосопряженных операторов является соответствие между мультипликативной структурой характеристической оператор-функции $w(\lambda)$ (1.10) и системой вложенных инвариантных подпространств оператора T, по которой М. С. Лившиц осуществил цепное разложение открытой системы с передаточной функцией $w(\lambda)$ [14]. Аналог этого факта для неявной линейной системы (1.13), (1.14) с передаточной функцией (1.15) выглядит так (с точностью до некоторых деталей [20, 23, 24]). Пучок $\lambda A + B$ обладает инвариантной регулярной парой подпространств, если и только если функция $w(\lambda)$ (1.15) факторизуется на два множителя: $w(\lambda) = w_2(\lambda)w_1(\lambda)$, а система (1.13), (1.14) эквивалентна цепочке из двух более простых систем такого же типа. При этом множество особенностей $w(\lambda)$ получается объединением особенностей $w_k(\lambda)$, а размерность $\dim X$ системы (1.13), (1.14) равна сумме размерностей систем цепочки (см. рис. 1).

По определению пучок $\lambda A+B$ операторов из X в Y имеет *инвариантную пару подпространств* X_1, Y_1, если $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$, $A(D_A \cap X_1) \subset Y_1$, $B(D_B \cap X_1) \subset Y_1$. Инвариантная пара (X_1, Y_1) *регулярна*, если индуцированный пучок $\lambda A_1 + B_1$ операторов из X_1 в Y_1 имеет хотя бы одну регулярную точку. Из спектрального анализа пучка методом характеристических функций [23, 24] вытекает следующее утверждение, относящееся к синтезу линейных систем. Передаточная функция $w(\lambda)$ консервативной системы определяет уравнение состояний (1.13) с точностью до преобразования

$$Q\left(A\frac{d}{dt} + B\right)Ux(t) = QLv(t),$$

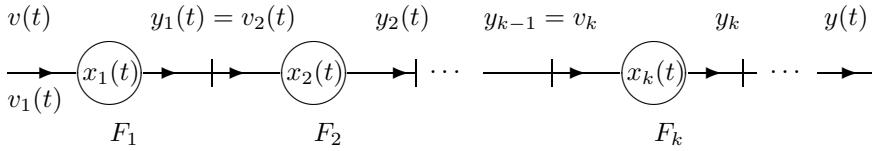


Рис. 2

где Q — вполне обратимый, а U — унитарный оператор. Это преобразование не меняет спектр характеристического пучка $\lambda A + B$ и норму вектора состояний $x(t)$, которая имеет энергетический смысл в приложениях.

Наконец, *полнота системы собственных и присоединенных векторов* пучка $\lambda A + B$ в сепарабельном гильбертовом пространстве X позволяет *разложить* линейную систему (1.13), (1.14) в *дискретную цепочку* одномерных систем F_k (см. рис. 2). Именно, система {вход $v(t)$, состояние $x(t)$, выход $y(t)$} эквивалентна цепочке одномерных систем $F_k = \{v_k, x_k, y_k\}$, так что $v(t) = v_1(t)$, $y_{k-1}(t) = v_k(t)$,

$$x(t) = \sum_k x_k(t), \quad y(t) = \lim_{k\to\infty} y_k(t) \tag{1.16}$$

Сходимость в (1.16) является поточечной, значения состояний $x_k(t)$ систем F_k принадлежат одномерным подпространствам X_k, которые не зависят от t и образуют ортогональное разложение пространства X: $X = \bigoplus\limits_k X_k$. Существование предела во втором соотношении (1.16) следует из сходимости произведения Бляшке—Потапова

$$\prod_{k=1}^{\overleftarrow{\infty}} w_k(\lambda) = w(\lambda),$$

где $w_k(\lambda)$ — передаточная матрица-функция системы F_k. Интересно, что ряд ортогональных слагаемых x_k в (1.16) сходится в пространстве X, хотя исходная система собственных и присоединенных векторов пучка $\lambda A + B$ обладает лишь свойством полноты, но не обязательно базисности в X.

В главном разложение системы (1.13), (1.14) в цепочку рис. 2 и представление состояний x, y в виде (1.16) аналогичны разложениям открытых систем М. С. Лившица [14], описываемых явными уравнениями

$$\dot{x} = Tx(t) + \Gamma v(t), \quad y(t) = I - i\Gamma^+ x(t)$$

и имеющих передаточную функцию $w(\lambda)$ (1.10). Однако аналогия отсутствует для тех «элементарных» систем F_k в цепочке рис. 2, передаточные функции которых $w_k(\lambda)$ имеют полюс $\lambda = \infty$. Эти системы F_k порождены собственными и присоединенными векторами пучка $\lambda A + B$, отвечающими особой точке $\lambda = \infty$, или в конечномерном случае — бесконечным элементарным делителям Вейерштрасса. Таким образом, *в полную систему собственных и присоединенных векторов пучка* $\lambda A + B$ мы включаем *корневые векторы в точке* $\lambda = \infty$, что не является общепринятым, особенно при построении элементарных решений [7, 10, 12, 29].

Отметим, что разностная аппроксимация уравнения (1.1) на полуоси $t \geqslant 0$ приводит к бесконечной системе уравнений

$$Ax_{n+1} + Bx_n = f_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.17}$$

с вырожденным, вообще говоря, оператором A в банаховом пространстве. Такие «неявные» импульсные системы встречаются не только в методах вычислений, но и в экономике, физике, теории управления и других областях [34, 35]. Некоторые сведения и библиографию относительно систем (1.17) и более общих систем с переменными операторами A_n, B_n можно найти в работах [1–5].

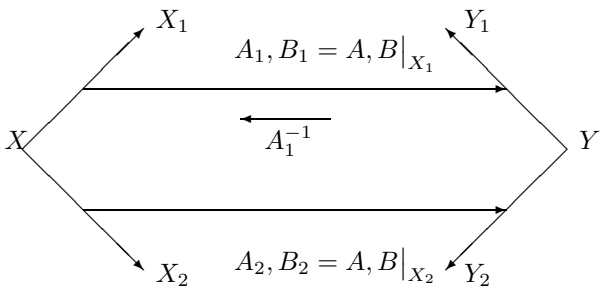


Рис. 3

2. Теорема типа Рисса и ее применения

Изолированная компонента спектра замкнутого оператора T в банаховом пространстве X позволяет расщепить X (и соответственно уравнение $x' = Tx(t)$) в прямую сумму $X_1 \dot{+} X_2$ *спектральных подпространств* X_k*, приводящих оператор* $T = T_1 \dot{+} T_2$ (теорема Рисса). Оператор T распадается на более простые блоки T_k, так что спектры связаны соотношением $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$. Аналогичное спектральное разложение можно получить для пучка $\lambda A + B$ операторов, действующих из X в другое, вообще говоря, пространство Y. В работе [21] это сделано для случая ограниченных операторов $A, B \in \mathscr{L}(X, Y)$, который является основным с учетом редукции (1.3).

Лемма 2.1 (см. [21])**.** *Изолированная ограниченная компонента* σ_1 *спектра* $\sigma(A, B)$ *порождает разложение пространств* X, Y *в прямые суммы* $X = X_1 \dot{+} X_2$*,* $Y = Y_1 \dot{+} Y_2$ *спектральных подпространств* X_k*,* Y_k*, приводящих пучок* $\lambda A + B$*,* $A(X_k) \subset Y_k$*,* $B(X_k) \subset Y_k$*,* $k = 1, 2$*. Индуцированные операторы* $A_k(B_k) : X_k \to Y_k$ *однозначно определяют блочно-диагональное представление*

$$A = A_1 \dot{+} A_2,\ B = B_1 \dot{+} B_2 :\ X_1 \dot{+} X_2 \to Y_1 \dot{+} Y_2. \tag{2.1}$$

Спектры индуцированных пучков $\lambda A_k + B_k$ *равны*

$$\sigma(A_1, B_1) = \tilde{\sigma}(A_1, B_1) = \sigma_1, \quad \sigma(A_2, B_2) = \sigma(A, B) \setminus \sigma_1, \quad \tilde{\sigma}(A_2, B_2) = \tilde{\sigma}(A, B) \setminus \sigma_1.$$

Оператор $A_1 : X_1 \to Y_1$ *имеет ограниченный обратный* $A_1^{-1} \in \mathscr{L}(Y_1, X_1)$*. Ограниченные проекторы* $P_k : X \to X_k$*,* $Q_k : Y \to Y_k$ *на спектральные подпространства строятся с помощью интегрирования по контуру* $\gamma \subset \varrho(A, B)$*, охватывающему компоненту спектра* σ_1:

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (\lambda A + B)^{-1} A d\lambda, \quad Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma A(\lambda A + B)^{-1} d\lambda,$$
$$P_2 = I_X - P_1, \quad Q_2 = I_Y - Q_1. \tag{2.2}$$

Рисунок 3 иллюстрирует разложение пространств и действие индуцированных операторов в лемме 2.1.

Следствие 2.1. *Если компонента* $\sigma_2 = \sigma(A, B) \setminus \sigma_1$ *пучка не содержит точку* $\lambda = 0$*, то существует ограниченный обратный оператор* $B_2^{-1} \in \mathscr{L}(Y_2, X_2)$*.*

Условие следствия означает, что нулевая точка либо регулярна для пучка $\lambda A + B$, либо принадлежит ограниченной компоненте спектра σ_1.

Следствие 2.2. *Если конечный спектр пучка* $\sigma = \sigma(A, B)$ *ограничен, то в разложении* (2.1)*, отвечающем компоненте* $\sigma_1 = \sigma$*, блоки* A_1*,* B_2 *обладают ограниченными обратными* $A_1^{-1} \in \mathscr{L}(Y_1, X_1)$*,* $B_2^{-1} \in \mathscr{L}(Y_2, X_2)$*, а конечный спектр пучка* $\lambda A_2 + B_2$ *пуст:* $\sigma(A_2, B_2) = \emptyset$*. Полный спектр* $\tilde{\sigma}(A_2, B_2)$ *нетривиален тогда и только тогда, когда спектральное подпространство* $X_2(Y_2)$ *содержит ненулевые элементы; в этом случае* $\tilde{\sigma}(A_2, B_2) = \{\infty\}$*.*

Следствие 2.3 (см. [21]). *Если спектр $\sigma(A,B)$ имеет изолированную ограниченную компоненту спектра σ_1, то отвечающее ей подпространство $X_1 = P_1(X)$ целиком содержится в начальном многообразии $D_0(A,B)$ задачи Коши для уравнения* (1.6).

Замечание 2.1. Если оператор B замкнут и оператор A ограничен, то проекторы P_k, Q_k (2.2) также ограничены, спектральные подпространства X_k, Y_k замкнуты, лемма 2.1 и следствия 2.1, 2.2, 2.3 верны, если представление оператора B в (2.1) понимается как

$$B = B_1 \dot{+} B_2 : D_{B_1} \dot{+} D_{B_2} \to Y_1 \dot{+} Y_2, \quad D_{B_k} = P_k(D_B).$$

Доказательство леммы 2.1 полностью аналогично доказательству классической теоремы Рисса. Новизна заключается в конструкции проекторов P_1, Q_1 (2.2) и рассмотрении двух пар спектральных подпространств (X_k, Y_k) даже в том случае, когда $X = Y$. Следствия 2.1, 2.2, 2.3 и замечание 2.1 очевидны. В связи с этим доказательства соответствующих утверждений в работе [21] не были приведены (так же как в ряде последующих публикаций). В то же время в 1980-х и особенно в 1990-х гг. эти утверждения, называемые «спектральной теоремой», были многократно повторены по меньшей мере пятью авторами, чаще при более частных условиях следствия 2.2, причем каждый раз без ссылок на других авторов, а иногда с оспариванием приоритетов друг у друга.

Удивительно, что на «втором фронте» исследований уравнений (1.1), (1.6) в 1990-х гг. еще не получено обобщение спектральной теоремы типа Рисса на случай двух неограниченных операторов A, B, хотя такое обобщение было изложено более двадцати лет назад в [17]. Это обобщение для регулярного пучка $\lambda A + B$ получить нетрудно: достаточно воспользоваться редукцией (1.3) и применить лемму 2.1, либо ввести на линеале D_A норму графика оператора A и обратиться к замечанию 2.1. Использование редукции (1.3) при замене $u(t) = R(\lambda_0)y(t)$ — наиболее простой путь. Поскольку $\varrho(A,B) = \varrho(A_0,B_0)$, то изолированная ограниченная компонента σ_1 спектра $\sigma(A,B)$ является таковой же для спектра $\sigma(A_0,B_0)$. Из тривиальных равенств

$$A(\lambda A + B)^{-1}B\big|_D = B(\lambda A + B)^{-1}A\big|_D, \quad A_0(\lambda A_0 + B_0)^{-1} = A(\lambda A + B)^{-1}$$

следует, что

$$(\lambda A_0 + B_0)^{-1}A_0 = A_0(\lambda A_0 + B_0)^{-1}.$$

Поэтому проекторы (2.2) с индексом 1 для пучка $\lambda A_0 + B_0$ одинаковы и равны

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma A(\lambda A + B)^{-1}d\lambda.$$

Следовательно, разложение (2.1) для операторов $A_0, B_0 : Y \to Y$ имеет вид

$$A_0 = A_{01} \dot{+} A_{02}, \quad B_0 = B_{01} \dot{+} B_{02} : Y_1 \dot{+} Y_2 \to Y_1 \dot{+} Y_2, \tag{2.3}$$

где $Y_k = Q_k(Y)$, $Q_2 = I_Y - Q_1$. Полагая $D_k = R(\lambda_0)Y_k$, получаем $D = D_A \cap D_B = D_1 \dot{+} D_2$, $D_k \subset D$. Легко проверяется, что $A(D_k), B(D_k) \subset Y_k$, и корректно ввести индуцированные операторы $A_k(B_k) = A(B) : D_k \to Y_k$. Свойства

$$\sigma(A_1,B_1) = \sigma_1, \quad \sigma(A_2,B_2) = \sigma(A,B) \setminus \sigma_1; \tag{2.4}$$

$$\exists A_1^{-1} \in \mathscr{L}(Y_1, \overline{D_1}) \tag{2.5}$$

немедленно вытекают из аналогичных свойств пучков ограниченных операторов A_{0k}, B_{0k} в (2.3). Итак, справедливо следующее обобщение леммы 2.1.

Теорема 2.1. *Пусть $\gamma(\subset \varrho(A,B))$ — контур, охватывающий изолированную ограниченную компоненту спектра σ_1 пучка $\lambda A + B$ замкнутых операторов A, B с областями определения $D_A, D_B \subset X$ и значениями в пространстве Y. Тогда формулы* (2.2) *определяют ограниченный проектор $Q_1 \in \mathscr{L}(Y,Y)$ и проекционный (идемпотентный) оператор P_1 в X такой, что*

$$D_{P_1} \supset D = D_A \cap D_B, \quad P_1 D_A = P_1 D \subset D.$$

Линеалы $D_k = P_k D$ и подпространства $Y_k = Q_k Y$ приводят пучок $\lambda A + B : D \to Y$ в том смысле, что $A(D_k) \subset Y_k$, $B(D_k) \subset Y_k$, $k = 1, 2$. Индуцированные операторы A_k, B_k определяют блочно-диагональное представление

$$A\big|_D = A_1 \dot{+} A_2,\ B\big|_D = B_1 \dot{+} B_2 : D_1 \dot{+} D_2 \to Y_1 \dot{+} Y_2.$$

Пучки $\lambda A_k + B_k : D_k \to Y_k$ регулярны, имеют спектры (2.4)*, у оператора $A_1 : D_1 \to Y_1$ существует ограниченный обратный* (2.5)*. Индуцированный оператор $B_2 : D_2 \to Y_2$ имеет ограниченный обратный $B_2^{-1} \in \mathscr{L}(Y_2, X)$ тогда и только тогда, когда точка $\lambda = 0$ принадлежит множеству $\varrho(A, B) \cup \sigma_1$.*

Следствия 2.2, 2.3 сохраняются, если в их формулировках заменить подпространства X_k на линеалы $D_k = P_k D$.

С точки зрения математического менталитета 1970-х гг. представлялось, что столь очевидные обобщения леммы 2.1, следствия 2.3 и некоторых других утверждений из [21] не следует публиковать с доказательствами как самостоятельные результаты. Из этих соображений в [17] без доказательства сформулирована теорема 2.1 как частный случай действительно нетривиального обобщения, описанного в полном депонированном варианте статьи [17] и подробно доказанного в диссертации ее автора. Мы приведем здесь это обобщение и частные уточнения с доказательствами, чтобы облегчить их использование и компенсировать недостаток информации по обсуждаемому вопросу.

Основное отличие от варианта леммы 2.1 и теоремы 2.1 состоит в расширении класса регулярных пучков (обладающих регулярными точками) до некоторого класса сингулярных пучков, не допускающих редукцию (1.3). Хотя в большинстве рассматриваемых нами приложений к абстрактным уравнениям и физике до самого последнего времени использовался лишь регулярный вариант, т.е. теорема 2.1 [9, 21, 42, 43, 45–47], существует много задач с сингулярными пучками $\lambda A + B$.

Предварительно дадим несколько обозначений. Точку $\lambda \in \mathbb{C}$ назовем *w-регулярной* для пучка $L(\lambda) = \lambda A + B$, если оператор $(\lambda A + B)^{-1} A$ определен на D_A, и *l-регулярной*, если $(\lambda A + B)^{-1} A$ определен и ограничен на D_A. Через $\varrho_w(A, B)$, $\varrho_l(A, B)$ обозначим множества всех w-регулярных и l-регулярных точек соответственно. Очевидно, $\varrho_l \subset \varrho_w$, $\varrho \subset \varrho_w$. Соответственно, вводятся *w-спектр* $\sigma_w(A, B) = \mathbb{C} \setminus \varrho_w(A, B)$ и *l-спектр* $\sigma_l(A, B) = \mathbb{C} \setminus \varrho_l(A, B)$ пучка. В пространстве Y область значений $\operatorname{Im} L(\lambda) = I_w$ пучка $L(\lambda)$ не зависит от λ при всех $\lambda \in \varrho_w$. Действительно, для любого $\lambda, \mu \in \varrho_w$, $x \in D$ справедливо соотношение

$$(\lambda A + B)x = (\mu A + B)\big[x + (\lambda - \mu)(\mu A + B)^{-1} A\big]x.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Im} A \subset I_w, \quad B(D) \subset I_w, \tag{2.6}$$

$$L^{-1}(\lambda)y - L^{-1}(\mu)y = (\mu - \lambda)L^{-1}(\lambda)AL^{-1}(\mu)y, \quad \lambda, \mu \in \varrho_w, \quad y \in I_w, \tag{2.7}$$

$$B(\lambda A + B)^{-1} Ah = A(\lambda A + B)^{-1} Bh, \quad \lambda \in \varrho_w, \quad h \in D. \tag{2.8}$$

Аналогично линеал $I_l = \operatorname{Im} L(\lambda)\ \forall \lambda \in \varrho_l(A, B)$ не зависит от $\lambda \in \varrho_l$.

Через E_A обозначим банахово пространство векторов D_A с нормой графика оператора A: $\|x\|_{E_A} = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$. При отображении из E_A в Y оператор A ограничен ($A \in \mathscr{L}(E_A, Y)$), оператор B с областью определения D замкнут.

Множества ϱ_w, ϱ_l, ϱ открыты и оператор-функции

$$R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} : \varrho \to \mathscr{L}(Y, X), \quad R(\lambda)A : \varrho_w \to \mathscr{L}(E_A, E_A), \quad \overline{R(\lambda)A} : \varrho_l \to \mathscr{L}(\overline{D_A}, \overline{D_A})$$

голоморфны. Действительно, если $\lambda_0 \in \varrho_w$, то

$$\lambda A + B = (B + \lambda_0 A)[I - (\lambda_0 - \lambda)(B + \lambda_0 A)^{-1} A] = [I - (\lambda_0 - \lambda)A(B + \lambda_0 A)^{-1}](B + \lambda_0 A).$$

Поэтому представление сходящимся рядом

$$R(\lambda)A = (\lambda A + B)^{-1} A = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k \big[(B + \lambda_0 A)^{-1} A\big]^{k+1} \tag{2.9}$$

справедливо в норме $[A]$ пространства $\mathscr{L}(E_A, E_A)$ при $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0)A\|_{[A]}^{-1}$ и $\lambda_0 \in \varrho_w$, а также в X-норме пространства $\mathscr{L}(\overline{D_A}, \overline{D_A})$ при $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0)A\|_{[X]}^{-1}$ и $\lambda_0 \in \varrho_l$. Ряд в правой части равенства

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R(\lambda_0)[AR(\lambda_0)]^k \tag{2.10}$$

сходится в норме пространства $\mathscr{L}(Y, X)$ при $|\lambda - \lambda_0| < \|AR(\lambda_0)\|_{[Y]}^{-1}$, если $\lambda_0 \in \varrho(A, B)$.

Вследствие (2.9) вектор-функции

$$R(\lambda)Ax, \quad AR(\lambda)y, \quad R(\lambda)(\lambda_0 A + B)h, \quad B(\lambda A + B)^{-1}Ax \tag{2.11}$$

голоморфны в области ϱ_w по нормам пространств X, Y, X, Y соответственно при $x \in D_A$, $y \in I_w$, $h \in D$. Для первой функции утверждение очевидно, для второй — следует из разложения

$$AR(\lambda)y = (B + \lambda_0 A)R(\lambda)Ah = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k [AR(\lambda_0)]^k Ah \tag{2.12}$$

после замены $y = (B + \lambda_0 A)h$, принимая во внимание включения (2.6). Голоморфность третьей и четвертой функций вытекает из равенств

$$R(\lambda)Bh = h - \lambda R(\lambda)Ah, \quad B(\lambda A + B)^{-1}Ax = Ax - \lambda A(\lambda A + B)^{-1}Ax.$$

Для точек $\lambda \in \varrho_l(A, B)$ из голоморфности вектор-функций $R(\lambda)Ax$ для каждого $x \in D_A$ и ограниченности оператора $\overline{R(\lambda)A}$ в пространстве $\overline{D_A}$ с X-нормой следует голоморфность операторфункции $\overline{R(\lambda)A}$; здесь разложение в ряд (2.9) можно распространить на все $\overline{D_A}$:

$$\overline{R(\lambda)A} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k [\overline{R(\lambda_0)A}]^{k+1}, \quad \lambda_0 \in \varrho_l(A, B).$$

Теперь можно перейти к общей спектральной теореме типа Рисса для пучка $\lambda A + B$.

Теорема 2.2. *Пусть σ_1 — изолированная ограниченная компонента w-спектра пучка $\lambda A + B$ замкнутых операторов из X в Y и γ — кривая в $\varrho_w(A, B)$, охватывающая компоненту σ_1. Тогда формулы* (2.2) *определяют проекционные* (*идемпотентные*) *операторы $P_k : D_A \to X$, $Q_k : I_w \to Y$ такие, что $P_1 D_A = P_1(D_A \cap D_B)$, $P_k D_A \subset D_A$, $D_k \doteq P_k D \subset D$, $I_k \doteq Q_k I_w \subset I_w$, $k = 1, 2$. На векторах $x \in D_A$, $h \in D(= D_A \cap D_B)$ справедливы равенства*

$$AP_k x = Q_k Ax, \quad BP_k h = Q_k Bh. \tag{2.13}$$

С помощью индуцированных операторов $A_k : P_k D_A \to I_k$, $B_k : D_k \to I_k$ получается блочно-диагональное представление

$$A = A_1 \dot{+} A_2, \ B\big|_D = B_1 \dot{+} B_2.$$

Пучок $\lambda A_k + B_k$ из пространства $\overline{P_k D_A}$ (с X-нормой) в пространство $\overline{I_k}$ (с Y-нормой) имеет нетривиальное множество w-регулярных точек $\varrho_w(A_k, B_k)$, $k = 1, 2$. При этом w-спектры равны $\sigma_w(A_1, B_1) = \sigma_1$, $\sigma_w(A_2, B_2) = \sigma_w(A, B) \setminus \sigma_1$.

Замечание 2.2. В норме пространства E_A операторы $P_k : E_A \to E_A$ суть ограниченные проекторы, определяющие прямое разложение $E_A = P_1 D_A \dot{+} P_2 D_A$ на замкнутые подпространства. Индуцированные операторы A_1, A_2, B_1 ограничены в E_A, оператор B_2 замкнут и множество σ_1 является l-спектром пучка $\lambda A_1 + B_1$.

Замечание 2.3. Если σ_1 — изолированная компонента l-спектра, в формулировке теоремы 2.2 следует заменить ϱ_w, σ_w, I_w на ϱ_l, σ_l, I_l соответственно. Кроме того, оператор $A_1 : D_1 \to Q_1 I_l$ замкнут в исходных нормах пространств X, Y, проекторы $P_k : D_A \to D_A$ ограничены в норме X и их продолжения по непрерывности $\overline{P_k}$ обеспечивают прямое разложение $\overline{D_A}$ на замкнутые подпространства $\overline{D_A} = \operatorname{Im} \overline{P_1} \dot{+} \operatorname{Im} \overline{P_2}$.

Доказательство теоремы 2.2. В силу голоморфности оператор - функции $R(\lambda)A : \varrho_w \to \mathscr{L}(E_A, E_A)$ оператор P_1 определен с помощью интеграла в (2.2) корректно и $P_k \in \mathscr{L}(E_A, E_A)$. Точно так, как при доказательстве классической теоремы Рисса, равенство $P_1^2 = P_1$ доказывается с помощью представления P_1 формулой вида (2.2) по другому контуру $\gamma_1 \subset \varrho_w$, охватывающему σ_1 и расположенному в открытой области с границей γ. По построению $P_k D_A \to D_A$. В силу голоморфности вектор-функций (2.11) значение $P_1 x$ получается интегрированием в X-норме:

$$P_1 x = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} R(\lambda) A x d\lambda, \quad x \in D_A. \tag{2.14}$$

С учетом замкнутости A и B имеем для $\forall x \in D_A$:

$$A \oint\limits_{\gamma} R(\lambda) A x d\lambda = \oint\limits_{\gamma} A R(\lambda) A x d\lambda \tag{2.15}$$

$$B \oint\limits_{\gamma} R(\lambda) A x d\lambda = \oint\limits_{\gamma} B R(\lambda) A x d\lambda \tag{2.16}$$

Следовательно, $P_1 D_A \subset D$, и применение P_1 дает $P_1 D_A \subset P_1 D$. Поскольку обратное включение очевидно, то $P_1 D_A = P_1 D = D_1$. Из $P_1 D \subset D$ следует $P_2 D \subset D$ и получается прямое разложение $D = D_1 \dot{+} D_2$ ($D_k = P_k D \subset D$), которое является вложенным в прямое разложение $D_A = D_1 \dot{+} P_2 D_A$. Аналогично на каждом элементе $y \in I_w$ определяются операторы

$$Q_1 y = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} A R(\lambda) y d\lambda, \quad Q_2 y = y - Q_1 y \tag{2.17}$$

и проверяется равенство $Q_1^2 y = Q_1 y$. Здесь интеграл понимается в Y-норме. Теперь равенства (2.13) следуют из (2.15), (2.16). Это доказывает приводимость оператора A и сужений $A\big|_D$, $B\big|_D$ следующими разложениями линеалов:

$$A : P_1 D_A \dot{+} P_2 D_A \to I_1 \dot{+} I_2, \quad A : D_1 \dot{+} D_2 \to I_1 \dot{+} I_2, \quad B : D_1 \dot{+} D_2 \to I_1 \dot{+} I_2.$$

Пучок $\lambda A + B$ расщепляется на два индуцированных пучка:

$$\lambda A + B = (\lambda A_1 + B_1) \dot{+} (\lambda A_2 + B_2),$$

где первый действует из пространства $\overline{P_1 D_A} = \overline{D_1}$ с X-нормой в пространство $\overline{I_1}$ с Y-нормой, второй действует из пространства $\overline{P_2 D_A}$ с X-нормой в пространство $\overline{I_2}$ с Y-нормой.

Покажем, что

$$\varrho_w(A, B) = \varrho_w(A_1, B_1) \cap \varrho_w(A_2, B_2), \tag{2.18}$$

откуда, в частности, будет следовать существование w-регулярных точек индуцированных пучков. Равенство

$$(B + zA)h = y, \quad h \in D, \quad y \in I_w$$

эквивалентно паре равенств

$$(B_k + zA_k)h_k = y_k, \quad h_k = P_k h \in D_k, \quad y_k = Q_k y \in I_k.$$

Поскольку $\varrho_w(A, B) \neq \emptyset$, то вследствие (2.6) в правых частях можно рассматривать $y = Ax$, $y_k = A_k x_k$ для любого $x \in D_A$ и соответствующих проекций $x_k = P_k x$. Отсюда следует соотношение для w-спектров

$$\sigma_w(A, B) = \sigma_w(A_1, B_1) \cup \sigma_w(A_2, B_2). \tag{2.19}$$

Через Ω обозначим ограниченную область с границей γ, так что $\sigma_1 \subset \Omega$, и через $F(\xi)$ — оператор-функцию, определенную на I_w равенством

$$F(\xi) y = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} (\xi - \lambda)^{-1} R(\lambda) y d\lambda, \quad y \in I_w.$$

Умножая на $1/2\pi i$ равенство

$$\frac{1}{\xi-\lambda}(B+\xi A)R(\lambda)Ax=\frac{Ax}{\xi-\lambda}+AR(\lambda)Ax,\quad x\in D_A,$$

после интегрирования обеих частей по кривой γ получаем с использованием замкнутости A и B:

$$(B+\xi A)F(\xi)Ax=\begin{cases}-AP_2x, & \xi\in\Omega\ \forall x\in D_A,\\ AP_1x, & \xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}.\end{cases}\tag{2.20}$$

Аналогично получается равенство

$$F(\xi)(B+\xi A)h=\begin{cases}-P_2h, & \xi\in\Omega\ \forall h\in D,\\ P_1h, & \xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}.\end{cases}\tag{2.21}$$

Подставляя $x_1=P_1x$, $h_1=P_1h$ в (2.20), (2.21) при $\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}$ и учитывая расщепление операторов A, B, получаем

$$(B_1+\xi A_1)\cdot P_1F(\xi)Q_1\cdot A_1x_1=A_1x_1,\quad P_1F(\xi)Q_1\cdot(B_1+\xi A_1)h_1=h_1.$$

Поскольку здесь векторы x_1, h_1 пробегают весь линеал $D_1=D_{A_1}=P_1D_A=P_1D$, то существует обратный оператор $(B_1+\xi A_1)^{-1}=P_1F(\xi)Q_1$, а оператор $(B_1+\xi A_1)^{-1}A_1$ определен на D_{A_1}. Таким образом, $\xi\in\varrho_w(A_1,B_1)$, $\sigma_w(A_1,B_1)\subset\overline{\Omega}$. Если $\xi\in\Omega$, то из (2.20), (2.21) вытекают равенства

$$(B_2+\xi A_2)\cdot(-1)P_2F(\xi)Q_2\cdot A_2x_2=A_2x_2,\quad -P_2F(\xi)Q_2\cdot(B_2+\xi A_2)h_2=h_2$$

для всех $x_2\in D_{A_2}=P_2D_A$, $h_2\in D_2=P_2D$. Следовательно, $\xi\in\varrho_w(A_2,B_2)$, $\sigma_w(A_2,B_2)\subset\mathbb{C}\setminus\Omega$. Поскольку $\sigma_1\cap\sigma_w(A_2,B_2)=\emptyset$ и по условию $\sigma_1\subset\sigma_w(A,B)$, то из (2.19) получаем $\sigma_1\subset\sigma_w(A_1,B_1)$. Если для $\xi\in\sigma_w(A_1,B_1)$ предположить, что $\xi\notin\sigma_1$, то $\xi\in\overline{\Omega}\setminus\sigma_1$ и тогда $\xi\in\varrho_w(A,B)$, откуда $\xi\in\varrho_w(A_1,B_1)$ на основании (2.18). Противоречие показывает, что $\xi\in\sigma_1$ и $\sigma_1=\sigma_w(A_1,B_1)$. Аналогично устанавливается, что $\sigma_w(A_2,B_2)=\sigma_w(A,B)\setminus\sigma_1$. Теорема доказана. □

Доказательство замечания 2.3 в главном аналогично доказательству теоремы 2.2 с надлежащей заменой обозначений. Неаналогичными являются лишь следующие уточнения. Ограниченность операторов P_1 (2.14) следует из голоморфности на кривой γ оператор-функции $\overline{R(\lambda)A}$ со значениями в $\mathscr{L}(\overline{D}_A,\overline{D}_A)$. Пусть $\overline{P_k}$ — продолжение по непрерывности операторов P_k. Ясно, что

$$\overline{P}_1+\overline{P}_2=I\big|_{\overline{D}_A},\quad \overline{D}_A=\overline{D}_{A_1}\dot{+}\,\overline{D}_{A_2},\quad \overline{D}_{A_k}=\overline{P_kD_A}=\overline{P}_k(\overline{D}_A).$$

Пусть $x_n\in D_{A_1}=P_1D_A$, $x_n\underset{X}{\longrightarrow}x$, $A_1x_n=Ax_n\underset{Y}{\longrightarrow}y$. Коль скоро A замкнут, то $x\in D_A$, $Ax=y$. Но $x\in\overline{P}_1(\overline{D}_A)$, поэтому $x\in\overline{P}_1(D_A)=P_1D_A=D_{A_1}$, $Ax=A_1x$, следовательно, оператор A_1 *замкнут*. Свойство $\varrho_l(A,B)=\varrho_l(A_1,B_1)\cap\varrho_l(A_2,B_2)$ вытекает из расщепления

$$(\lambda A+B)^{-1}A(x_1+x_2)=(\lambda A_1+B_1)^{-1}A_1x_1+(\lambda A_2+B_2)^{-1}A_2x_2,\quad x_k\in D_{A_k}.$$

Действительно, ограниченность оператора $(\lambda A+B)^{-1}A$ на D_A эквивалентна одновременной ограниченности проекций $(\lambda A_k+B_k)^{-1}A_k$ на D_{A_k}.

Наконец, ограниченность $(\xi A_1+B_1)^{-1}A_1$ при $\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}$ следует из ограниченности оператора $F(\xi)A$ на D_A и равенства

$$(\xi A_1+B_1)^{-1}A_1x_1=P_1F(\xi)Ax_1,\quad x_1\in D_{A_1}.$$

3. Построение решений методом преобразования Лапласа

3.1. Поскольку существуют различные определения решения абстрактного уравнения (1.1), приведем их классификацию и сравнение в соответствии с [26]. Правая часть $f(t)$ предполагается локально суммируемой по Бохнеру при $t\geqslant 0$. Непрерывная при $0\leqslant t\leqslant\infty$ функция $u(t)$ называется:

(i) *классическим решением* уравнения (1.1), если при $t>0$ она непрерывно дифференцируема, удовлетворяет уравнению (1.1) и функция $Bu(t)$ непрерывна;

(ii) *сильным решением*, если $Bu(t)$ непрерывна при $t > 0$ и для всех $\varepsilon > 0$

$$A\big[u(t) - u(\varepsilon)\big] + B\int\limits_{\varepsilon}^{t} u(s)ds = \int\limits_{\varepsilon}^{t} f(s)ds, \quad t > \varepsilon; \tag{3.1}$$

(ii) *обобщенным решением*, если $u(t)$ удовлетворяет уравнению (3.1) и функция $A[u(t) - u(\varepsilon)]$ непрерывна по t.

Решение любого из трех типов называется *стандартным*, если $u(t) \in D_A$ $(t \geqslant 0)$ и функция $Au(t)$ непрерывна в нуле. Для стандартных решений равенство (3.1) выполняется также при $\varepsilon = 0$. В следующих работах изучались стандартные решения: классические в [17, 21, 30], сильные в [36, 38] для гладкой правой части $f(t)$, когда интегральное уравнение (3.1) эквивалентно дифференциальному

$$\frac{d}{dt}Au(t) + Bu(t) = f(t). \tag{3.2}$$

Всякое классическое решение является сильным, сильное — обобщенным. Если оператор B ограничен, то наше понятие сильного решения (но не сильного в смысле [36]) совпадает с обобщенным. В общем случае обобщенное решение является сильным тогда и только тогда, когда $Bu(t) \in C(0, \infty)$, а в случае непрерывности $f(t)$ — когда $A[u(t) - u(\varepsilon)] \in C[\varepsilon, \infty)$. При $f \in C(0, \infty)$ сильное решение будет классическим, если (и только если) оно непрерывно дифференцируемо на $(0, \infty)$. Классическими решениями однородного уравнения можно равномерно аппроксимировать его обобщенные решения. Более того, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *На всяком сегменте $[0, \tau]$ классические решения u_n уравнений*

$$Au_n'(t) + Bu_n(t) = f_n(t) = n\int\limits_{t}^{t+1/n} f(s)ds \tag{3.3}$$

с локально усредненными правыми частями равномерно аппроксимируют любое сильное или обобщенное решение $u(t)$ уравнения (1.1). *При этом на сегменте $[\varepsilon, T]$, $\varepsilon > 0$, можно одновременно обеспечить равномерную аппроксимацию обобщенного решения в A-норме, сильного решения — еще и в B-норме* (*т.е. в норме графика соответствующего оператора*). *Обратно, если последовательность $u_n(t)$ классических решений сходится к некоторой функции $u(t)$ равномерно на сегменте $0 \leqslant t \leqslant \tau$ в норме X и равномерно на сегменте $\varepsilon \leqslant t \leqslant \tau$ в A-норме* (*для любых $\tau > \varepsilon > 0$*), *то $u(t)$ — обобщенное решение уравнения* (1.1).

При доказательстве прямого утверждения для произвольного обобщенного решения $u(t)$ достаточно взять аппроксимирующую последовательность

$$u_n(t) = n\int\limits_{t}^{t+1/n} u(s)ds$$

и убедиться, что $u_n(t)$ удовлетворяет (3.3). Обратное утверждение доказывается интегрированием уравнения (3.3) в пределах от ε до t и последующим переходом к пределу при $n \to \infty$, что приводит к соотношению (3.1) для предельной функции $u(t)$.

3.2. В дальнейшем рассматриваются *стандартные решения задачи Коши* для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u(0) = u_0. \tag{3.4}$$

С помощью леммы 3.1 проверяются следующие два утверждения [21, 26].

Теорема 3.1. *Начальный вектор u_0 и соответствующее ему обобщенное решение $u(t)$ задачи Коши* (1.1), (3.4) *связаны соотношением*

$$\int\limits_{0}^{t} e^{-\lambda s}u(s)ds = (\lambda A + B)^{-1}\left[Au_0 - Au(t)e^{-\lambda t} + \int\limits_{0}^{t} f(s)e^{-\lambda s}ds\right] \tag{3.5}$$

при всяком λ, не являющемся собственным числом пучка $\lambda A+B$. Обратно, если формула (3.5) *удовлетворяется хотя бы при одном λ для некоторой непрерывной на $[0,\infty)$ функции $u(t)$ с начальным значением* (3.4)*, то $u(t)$ есть обобщенное решение задачи* (1.1)*,* (3.4).

Следствие 3.1. *Пусть некоторая прямая $\operatorname{Re}\lambda=\alpha>0$ свободна от собственнных чисел пучка $\lambda A+B$. Тогда обобщенное решение $u(t)$ задачи Коши* (1.1)*,* (3.4) *представляется на всяком конечном интервале $0<t<\tau$ в виде*

$$u(t)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{1}{\lambda}R(\lambda)\left[Au_0-Au(\tau)e^{-\lambda\tau}+\int\limits_0^{\tau}f(s)e^{-\lambda s}ds\right]e^{\lambda t}d\lambda\right\}. \tag{3.6}$$

Как обычно, для представления решения $u(t)$ всюду при $t>0$ по формуле обращения преобразования Лапласа ограничим рост решений так, чтобы в (3.6) произведения $u(\tau)e^{-\lambda\tau}$, $Au(\tau)e^{-\lambda\tau}$ стремились к нулю при $\tau\to\infty$ соответственно в X-норме и Y-норме. Решение уравнения (1.1) назовем *нормальным*, если оно является функцией экспоненциального типа

$$h_u=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln\|u(t)\|_X}{t}<\infty.$$

Ее преобразование Лапласа

$$\tilde u(\lambda)=\int\limits_0^{\infty}u(t)e^{-\lambda t}dt$$

есть голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>h_u$ функция. Решение назовем *A-нормальным*, если оно нормально и функция $Au(t)$ также имеет экспоненциальный тип

$$h_{Au}=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln\|Au(t)\|_Y}{t}<\infty.$$

В случае ограниченности оператора A все нормальные решения являются A-нормальными [21]. Если оператор B ограничен, то при условии существования хотя бы одного A-нормального обобщенного решения $u(t)$ уравнения (1.1) свободный член $f(t)$ допускает преобразование Лапласа при $\operatorname{Re}\lambda>\max\{h_u,h_{Au}\}$. Из предыдущих рассуждений и формулы (3.6) вытекает следующая теорема.

Теорема 3.2 (см. [26])**.** *Пусть $u(t)$ — A-нормальное обобщенное решение задачи* (1.1)*,* (3.4)*, функция $f(t)$ допускает преобразование Лапласа $\tilde f(\lambda)$ с абсциссой сходимости σ_f и $\alpha_0=\max\{h_u,h_{Au},\sigma_f\}$. Тогда преобразование Лапласа $\tilde u(\lambda)$ решения вычисляется по формуле*

$$\tilde u(\lambda)=(\lambda A+B)^{-1}[Au_0+\tilde f(\lambda)],\quad \operatorname{Re}\lambda\geqslant\alpha_0,\quad \lambda\notin\sigma_p.$$

Если при некотором $\alpha>\max\{0,\alpha_0\}$ прямая $\operatorname{Re}\lambda=\alpha$ свободна от собственных чисел σ_p пучка $\lambda A+B$, то

$$u(t)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}(\lambda A+B)^{-1}\left[Au_0+\tilde f(\lambda)\right]\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}d\lambda\right\}\quad\forall t>0.$$

Если, кроме того, $u(t)$ — классическое решение, то

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}(\lambda A+B)^{-1}\left[Au_0+\tilde f(\lambda)\right]e^{\lambda t}d\lambda\quad\forall t>0.$$

Теорема 3.2 не содержит конструктивного рецепта отыскания начальных векторов нормальных решений. По крайней мере часть таких векторов можно получить с помощью скалярного *множителя сходимости* [15] — функции $\varphi(\lambda)$, голоморфной в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<\alpha$, непрерывной

и ограниченной при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha$, убывающей к нулю при $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha$. На прямой $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$ рассмотрим выражения

$$g(\lambda) = R(\lambda)Av, \quad \theta(\lambda) = R(\lambda)\tilde{f}(\lambda), \quad J(\cdot) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+\infty}(\cdot)d\lambda. \tag{3.7}$$

Теорема 3.3 (см. [26]). *Пусть на прямой* $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$ *определены функции* g, θ (3.7) *и некоторый множитель сходимости* φ, *а функция* $f(t)$ *локально абсолютно непрерывна. Если интегралы* $J(\cdot)$ *от норм функций* φg, φAg, θ, $A\theta$ (*соответственно* φg, $\lambda\varphi Ag$, θ, $\lambda A\theta$ *или* $\lambda\varphi g$, $\lambda\varphi Ag$, $\lambda\theta$, $\lambda A\theta$) *конечны, то существует единственное обобщенное* (*соответственно сильное или классическое*) *решение* $u(t) = J\big([\varphi g + \theta]e^{\lambda t}\big)$ *с начальным вектором* $u_0 = J(\varphi g + \theta)$. *Это решение* A*-нормально и* $h_u, h_{Au} \leqslant \alpha$.

По схеме доказательства леммы 5.2 из [15] получается следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Если для голоморфных на прямой* $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$ *операторных функций* $\psi_k(\lambda)$ *конечны интегралы*

$$J\left(\frac{\ln_+\|\psi_k\|}{1+|\lambda|^2}\right),$$

то существует множитель сходимости $\varphi(\lambda)$, *обеспечивающий конечность интеграла* $J(\cdot)$ *от норм функций* $\lambda\varphi(\lambda)\psi_k(\lambda)$, $k = 1, 2$.

С помощью леммы 3.2 очевидным образом формулируются различные достаточные интегральные условия на резольвенты $R(\lambda)$, $R(\lambda)A$, обеспечивающие существование множителя сходимости из теоремы 3.3 при всяком векторе $v \in D_A$.

Следствие 3.2 (см. [26]). *При* $\varphi(\lambda) = (\lambda - \alpha - 1)^{-k-2}$ *и всяком* $v \in D_A$ (*в выражении* $g(\lambda)$ (3.7)) *функция* $u(t)$ *из теоремы 3.3 является* A*-нормальным решением задачи — классическим* (i), *сильным* (ii) *или обобщенным* (iii), *если полуплоскость* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha > 0$ *состоит из регулярных точек пучка* $\lambda A + B$ *и для целого* $k \geqslant 0$ *выполнено соответственно одно из трех условий*:

(i) $\|R(\lambda)\| + \|AR(\lambda)\| < C|\lambda|^{k-1}$, $\exists J(\|\lambda\theta\| + \|\lambda A\theta\|)$;
(ii) $\|R(\lambda)\| + \|\lambda AR(\lambda)\| < C|\lambda|^{k}$, $\exists J(\|\theta\| + \|\lambda A\theta\|)$;
(iii) $\|R(\lambda)\| + \|AR(\lambda)\| < C|\lambda|^{k}$, $\exists J(\|\theta\| + \|A\theta\|)$.

Следствие 3.2 справедливо при замене $\varrho(A,B) \to \varrho_l(A,B)$, $R(\lambda) \to R(\lambda)A$.

Следствие 3.3 (см. [26]). *Пусть* l*-спектр пучка* $\lambda A + B$ *непуст, множество* $\varrho_l(A,B)$ *содержит полуплоскость* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$ *и интеграл*

$$J\left(\frac{\ln_+\|R(\lambda)A\|}{1+|\lambda|^2}\right)$$

конечен. Тогда начальное многообразие задачи (1.6), (3.4) *нетривиально и существует ненулевое* A*-нормальное решение.*

Используя множитель сходимости типа λ^{-k} и подчиняя резольвенту условию $\|BR(\lambda)\| \leqslant C|\lambda|^k$, $k \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha > 0$, А. Фавини приводит в [36] иную конструкцию сильных решений и их начальных векторов. Однако его метод предполагает существование производной $f^{(k+2)}(t)$ от правой части и специфические условия на значения производных в нуле:

$$f^{(n)}(0) = A(B^{-1}A)^{k-n}w_n, \quad w_n \in D_A, \quad n = 0, \dots k.$$

Эти условия могут не выполняться уже в двумерном случае, например для системы $u_2' = u_1 + 1$, $0 = u_2 - t$.

3.3. Применим метод преобразования Лапласа к исследованию абстрактного дифференциального уравнения *высокого порядка*. Рассматривается задача Коши

$$\sum_{j=0}^{n} A_j u^{(j)}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.8}$$

$$u^{(j)}(0) = u_j, \quad j = 0, \dots, n-1, \tag{3.9}$$

где A_j — линейные замкнутые операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y с областями определения D_{A_j}. Здесь используется определение решения задачи Коши (3.8), (3.9), данное в [29]: вектор-функция $u(t) \in C^n\{(0,\infty), X\} \bigcap C^{n-1}\{[0,\infty), X\}$ называется *решением задачи Коши* (3.8), (3.9), если она удовлетворяет уравнению (3.8), начальным условиям (3.9) и

$$A_j u(t) \in C^j\{(0,\infty), Y\} \bigcap C^{j-1}\{[0,\infty), Y\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Под *начальным многообразием задачи Коши* (3.8), (3.9) понимается множество всех векторов $\{u_j\}_{j=0}^{n-1} \in X^n = X \times \ldots \times X$, для которых задача разрешима. Обращаясь к классификации решений уравнения первого порядка и содержанию разделов 3.1, 3.2, можно сказать, что в разделе 3.3 рассматриваются «классические» решения уравнения n-го порядка (3.8) и соответствующее им начальное многообразие задачи Коши.

С уравнением (3.8) связывается операторный пучок

$$\mathscr{L}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_j,$$

определенный на $D_L = \bigcap\limits_{j=0}^{n} D_{A_j}$. На множестве ϱ регулярных точек пучка $L(\lambda)$ ($R(\lambda) = L^{-1}(\lambda) \in \mathscr{L}(Y, X)$) оператор-функции $R(\lambda)$, $A_j R(\lambda)$, $j = 1, \dots, n$, голоморфны со значениями из $\mathscr{L}(Y, X)$ и $\mathscr{L}(Y, Y)$ соответственно.

В работе [44] для уравнения (1.9) второго порядка и в [16] для общего уравнения (3.8) с помощью метода преобразования Лапласа найдено некоторое множество начальных данных и решений задачи Коши (3.8), (3.9) при подходящем выборе множителя сходимости.

Теорема 3.4 (см. [16]). *Предположим, что прямая* $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$ *состоит из регулярных точек пучка* $\mathscr{L}(\lambda)$ *и при некотором целом* $m \geqslant -n$ *на этой прямой выполняется оценка*

$$\sum_{j=1}^{n} \|A_j R(\lambda)\|_{[Y,Y]} + \|R(\lambda)\|_{[Y,X]} \leqslant C_0(1 + |\lambda|^m), \quad C_0 > 0. \tag{3.10}$$

Тогда для любого целого $p \geqslant 2n + m$, *любого* $l \in \{0, \dots, n-1\}$ *и* $y \in Y$ *вектор-функция*

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = \alpha} \frac{\lambda^l e^{\lambda t} R(\lambda) y}{(\lambda - \alpha - 1)^{p+1}} d\lambda, \quad y \in Y,$$

является решением уравнения (3.8) *с начальными условиями*

$$u_j = u^{(j)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = \alpha} \frac{\lambda^{j+l} R(\lambda) y}{(\lambda - \alpha - 1)^{p+1}} d\lambda, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Уже в конечномерном случае начальное многообразие задачи Коши (3.8), (3.9) может оказаться тривиальным. Различные признаки нетривиальности начального многообразия задачи Коши для уравнения (1.6) были получены в [21, 26], а для уравнения (3.8) — в [16]. Приведем один из таких признаков.

Теорема 3.5 (см. [16]). *Пусть спектр пучка* $\mathscr{L}(\lambda)$ *непуст, полуплоскость* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$ *состоит из регулярных точек и на прямой* $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$ *выполнена оценка* (3.10). *Тогда начальное многообразие задачи Коши* (3.8), (3.9) *нетривиально.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бенабдаллах М., Руткас А. Г., Соловьев А. А.* Применение асимптотических разложений к исследованию бесконечной системы уравнений $Ax_{n+1}+Bx_n = f_n$ в банаховом пространстве// Теор. функций, функц. анал. прилож. — Харьков, 1970. — *12*. — С. 20–35.
2. *Бенабдаллах М., Руткас А. Г.* Нормальные решения системы $Ax_{n+1} + Bx_n = f_n$ в банаховом пространстве// Вестн. Харьков. ун-та. — 1984. — *254*. — С. 62–65.
3. *Бенабдаллах М., Руткас А. Г., Соловьев А. А.* Об устойчивости вырожденных разностных систем в банаховых пространствах// Динам. системы. — Киев, Симферополь, 1987. — *6*. — С. 103–109.
4. *Бондаренко М. Ф., Власенко Л. А., Руткас А. Г.* Периодические решения одного класса неявных разностных уравнений// Докл. НАН Украины. — 1999. — *1*. — С. 9–14.
5. *Бондаренко М. Ф., Руткас А. Г.* Признаки детерминированности неявных дискретных неавтономных систем// Докл. НАН Украины. — 2001. — *2*. — С. 7–11.
6. *Власенко Л. А.* Построение решений некоторых классов уравнений $Au'(t) + Bu(t) = f(t)$// Вестн. Харьк. ун-та. — 1986. — *286*. — С. 24–28.
7. *Власенко Л. А.* О полноте нормальных решений уравнения $Au'(t) + Bu(t) = f(t)$// Теор функций, функц. анал. прилож. — Харьков, 1987. — *48*. — С. 46–51.
8. *Власенко Л. А.* Полнота элементарных решений одного операторно-дифференциального уравнения с запаздываниями// Докл. НАН Украины. — 1998. — *11*. — С. 15–19.
9. *Власенко Л. А.* Теоремы существования и единственности для одного неявного дифференциального уравнения с запаздыванием// Диффер. уравн. — 2000. — *36*, № 5. — С. 624–628.
10. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
11. *Калман Р., Арбиб М., Фалб П.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
12. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*, № 1. — С. 11–14.
13. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
14. *Лившиц М. С.* Операторы, колебания, волны (открытые системы). — М.: Наука, 1966.
15. *Любич Ю. И.* Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши// Усп. мат. наук. — 1966. — *21*, № 3. — С. 3–51.
16. *Пивень А. Л.* Разрешимость задачи Коши и оценки начального многообразия для одного неявного операторно-дифференциального уравнения// Вестн. Харьков. ун-та. Сер. мат., прикл. мат. мех. — 1999. — *458*. — С. 101–108.
17. *Радбель Н. И.* О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = 0$// Дифференц. уравн. — 1979. — *15*, № 6. — С. 1142–1143.
18. *Руткас А. Г.* Несамосопряженные операторы в теории многополюсников// Вестн. Харьков. ун-та. — 1966. — *32*. — С. 154–180.
19. *Руткас А. Г.* Применение несамосопряженных операторов к одному классу электрических цепей// Радиотехника. — Харьков, 1967. — *4*. — С. 139–150.
20. *Руткас А. Г.* Пары несамосопряженных операторов и операторные гиперузлы// Укр. мат. ж. — 1970. — *1*. — С. 37–52.
21. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$// Дифференц. уравн. — 1975. — *11*, № 11. — С. 1996–2010.
22. *Руткас А. Г.* Свойства функций рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией// Докл. АН СССР. — 1976. — *230*, № 1. — С. 38–40.
23. *Руткас А. Г.* К теории характеристических функций линейных операторов// Докл. АН СССР. — 1976. — *229*, № 3. — С. 546–549.
24. *Руткас А. Г.* Характеристическая функция и модель линейного пучка операторов// Теор. функций, функц. анал. прилож. — Харьков, 1986. — *45*. — С. 98–111.
25. *Руткас А. Г.* Модовые поля в волноводе со слоистой диспергирующей средой/ Препринт № 360. — Харьков: ИРЭ АН УССР, 1987.
26. *Руткас А. Г.* О классификации и свойствах решений уравнения $Ax' + Bx = f(t)$// Дифференц. уравн. — 1989.— *25*, № 7. — С. 1150–1155.
27. *Руткас А. Г.* Возмущения косоэритовых пучков и вырожденная задача Коши// Укр. мат. ж. — 1989. — *41*, № 8. — С. 1082–1088.
28. *Руткас А. Г., Власенко Л. А.* Разрешимость и полнота для электродинамической системы не типа Ковалевской// Мат. заметки. — 1993. — *53*. — С. 138–140.

29. *Руткас А. Г., Власенко Л. А.* Теоремы единственности и аппроксимации для одного вырожденного операторно-дифференциального уравнения// Мат. заметки. — 1996. — *60*. — С. 597–600.
30. *Руткас А. Г., Радбель Н. И.* О линейных операторных пучках и неканонических системах// Теор. функций, функ. анал. прилож. — Харьков, 1973. — *17*. — С. 3–14.
31. *Руткас А. Г., Чаусовский Д. М.* Некоторые применения операторных узлов и гиперузлов// Мат. физика. — Киев, 1968. — *5*. — С. 173–178.
32. *Руткас А. Г., Хиргий Н. И.* Полугруппы мономорфизмов графов в дискретных структурах// Теор. функций, функ. анал. прилож. — Харьков, 1974. — *19*. — С. 111–125.
33. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — *18*, № 1. — С. 3–50.
34. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations/ Res. Notes Math. — New York: Pitman Publishing Co., 1980. — *40*.
35. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations. II// Res. Notes Math. — New York: Pitman Publishing Co., 1981. — *61*.
36. *Favini A.* Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems// Rend. Math. — 1979. — *12*, № 3-4. — С. 511–536.
37. *Favini A.* Abstract potential operators and spectral methods for a class of degenerate evolution problems// J. Differ. Equations. — 1981. — *39*, № 2. — С. 212–225.
38. *Favini A.* Degenerate and singular evolution equations in Banach space// J. Math. Ann. — 1985. — *273*. — С. 17–44.
39. *Favini A., Plazzi P.* Some results concerning the abstract nonlinear equation $D_t M u(t) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$// Circuits Systems Signal Processing. — 1986. — *5*. — С. 261–274.
40. *Favini A., Plazzi P.* On some abstract degenerate problems of parabolic type. 2. The nonlinear case// Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. — 1989. — *13*. — С. 23–31.
41. *Favini A., Rutkas A.* Existence and uniqueness of solution of some abstract degenerate nonlinear equations// Differ. Integr. Equations. — 1999. — *12*, № 3. — С. 373–394.
42. *Favini A., Vlasenko L.* On solvability of degenerate nonstationary differential-difference equations in Banach spaces// Differ. Integr. Equations. — 2001. — *14*.
43. *Rutkas A.* The solvability of a nonlinear differential equation in a Banach space. Spectral and evolutional problems// Proc. Sixth Crimean Math. School-Symposium. — Simferopol, 1996. — С. 317–320.
44. *Rutkas A., Vlasenko L.* Implicit differential equations and applications to electrodynamics// Math. Meth. Appl. Sci. — 2000. — *23*. — С. 1–15.
45. *Rutkas A. G., Vlasenko L. A.* Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operator equations// Nonlinear Oscilations. — Kiev, 2001.
46. *Rutkas A. G., Vlasenko L. A.* The solvability of a nonlinear degenerate differential equation// Proc. XX Joint Session of Petrovskii Seminar and Moscow Mathematical Society. — Moscow Univ., 2001. — С. 351–352.
47. *Vlasenko L.* Implicit linear time-dependent differential-difference equations and applications// Math. Meth. Appl. Sci. — 2000. — *23*. — С. 937–948.

А. Г. Руткас
Харьковский университет, механико-математический факультет
E-mail: Anatoliy.G.Rutkas@univer.kharkov.ua

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 65–66

ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

© 2005 г. **А. М. САВЧУК**

В теории операторов Штурма—Лиувилля, порождаемых на интервале (a,b) дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y, \tag{1}$$

стандартным условием на функцию $q(x)$ в случае конечного интервала является условие $q(x) \in L_1(a,b)$. В сингулярном случае, когда интервал (a,b) бесконечен, или когда функция $q(x)$ имеет неинтегрируемые особенности на концах интервала, предполагается, что $q(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(a,b)$.

В работах физиков (см. [4, гл. 3]) была поставлена задача об изучении оператора (1) и его многомерного аналога $-\Delta + q(x)$ с потенциалом $q(x)$, являющимся распределением, а точнее, δ-функцией. Математическое исследование таких операторов было проведено в [1, 2, 5]. Впоследствии операторы Шредингера с точечными потенциалами и потенциалами, сосредоточенными на слое, изучались во многих работах (см., например, [3, 6–8, 10, 12, 13]). Операторы с потенциалами, не являющимися δ-функциями, изучались менее активно. Нам известны работы [10, 13], где в одномерном случае изучался потенциал $q(x) = 1/x$.

Наша цель — дать корректное определение оператора Штурма—Лиувилля с потенциалом $q(x)$, являющимся сингулярным распределением первого порядка, более точно, при $q(x) = u'(x)$, где $u(x) \in L_2(a,b)$, а производная понимается в смысле распределений.

Пусть

$$q(x) = u'(x), \quad u(x) \in L_2(0,1),$$

причем равенство понимается в смысле распределений, т.е. $(q,\varphi) = -(u,\varphi')$ для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ с компактным носителем на $(0,1)$. Введем квазипроизводную $y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x)y(x)$ и перепишем выражение (1) в виде

$$l(y) = -(y^{[1]})' - u(x)y^{[1]} - u^2(x)y. \tag{2}$$

С дифференциальным выражением $l(y)$ свяжем максимальный оператор L_M: $L_M y = l(y)$, $\mathscr{D}(L_M) = \{y \mid y, y^{[1]} \in W_1^1[0,1],\ l(y) \in L_2(0,1)\}$. Минимальный оператор L_m определим как сужение L_M на область $\mathscr{D}(L_m) = \{y \mid y \in \mathscr{D}(L_M),\ y(\pm 1) = y^{[1]}(\pm 1) = 0\}$.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ — вещественная функция. Тогда L_m — замкнутый симметрический оператор с индексами дефекта $\{2,2\}$, а всякое его самосопряженное расширение L является сужением оператора L_M на область вида*

$$\mathscr{D}(L) = \{y \mid y \in \mathscr{D}(L_M),\ U_1(y) = U_2(y) = 0\},$$

где линейные формы U_1, U_2 имеют представление

$$U_j(y) = a_{j1}y(0) + a_{j2}y^{[1]}(0) + b_{j1}y(1) + b_{j2}y^{[1]}(1) = 0, \quad j = 1,2, \tag{3}$$

для коэффициентов которых выполнены равенства

$$a_{j1}\bar{a}_{k2} - a_{j2}\bar{a}_{k1} = b_{j1}\bar{b}_{k2} - b_{j2}\bar{b}_{k1}, \quad j,k = 1,2. \tag{4}$$

Теперь нас будут интересовать следующие вопросы. Пусть некоторая последовательность гладких функций $u_\varepsilon(x)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ по норме пространства L_2 к функции $u_0(x) \in L_2$. Будут ли сходиться, и в каком смысле, операторы $L_\varepsilon = -\dfrac{d^2}{dx^2} + u'_\varepsilon(x)$ к построенному выше оператору $L_0 = -\dfrac{d^2}{dx^2} + u'_0(x)$? Здесь мы подразумеваем, что области определений операторов L_ε и L_0 подчинены краевым условиям вида (3).

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

Теорема 2. *Приведенное условие влечет равномерную резольвентную сходимость операторов L_ε при $\varepsilon \to 0$. Оператор L_0 имеет дискретный спектр, а скорость приближения собственных значений $\lambda_k(\varepsilon)$ операторов L_ε к соответствующим собственным значениям $\lambda_k(0)$ оператора L_0 допускает оценку*

$$|\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_k(0)| \leqslant C_k \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\|_{L_2},$$

где C_k зависит от k, но не зависит от ε.

Условие $q(x) = u'(x)$, $u \in L_2$, существенно в предложенном методе. Мы не видим возможности получить похожие результаты, например, для функций $u(x) \in L_p$, $p < 2$. Поставим следующий вопрос: можно ли определить оператор L для $u(x) \in L_p$, $p < 2$, с помощью предельного перехода? Точнее, если последовательность гладких функций $u_\varepsilon(x)$ такова, что $\|u_\varepsilon - u\|_{L_p} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то будет ли последовательность операторов L_ε иметь сильный или равномерный резольвентный предел, не зависящий от выбора последовательности u_ε? Покажем, что ответ на этот вопрос отрицателен. Рассмотрим последовательность потенциалов

$$u'_\varepsilon(x) = -\varepsilon^{-3/2}\theta(x-\varepsilon)\theta(\varepsilon - x)\operatorname{sign} x.$$

Можно проверить, что сильным резольвентным пределом этой последовательности операторов как в $L_2(-1,1)$ так и в $L_2(\mathbb{R}^1)$ будет оператор $-\dfrac{d^2}{dx^2} - \delta(x)$. С другой стороны, очевидно, что $u_\varepsilon(x) \to 0$ в L_p при $p < 2$. Таким образом, резольвентный предел операторов L_ε (если он существует) зависит от выбора последовательности $u_\varepsilon(x)$ если сходимость понимается в L_p при $p < 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березин Ф. А.* О модели Ли// Мат. сб. — 1963. — *60*, № 4. — С. 425–446.
2. *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.* Замечания об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 7. — С. 1011–1014.
3. *Кошманенко В. Д.* Возмущения самосопряженных операторов сингулярными билинейными формами// Укр. мат. ж. — 1989. — *41*, № 1.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Наука, 1989.
5. *Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д.* О точечном взаимодействии для систем из трех частиц в квантовой механике// Докл. АН СССР. — 1961. — *141*, № 6. — С. 1335–1338.
6. *Фрагела А. К.* О возмущении полигармонического оператора потенциалами с малыми носителями// Докл. АН СССР. — 1979. — *245*, № 1. — С. 34–36.
7. *Шондин Ю. Г.* Возмущения на тонких множествах высокой коразмерности эллиптических операторов и теория расширений в пространстве с индефинитной метрикой// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 1995. — *222*. — С. 246–292, 310–311.
8. *Albaverio S., Gestezy F., Hoegh-Krohn R., Holden H.* Some exactly solvable models in quantum mechanics. — Springer-Verlag, 1988.
9. *Gesztezy F., Simon B.* Rank-one perturbations at infinite coupling// J. Funct. Anal. — 1995. — *128*. — С. 245–252.
10. *Gunson J.* Perturbation theory for the Sturm—Liouville problem with an interior singularity// Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1987. — *414*.
11. *Kiselev A., Simon B.* Rank-one perturbations with infinitesimal coupling// J. Funct. Anal. — 1995. — *130*. — С. 345–356.
12. *Koshmanenko V., Karwowski W., Ota S.* Schrödinger operator perturbed by operators related to null sets// Positivity. — 1998. — *2*, № 1. — С. 77–99.
13. *Kurasov P.* On the Coulomb potentials in one dimension// J. Phys. A. — 1996. — *29*, № 8. — С. 1767–1771.

А. М. Савчук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: artem_savchuk@mail.ru

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 67–76

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА—ДИРИХЛЕ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2005 г. **А. П. ХРОМОВ**

В настоящей статье для разложений по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) оператора

$$Ly = \beta y'(x) + y'(1-x), \quad x \in [0,1], \quad \beta^2 \neq 1, \tag{1}$$

где

$$y'(1-x) = \frac{d}{d\xi} y(\xi)\Big|_{\xi=1-x},$$

с интегральным граничным условием

$$U(y) = \int_0^1 \frac{k(t)}{t^\alpha (1-t)^\alpha} y(t)\, dt = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

устанавливается аналог теоремы Жордана—Дирихле из теории тригонометрических рядов Фурье (см. [2, с. 121-122]). Для оператора дифференцирования $y'(x)$ с краевым условием:

$$U(y) = \int_0^1 y(t)\, d\sigma(t) = 0,$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации, имеющая скачки в точках 0 и 1, такой результат получен в [4]. Для оператора $y'(x)$, рассматриваемого на отрезке $[-1,1]$, и граничным условием:

$$U(y) = \int_{-1}^1 \frac{k(t)y(t)}{(1-|t|)^\alpha}\, dt = 0 \tag{3}$$

этот результат был установлен в [5]. Граничное условие (3) впервые было рассмотрено А. М. Седлецким [6] и исследование его связано с преодолением значительных трудностей. Оператор (1) замечателен тем, что $L^2 y = (\beta^2 - 1)y''(x)$ и он является главной частью обратного оператора

$$Af = \int_0^1 A(x,t) f(t)\, dt,$$

ядро которого разрывно на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$, рассмотренного в [7]. Важное значение для преодоления трудностей имеют асимптотические формулы для функций Миттаг-Леффлера [3], использованные О. И. Амвросовой [1] для получения теоремы равносходимости разложений по с.п.ф. для интегрального оператора $y^{(n)}(x)$ с широким набором краевых условий (3). Отметим, что изучение краевого условия (2) принципиально ничем не отличается от (3) и поэтому для оператора (1), (2) также имеет место равносходимость разложений по с.п.ф. и по обычной тригонометрической системе (для этого надо лишь рассмотреть $L^2 y$ и воспользоваться результатом О. И. Амвросовой).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и программы НШ-1295.2003.1.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

1. Перейдем к оператору L^2y. Легко видеть, что

$$L^2y = (\beta^2-1)y''(x), \quad U_j(y) = \int\limits_0^1 p_j(t)y^{(j-1)}(t)\,dt = 0, \quad j = 1,2,$$

где $p_j(t) = \dfrac{k_j(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha}$, $k_1(t) = k(t)$, $k_2(t) = \beta k(t) + k(1-t)$.

Займемся резольвентой оператора L^2 : $R_\lambda = (L^2 - \lambda E)^{-1}$, где λ — спектральный параметр и E — единичный оператор. Пусть $y = R_\lambda f$. Тогда

$$(\beta^2-1)y''(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad U_j(y) = 0, \quad j = 1,2.$$

Положим $\dfrac{\lambda}{\beta^2-1} = -\rho^2$, $\operatorname{Re}\rho i \geqslant \operatorname{Re}(-\rho i)$, $f_1(x) = \dfrac{f(x)}{\beta^2-1}$. Тогда

$$y''(x) + \rho^2 y(x) = f_1(x), \quad U_j(y) = 0, \quad j = 1,2.$$

Теорема 1. *Для $R_\lambda f$ имеет место формула*:

$$R_\lambda f = g(x,\rho;f_1) - (e^{\rho ix}, e^{-\rho ix})\Delta^{-1}(\rho)U(g(x,\rho;f_1)), \tag{4}$$

где

$$g(x,\rho;f_1) = \int\limits_0^1 g(x,t,\rho)f_1(t)\,dt, \quad g(x,t,\rho) = \frac{i}{2\rho}\varepsilon(x,t)e^{\rho i(t-x)} + \frac{i}{2\rho}\varepsilon(t,x)e^{\rho i(x-t)},$$

$$\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leqslant x, \\ 0 & \text{при } t > x, \end{cases}$$

$\Delta(\rho) = \big(U_{jk}(\rho)\big)_{j,k=1}^2$, $U_{j1}(\rho) = U_j(e^{\rho ix})$, $U_{j2}(\rho) = U_j(e^{-\rho ix})$, $U = (U_1, U_2)^T$ *и в* $U(g(x,\rho;f_1))$ *условие* U *применяется по переменной* x, T *— знак транспонирования.*

Доказательство. Имеем $g''_{x^2}(x,\rho;f_1) + \rho^2 g(x,\rho;f_1) = f_1(x)$. Поэтому

$$y = R_\lambda f = g(x,\rho;f_1) + (e^{\rho ix}, e^{-\rho ix})c,$$

где $c = (c_1, c_2)$ — постоянный вектор. Находя его из краевых условий, придем к (4). □

Теорема 2. *Если $f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$, то*

$$R_\lambda f = \frac{f_1(x)}{\rho_2} - \frac{1}{\rho^2}(e^{\rho ix}, e^{-\rho ix})\Delta^{-1}(\rho)\begin{pmatrix} U_1(f_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\rho^2}Q_1(x) -$$

$$- \frac{1}{2\rho^2}Q_2(x) - (e^{\rho ix}, e^{-\rho ix})\Delta^{-1}(\rho)\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\rho^2}[U_1(Q_1) - U_1(Q_2)] \\ -\dfrac{1}{2\rho i}\left[\displaystyle\int\limits_0^1 p_2(\tau)Q_1(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^1 p_2(\tau)Q_2(\tau)\,d\tau\right] \end{pmatrix}. \tag{5}$$

где

$$Q_1(x) = \int\limits_x^1 e^{\rho i(x-t)}\,df_1(t), \quad Q_2(x) = \int\limits_0^x e^{\rho i(t-x)}\,df_1(t).$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^x e^{\rho it} f_1(t)\,dt = \frac{1}{\rho i} e^{\rho it} f_1(t)\Big|_0^x - \frac{1}{\rho i}\int_0^x e^{\rho it}\,df_1(t),$$
$$\int_x^1 e^{-\rho it} f_1(t)\,dt = -\frac{1}{\rho i} e^{-\rho it} f_1(t)\Big|_x^1 + \frac{1}{\rho i}\int_x^1 e^{-\rho it}\,df_1(t).$$

Поэтому

$$g(x,\rho;f_1) = \frac{f_1(x)}{\rho^2} - \frac{f_1(0)}{2\rho^2}e^{-\rho ix} - \frac{f_1(1)}{2\rho^2}e^{-\rho i(1-x)} + \frac{1}{2\rho^2}Q_1(x) - \frac{1}{2\rho^2}Q_2(x). \tag{6}$$

Далее,

$$g'_x(x,\rho;f_1) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{\rho i(t-x)} f_1(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_x^1 e^{\rho i(x-t)} f_1(t)\,dt =$$
$$= -\frac{f_1(0)}{2\rho i}e^{-\rho ix} - \frac{f_1(1)}{2\rho i}e^{-\rho i(1-x)} - \frac{1}{2\rho i}Q_1(x) - \frac{1}{2\rho i}Q_2(x).$$

Значит,

$$U_1(g(x,\rho;f_1)) = \frac{U_1(f_1)}{\rho^2} - \frac{f_1(0)}{2\rho^2}U_{12}(\rho) - \frac{f_1(1)}{2\rho^2}e^{-\rho i}U_{11}(\rho) + \frac{1}{2\rho^2}U_1(Q_1) - \frac{1}{2\rho^2}U_1(Q_2), \tag{7}$$

$$U_2(g(x,\rho;f_1)) = -\frac{f_1(0)}{2\rho^2}U_{22}(\rho) - \frac{f_1(1)}{2\rho^2}e^{-\rho i}U_{21}(\rho) - \frac{1}{2\rho i}\int_0^1 p_2(\tau)Q_1(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2\rho i}\int_0^1 p_2(\tau)Q_2(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Далее,

$$(e^{\rho ix}, e^{-\rho ix})\Delta^{-1}(\rho)\begin{pmatrix}U_{11}(\rho)\\ U_{21}(\rho)\end{pmatrix} = e^{\rho ix}, \quad (e^{\rho ix}, e^{-\rho ix})\Delta^{-1}(\rho)\begin{pmatrix}U_{12}(\rho)\\ U_{22}(\rho)\end{pmatrix} = e^{-\rho ix}. \tag{9}$$

Подставляя (6)–(9) в правую часть (4), придем к (5). □

2. Приведем необходимое изучение некоторых интегралов при больших значениях параметра, базирующееся на асимптотике функции Миттаг-Леффлера. Рассмотрим интеграл

$$I_\lambda(\xi_1,\xi_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{\lambda t}t^{-\alpha}\,dt, \quad 0<\xi_1<\xi_2.$$

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$I_\lambda(0,\xi) = \xi^{1-\alpha}\Gamma(1-\alpha)E_1(-\lambda\xi, 2-\alpha)e^{\lambda\xi}, \quad \xi>0,$$

где

$$E_\rho(z,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})}$$

— функция Миттаг-Леффлера.

Доказательство. Имеем

$$I_\lambda(0,\xi) = e^{\lambda\xi}\int_0^\xi e^{\lambda(t-\xi)}t^{-\alpha}\,dt = e^{\lambda\xi}\xi^{1-\alpha}\int_0^1 e^{-\lambda\xi(1-\tau)}\tau^{-\alpha}\,d\tau. \tag{10}$$

Далее

$$\int\limits_0^1 e^{\mu(1-\tau)}\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\,d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\int\limits_0^1\frac{(1-\tau)^k}{k!}\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\,d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^k}{\Gamma(2-\alpha+k)}=E_1(\mu,2-\alpha). \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает утверждение леммы. □

Лемма 2. *Имеет место асимптотическая формула*

$$I_\lambda(0,\xi)=(-\lambda)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)+O(\xi^{-\alpha}\lambda^{-1}e^{\lambda\xi}),$$

где $\xi\in(0,1]$ *и оценка* $O(\ldots)$ *равномерна по* λ *и* ξ.

Доказательство. Нам потребуются следующие сведения об асимптотике функции Миттаг-Леффлера (см. [3, с. 133-134]):

Пусть $\rho>1/2$, μ — произвольное комплексное число и γ — вещественное число, удовлетворяющее неравенству $\pi/2\rho<\gamma<\min\{\pi,\pi/\rho\}$. Тогда для любого целого $p>1$ и $|z|\to\infty$ справедлива асимптотическая формула:

1) при $|\arg z|\leqslant\gamma$

$$E_\rho(z,\mu)=\rho z^{\rho(1-\mu)}e^{z^\rho}-\sum_{k=1}^{p}\frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu-k\rho^{-1})}+O(|z|^{-p-1}).$$

2) при $\gamma\leqslant|\arg z|\leqslant\pi$

$$E_\rho(z,\mu)=-\sum_{k=1}^{p}\frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu-k\rho^{-1})}+O(|z|^{-p-1}).$$

Применим эти факты к асимптотике $E_1(-\lambda\xi,2-\alpha)$. Если $\pi/2<\gamma<\pi$, то при $|\arg(-\lambda\xi)|\leqslant\gamma$

$$E_1(-\lambda\xi,2-\alpha)=(-\lambda\xi)^{\alpha-1}e^{-\lambda\xi}+O(|\lambda\xi|^{-1}). \tag{12}$$

При $\gamma\leqslant|\arg(-\lambda\xi)|\leqslant\pi$

$$E_1(-\lambda\xi,2-\alpha)=O(|\lambda\xi|^{-1})=O(|\lambda\xi|^{-1})+(-\lambda\xi)^{\alpha-1}e^{-\lambda\xi}-(-\lambda\xi)^{\alpha-1}e^{-\lambda\xi}. \tag{13}$$

Так как во втором случае $|e^{-\lambda\xi}|\leqslant e^{-|\lambda\xi|\cos(\pi-\gamma)}$, то из (13) следует асимптотика (12) при всех $-\lambda\xi$ и утверждение вытекает из леммы 1. □

Лемма 3. *Имеет место асимптотическая формула*

$$I_\lambda(0,\xi)=(-\lambda)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)+O(\lambda^{\alpha-1}e^{\lambda\xi}). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $|\lambda\xi|\geqslant 1$. Тогда (14) следует из леммы 2. Пусть $|\lambda\xi|\leqslant 1$. Тогда $E_1(-\lambda\xi,2-\alpha)=O(1)$ и поэтому по лемме 1

$$I_\lambda(0,\xi)=O(\xi^{1-\alpha}e^{\lambda\xi})=O(\lambda^{\alpha-1}e^{\lambda\xi}).$$

Лемма доказана. □

Следствие 1. *Справедлива оценка:*

$$\max_{\tau\in[0,\xi]}|I_\lambda(0,\tau)|=O\Big(|\lambda|^{\alpha-1}\big[1+|e^{\lambda\xi}|\big]\Big).$$

Лемма 4. *Имеют место следующие оценки:*

$$I_\lambda(\xi_1,\xi_2)=O\Big(|\lambda|^{-1}\big[\xi_1^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_1}|+\xi_2^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_2}|\big]\Big), \tag{15}$$

$$I_\lambda(\xi_1,\xi_2)=O\Big(|\lambda|^{\alpha-1}\big[|e^{\lambda\xi_1}|+|e^{\lambda\xi_2}|\big]\Big). \tag{16}$$

Доказательство следует из формулы: $I_\lambda(\xi_1,\xi_2)=I_\lambda(0,\xi_2)-I_\lambda(0,\xi_1)$ с последующим использованием лемм 2 и 3.

Лемма 5. *Имеет место оценка*

$$\max_{\xi\in[\xi_1,\xi_2]}|I_\lambda(\xi_1,\xi)| = O\Big(|\lambda|^{-1}\big[\xi_1^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_1}| + \xi_2^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_2}|\big]\Big). \tag{17}$$

Доказательство. В силу (15) имеем

$$\max_{\xi\in[\xi_1,\xi_2]}|I_\lambda(\xi_1,\xi)| = O\left(|\lambda|^{-1}\left[\xi_1^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_1}| + \max_{\xi\in[\xi_1,\xi_2]}|\xi^{-\alpha}e^{\lambda\xi}|\right]\right). \tag{18}$$

Дадим оценку max в правой части (18). Пусть сначала $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$. Тогда

$$\max_{\xi\in[\xi_1,\xi_2]}|\xi^{-\alpha}e^{\lambda\xi}| \leqslant |e^{\lambda\xi_1}| \max_{\xi\in[\xi_1,\xi_2]}\xi^{-\alpha} = \xi_1^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_1}|$$

и тем самым (17) установлено. Пусть теперь $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Рассмотрим функцию $f(\eta) = \eta^{-\alpha}e^{a\eta}$, $a > 0$, $\eta \in (0,\infty)$. Производная ее обращается в нуль только в одной точке $\eta_0 = \alpha/a$. Значит, при $\eta < \eta_0$ и $\eta > \eta_0$ она монотонна. Поэтому имеем

$$\xi^{-\alpha}|e^{\lambda\xi}| \leqslant \xi_1^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_1}| + \xi_2^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_2}|,$$

если $\eta_0 = \alpha/\operatorname{Re}\lambda$ вне (ξ_1,ξ_2). Если же $\eta_0 \in (\xi_1,\xi_2)$, то

$$\xi^{-\alpha}|e^{\lambda\xi}| \leqslant \xi_1^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_1}| + \xi_2^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_2}| + \eta_0^{-\alpha}e^{\alpha}.$$

Но

$$\eta_0^{-\alpha} \leqslant c\xi_1^{-\alpha} = c\xi_1^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_1}||e^{-\lambda\xi_1}| \leqslant c\xi_1^{-\alpha}|e^{\lambda\xi_1}|.$$

Лемма доказана. □

Лемма 6. *Если $\varphi(x) \in C[0,1]\cap V[0,1]$, то при фиксированном $\xi \in [0,1]$*

$$\int_0^\xi e^{\lambda t}t^{-\alpha}\varphi(t)\,dt = \varphi(0)\Gamma(1-\alpha)(-\lambda)^{\alpha-1} + o\Big(\lambda^{\alpha-1}\big[1+|e^{\lambda\xi}|\big]\Big).$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^\xi e^{\lambda t}t^{-\alpha}\varphi(t)\,dt = \varphi(0)I_\lambda(0,\xi) + \int_0^\xi e^{\lambda t}t^{-\alpha}\psi(t)\,dt, \tag{19}$$

где $\psi(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$. По лемме 2 первое слагаемое в (19) есть

$$\varphi(0)\Big\{(-\lambda)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + O\big((\lambda\xi)^{-1}e^{\lambda\xi}\big)\Big\} = \varphi(0)(-\lambda)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + o\big(\lambda^{\alpha-1}e^{\lambda\xi}\big).$$

Исследуем второе слагаемое в правой части (19). Имеем

$$\int_0^\xi e^{\lambda t}t^{-\alpha}\psi(t)\,dt = \int_0^\delta + \int_\delta^\xi, \quad 0 < \delta < \xi. \tag{20}$$

Так как

$$\int_0^\delta = \psi(\delta)I_\lambda(0,\delta) - \int_0^\delta I_\lambda(0,t)\,d\psi(t),$$

то отсюда по следствию 1 получаем

$$\int_0^\delta = O\left(\left(|\psi(\delta)| + \bigvee_0^\delta(\psi)\right)|\lambda|^{\alpha-1}\big[1+|e^{\lambda\delta}|\big]\right). \tag{21}$$

Рассмотрим $\int\limits_{\delta}^{\xi}$. Имеем

$$\int\limits_{\delta}^{\xi} = \psi(\xi) I_\lambda(\delta,\xi) - \int\limits_{\delta}^{\xi} I_\lambda(\delta,t)\,d\psi(t).$$

Отсюда по леммам 4 и 5

$$\int\limits_{\delta}^{\xi} = O\left(\left(|\psi(\xi)| + \bigvee_{\delta}^{\xi}(\psi)\right)|\lambda|^{-1}\left[\delta^{-\alpha}|e^{\lambda\delta}| + \xi^{-\alpha}|e^{\lambda\xi}|\right]\right). \tag{22}$$

Так как $\psi(0) = 0$, то из (20)–(22) за счет выбора δ получаем

$$\int\limits_{0}^{\xi} e^{\lambda t} t^{-\alpha}\psi(t)\,dt = o\Big(|\lambda|^{\alpha-1}\big[1 + |e^{\lambda\xi}|\big]\Big), \quad \lambda \to \infty,$$

и тем самым лемма доказана. □

Лемма 7. *Если* $p(t) = \dfrac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha}$, $k(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$, *то*

$$\int\limits_{0}^{\xi} p(t)e^{\lambda t}\,dt = o\Big(r^{\alpha-1}\big[1 + |e^{\lambda\xi}|\big]\Big), \quad |\lambda| = r, \quad \xi \in [0,1]. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $\xi \leqslant 1/2$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{\xi} p(t)e^{\lambda t}\,dt = \int\limits_{0}^{\xi} t^{-\alpha}\varphi(t)e^{\lambda t}\,dt = \varphi(0)I_\lambda(0,\xi) - \int\limits_{0}^{\xi} I_\lambda(0,\tau)\,d\varphi(\tau)$$

и (23) вытекает из следствия 1.

Пусть $\xi \geqslant 1/2$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{\xi} = \int\limits_{0}^{1/2} + \int\limits_{1/2}^{\xi}.$$

По уже доказанному

$$\int\limits_{0}^{1/2} = O\Big(r^{\alpha-1}\big[1 + |e^{\lambda/2}|\big]\Big).$$

Далее,

$$\int\limits_{1/2}^{\xi} = \int\limits_{1-\xi}^{1/2} \frac{k(1-\tau)}{(1-\tau)^\alpha\tau^\alpha}e^{\lambda(1-\tau)}\,d\tau = e^\lambda \int\limits_{1-\xi}^{1/2} \varphi(\tau)\tau^{-\alpha}e^{-\lambda\tau}\,d\tau =$$

$$= e^\lambda\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right)I_\lambda\left(1-\xi,\frac{1}{2}\right) - \int\limits_{1-\xi}^{1/2} I_{-\lambda}(1-\xi,\tau)\,d\varphi(\tau)\right].$$

Отсюда в силу (16) получаем

$$\int\limits_{1/2}^{\xi} = O\Big(r^{\alpha-1}\big[|e^{\lambda\xi}| + |e^{\lambda/2}|\big]\Big).$$

Лемма доказана. □

Лемма 8. *Если $p(t)$ из леммы 7, $f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$, то при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ справедлива оценка:*

$$\int_0^1 e^{-\lambda t}\,df(t) \int_0^t e^{\lambda\tau}p(\tau)\,d\tau = O\left(r^{\alpha-1}\left[\bigvee_0^{r_1}(f) + \bigvee_{1-r_1}^{1}(f)\right]\right) + \\ + O\Big(r^{\alpha-1}|e^{-\lambda r_1/2}|\Big) + O\left(\frac{r_1^{-2\alpha}}{\operatorname{Re}\lambda}\big[1-|e^{-\lambda r_1/2}|\big]\right), \quad r_1 = r^{-1/2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^1 = \int_0^{r_1} + \int_{r_1}^{1-r_1} + \int_{1-r_1}^1 .$$

По лемме 7

$$\int_0^{r_1} + \int_{1-r_1}^1 = O\left(r^{\alpha-1}\left[\bigvee_0^{r_1}(f) + \bigvee_{1-r_1}^{1}(f)\right]\right).$$

Далее,

$$\int_{r_1}^{1-r_1} = \int_{r_1}^{1-r_1} e^{-\lambda t}df(t) \int_0^{t-r_1/2} e^{\lambda\tau}p(\tau)\,d\tau + \int_{r_1}^{1-r_1} e^{-\lambda t}df(t) \int_{t-r_1/2}^{t} e^{\lambda\tau}p(\tau)\,d\tau = \\ = O\Big(r^{\alpha-1}|e^{-\lambda r_1/2}|\Big) + \int_{r_1}^{1-r_1} e^{-\lambda t}df(t) \int_{t-r_1/2}^{t} e^{\lambda\tau}p(\tau)\,d\tau$$

опять по лемме 7. Так как при $t - r_1/2 \leqslant \tau \leqslant t$, $r_1 \leqslant t \leqslant 1 - r_1$ имеем $|p(\tau)| \leqslant cr_1^{-2\alpha}$, то

$$\int_{t-r_1/2}^{t} e^{\lambda\tau}p(\tau)\,d\tau = O\left(\frac{r_1^{-2\alpha}|e^{\lambda t}|}{\operatorname{Re}\lambda}\big[1-|e^{-\lambda r_1/2}|\big]\right)$$

и тем самым лемма доказана. □

3. Теперь, используя теорему 2, можем получить наш основной результат.

Лемма 9. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$U_{1j}(\rho) = \Gamma(1-\alpha)(\rho\omega_j)^{\alpha-1}\Big\{k(0)(-1)^{\alpha-1} + k(1)e^{\rho\omega_j} + o\big(1+|e^{\rho\omega_j}|\big)\Big\}, \tag{24}$$

$$U_{2j}(\rho) = \rho\omega_j\Gamma(1-\alpha)(\rho\omega_j)^{\alpha-1}\Big\{k_2(0)(-1)^{\alpha-1} + k_2(1)e^{\rho\omega_j} + o\big(1+|e^{\rho\omega_j}|\big)\Big\}, \tag{25}$$

где $\omega_j = (-1)^{j+1}i$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Имеем по лемме 6

$$U_{1j}(\rho) = U_1(e^{\rho\omega_j x}) = \int_0^1 p_1(t)e^{\rho\omega_j t}\,dt = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 =$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha} e^{\rho\omega_j t}\,dt + e^{\rho\omega_j} \int_0^{1/2} \frac{k(1-t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha} e^{-\rho\omega_j t}\,dt =$$

$$= k(0)\Gamma(1-\alpha)(-\rho\omega_j)^{\alpha-1} + o\Big(|\rho|^{\alpha-1}\big[1+|e^{\rho\omega_j}|\big]\Big) +$$

$$+ e^{\rho\omega_j}\Big\{k(1)\Gamma(1-\alpha)(\rho\omega_j)^{\alpha-1} + o\Big(|\rho|^{\alpha-1}\big[1+|e^{-\rho\omega_j}|\big]\Big)\Big\} =$$

$$= \Gamma(1-\alpha)(\rho\omega_j)^{\alpha-1}\Big\{k(0)(-1)^{\alpha-1} + k(1)e^{\rho\omega_j} + o\big(1+|e^{\rho\omega_j}|\big)\Big\}.$$

Тем самым (24) получены. Аналогично получаются (25). □

Лемма 10. *Имеет место асимптотическая формула:*

$$\det\Delta(\rho) = \big\{a_0 + a_1e^{-\rho i} + a_2e^{-2\rho i} + o(1)\big\}\Gamma^2(1-\alpha)\rho^{2\alpha-1}e^{\rho i},$$

где

$$a_0 = a_2 = (-1)^\alpha i(k(1)k_2(0) + k(0)k_2(1)), \quad a_1 = 2(-1)^{2\alpha-1}i(k(0)k_2(0) + k(1)k_2(1)).$$

Утверждение леммы легко следует из леммы 9.

Следствие 2. *Если $k(1)k_2(0) + k(0)k_2(1) \neq 0$, то в области S_δ при больших $|\rho|$ имеет место оценка*

$$|\det\Delta(\rho)| \geqslant C|\rho|^{2\alpha-1}|e^{\rho i}|.$$

(Область S_δ получается удалением из полуплоскости $\operatorname{Re}\rho i \geqslant \operatorname{Re}(-\rho i)$ нулей функции $a_0 + a_1e^{-\rho i} + a_2e^{-2\rho i}$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ).

Лемма 11. *В S_δ для компонент $\Delta_{jk}(\rho)$ матрицы $\Delta^{-1}(\rho)$ имеют место оценки:*

$$\Delta_{j1}(\rho) = O\big(r^{1-\alpha}|e^{-\rho i}|\big), \quad \Delta_{j2}(\rho) = O\big(r^{-\alpha}|e^{-\rho i}|\big) \quad j = 1, 2.$$

Утверждение леммы следует из формул

$$\Delta_{11}(\rho) = \frac{U_{22}(\rho)}{\det\Delta(\rho)}, \quad \Delta_{12}(\rho) = -\frac{U_{12}(\rho)}{\det\Delta(\rho)}, \quad \Delta_{21}(\rho) = -\frac{U_{21}(\rho)}{\det\Delta(\rho)}, \quad \Delta_{22}(\rho) = \frac{U_{11}(\rho)}{\det\Delta(\rho)},$$

леммы 9 и следствия 2.

Теорема 3 (аналог теоремы Жордана—Дирихле)**.** *Если $k^2(0) + k^2(1) + 2k(0)k(1)\beta \neq 0$, $\beta^2 \neq 1$, $k(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$, $f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ и*

$$\int_0^1 \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha} f(t)\,dt = 0,$$

то

$$\lim_{R\to\infty} \max_{x\in[0,1]} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} R_\lambda f\,d\lambda \right| = 0. \tag{26}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$k(1)k_2(0) + k(0)k_2(1) = k^2(0) + k^2(1) + 2k(0)k(1)\beta \neq 0.$$

Обратимся к теореме 2. Имеем

$$\int\limits_{|\lambda|=R} \frac{1}{2\rho^2} Q_1(x)\, d\lambda = \int\limits_{|\rho|=r}{}' \frac{1}{\rho} \int\limits_x^1 e^{\rho i(t-x)}\, df_1(t)\, d\rho,$$

где $'$ означает, что интегрирование идет по части окружности $|\rho| = r$, находящейся в полуплоскости $\operatorname{Re}\rho i \geqslant \operatorname{Re}(-\rho i)$. Но

$$\left| \int\limits_x^1 e^{\rho i(t-x)}\, df_1(t) \right| = \left| \int\limits_x^{x+r_1} + \int\limits_{x+r_1}^1 \right| \leqslant \bigvee_x^{x+r_1}(f) + c|e^{-\rho i r_1}|, \quad r_1 = r^{-1/2}.$$

Так как

$$\int\limits_{|\rho|=r}{}' \frac{1}{|\rho|} |e^{-\rho i r_1}|\, |d\rho| = o(1),$$

то

$$\int\limits_{|\lambda|=R} \frac{1}{2\rho^2} Q_1(x)\, d\lambda = o(1).$$

Аналогично и

$$\int\limits_{|\lambda|=R} \frac{1}{2\rho^2} Q_2(x)\, d\lambda = o(1).$$

Далее, по лемме 8 имеем оценки:

$$\int\limits_0^1 p_j(\tau) Q_1(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^1 e^{-\rho i t}\, df_1(t) \int\limits_0^t e^{\rho i \tau} p_j(\tau)\, d\tau =$$

$$= O\left(r^{\alpha-1} \left[\bigvee_0^{r_1}(f) + \bigvee_{1-r_1}^1 (f) \right] \right) + O\Big(r^{\alpha-1} |e^{-\rho i r_1/2}| \Big) + O\left(\frac{r_1^{-2\alpha}}{\operatorname{Re}\rho i} \big[1 - |e^{-\rho i r_1/2}| \big] \right), \quad j = 1, 2. \quad (27)$$

Так как

$$\int\limits_0^1 p_j(\tau) Q_2(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^1 e^{-\rho i t}\, df_1(1-t) \int\limits_0^t p_j(1-\tau) e^{\rho i \tau}\, d\tau,$$

то (27) имеет место и для интеграла

$$\int\limits_0^1 p_j(\tau) Q_2(\tau)\, d\tau.$$

Рассмотрим $(e^{\rho i x}, e^{-\rho i x})\Delta^{-1}(\rho)$. Имеем

$$(e^{\rho i x}, e^{-\rho i x})\Delta^{-1}(\rho) = \Big(e^{\rho i x}\Delta_{11}(\rho) + e^{-\rho i x}\Delta_{21}(\rho),\ e^{\rho i x}\Delta_{12}(\rho) + e^{-\rho i x}\Delta_{22}(\rho) \Big).$$

По лемме 11

$$e^{\rho i x}\Delta_{11}(\rho) + e^{-\rho i x}\Delta_{21}(\rho) = O(r^{1-\alpha} e^{-\rho i(1-x)}) = O(r^{1-\alpha}),$$
$$e^{\rho i x}\Delta_{12}(\rho) + e^{-\rho i x}\Delta_{22}(\rho) = O(r^{-\alpha}).$$

Поэтому для последнего слагаемого в (5) имеем оценку:

$$\big(e^{\rho i x}, e^{-\rho i x}\big)\Delta^{-1}(\rho)(\cdot) = O\left(\frac{1}{r^2} \left[\bigvee_0^{r_1}(f_1) + \bigvee_{1-r_1}^1 (f_1) \right] \right) + O\left(\frac{1}{r^2} |e^{-\rho i r_1/2}| \right) + O\left(\frac{1}{r \operatorname{Re}\rho i} \big[1 - |e^{-\rho i r_1/2}| \big] \right).$$

Но

$$\int\limits_{|\rho|=r}{}' \frac{1}{r}|d\rho| = O(1), \quad \int\limits_{|\rho|=r}{}' \frac{|e^{-\rho i r_1/2}|}{r}|d\rho| = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \int\limits_{|\rho|=r}{}' \frac{1}{\operatorname{Re}\rho i}\left[1 - |e^{-\rho i r_1/2}|\right]|d\rho| = O\left(\frac{\ln r}{\sqrt{r}}\right).$$

Поэтому

$$\int\limits_{|\lambda|=r} (e^{\rho i x}, e^{-\rho i x})\Delta^{-1}(\rho)(\cdot)\, d\lambda = o(1).$$

Наконец, учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=R} \frac{f_1(x)}{\rho^2}\, d\lambda = -f(x)$$

и $U_1(f_1) = 0$, приходим к (26). Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амвросова О. И.* Асимптотика собственных значений и теоремы равносходимости для операторов со степенными особенностями в краевых условиях// В сб. «Функциональный анализ». — Ульяновск, 1983. — *21*. — С. 3–11.
2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966.
4. *Молоденков В. А., Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи для оператора дифференцирования// В сб. «Дифференциальные уравнения и вычислительная математика» Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1972. — *1*.
5. *Седлецкий А. М.* О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье// Тр. Мат. ин-та РАН. — 1991. — *200*. — С. 299–309.
6. *Седлецкий А. М.* О равносходимости и равносуммируемости негармонических разложений Фурье с обычными тригонометрическими рядами// Мат. заметки. — 1975. — *18*, № 1. — С. 9–17.
7. *Хромов А. П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях// Мат. заметки. — 1998. — *64*, № 6. — С. 932–949.

А. П. Хромов
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 77–82

О РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2005 г. **А. П. ХРОМОВ**

Одна из главных трудностей исследования вопроса сходимости спектральных разложений интегрального оператора

$$Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

заключается в большой общности предмета. Речь идет об исследовании сходимости разложений Фурье для всевозможных биортогональных систем, ибо для любой биортогональной системы функций $\{\varphi_k(x)\}$, $\{\psi_k(x)\}$ можно указать интегральный оператор с ядром

$$A(x,t) = \sum \frac{\varphi_k(x)\overline{\psi}_k(t)}{\lambda_k}$$

такой, что система $\{\varphi_k(x)\}$ оказывается системой собственных функций такого оператора. Начиная с работ Гильберта в самосопряженном случае и М. В. Келдыша в несамосопряженном случае накопилось большое число работ, относящихся к спектральному анализу интегральных операторов (1), а также операторов в многомерном и абстрактных случаях.

Настоящая статья посвящается конкретному вопросу — вопросу о равносходимости спектральных разложений и разложений в обычные тригонометрические ряды Фурье.

Впервые теорема равносходимости была установлена в работах В. А. Стеклова [19], Е. В. Гобсона [17] и А. Хаара [16] для оператора Штурма–Лиувилля. Затем Я. Д. Тамаркин [11] и М. Стоун [20] распространили этот результат на произвольный дифференциальный оператор:

$$l[y] = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x)y^{(k)}, \quad p_k(x) \in L[0,1], \tag{2}$$

с произвольными краевыми условиями:

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1}[a_{jk}y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1)] = 0, \quad j = 1,\dots,n, \tag{3}$$

удовлетворяющими условию регулярности Биркгофа (см. [7, с.66-67]), которое заключается в отличии от нуля некоторых определителей, составленных из коэффициентов при старших производных в $U_j(y)$ (после приведения их к нормированному виду, см. [7, с.65-66]). Дадим формулировку этой теоремы.

Теорема 1. *Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \left\|S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)\right\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0, \tag{4}$$

где $\delta \in (0,1/2)$, $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора (2)–(3) для тех собственных значений λ_k, для которых $|\lambda_k| < r^n$ и $\sigma_r(f,x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье для тех k, для которых $k\pi < r$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00075) и программы «Ведущие научные школы» (проект №00-15-96123).

Условия регулярности снять, вообще говоря, нельзя [12].

Этот результат породил и по настоящее время интенсивно развивающееся направление. В данной статье мы излагаем результаты, получаемые методом контурного интегрирования Коши—Пуанкаре. Отметим, что другой известный метод — метод лиувиллевского типа — также получил широкое развитие (правда, пока лишь для дифференциальных операторов). Достаточно отметить многочисленные работы В. А. Ильина (основополагающие статьи [1–3])), разработавшего метод получения теорем равносходимости, когда дифференциальный оператор не привязывается к граничным условиям, а лишь используется дополнительная информация о поведении собственных значений и собственных функций, и этот метод приводит часто к результатам окончательного характера.

С точки зрения интегральных операторов теорема 1 дает равносходимость спектральных разложений для операторов (1) с ядрами, являющимися функциями Грина дифференциальных операторов. Для интегральных операторов общего вида вопрос о равносходимости исследовался впервые, по-видимому, автором (см. [4, 13]). Мы будем предполагать, что ядро $A(x,t)$ удовлетворяет следующим требованиям:

а) $A_{x^s t^j}(x,t) = \dfrac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t)$, $s, j = 0, \dots, n$, непрерывны при $t \leqslant x$ и $t \geqslant x$;

б) A^{-1} существует;

в) $\Delta A_{x^s}(x,t)\big|_{t=x} = A_{x^s}(x,t)\big|_{t=x-0} - A_{x^s}(x,t)\big|_{t=x+0} = \delta_{s,n-1}$, $s = 0, \dots, n$, где $\delta_{s,k}$ — символ Кронекера.

Проанализируем эти требования. Условия а), как показывают примеры, ослабить нельзя. Условие б) необходимо для справедливости (4). Условию в) удовлетворяют ядра $A(x,t)$, являющиеся функциями Грина оператора (2)–(3), и относительно его важности сформулируем следующий результат.

Теорема 2 (см. [13]). *Пусть $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора* (1) *и для любой $f(x) \in L[0,1]$ выполняются соотношения*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \frac{1}{r^s} \frac{d^s}{dx^s} (S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)) \right\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0, \quad \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad s = 0, 1.$$

Тогда существует интегральный оператор

$$Bf = \int_0^1 B(x,t) f(t)\, dt$$

с теми же с.п.ф., что и у оператора (1), *ядро которого $B(x,t)$ непрерывно по x и t из $(0,1)$, непрерывно дифференцируемо по x из $(0,1)$ и $x \neq t$, и выполняется условие* в) *при $x \in (0,1)$, $s = 0, 1$ и $n = 2$ (здесь предполагается, что с.п.ф. оператора* (1) *непрерывно дифференцируемы по x из $(0,1)$).*

Тем самым условие в) говорит о каноническом виде оператора (1), для которого имеет место равносходимость спектральных разложений с разложениями Фурье. Теорему 2 можно распространить и на случай произвольного четного n. Случай нечетного n остается открытым.

Теорема 3 (см. [13]). *Если выполняются условия* а)–в), *то*

$$A^{-1}y = (E+N)(y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y), \tag{5}$$

$$U_j(y) = (y, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n, \tag{6}$$

где E — единичный оператор, N — интегральный оператор

$$Nf = \int_0^1 N(x,t) f(t)\, dt$$

с непрерывным при $t \leqslant x$ *и* $t \geqslant x$ *ядром* $N(x,t)$ (*на линии* $t = x$ *возможен разрыв первого рода*), $a_1, \dots, a_n$ — *константы,* $U_j(y)$ *те же, что и в* (3),

$$(y, \varphi_j) = \int_0^1 y(x)\varphi_j(x)\,dx$$

и $\varphi_j(x) \in C[0,1]$.

Метод исследования спектральных разложений в нашем случае — метод Коши-Пуанкаре. Он состоит в том, что исследуются интегралы

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda,$$

где $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ — резольвента Фредгольма оператора A, λ — спектральный параметр. Эти интегралы представляют собой частичные суммы ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел, которые попали в круг $|\lambda| < r$. Теорема 3 замечательна тем, что изучение R_λ при больших $|\lambda|$ сводится к изучению резольвенты интегро-дифференциального оператора (5)–(6). С этой целью введем в рассмотрение операторы:

$$L_0 : L_0 y = y^{(n)}, \qquad U_j(y) = 0, \qquad j = 1, \dots, n,$$
$$L_1 : L_1 y = y^{(n)}, \qquad V_j(y) = U_j(y) - (y, \varphi_j) = 0, \qquad j = 1, \dots, n,$$

и пусть $R_{s,\lambda} = (L_s - \lambda E)^{-1}$ $(s = 0, 1)$ — их резольвенты. Имеют место соотношения:

$$R_{1,\lambda} = R_{0,\lambda} - (\exp \rho\omega_1 x, \dots, \exp \rho\omega_n x)\Delta^{-1}(\rho)V(R_{0,\lambda}f), \tag{7}$$
$$y = R_{1,\lambda} + R_{1,\lambda}Ny^{(n)}, \quad y = R_\lambda f. \tag{8}$$

Здесь $\lambda = -\rho^n$, $\omega_j^n = -1$, $\Delta(\rho) = (V_j(\exp \rho\omega_k x))_{j,k=1}^n$, $V(\cdot) = \big(V_1(\cdot), \dots, V_n(\cdot)\big)^T$ (T — знак транспонирования). Ради простоты считаем, что a_j в (5) равны нулю. Наш метод теперь заключается в том, что сначала изучается резольвента оператора L_0, затем, по формуле (7) $R_{1,\lambda}$ и, наконец, исследуется интегро-дифференциальное уравнение (8). Существенным моментом является использование оценок вида

$$\|D^s R_{1,\lambda} f\|_1 = \left(\frac{1}{\rho^{n-1-s}}\varkappa(\rho)\|f\|_1\right), \quad s = 0, \dots, n-1,$$

где $D = \dfrac{d}{dx}$, $\varkappa(\rho) = \dfrac{1}{\operatorname{Re}\rho\omega}\big(1 - \exp(-\operatorname{Re}\rho\omega)\big)$ при $\operatorname{Re}\rho\omega \geqslant 0$ и ω те из ω_k, для которых $\operatorname{Re}\rho\omega_k = 0$ на некоторых лучах $\arg\rho = \text{const}$, $\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$. Формулы (7) и (8) позволяют изучить $R_\lambda f - R_{0,\lambda}f$ и тем самым установить равносходимость спектральных разложений оператора (1) с разложением Фурье по с.п.ф. оператора L_0, а затем воспользоваться теоремой 1. Приводим соответствующий результат.

Теорема 4 (см. [13]). *Пусть* A *удовлетворяет условиям теоремы* 3 *и, кроме того,*

г) $U_j(y)$ *из* (6) *регулярны по Биркгофу*;

д) $\operatorname{Var}\limits_0^1{}_x A_{x^n}(x,t)$ *ограничена по* t.

Тогда имеет место заключение теоремы 1.

Условия г) и д) ослабить нельзя.

Недостаток теоремы 4 состоит в трудной проверяемости условия г). Этот недостаток устраняется в следующей теореме.

Теорема 5 (см. [4]). *Если* A *удовлетворяет условиям* а)–в), д) *и* $A(x,t) = \overline{A(t,x)}$, *то имеет место заключение теоремы* 1.

При получении этого результата важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 6 (см. [4]). *Пусть L — дифференциальный оператор*

$$Ly = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)}, \quad p_k(x) \in C^k[0,1],$$

с нормированными краевыми условиями $U_j(y) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Пусть $V_j(y) = 0$, $j = 1, \dots, n$, — нормированные краевые условия сопряженного оператора L^*. Если части $U_j(y)$ и $V_j(y)$, содержащие старшие производные, совпадают, то $U_j(y)$, $j = 1, \dots, n$, регулярны по Биркгофу.

Эта теорема дает положительный ответ на обобщенную гипотезу Камке. Гипотеза Камке состояла в утверждении регулярности самосопряженных краевых условий. Ее положительное решение дано С. Салафом [18] и А. М. Минкиным [5].

В [8] Б. В. Пальцев исследовал интегральные операторы (1), когда $A(x,t) = A(x-t)$ и $A(x)$ является преобразованием Фурье рациональной функции, т.е.

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} \exp(-ixz)\, dz,$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — полиномы степеней p и q $(p < q)$ со старшими коэффициентами, равными 1. Были введены условия, аналогичные условиям регулярности, найдены асимптотики характеристических чисел, собственных функций и исследовалась сходимость спектральных разложений в $L_p[0,1]$. Л. Г. Назаровым [6] было показано, что операторы Б. В. Пальцева являются частным случаем операторов, рассмотренных выше, и условия регулярности Б. В. Пальцева переходят в условия регулярности Биркгофа и тем самым теорема равносходимости переносится и на такие операторы. Выделим еще частный случай оператора Б. В. Пальцева, когда теорема равносходимости формулируется особенно просто.

Теорема 7 (см. [13]). *Обозначим через q^+ (q^-) число корней многочлена $Q(z)$ в верхней (нижней) полуплоскости. Тогда, если $q - p \geqslant \max\{q^+, q^-\}$, многочлен $P(t)\overline{Q}(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, имеет вещественные коэффициенты, то для оператора*

$$A_1 f = \int_0^1 A_1(x-t) f(t)\, dt,$$

где

$$A_1(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi} A(x) \exp \theta x, \quad \theta = \frac{i}{n}(a-b),$$

$n = q - p$ и a (соответственно, b) — коэффициенты при z^{p-1} (соответственно, z^{q-1}) многочлена $P(z)$ (соответственно, $Q(z)$), справедливо заключение теоремы 1.

Начиная с 1998 г. (см. [14]) мы стали изучать операторы, ядра которых имеют скачки $(n-1)$-й производной не только на линии $t = x$, но и на $t = 1 - x$. Это совершенно новый класс операторов. Мы их рассматриваем в виде

$$Af = \alpha_1 \int_0^x A_1(x,t) f(t)\, dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x,t) f(t)\, dt + \\ + \alpha_3 \int_0^{1-x} A_3(1-x,t) f(t)\, dt + \alpha_4 \int_{1-x}^1 A_4(1-x,t) f(t)\, dt, \quad (9)$$

где α_i — константы и $\dfrac{\partial^s}{\partial x^s}A_j(x,t)\Big|_{t=x} = \delta_{s,n-1}$, $s = 0,\dots,n$. Исследование этого класса значительно усложняется. Рассмотрим простейший оператор вида (9):

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt. \tag{10}$$

Роль оператора L_0 в этом случае выполняет оператор, обратный к A_0, когда $A_0(x,t) = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ и обозначим через $R_{0,\lambda}$ его резольвенту. Задача изучения $R_{0,\lambda}$ является весьма сложной. Здесь помогают следующие факты.

Теорема 8. *Функция $y(x) = R_{0,\lambda}f(x)$ совпадает с первой компонентой решения следующей краевой задачи в пространстве вектор-функций размерности два*:

$$z^{(n)}(x) - \lambda Bz(x) = BF(z), \tag{11}$$

$$U_j(z) = Pz^{(j)}(0) + Qz^{(j)}(1) = 0 \quad (j = 0,\dots,n-1), \tag{12}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T$, $F_1(x) = f(x)$, $F_2(x) = f(1-x)$.

Теорема 9. *Для решения краевой задачи* (11)–(12) *справедливо представление*

$$z(x,\lambda) = \int_0^1 g(x,t,\lambda)BF(t)\,dt - \big(V_1(x,\lambda),\dots,V_n(x,\lambda)\big)\Delta^{-1}(\lambda)\int_0^1 U(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt,$$

где $\{V_j(x,\lambda\}_1^n$ — фундаментальная система решений матричного уравнения $z^{(n)} - \lambda Bz = 0$, $\Delta^{-1}(\lambda) = \big(U_{ij}(\lambda)\big)_{i,j=1}^n$, $U_{ij}(\lambda) = U_i(V_j(x,\lambda))$, $g(x,t,\lambda$ — фундаментальное решение уравнения (11)*, $U(\cdot) = \big(U_1(\cdot),\dots,U_n(\cdot)\big)^T$ и $U_j(\cdot)$ применяется к $g(x,t,\lambda)$ по переменной x.*

Теорема 10 (см. [15])**.** *Если $A(x,t)$ n раз непрерывно дифференцируема по x и один раз по t, то для оператора* (10) *справедливо заключение теоремы* 1.

Недавно исследован более трудный случай:

$$Af = \alpha\int_0^x A(x,t)f(t)\,dt + \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt, \quad \alpha^2 \neq 1. \tag{13}$$

Теорема 11. *Если ядро $A(x,t)$ в* (13) *удовлетворяет условием теоремы* 10*, то для всякой $f(x) \in L[0,1]$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\left\| S_r(f,x) - \frac{1}{2}\sigma_{r|\alpha+1|}(f+g,x) - \frac{1}{2}\sigma_{r|\alpha-1|}(f-g,x)\right\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0,$$

где $g(x) = f(1-x)$, $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора (13) *для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f,x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье для тех номеров k, для которых $(2k\pi)^n < r$.*

В [14] дана формула обращения оператора (9) при $n = 1$, схожая с (5)–(6), и тем самым представляется возможным получение аналога теоремы 4 для оператора (9).

В заключение укажем на работу А. М. Седлецкого [10] о равносходимости с рядом Фурье разложений по с.п.ф. оператора дифференцирования:

$$y', \quad U(y) = \int_{-1}^1 \frac{k(t)y(t)}{(1-|t|)^\alpha}dt = 0, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{14}$$

Эта работа открывает перспективу получения теорем равносходимости для оператора (1) в том трудном случае, когда $U_j(y)$ в (6) имеют вид (14).

Интересно бы исследовать равномерную сходимость разложений по с.п.ф. оператора Карлемана, т.е. когда $A(x,t) = |x-t|^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Здесь может помочь глубокое исследование спектральных свойств (асимптотика собственных значений, собственных функций, базисность по Риссу системы с.п.ф.), содержащихся в работе Б. В. Пальцева [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В. А.* О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье// Докл. АН СССР. — 1975. — *223*, № 3. — С. 548–551.
2. *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных функций// Докл. АН СССР. — 1976. — *227*. — С. 796–799.
3. *Ильин В. А.* О приближеннии функций биортгональным рядом по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов// В сб. «Теория приближения функций». — 1977. — С. 206–213.
4. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости спектральных разложений самосопряженных интегральных операторов// Тр. Воронеж. весенней мат. школы «Понтрягинские чтения–XI». Ч. 2. — Воронеж, 2000. — С. 73–82.
5. *Минкин А. М.* Регулярность самосопряженных краевых условий// Мат. заметки. — 1977. — *22*, № 6. — С. 835–846.
6. *Назаров Л. Г.* Разложение по собственным функциям одного класса интегральных операторов/ Деп. в ВИНИТИ. — 1976. — № 1236-76.
7. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
8. *Пальцев Б. В.* Разложение по собственным функциям интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразование Фурье которых рациональны. «Слабо» несамосопряженные регулярные ядра// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1972. — *36*. — С. 591–634.
9. *Пальцев Б. В.* Уравнения свертки на конечном интервале для одного класса символов, имеющих степенную асимптотику на бесконечности// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 2. — С. 322–394.
10. *Седлецкий А. М.* О равносходимости и равносуммируемости негармонических разложений Фурье с обычными тригонометрическими рядами// Мат. заметки. — 1975. — *18*, № 1. — С. 9–17.
11. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. — Петроград, 1917.
12. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов в конечном интервале// Докл. АН СССР. — 1962. — *146*, № 6. — С. 1294–1297.
13. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами типа функции Грина/ Деп. в ВИНИТИ. — 1972. — № 4841-72.
14. *Хромов А. П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях// Мат. заметки. — 1998. — *64*, № 6. — С. 932–942.
15. *Хромов А. П., Корнев В. В.* О сходимости спектральных разложений одного класса интегральных операторов// Воронеж. весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения–XII»/ Тез. докл. — Воронеж, 2001. — С. 167–168.
16. *Haar A.* Zur Theorie des ortogonalen Funktionen systeme, I// Math. Ann. — 1910. — *69*. — С. 331–371; II// Math. Ann. — 1911. — *71*. — С. 38–53.
17. *Hobson E. W.* On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions// Proc. Lond. Math. Soc. (2). — 1908. — *6*. — С. 349–395.
18. *Salaff S.* Regular boundary conditions for ordinary differential operators// Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — *134*, № 2. — С. 355–373.
19. *Steklov V. A.* Sur les expressions asymptotiques de certaines functions définies par des équations différentialles linéairs du deuxieme ordere, et leur applications an probléme du développement d'une function orbitraire en séries procédant suivant les dites functions// Сообщ. Харьков. мат. об-ва (2). — 1907–1909. — *10*, №№ 2–6. — С. 97–199.
20. *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff// Trans. Amer. Math. Soc. — 1926. — *28*, № 4. — С. 695–761.

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 83–89

О РАСПРОСТРАНЕНИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

© 2005 г. **А. С. ШАМАЕВ, В. А. САМАРИН**

1. История вопроса. Задача о распространении акустических волн в среде, состоящей из двух фаз — упругого материала и вязкой жидкости — рассматривалась в течение последних 50–60 лет многими авторами. Так, в работе Я. Френкеля, опубликованной в Физическом журнале АН СССР в 1944 г., выведены формулы для средних величин тензора напряжений и давления в грунте (породе), который можно представить как упругий каркас с трещинами, заполненными вязкой жидкостью. При этом предполагается, что характерные размеры микронеоднородностей среды малы по сравнению с единицей измерения длины, от которой зависят средние значения компонент тензора напряжений τ_{ij} и давление p.

Указанные формулы имеют вид:

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}\big(\lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \alpha M \operatorname{div} \boldsymbol{w}\big), \tag{1}$$

$$p = -\alpha M \operatorname{div} \boldsymbol{u} - M \operatorname{div} \boldsymbol{w}, \tag{2}$$

где μ, λ, α, M — некоторые постоянные, зависящие от свойств упругого материала и жидкости, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор-функция, задающая среднее смещение упругого материала («каркаса» или «скелета»), $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ — среднее смещение жидкости по отношению к «каркасу» или «скелету».

В [3] с использованием уравнений (1), (2) строится модель распространения акустических волн в комбинированных средах «жидкость–упругий материал». В дальнейшем приводимый нами ниже закон распространения волн в ряде работ используется под названием «закона Био».

Система уравнений из [3] имеет вид:

$$\widetilde{\rho}\ddot{\boldsymbol{u}} + \rho\ddot{\boldsymbol{w}} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\Big[(\mu + \lambda_c)\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \alpha M \operatorname{div}\boldsymbol{w}\Big] + \boldsymbol{f}(t, x), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla p} - \boldsymbol{f} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \mathbf{A}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\ddot{\boldsymbol{w}}, \tag{4}$$

$$p = -\alpha M \operatorname{div}\boldsymbol{u} - M \operatorname{div}\boldsymbol{w}, \tag{5}$$

где $\widetilde{\rho}$ — средняя плотность комбинированной среды «упругость—жидкость», ρ — плотность жидкости, μ, λ_c, α, M — некоторые константы, определяющие упругие свойства вещества и сжимаемость жидкости, $\mathbf{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ — матричный оператор, каждый элемент которого (а их $3\times 3 = 9$) представляет собой некоторую функцию от дифференциального оператора $\dfrac{\partial}{\partial t}$. Конкретный вид этой функции строится автором из эвристических соображений, в зависимости от свойств жидкости и геометрических свойств каналов, заполненных жидкостью.

В [2] та же задача исследуется асимптотическими методами. Автор предполагает, что комбинированная среда «жидкость—упругий материал» имеет периодическую структуру, причем период представляет собой малую величину, равную ε. Упругий материал («каркас») обязательно должен быть связным множеством. Приводимую ниже систему дифференциальных уравнений авторы вводят с помощью предельного перехода при $\varepsilon \to 0$. Она имеет вид:

$$\widetilde{\rho}\ddot{\boldsymbol{u}}_i + \rho\ddot{\boldsymbol{w}}_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(q_{ijkn}e_{kn}(u) - \alpha_{ij}p) + f_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6}$$

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

$$\dot{\boldsymbol{w}}_k = \int\limits_{-\infty}^{t} g_{ki}(t-s)\left(f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{i}}\right) ds, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta\right) p + \operatorname{div} \boldsymbol{w} + \alpha_{ij} e_{ij}(u) = 0, \tag{8}$$

где Π, γ, β — коэффициенты пористости упругой среды, сжимаемости жидкости и сжимаемости упругого материала, $\alpha_{ij} = \delta_{ij}|\square^s| - \beta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $|\square^s|$ — объем жидкости в одной («стандартной») ячейке периодичности $\square$ со стороной 1, β_{ij} — некоторые числа, характеризующие сжимаемость упругого материала при нагружениях периодической ячейки определенным набором силовых полей, приложенных к границе, q_{ijkn} — так называемый «эффективный» или «усредненный» тензор для пористой упругой среды в отсутствии жидкости, $g_{ki}(s)$ — элементы матричного (размером 3×3) интегрального оператора типа свертки, которые определяются через решение некоторых вспомогательных задач типа динамической задачи Стокса на ячейке периодичности $\square^s$.

Рассуждения автора приводят к усредненной системе (6)–(8), однако не являются вполне строгими.

В [6] приводится вполне строгое доказательство предельного перехода от системы уравнений для двух фаз с условиями сопряжения на границе контакта между двумя фазами к упомянутой усредненной системе. В этой работе автор рассматривает случай сжимаемой жидкости. Для проведения строгого доказательства справедливости предельного перехода автор вводит понятие «двухмасштабной сходимости», обобщающей понятие слабой сходимости, и доказывает основные свойства этой сходимости. Главной особенностью двухмасштабной сходимости является то, что двухмасштабный предел является функцией от двух переменных- от переменной внутри исходной области и переменной внутри куба периодичности. Тем самым предел содержит значительно большую информацию о допредельных членах последовательности,чем слабый предел, что позволяет делать различные утверждения о пределе произведения двухмасштабно сходящихся последовательностей.

Цель настоящей работы — вывести строго усредненную (или «эффективную») систему уравнений, описывающую распространение акустической волны в среде, представляющей собой объединение упругого периодического «каркаса» («скелета») и вязкой несжимаемой жидкости.

Этому же вопросу посвящены работы Р. Гилберта и А. Микелича [4, 5], где также с помощью метода «двухмасштабной сходимости» выводится указанная система.

2. Содержание работы. В данной работе мы, во-первых, ставим задачу вывода предельной системы в форме наиболее пригодной для дальнейшего качественного анализа распространения волн, и, во-вторых, стремимся получить более точную и полную информацию о сходимости решений допредельных систем уравнений к предельной («усредненной») системе, формулируемую в терминах сильной сходимости (а не в терминах двухмасштабной сходимости, как это сделано в работах Р. Гилберта и А. Микелича).

Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей, Y^h — связное однопериодическое множество в $\mathbb{R}^3$, $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon Y^h$, $\Omega^s_\varepsilon = \Omega \backslash \varepsilon \overline{Y}^h$, $S_\varepsilon = \partial\Omega^s_\varepsilon$, $\Omega^h_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\Omega}^s_\varepsilon$. Здесь индексы s, h означают соответственно мягкую (жидкую) и твердую (упругую) фазы.

Система дифференциальных уравнений, описывающая малые колебания среды «упругий каркас—несжимаемая жидкость» имеет вид:

$$\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\ddot{\boldsymbol{u}}^i_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ijkn} e_{kn}(\boldsymbol{u}_\varepsilon)) = f^i(x,t), \quad x \in \Omega^h_\varepsilon, \tag{9}$$

$$\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\ddot{\boldsymbol{u}}^i_\varepsilon - \mu\Delta\dot{\boldsymbol{u}}^i_\varepsilon + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_i} = f^i(x,t), \quad x \in \Omega^s_\varepsilon, \tag{10}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon|_{\Omega^s_\varepsilon} = 0, \tag{11}$$

$$[u_\varepsilon]_{S_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) n_j]_{S_\varepsilon} = 0, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad \boldsymbol{u}_\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon|_{t=0} = 0, \tag{13}$$

где $u^i_\varepsilon(x,t) = (u^1_\varepsilon, u^2_\varepsilon, u^3_\varepsilon)$ — отклонение точки среды от положения равновесия в точке x в момент времени t, $p(x,t)$ — давление в жидкой фазе, μ — коэффициент вязкости жидкости (который может быть функцией от ε, $\mu = \mu(\varepsilon)$), S_ε — граница между упругой и жидкой фазами, $[g]_{S_\varepsilon}$ — скачок функции g при переходе через поверхность S_ε, $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичная нормаль к поверхности S_ε.

Решение системы должно в определенном смысле сходиться к решению некоторой «усредненной» системы. Приступим к ее определению. Для этого сначала введем обозначение для операции свертки

$$(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(t-s)g(s)\,ds,$$

где f и g — произвольные функции от переменного t, такие, что последний интеграл существует при любом t. Каждая из функций f, g может быть также и обобщенной функцией с компактным носителем. Например,

$$f * \delta_0 = f, \quad f * \delta_0' = f', \quad f * \delta_0'' = f'',$$

где δ_0 — δ-функция с носителем в точке O, δ_0', δ_0'' — ее первая и вторая производные, f — дважды дифференцируемая функция.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\widetilde{\rho}\ddot{\boldsymbol{u}}_i + \Big[\rho(D(0)\delta_0 + \dot{D}(t)) * (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla p}) - \big(D(0)\delta_0 + \ddot{D}(0)\ddot{\delta_0} + D^{(3)}(t)\big)\rho^2 * \boldsymbol{u}\Big]_i =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(q_{ijkn}e_{kn}(\boldsymbol{u}) - \alpha_{ij}p) + f_i(t,x), \quad x \in \Omega, \tag{14}$$

$$\operatorname{div}\left[\boldsymbol{u}(x) + \left(\int\limits_0^t D(\tau)d\tau\right) * \Big(\boldsymbol{f} - \nabla p - \rho^s\ddot{\boldsymbol{u}}\Big)\right] = \beta p + \beta_{ij}e_{ij}(\boldsymbol{u}), \quad x \in \Omega, \tag{15}$$

$$u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{16}$$

$$\left(\int\limits_0^t D(\tau)d\tau * \nabla p, \boldsymbol{n}\right) = \left(\int\limits_0^t D(\tau)d\tau * f(t,x), \boldsymbol{n}\right), \quad x \in \partial\Omega, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{u}|_{t=0} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{u}}|_{t=0} = 0. \tag{18}$$

Здесь $D(t)$ — матрица 3×3, коэффициенты которой — гладкие функции переменной t, q_{ijkn}, β_{ij}, α_{ij} — тензоры четвертого и второго рангов, β — постоянная, которые определяются следующим образом.

Пусть вектор-функция $\boldsymbol{d}_i(t,y)$ является решением следующей (нестационарной) задачи Стокса в класс периодических по y_1, y_2, y_3 функций на ячейке периодичности $\square^s \equiv \square\backslash\bar{Y}^h$:

$$\dot{\boldsymbol{d}}_i - \Delta_y\boldsymbol{d}_i + \nabla q = 0, \quad y \in \square^s, \tag{19}$$

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{d}_i = 0, \quad y \in \square^s, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{d}_i|_{\partial Y^s} = 0, \quad \boldsymbol{d}_i|_{t=0} = \boldsymbol{e}_i, \tag{21}$$

где $\boldsymbol{e}_i$ — единичный орт, направленный по оси O_{y_i}. Утверждается, что решение такой задачи существует и единственно с точностью до аддитивной постоянной для давления, $\square$ обозначает единичный куб.

Пусть также $\boldsymbol{Q}^{pq}$, $\boldsymbol{Q}$ — вектор-функции, являющиеся решениями следующих краевых задач на ячейке периодичности $\square^h \equiv \square \cap Y^h$:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(a_{ijkn}e_{kn}(\boldsymbol{Q}^{pq})) = 0, \quad y \in \square^h, \tag{22}$$

$$a_{ijkn}e_{kn}(\boldsymbol{Q}^{pq})n_j = -a_{ipkq}n_k, \quad y \in \partial Y^s, \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(a_{ijkn}e_{kn}(\boldsymbol{Q})) = 0, \quad y \in \square^h, \tag{24}$$

$$a_{ijkn}e_{kn}(\boldsymbol{Q})n_j = n_i, \quad y \in \partial Y^s. \tag{25}$$

Утверждается, что решение таких задач на ячейке периодичности $\square^h$ также существует и единственно с точностью до аддитивной постоянной. Определим теперь тензоры q_{ijkn}, β_{ij}, α_{ij} и число β, а также матрицу $D(t)$ следующим образом:

$$(D(t))_{ij} = \langle (\boldsymbol{d}_i)_j \rangle_{\square^s}, \tag{26}$$

$$q_{ijkn} = \langle a_{ijkn} + a_{ijlm}e_{lm}(\boldsymbol{Q}^{kn}) \rangle_{\square^h}, \tag{27}$$

$$\beta_{pq} = \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{Q}^{pq} \rangle_{\square^h}, \quad \beta = \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{Q} \rangle_{\square^h}. \tag{28}$$

Здесь $\langle f \rangle_A$ обозначает среднее от функции f по множеству A, тензор α_{ij} определяется с помощью формулы $\alpha_{ij} = \delta_{ij}|\square^s| - \beta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Тем самым мы определили все коэффициенты и функции в членах типа свертки системы (14)–(18). Это интегродифференциальная система уравнений, в которой неизвестными функциями являются компоненты усредненного вектора смещений и среднее давление. В дальнейшем, мы докажем разрешимость и единственность решения этой системы, а также сходимость (в определенном смысле) решений системы (9)–(13) к решению системы (14)–(18).

Сейчас мы укажем на связь системы (14)–(18) и приведенной выше системы (6)–(8), отвечающей случаю сжимаемой жидкости. В системе (6)–(8) можно исключить относительное смещение жидкости, дифференцируя (7) по t и подставляя в (7) и, далее, интегрируя (8) по t и подставляя в (9). Тогда мы получим систему, по структуре аналогичную (14), (15). Она имеет вид:

$$\widetilde{\rho}\ddot{\boldsymbol{u}}_i + \rho(\dot{g}_{ki}) * \left(f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_i \right) + g_{ki}(0) \left(f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_i \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(q_{ijkn}e_{kn}(\boldsymbol{u}) - \alpha_{ij}p) + f_i(t,x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1,2,3, \tag{29}$$

$$\left(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta \right) p + \operatorname{div}_x \left(\int_0^t g(\tau)d\tau \right) * (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla p} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}) + \alpha_{ij}e_{ij}(\boldsymbol{u}) = 0. \tag{30}$$

Таким образом, система (14), (15) представляет собой вариант закона Био для случая несжимаемой жидкости. Можно показать также, что между средней относительной скоростью, средним давлением, средним смещением и вектором внешних сил имеет место соотношение

$$\dot{\boldsymbol{w}}(x,t) = D(t) * \left(\boldsymbol{f}(x,t) - \nabla_x p(x,t) - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(x,t) \right) \tag{31}$$

Последнее соотношение проясняет происхождение оператора $A(\frac{\partial}{\partial t})$ (см. (4)), вид которого был установлен в [3] эвристическим путем. Равенство (31) представляет собой связь между средним давлением, средней скоростью движения жидкости, средним ускорением упругого каркаса и внешними силами в интегральной форме.

Обращая интегральные операторы, можно получить соотношения, аналогичные (4), и оператор, аналогичный оператору A из соотношения (4), примет в данном случае вид:

$$\mathbf{A}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \begin{pmatrix} \kappa_{11}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) & \kappa_{12}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) & \kappa_{13}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ \kappa_{21}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) & \kappa_{22}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) & \kappa_{23}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ \kappa_{31}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) & \kappa_{32}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) & \kappa_{33}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \end{pmatrix},$$

где $\kappa(\lambda)$ — матрица, обратная к матрице $\widetilde{D}(\lambda)$, тильда обозначает преобразование Лапласа от функции:

$$\widetilde{f}(\lambda) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\mu = \mu(\varepsilon) = \varepsilon^2\mu_0$. *Тогда имеют место следующие равенства*:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|p_\varepsilon(t,x) - p(t,x)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\boldsymbol{u}_\varepsilon(t,x) - \boldsymbol{u}(t,x)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\dot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(t,x) - \dot{\boldsymbol{u}}(t,x)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\|\nabla_x \boldsymbol{u}_\varepsilon(t,x) - \nabla_x \boldsymbol{u}(t,x) - \nabla_y N^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k}\right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\|\nabla_x \dot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(t,x) - \nabla_x \dot{\boldsymbol{u}}(t,x) - \nabla_y N^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k}\right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(t,x) - \boldsymbol{u}(t,x) - \boldsymbol{w}\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\left\|\nabla_x \boldsymbol{u}_\varepsilon(t,x) - \nabla_x \boldsymbol{u}(t,x) - \nabla_x \boldsymbol{w}\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\|\dot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(t,x) - \dot{\boldsymbol{u}}(t,x) - \dot{\boldsymbol{w}}\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\left\|\nabla_x \dot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(t,x) - \nabla_x \dot{\boldsymbol{u}}(t,x) - \nabla_x \dot{\boldsymbol{w}}\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,$$

где

$$\boldsymbol{w}(t,x,y) = \int_0^t D(\tau,y)d\tau * \Big(\boldsymbol{f}(t,x) - \nabla_x p(t,x) - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(t,x)\Big),$$

$(p(t,x), \boldsymbol{u}(t,x))$ — *решение системы* (14)–(18), *а* $D(t,y)$ — *матрица, элементами которой являются функции* $(\boldsymbol{d}_i)_j$, *а* $(N^k(y))_{pq} = (\boldsymbol{Q}^{qk})_p$.

Приведенная теорема устанавливает «близость» решений исходной и усредненной систем уравнений, однако следует заметить, что собственно близость имеет место только на «твердой» фазе, а на «жидкой» фазе допредельные решения не стремятся ни к какому пределу. Для описания поведения решений на жидкой фазе нужно ввести осциллирующий корректор, вычитая который из разности допредельного и предельного решения, можно добиться сходимости. Важно также отметить, что структура предельных уравнений, аналогичная эвристически полученному закону Био, имеет место только в случае указанного в условии теоремы квадратичного порядка стремления параметра вязкости к нулю.

3. О некоторых системах с последействием, возникающих в механике сильно неоднородных сред. Представляет интерес сравнить характер «последействия» в приведенной системе (14)–(18) с известными в теории усреднения и механике сплошной среды моделями, содержащими «память» или «последействие».

3.1. Двойная пористость. Модели так называемой «двойной пористости» исследовались многими авторами. Речь идет о модели распространения жидкости в среде составленной из двух компонент, в каждой из которых жидкость может распространяться в соответствии с законом диффузии, однако проницаемости этих двух сред сильно отличаются друг от друга, что в рамках данной модели выражается в том, что матрица проницаемости в одной из компонент имеет порядок ε^2, а в другой компоненте — порядок 1. При этом ε, как и ранее, период чередования элементов слабопроницаемой фазы. Дифференциальные уравнения для концентрации жидкости в среде имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad x \in \Omega_\varepsilon^h, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\Delta u, \quad x \in \Omega_\varepsilon^s.$$

Здесь (в модельной ситуации) в качестве оператора по пространственным переменным фигурирует оператор Лапласа, однако обычно на месте оператора Лапласа стоят операторы второго порядка,

характеризующий проницаемость каждой из компонент в неизотропном случае; при этом матрицы коэффициентов каждого из упомянутых операторов — так называемые «матрицы Дарси» проницаемости указанных сред. Предельный переход при $\varepsilon \to 0$ исследовался в данной задаче многими авторами. Показано,что предельное (усредненное) уравнение является интегро-дифференциальным уравнением, содержащим слагаемые типа «свертки» по времени с неизвестной функцией, величина которой выражает усредненнную концентрацию жидкости. Чтобы отразить в упрощенной форме структуру соответствующего интегро-дифференциального уравнения, будем считать нашу среду одномерной и заменим оператор второго порядка по пространственным переменным дифференцированием второго порядка (обозначаем штрихами). Дифференцирование по времени обозначим точкой; кроме того, звездочкой (как и ранее) будем обозначать свертку по временной координате. В такой упрощенной форме уравнения для усредненной концентрации примут вид

$$c_1\dot{u} = c_2u'' + c_3(t) * u + f(t,x), \quad u'|_{x=0} = u'|_{x=1} = 0.$$

Показано, что для данной задачи $c_3(t) \to 0$. В этом случае мы будем говорить, что память в системе является «короткой»; если же соответствующая функция стремится к ненулевой постоянной, то такую память будем называть «длинной». Такого рода терминологией и упрощенной записью мы будем пользоваться далее, чтобы в схематической форме дать обзор систем с последействием, возникающих в ряде задач механики сплошной среды (связанных с процессами в сильно неоднородных средах).

3.2. Вязкоупругость. Хорошо известно, что с помощью определяющих соотношений для вязкоупругих твердых тел и жидкостей

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ijkl} * \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}) + b_{ijkl} * \varepsilon_{kl}(\dot{\boldsymbol{u}}) + q_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}) + p_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{\boldsymbol{u}}),$$

нетрудно получить систему, описывающую динамику такой среды. Пользуясь нашей системой упрощений, о которой было сказано выше, получим уравнение

$$c_1\ddot{u} = c_2u'' + c_3(t) * u'' + c_4\dot{u}'' + c_5(t) * \dot{u}'' + f(t,x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

Здесь $f(t,x)$ — известная внешняя сила, а функции c_3, c_5 могут стремиться к нулю или к ненулевой постоянной в зависимости от того, вязкоупругая жидкость или вязкоупругое тело рассматриваются в данной задаче.

3.3. Акустика «микстуры», «взвеси» и пористой среды. Под «микстурой» мы понимаем смесь двух слабовязких сжимаемых жидкостей, под пористой средой — абсолютно твердую пористую среду, каналы внутри которой заполнены слабовязкой сжимаемой жидкость, под «взвесью» — слабовязкую сжимаемую жидкость с абсолютно твердыми частицами, которые могут перемещаться только как твердые тела. В этом случае уравнения (подробно рассмотренные, например, в [2]) имеют вид

$$\rho_\varepsilon^{(1)}\ddot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon - \mu^{(1)}\varepsilon^2\Delta\dot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = \boldsymbol{f}, x \in \Omega_\varepsilon^{s_1}, \quad \rho_\varepsilon^{(2)}\ddot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon - \mu^{(2)}\varepsilon^2\Delta\boldsymbol{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = \boldsymbol{f}, \quad x \in \Omega_\varepsilon^{s_2},$$
$$[\boldsymbol{u}_\varepsilon]|_{S_\varepsilon} = [\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}_\varepsilon)n_j]|_{S_\varepsilon} = 0,$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon = \gamma_\varepsilon^{(1)}p, \quad x \in \Omega_\varepsilon^{s_1}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon = \gamma_\varepsilon^{(2)}p, \quad x \in \Omega_\varepsilon^{s_2}.$$

Здесь мы имеем вместо мягкой и твердой фаз две мягкие (жидкие) фазы, обозначаемые индексами s_1, s_2 соответственно. Усредненные уравнения примут (в используемой нами упрощенной форме) следующий вид:

$$\dot{p} = c(t) * p'' + g(t,x), \quad c(t) * p'|_{x=0} = \phi_0(t), \quad c(t) * p'|_{x=1} = \phi_1(t).$$

Здесь функция $c(t)$ стремится к нулю для случая пористой среды и стремится к постоянной для «микстуры» и «взвеси».

3.4. Закон Био. Закон Био был подробно рассмотрен в настоящей работе. Система исходных уравнений для комбинированной среды «упругость—жидкость» имеет вид

$$\rho_\varepsilon \ddot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon - L_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{f}, \quad x \in \Omega_\varepsilon^h,$$
$$\rho_\varepsilon \ddot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon - \varepsilon^2 \mu \Delta \dot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = \boldsymbol{f}, \quad x \in \Omega_\varepsilon^s,$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon^s} = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon^s,$$
$$[\boldsymbol{u}_\varepsilon]|_{S_\varepsilon} = [\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) n_j]|_{S_\varepsilon} = 0, \quad \boldsymbol{u}_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0,$$

а усредненная система в «упрощенной» форме имеет вид:

$$c_1 \ddot{u} + c_2 p' + c_3(t) * p' + c_4 u + c_5(t) * u = c_6 u'' + h(t,x),$$
$$c_7(t) * p'' + c_8(t) * \ddot{u}' = c_9 p + c_{10} u' + g(t,x),$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad c_7(t) * p'|_{x=0} = \phi_0(t), \quad c_7(t) * p'|_{x=1} = \phi_1(t).$$

В данном случае функции c_3, c_5 стремятся к нулю, а c_7, c_8 стремятся к постоянным. Отметим, что в данном случае постоянные, определяющие предельное поведение на бесконечности функций c_7, c_8, выражаются через матрицу проницаемости (Дарси) стационарной задачи фильтрации жидкости в данной пористой среде, когда упругая фаза считается замороженной (недеформируемой).

3.5. Нестационарная фильтрация. В ряде работ (см., например, [1]) рассматриваются задачи нестационарной фильтрации, отличие которых от задач акустики пористых сред состоит в несжимаемости жидкости, находящейся в порах (каналах). Исходная система имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{u}}_\varepsilon - \mu(\varepsilon) \Delta \boldsymbol{u}_\varepsilon + \nabla p = \boldsymbol{f}, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

В результате усреднения и использования принятой нами упрщенной формы записи получается краевая задача

$$c(t) * p'' = g(t,x), \quad c(t) * p'_x|_{x=0} = \phi_0(t), \quad c(t) * p'_x|_{x=1} = \phi_1(t).$$

Здесь функция $c(t)$ стремится к нулю или равна постоянной в зависимости от скорости стремления величины $\mu(\varepsilon)$ к нулю: если $\mu \sim \varepsilon^2$, то память «короткая», а если $\mu = o(\varepsilon^2)$, то память «длинная», при этом она описывается сверткой с постоянной функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сандраков Г. В.* Осреднение нестационарной системы Стокса с вязкостью в перфорированной области// Изв. РАН. Сер. мат. — *61*, № 1. — С. 113–140.
2. *Санчес-Паленсия Е.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.:Мир, 1984.
3. *Biot M. A.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media// J. Amer. Acous. Soc. — 1962. — *34*, № 9. — С. 1254–1264.
4. *Clopeau T., Ferrin J. L., Gilbert R. P., Mikelic A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part II// Math. Comput. Model. — 2001. — *33*, № 8. — С. 821–841.
5. *Gilbert R. P., Mikelic A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I// Nonlin. Anal. — 2000. — *40*, № 1. — С. 185–212.
6. *Nguetseng G.* Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics// SIAM J. Math. Anal. — 1990. — *21*, № 6. — С. 1394–1414.

А. С. Шамаев
Институт проблем механики РАН
E-mail: sham@rambler.ru

В. А. Самарин
Лаборатория Касперского
E-mail: samarin@kaspersky.com

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 90–97

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ РЕДЖЕ

© 2005 г. **А. А. ШКАЛИКОВ**

1. Введение. Спектральная задача вида

$$-y'' + q(x)y + \lambda^2 y = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) + \lambda y(1) = 0 \tag{2}$$

возникла в теории рассеяния. По-видимому, впервые она была рассмотрена Редже [8]. Можно показать, что резольвента оператора Штурма—Лиувилля на полуоси $\mathbb{R}^+$ с финитным потенциалом $q(x)$, сосредоточенным на отрезке $[0,1]$, допускает мероморфное продолжение через полуось $\mathbb{R}^+$ (на так называемый «нефизический» лист). При этом полюса продолженной резольвенты совпадают с собственными значениями задачи (1), (2), а в главных частях разложения в полюсах участвуют собственные функции этой задачи.

Целью этой заметки является изучение свойств собственных функций задачи (1), (2). Эти свойства существенно зависят от поведения функции $q(x)$ в точке $x = 1$. В случае, когда $q(x)$ гладкая функция в окрестности точки $x = 1$ и либо $q(1-) \neq 0$, либо $q(x)$ имеет при $x = 1$ нуль конечного порядка, асимптотика собственных значений и задача о двукратной полноте собственных функций изучались в [3,4,9] (в этих работах можно найти дополнительные ссылки; Коган рассмотрел также случай, когда функция $q(x)$ в окрестности точки 1 только положительна). Случай произвольного поведения функции $q(x)$ в точке $x = 1$ был рассмотрен в диссертации автора [10]. Там же изучена более трудная задача о полноте «половины» собственных функций. Однако публикаций по этой задаче помимо указанного манускрипта автор не проводил; здесь этот пробел восполняется. Интерес к этой тематике у автора появился вновь в связи с появлением в недавнее время работ о резонансах.[1]

2. Характеристический определитель задачи. Всюду далее предполагается, что потенциал $q(x) \in L_1(0,1)$. Докажем следующий результат.

Лемма 1. *Характеристический определитель задачи* (1), (2) *имеет вид*

$$\Delta(\lambda) = 2(\lambda + a)e^{\lambda} + \int_{-1}^{1} \varphi(t)e^{-\lambda t}dt, \tag{3}$$

где a — комплексное число, $\varphi(t) \in L_1[-1;1]$, причем если точка $x = 1$ принадлежит носителю $q(x)$ (т.е. ни в какой окрестности точки $x = 1$ не выполняется тождество $q(x) \equiv 0$), то носитель $\varphi(t)$ также включает точку 1.

Доказательство. Известно (см., например, [6]), что уравнение (1) имеет решение вида

$$y(x,\lambda) = e^{\lambda x} - e^{-\lambda x} + \int_0^x \left(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}\right)K(x,t)dt, \tag{4}$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 98–01–01000 и № 00-15-96100).

[1] Добавлено при корректуре: Как указано во введении, эта работа была написана в 1986 г., все ее результаты содержатся в диссертации автора [10]. При сдаче этой работы в начале 2001 г. для публикации в сборнике трудов Воронежских весенних школ автор был уведомлен, что она быстро выйдет в свет, но вскоре стало ясно, что публикация сильно затянется. В этой ситуации похожая (но не идентичная) версия этой работы была опубликована на английском языке в журнале Russ. Jour. Math. Physics. — 2001. — *8*, № 3. — С. 356–364.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

где $K(x,t)$ — ядро оператора преобразования для уравнения (1), которое непрерывно по обеим переменным. Подставив функцию $y(x,\lambda)$ во второе краевое условие (2), получим

$$\Delta(\lambda) = y'(1) + \lambda y(1) = 2\lambda e^{\lambda} + (e^{\lambda} - e^{-\lambda})K(1,1) + \int\limits_0^1 K'_x(1,t)(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})dt +$$

$$+ \int\limits_0^1 K(1,t)d(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) = 2(\lambda + K(1,1))e^{\lambda} + \int\limits_{-1}^1 \varphi(t)e^{-\lambda t}dt$$

(при интегрировании по частям мы учли равенство $K(x,0) = 0$), причем

$$\varphi(t) = \begin{cases} K'_x(1,t) + K'_t(1,t), & \text{если } t \geqslant 0, \\ K'_x(1,-t) - K'_t(1,-t), & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Положим $A(\xi,\eta) = K\left(\dfrac{\xi+\eta}{2}, \dfrac{\xi-\eta}{2}\right)$. Известно (см. [6, гл. 1]), что

$$2A'_\xi(\xi,\eta) = K'_x\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right) + K'_t\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^\eta q\left(\frac{\xi+\tau}{2}\right)A(\xi,\tau)d\tau + \frac{1}{2}q\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Следовательно,

$$K'_x(1,t) + K'_t(1,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{1-t} q\left(\frac{1+t+\tau}{2}\right)K\left(\frac{1+t+\tau}{2}, \frac{1+t-\tau}{2}\right)d\tau + \frac{1}{2}q\left(\frac{1+t}{2}\right) =$$

$$= -\int\limits_{(1+t)/2}^1 q(\xi)K(\xi, 1+t-\xi)d\xi + \frac{1}{2}q\left(\frac{1+t}{2}\right). \tag{5}$$

Положим

$$Vq\left(\frac{1+t}{2}\right) = \int\limits_{(1+t)/2}^1 q(\zeta)K(\zeta, 1+t-\zeta)d\zeta. \tag{6}$$

Поскольку ядро оператора преобразования $K(x,t)$ — непрерывная функция по обеим переменным, то по индукции получаем оценку

$$\|V^n\| \leqslant \frac{M^n}{n!},$$

т.е. спектральный радиус оператора V, рассматриваемого в пространстве $L_1[0;1]$, равен 0. При $0 \leqslant t \leqslant 1$ равенство (5) перепишем в виде

$$\varphi(t) = \left(\frac{1}{2}I - V\right)q\left(\frac{1+t}{2}\right),$$

где I — единичный оператор. Предположим, что точка 1 не принадлежит носителю $\varphi(t)$, т.е. $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \in (1-\varepsilon, 1)$, где $\varepsilon > 0$. Но тогда функция

$$q\left(\frac{1+t}{2}\right) = \frac{1}{2}(I + 2V + 4V^2 + \dots)\varphi(t)$$

обладает таким же свойством. Это противоречит условию на носитель $q(t)$. Лемма доказана. □

3. Операторная модель. Далее будет полезна операторная трактовка задачи (1), (2). Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H} = L_2(0,1) \times \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — одномерное пространство комплексных чисел. Норму в $\mathfrak{H}$ определим равенством

$$\|\widetilde{f}\|^2 = \|f\|_{L_2}^2 + |a|^2, \quad \text{где} \quad \widetilde{f} = \{f, a\} \in \mathfrak{H}.$$

В пространстве $\mathfrak{H}$ определим операторы

$$H\{y, y(1)\} = \{-y'', y'(1)\}, \qquad G\{y, y(1)\} = \{0, y(1)\},$$
$$F\{y, y(1)\} = \{y, 0\}, \qquad Q\{y, y(1)\} = \{q(x)y, 0\}.$$

Мы предполагаем, что область определения оператора H есть линеал

$$\mathcal{D}(H) = \Big\{\widetilde{y} \;\Big|\; \widetilde{y} = \{y, y(1)\},\ y \in W_2^2,\ y(0) = 0\Big\},$$

где $W_2^k = W_2^k[0,1]$ — соболевские пространства. Заметим, что при $\widetilde{y} \in \mathcal{D}(H)$ имеем

$$(H\widetilde{y}, \widetilde{y}) = (-y'', y) + y'(1)\overline{y(1)} = (y', y') > 0.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение $H\widetilde{y} = \widetilde{f}$ разрешимо для любого элемента $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$, поэтому $H = H^* > 0$.

Заметим, что задачу (1), (2) можно переписать в операторной форме

$$P(\lambda)\widetilde{y} = (H + Q + \lambda G + \lambda^2 F)\widetilde{y} = 0.$$

Операторы G и F являются ортопроекторами. Если $q(x) \in L_2[0,1]$, то $\mathcal{D}(Q) \supset \mathcal{D}(H)$. Приближая функцию $q(x)$ в норме L_2 ограниченной функцией, легко показать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\|Q\widetilde{y}\| \leqslant \varepsilon\|H\widetilde{y}\| + M\|\widetilde{y}\|. \tag{7}$$

Согласно теореме Като в этом случае $H + Q$ — самосопряженный полуограниченный оператор. В случае $q(x) \notin L_2$ определение оператора $H + Q$ сложнее. Так как $q(x) \in L_1[0,1]$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$|(Q\widetilde{y}, \widetilde{y})| \leqslant \|q\|_{L_1}\|y\|_{L_\infty}^2 \leqslant \varepsilon\|y\|_{W^1}^2 + M\|y\|_{L_2}^2,$$

поскольку $L_\infty[0,1]$ компактно вложено в $W^1[0,1]$. Следовательно, квадратичная форма $\big((H + Q)\widetilde{y}, \widetilde{y}\big)$ замкнута на линеале

$$\mathcal{D}(H^{1/2}) = \Big\{\widetilde{y} \;\Big|\; \widetilde{y} = \{y, y(1)\},\ y \in W_2^1,\ y(0) = 0\Big\}.$$

Согласно первой теореме о представлении существует единственный полуограниченный самосопряженный оператор $H + Q$, такой что $\mathcal{D}(H + Q) \subset \mathcal{D}(H^{1/2})$.

Таким образом, с задачей (1), (2) мы связали квадратичный самосопряженный пучок операторов $P(\lambda)$.

4. Спектр задачи. Докажем следующий результат.

Теорема 1. *Рассмотрим кривые*

$$\gamma_\varepsilon^\pm = \Big\{\lambda \;\Big|\; \lambda = -\varepsilon^{-1}\ln(1 + t) \pm it\Big\},$$

расположенные в левой полуплоскости. Через Π_ε *обозначим область (содержащую правую полуплоскость), которая расположена справа от этих кривых. Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *в* Π_ε *находится лишь конечное число собственных значений задачи* (1), (2). *В правой полуплоскости могут быть лишь вещественные собственные значения* (*конечное число*). *Если найдется окрестность точки* 1, *где функция* $q(x)$ *сохраняет знак, то число отрицательных собственных значений также конечно.*

Доказательство. Если $\varphi \in L_1(-1,1)$ то при любом δ вне круга достаточно большого радиуса имеем оценку

$$\left|\int_{-1}^{1} \varphi(t)e^{-\lambda t}dt\right| \leqslant \delta e^{r|\cos\theta|}, \quad \lambda = re^{i\theta}.$$

Отсюда легко получаем, что

$$\left|\int_{-1}^{1} \varphi(t)e^{-\lambda t}dt\right| < 2\big|(\lambda+a)e^{\lambda}\big|$$

в области Π_ε, но вне достаточно большого круга, т.е. в области Π_ε может находиться лишь конечное число нулей $\Delta(\lambda)$. Утверждение о вещественности нулей в правой полуплоскости вытекает из следующего общего результата.

Предложение 1. *Если самосопряженный пучок $P(\lambda)$ таков, что $(P'(\lambda)f,f) > 0$ для всех $\lambda \in (a,b)$, $0 \neq f \in \mathcal{D}(P)$, то в полосе $a < \operatorname{Re}\lambda < b$ могут находиться лишь вещественные собственные значения пучка $P(\lambda)$.*

Доказательство. Положим $\lambda = \mu + i\nu$ и заметим, что

$$\operatorname{Im}(P(\mu+i\nu)f,f) = \nu(P'(\mu)f,f).$$

Поэтому $P(\mu+i\nu)f \neq 0$, если $\nu \neq 0$, $a < \mu < b$. В нашем случае $P'(\lambda) = 2\lambda F + G > 0$ при $\lambda > 0$. □

Докажем последнее утверждение о конечности отрицательных нулей при условии сохранении знака функции $q(x)$ в окрестности точки 1. Если оператор V определен формулой (6), то справедливы оценки

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \|V^n f(t)\| \leqslant \frac{M^n}{(n-1)!}\int_t^1 (\xi-t)^{n-1}|f(t)|dt, \quad n = 1,2,\dots. \tag{8}$$

Эти оценки получаются по индукции с учетом ограниченности ядра оператора преобразования. Пусть $q(x)$ сохраняет знак при $x \in (1-\varepsilon,1)$, например, $q(x) > 0$. Обозначим через $q_1(x)$ функцию, равную $q(x)$ на интервале $(1-\varepsilon,1)$ и нулю вне этого интервала. Положим $q_0(x) = q(x) - q_1(x)$. Заметим, что функция $\varphi_0(t) = \frac{1}{2}(1-2V)q_0(t)$ имеет носитель на $[0,1-\varepsilon]$. Если

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(1+2V+4V^2+\dots)q_1(t),$$

то в силу (8) имеем

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} 2^n V^n q_1(t)e^{-\lambda t}dt \leqslant \frac{(2M)^n}{(n-1)!}\int_{1-\varepsilon}^{1}\int_t^1 q_1(\xi)d\xi e^{-\lambda t}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(2M)^n}{(n-1)!}\frac{1}{|\lambda|}\left(\delta e^{-\lambda(1-\varepsilon)} + \int_{1-\varepsilon}^{1} q_1(t)e^{-\lambda t}dt\right), \quad \delta = \int_{1-\varepsilon}^{1} q_1(\xi)d\xi.$$

Суммируя эти неравенства при $n \geqslant 1$ и предполагая λ отрицательным, получаем

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \varphi(t)e^{-\lambda t}dt = \int_{1-\varepsilon}^{1} \varphi_1(t)e^{-\lambda t}dt \geqslant \frac{1}{2}\int_{1-\varepsilon}^{1} q(t)e^{-\lambda t}dt - \left(\frac{M_1\delta}{|\lambda|} + M_2\right)e^{-\lambda(1-\varepsilon)} - \frac{M_1}{|\lambda|}\int_{1-\varepsilon}^{1} q(t)e^{-\lambda t}dt.$$

При $\lambda < 0$ имеем также оценку

$$\left|2(\lambda+a)e^{\lambda} + \int_{-1}^{1-\varepsilon} \varphi(t)e^{-\lambda t}dt\right| \leqslant M_3 e^{-\lambda(1-\varepsilon)}.$$

Но тогда при $\lambda < 0$ и достаточно больших $|\lambda|$ получаем

$$\Delta(\lambda) > \frac{1}{4}\int\limits_{1-\varepsilon}^{1} q(t)e^{-\lambda t}dt > 0.$$

Теорема доказана. □

5. Оценки резольвенты. Всюду далее предполагаем выполненным условие: точка $x = 1$ принадлежит носителю функции $q(x)$.

Теорема 2. *Пусть $P(\lambda)$ — квадратичный пучок в пространстве $\mathfrak{H} = L_2 \times \mathbb{C}$, ассоциированный с задачей* (1), (2). *Сектор в комплексной плоскости, определенный неравенством $|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$, обозначим через Λ_δ. Тогда при любом $\delta > 0$ в секторе Λ_δ резольвента $P^{-1}(\lambda)$ допускает оценки*

$$\|P^{-1}(\lambda)\| \leqslant M|\lambda|^{-1}, \tag{9}$$

$$\|P^{-1}(\lambda)F\| \leqslant M|\lambda|^{-2}, \tag{10}$$

$$\|H^{1/2}P^{-1}(\lambda)\| \leqslant M|\lambda|^{-1/2}, \tag{11}$$

$$\|H^{1/2}P^{-1}(\lambda)F\| \leqslant M|\lambda|^{-1}. \tag{12}$$

На мнимой оси справедлива оценка

$$|\lambda|\|P^{-1}(\lambda)\| + \|H^{1/2}P^{-1}(\lambda)\| \leqslant M. \tag{13}$$

В левой полуплоскости найдется плотное множество лучей, на которых при любом $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотическая оценка

$$\|H^{1/2}P^{-1}(\lambda)\| \leqslant Me^{\varepsilon|\lambda|}, \quad M = M(\varepsilon). \tag{14}$$

Доказательство. Если

$$P(\lambda)\widetilde{z} = \{f, a\} \in \mathfrak{H}, \quad \widetilde{z} = \{z(x), z(1)\},$$

то

$$z(x,\lambda) = \int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi + a\frac{y(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

где $G(x,\xi,\lambda)$ — функция Грина задачи (1), (2), $\Delta(\lambda)$ — характеристический определитель (3) и $y(x,\lambda)$ — решение уравнения (1) вида (4). Известно, что функция Грина задачи (1), (2) допускает представление

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{H(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

причем для всех $\lambda \in \mathbb{C}$

$$|H(x,\xi,\lambda)| \leqslant M|\lambda|^{\varkappa-1}e^{r|\cos\theta|}, \quad x,\xi \in [0,1], \quad \lambda = re^{i\theta}, \tag{15}$$

где $\varkappa$ — суммарный порядок краевых условий (в нашем случае $\varkappa = 0 + 1 = 1$). Оценка (15) есть следствие леммы 1.3 работы [9]. Из этой же леммы также получаем, что для всех $f, g \in L_2(0,1)$ в секторе Λ_δ, $\delta > 0$ выполняется оценка

$$\left|\int\limits_0^1\int\limits_0^1 H(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi g(x)dx\right| \leqslant M|\lambda|^{-1}e^{r\cos\theta}\|f\|\|g\|.$$

Взяв супремум на единичной сфере $\|g\| = 1$ и воспользовавшись оценкой

$$|\Delta(\lambda)| > |\lambda|e^{r\cos\theta}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0,$$

которая следует из леммы 1, в секторе Λ_δ получим оценку

$$\|P^{-1}(\lambda)F\widetilde{f}\| = \left\|\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right\| \leqslant M\|\lambda\|^{-2}, \quad \lambda \in \Lambda_\delta. \tag{16}$$

Очевидно, что

$$|(P^{-1}(\lambda)\widetilde{f})(x)| = |z(x,\lambda)| \leqslant M(\|f\| + |a|)|\lambda|^{-1}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0,$$

поэтому

$$\|P^{-1}(\lambda)\| \leqslant M|\lambda|^{-1}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0. \tag{17}$$

В силу оценки (7) найдется число M такое, что оператор $H_1 = H + Q + M$ (здесь через M обозначается единичный оператор, умноженный на постоянную M) удовлетворяет условию

$$(1-\varepsilon)H \leqslant H_1 \leqslant (1+\varepsilon)H + 2M.$$

Тогда оператор $H_1^{1/2}H^{-1/2}$ ограничен и обратим и потому во всех оценках $H^{1/2}$ можно заменить на $H_1^{1/2}$. Заметим, что $H_1 = P(\lambda) + M - \lambda G - \lambda^2 F$, а операторы G и F ограничены. Поэтому

$$\|H_1P^{-1}(\lambda)\| = \|I + (M - \lambda G - \lambda^2 F)P^{-1}(\lambda)\| \leqslant M(1+|\lambda|), \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0,$$

$$\|H_1P^{-1}(\lambda)\| \leqslant M, \quad \lambda \in \Lambda_\delta,$$

причем последняя оценка получена с учетом равенства $\|FP^{-1}(\lambda)\| = \|P^{-1}(\overline{\lambda})F\|$ и неравенства (16). Теперь, воспользовавшись (17) и неравенством

$$\|H_1^{1/2}P^{-1}(\lambda)\widetilde{f}\| \leqslant \|H_1P^{-1}(\lambda)\widetilde{f}\|\|P^{-1}(\lambda)\widetilde{f}\|,$$

получим оценки (11) и (13). Аналогично получаем (12).

Для доказательства оценок в левой полуплоскости воспользуемся результатом теории целых функций. Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ есть функция экспоненциального типа и имеет полиномиальный рост на мнимой оси. Поэтому $\Delta(\lambda)$ принадлежит классу Картрайт (см. [5]). Для таких функций известна теорема Крейна—Хеймана:

$$|\Delta(re^{i\theta})| \geqslant e^{rh(\theta)(1-\varepsilon)}.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число, оценка справедлива вне кружков конечного обзора (в частности, на плотном множестве лучей), а $h(\theta)$ — опорная функция индикаторной диаграммы. Согласно теореме Пэли—Винера индикаторная диаграмма $\Delta(\lambda)$ совпадает с отрезком $[-1,1]$ (так как 1 принадлежит носителю $\varphi(t)$). Поэтому опорная функция $h(\theta) = |\cos\theta|$. Следовательно, в левой полуплоскости, на плотном множестве лучей справедлива оценка (14). Теорема доказана. □

6. Полнота производных по Келдышу цепочек. Чтобы не усложнять изложение техническими деталями, предположим, что все собственные значения простые. Пусть λ_k — собственные значения, а $y_k(x)$ — соответствующие собственные функции задачи. Известно [9], что задачу (1), (2) можно линеаризовать в пространстве $W^1_{2,U} \times L_2$, где $W^1_{2,U}$ — пространство функций в W^1_2, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$. Очевидно, соответствие $y(x) \to \{y(x), y(1)\} =: \widetilde{y}(x)$ есть изоморфизм $W^1_{2,U}$ на пространство $\mathfrak{H}_1 = \mathcal{D}(H^{1/2})$, наделенное нормой $\|\widetilde{y}\|_1 = \|H^{1/2}\widetilde{y}\|_{\mathfrak{H}}$. Согласно [9] собственные значения линеаризатора остаются прежними, а собственные функции имеют вид $\mathbf{y}_n(x) = \{y(x), \lambda_n y(x)\}$. Вектор-функции $\mathbf{y}_n(x)$ называются производными по Келдышу цепочками.

Теорема 3. *Система $\mathbf{y}_n(x)$ производных по Келдышу цепочек полна и миинмальна в пространстве $W^1_{2,U} \times L_2$.*

Доказательство. Минимальность вытекает из общих результатов [9]. Если $q(x)$ — гладкая функция в точке $x = 1$, имеющая нуль конечного порядка, то задача (1), (2) нормальна и полнота также следует из общих результатов [9] (см. примеры в [9]).

В общем случае доказательство проведем методом Келдыша. Поскольку пространства $\mathfrak{H}_1$ и $W^1_{2,U}$ изоморфны, то достаточно доказать полноту элементов $\widetilde{\mathbf{y}}_n(x) = \{\widetilde{y}_n(x), \lambda_n F\widetilde{y}_n(x)\}$ в пространстве $\mathfrak{H}_1 \times L_2$, где $\widetilde{y}_n(x)$ — собственные функции пучка $P(\lambda)$. Главная часть лорановского разложения резольвенты $P^{-1}(\lambda)$ в окрестности полюса λ_n имеет вид

$$\frac{(\cdot, \widetilde{z}_n)\widetilde{y}_n}{\lambda - \lambda_n}, \tag{18}$$

причем, в силу самосопряженности $\widetilde{z}_n = \widetilde{y}_{-n}$, если невещественные числа λ_n занумерованы так, что $\lambda_n = \overline{\lambda_{-n}}$. Для вещественных λ_n имеем $\widetilde{z}_n = c_n\widetilde{y}_n$, где $c_n \neq 0$ — вещественные числа. Если система $\{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}$ не полна в пространстве $\mathfrak{H}_1 \times L_2$, то найдутся функции $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}_1$ и $g \in L_2$, такие, что

$$\left(H^{1/2}y_n, H^{1/2}\widetilde{f}\right) + \lambda_n(F\widetilde{y}_n, g) = 0. \tag{19}$$

Если $\widetilde{f}_1 = H^{1/2}\widetilde{f}$, то согласно (18) вектор-функция

$$F(\lambda) = (P^{-1}(\lambda)H^{1/2})f_1 + \lambda P^{-1}(\lambda)Fg$$

не имеет полюсов. Здесь оператор $P^{-1}(\lambda)H^{1/2}$ понимается как $\left[H^{1/2}P^{-1}(\bar{\lambda})\right]^*$. Таким образом, $F(\lambda)$ — целая функция. В силу теоремы 2 она ограничена на мнимой оси, убывает как $|\lambda|^{-1/2}$ в секторе Λ_δ, $\delta > 0$ и имеет минимальный тип на плотном множестве лучей в левой полуплоскости. Согласно теореме Фрагмена—Линделефа $F(\lambda)$ ограничена в левой полуплоскости, а тогда $F(\lambda) \equiv 0$. Поэтому $H^{-1/2}P(\lambda)F(\lambda) = \widetilde{f}_1 + \lambda H^{-1/2}g = 0$, что влечет $g = 0$, $\widetilde{f}_1 = 0$. Теорема доказана. □

7. Минимальность и полнота половины собственных функций. Пусть λ_k — простое вещественное собственное значение пучка $P(\lambda)$ и ему отвечает собственная функция $\widetilde{y}_k(x)$. Число $\varepsilon_k = (P'(\lambda_k)\widetilde{y}_k, \widetilde{y}_k)$ в этом случае не равно нулю и называется знаковой характеристикой собственной пары $\{\lambda_k, \widetilde{y}_k\}$. Обозначим через E^+ (E^-) систему собственных функций пучка $P(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из открытой верхней полуплоскости и всем вещественным собственным значениям с положительной (отрицательной) знаковой характеристикой. Систему E^+ (E^-) назовем первой (второй) половиной собственных функций пучка $P(\lambda)$. Системы $F(E^+)$ и $F(E^-)$, получающиеся проекцией F первой и второй половины из $\mathfrak{H} = L_2 \times \mathbb{C}$ на L_2, назовем первой и второй половиной собственных функций задачи (1), (2). В этом определении верхняя полуплоскость может быть заменена на нижнюю; доказанная ниже теорема сохраняет силу при такой замене

Теорема 4. *Первая половина собственных функций задачи* (1), (2) *минимальна и полна в пространстве* $L_2(0,1)$*, а вторая половина обладает тем же свойством в пространстве* $W^1_{2,U}$.

Доказательство. Коэффициент при λ^2 пучка $P(\lambda)$ есть ортопроектор F из $\mathfrak{H}$ на L_2. В [11, § 7] доказаны общие теоремы о минимальности половины собственных векторов самосопряженных пучков, из которых получаем: система $\{F\widetilde{y}_k\}$, $\widetilde{y}_k \in E^+$ минимальна в пространстве $F(\mathfrak{H}) = L_2$, а система E^- минимальна в пространстве $\mathfrak{H}_1 = \mathcal{D}(H^{1/2})$. Поскольку $\{y(x), y(1)\} \to y(x)$ есть изоморфизм пространств $\mathfrak{H}_1$ и $W^1_{2,U}$, то вторая половина собственных векторов задачи (1), (2) образует минимальную систему в пространстве $W^1_{2,U}$.

Доказательство полноты методами [11] затруднено в силу возможного наличия на вещественной оси бесконечного числа собственных значений и отсутствия «хороших» оценок резольвенты в левой полуплоскости.

Обозначим через $\{\varphi_k(x)\}$ биортогональную систему к первой половине собственных функций $\{y_k\}$ задачи, т.е.

$$(\varphi_k(x), y_n(x))_{L_2} = \delta_{kn}, \quad y_n(x) \in F(E^+), \tag{20}$$

где δ_{kn} — символ Кронекера.

Через $\{\widetilde{\psi}_k(x)\}$ обозначим биортогональную систему ко второй половине $\{\widetilde{y}_k\}$ пучка, т.е.

$$(\widetilde{\psi}_k(x), \widetilde{y}_n(x))_{\mathfrak{H}_1} = \delta_{k,n}, \quad \widetilde{y}_n \in E^-. \tag{21}$$

Предположим, что существует функция $f(x) \in L_2(0,1)$, удовлетворяющая равенствам

$$(f, y_n(x)) = 0, \quad \widetilde{y}_n \in E^+. \tag{22}$$

Рассмотрим функции

$$S_k(\lambda) = \left(FP^{-1}(\lambda)H^{1/2}(H^{1/2}\widetilde{\psi}_k), f\right).$$

В силу (18) и (22) функция $S_k(\lambda)$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости и не имеет вещественных полюсов с положительной знаковой характеристикой. В силу равенств $\widetilde{z}_{-n}(x) = \widetilde{y}_n(x)$

и соотношений биортогональности (21) вычеты во всех остальных полюсах аннулируются, кроме единственного полюса $\lambda = \bar{\lambda}_k$ (лежащего либо в нижней полуплоскости, либо на вещественной оси, но имеющего отрицательную знаковую характеристику). Таким образом $S_k(\lambda)$ может иметь только один полюс во всей комплексной плоскости. Согласно теореме 2 $S_k(\lambda)$ ограничена на мнимой оси, имеет минимальный тип в левой полуплоскости и убывает на положительной оси. Следовательно, в окрестности бесконечности имеем $S_k(\lambda) = O(\lambda^{-1})$. Заметим, что функцию $\widetilde{\chi}_k(x) = H^{1/2}\widetilde{\psi}_k \in \mathfrak{H}$ можно приблизить с произвольной точностью функцией из $\mathfrak{H}_1$, а тогда из (10) и (12) получим, что при $\lambda \to \infty$ на положительной полуоси $|S_k(\lambda)| \leqslant \varepsilon|\lambda|^{-1}$, где ε произвольно мало. Следовательно, вычет на бесконечности функции $S_k(\lambda)$ равен 0. Так как $S_k(\lambda)$ имеет единственный полюс, то $S_k(\lambda) \equiv 0$. Это справедливо для всех индексов k, отвечающим собственным значениям $\bar{\lambda}_k$ из нижней полуплоскости и вещественным собственным значениям, не входящим в первую половину. Но это влечет $(f, y_k(x)) = 0$ для всех остальных собственных функций $y_k(x)$ задачи, не входящих в первую половину. В силу теоремы 3 имеем $f = 0$.

Доказательство полноты системы E^- проводится аналогично. Если $\widetilde{f} \perp E^-$ в пространстве $\mathfrak{H}_1$ то функция

$$S_k(\lambda) = (H^{1/2}P^{-1}(\lambda)F\varphi_k, H\widetilde{f})$$

не имеет полюсов в верхней полуплоскости и вещественных λ_n с отрицательной знаковой характеристикой и в силу (20) может иметь лишь один полюс $\lambda = \lambda_k$. Повторив рассуждения, получим $\widetilde{f} = 0$. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1971.
2. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов// Усп. мат. наук. — 1971. — *26*, № 4. — С. 15–41.
3. *Коган Б. Л.* О двукратной полноте системы собственных и присоединенных функций задачи Редже// Функц. анал. прилож. — 1971. — *5*, № 3. — С. 70–74.
4. *Кравицкий А. О.* О двукратном разложении в ряд по собственным функциям одной несамосопряженной краевой задачи// Дифференц. уравн. — 1968. — *4*, № 1. — С. 165–177.
5. *Левин Б. Я.* Целые функции (курс лекций). — М.: Изд-во МГУ, 1971. — С. 165–177.
6. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма—Лиувилля. — М.: Наука, 1984.
7. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1968.
8. *Редже Т.* Аналитические свойства матрицы рассеяния// Математика. — 1963. — *4*, № 4. — С. 83–89.
9. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 1983. — *9*. — С. 190–229.
10. *Шкаликов А. А.* К спектральной теории операторов и разрешимости операторно-дифференциальных уравнений// Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1987.
11. *Шкаликов А. А.* Эллиптические уравнения в гльбертовом пространстве и соответствующие спектральные задачи// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 1989. — *14*. — С. 140–224.

Современная математика и ее приложения. Том 35 (2005). С. 98–162

УДК 517.983 + 517.984

АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ НА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НАД ТЕЛОМ КВАТЕРНИОНОВ И АЛГЕБРОЙ ОКТОНИОНОВ

© 2005 г. **С. В. ЛЮДКОВСКИЙ**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 98
2. Теория неограниченных операторов 100
3. Алгебры операторов 131
Список литературы 161

1. Введение

Тело кватернионов $\mathbb{H}$ и алгебра октонионов $\mathbb{O}$ являются алгебрами над $\mathbb{R}$, но не являются алгебрами над $\mathbb{C}$, так как любое вложение $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$ или в $\mathbb{O}$ не является центральным. Поэтому исследование алгебр операторов над $\mathbb{H}$ или $\mathbb{O}$ нельзя свести к алгебрам операторов над $\mathbb{C}$. С другой стороны, развитая ниже теория алгебр операторов над $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ имеет много специфических особенностей по сравнению с общей теорией алгебр операторов над $\mathbb{R}$ благодаря градуированным структурам алгебр $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$. Более того, алгебру октонионов нельзя реализовать как подалгебру какой-либо алгебры матриц над $\mathbb{R}$, так как алгебра октонионов не ассоциативна. При этом косое произведение алгебр матриц над $\mathbb{C}$, известное как частный случай косого произведения алгебр операторов, дает лишь алгебры над $\mathbb{C}$ и не может дать алгебр $\mathbb{H}$ или $\mathbb{O}$.

Результаты данной работы можно также использовать для развития некоммутативной геометрии, суперанализа, квантовой механики над $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ и теории представлений нелокально компактных групп типа групп диффеоморфизмов и петель кватернионных или октонионных многообразий (см. [6,8,11,12,16]). Большая часть предыдущих работ по суперанализу была посвящена суперкоммутативным супералгебрам типа алгебры Грассмана, тогда как для некоммутативных супералгебр он оставался почти не разработанным. Тело кватернионов и алгебра октонионов служат важнейшими примерами супералгебр, при этом алгебра октонионов не суперкоммутативна, более того, она не ассоциативна. В данной работе использованы результаты предыдущих работ автора по этой теме, в частности, некоммутативный интеграл над $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ [13–15], служащий аналогом интеграла типа Коши, известного для $\mathbb{C}$. Примерами кватернионных или октонионных неограниченных операторов служат дифференциальные операторы, в том числе, в частных производных. Они возникают естественным образом, например, уравнение Клейна—Гордона—Фока можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2}\right)f=0$$

на пространстве кватернионно локально $(z,\tilde{z})$-аналитических функций f, где z — кватернионная переменная, $\tilde{z}$ — сопряженная переменная, $z\tilde{z}=|z|^2$. Оператор Дирака для спиновых систем над $\mathbb{H}^2$ можно записать в виде $\begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial z \\ -\partial/\partial\tilde{z} & 0\end{pmatrix}$, что используется в теории спиновых многообразий [10], но любое спиновое многообразие можно вложить в кватернионное [14].

Тело кватернионов $\mathbb{H}$ имеет антиизоморфизм $\eta: z\mapsto\tilde{z}$ порядка два, где

$$\tilde{z}=z=w_1+w_ii+w_jj+w_kk;\qquad w_1-w_ii-w_jj-w_kk,\qquad w_1,\dots,w_k\in\mathbb{R}.$$

Иммется норма в $\mathbb{H}$ такая, что $|z|=|z\tilde{z}|^{1/2}$, следовательно, $\tilde{z}=|z|^2z^{-1}$.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

Алгебра $\mathbb{K}$ октонионов (октав, алгебры Кэли) определяется как восьмимерная алгебра над $\mathbb{R}$ с базисом, например,

$$\mathbf{b}_3 := \mathbf{b} := \{1, i, j, k, l, il, jl, kl\} \tag{1.1}$$

такая, что

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = -1, \\ ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j, \\ li = -il, \quad jl = -lj, \quad kl = -lk; \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$(\alpha + \beta l)(\gamma + \delta l) = (\alpha\gamma - \tilde{\delta}\beta) + (\delta\alpha + \beta\tilde{\gamma})l \tag{1.3}$$

— закон умножения в $\mathbb{K}$ для любых α, β, γ, $\delta \in \mathbb{H}$, $\xi := \alpha + \beta l \in \mathbb{K}$, $\eta := \gamma + \delta l \in \mathbb{K}$, $\tilde{z} := v - wi - xj - yk$ для кватерниона $z = v + wi + xj + yk \in \mathbb{H}$ с $v, w, x, y \in \mathbb{R}$.

Алгебра октонионов не является ни коммутативной, ни ассоциативной, так как $(ij)l = kl$, $i(jl) = -kl$, но она дистрибутивна, и $\mathbb{R}1$ является ее центром. Если $\xi := \alpha + \beta l \in \mathbb{K}$, то

$$\tilde{\xi} := \tilde{\alpha} - \beta l \tag{1.4}$$

называется сопряженным элементом для ξ, где $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$. Тогда

$$(\xi\eta)\tilde{} = \tilde{\eta}\tilde{\xi}, \qquad \tilde{\xi} + \tilde{\eta} = (\xi + \eta)\tilde{}, \qquad \xi\tilde{\xi} = |\alpha|^2 + |\beta|^2, \tag{1.5}$$

где $|\alpha|^2 = \alpha\tilde{\alpha}$ такие, что

$$\xi\tilde{\xi} =: |\xi|^2 \tag{1.6}$$

и $|\xi|$ — норма в $\mathbb{K}$. Поэтому

$$|\xi\eta| = |\xi||\eta|, \tag{1.7}$$

следовательно, $\mathbb{K}$ не содержит делителей нуля (см. также [3]). Умножение октонионов удовлетворяет уравнениям:

$$(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta), \tag{1.8}$$

$$\xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta, \tag{1.9}$$

которые определяют свойство альтернативности алгебры. В частности, $(\xi\xi)\xi = \xi(\xi\xi)$. Положим $\tilde{\xi} = 2a - \xi$, где $a = \mathrm{Re}(\xi) := (\xi + \tilde{\xi})/2 \in \mathbb{R}$. Поскольку $\mathbb{R}1$ является центром в $\mathbb{K}$ и $\tilde{\xi}\xi = \xi\tilde{\xi} = |\xi|^2$, то из уравнений (1.8), (1.9) по индукции следует, что для любого $\xi \in \mathbb{K}$ и любого n-кратного произведения, $n \in \mathbb{N}$, $\xi(\xi(\ldots\xi\xi)\ldots) = (\ldots(\xi\xi)\xi\ldots)\xi$, и результат не зависит от порядка скобок (порядка последовательных умножений), следовательно, определение $\xi^n := \xi(\xi(\ldots\xi\xi)\ldots)$ не зависит от порядка скобок. Это также показывает, что $\xi^m\xi^n = \xi^n\xi^m$, $\xi^m\tilde{\xi}^m = \tilde{\xi}^m\xi^n$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{K}$. В отличие от кватернионов, октонионнная алгебра не может быть реализована как подалгебра алгебры $\mathbb{M}_8(\mathbb{R})$ всех (8×8)-матриц над $\mathbb{R}$, так как $\mathbb{K}$ не ассоциативна, но $\mathbb{M}_8(\mathbb{R})$ ассоциативна. Некоммутативная неассоциативная алгебра октонионов $\mathbb{K}$ является $\mathbb{Z}_2$-градуированной $\mathbb{R}$-алгеброй $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0 + \mathbb{K}_1$, где элементы $\mathbb{K}_0$ являются *четными* и элементы в $\mathbb{K}_1$ являются *нечетными* (см., например, [3]). Существуют естественные вложения $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{K}$ и $\mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{K}$, но ни $\mathbb{K}$ над $\mathbb{C}$, ни $\mathbb{K}$ над $\mathbb{H}$, ни $\mathbb{H}$ над $\mathbb{C}$ не являются алгебрами, так как их центры таковы: $Z(\mathbb{H}) = Z(\mathbb{K}) = \mathbb{R}$.

В данной статье приводятся основные особенности кватернионного и октонионного случаев, так как в одной статье невозможно дать такую же обширную теорию над $\mathbb{H}$ или $\mathbb{O}$, как хорошо разработанная теория операторов над $\mathbb{C}$ [7, 9].

Во втором параграфе исследованы неограниченные, а также ограниченные квазилинейные операторы на гильбертовых пространствах X над алгеброй $\mathbb{K}$. При этом аналог скалярного произведения в X определен со значениями в алгебре $\mathbb{K}$. Там же определены и исследованы градуированные операторы проектирований и градуированные проекторнозначные меры. Линейность операторов над алгеброй $\mathbb{K}$ уже не целесообразна из-за некоммутативности $\mathbb{K}$, поэтому введено понятие квазилинейных операторов. Далее доказаны теоремы о спектральных представлениях и проекторнозначных градуированных мерах нормальных квазилинейных операторов, которые могут быть неограниченными. При этом градуированные проекторнозначные меры в общем случае могут быть некоммутативными и неассоциативными. Из-за некоммутативности тела кватернионов и алгебры октонионов коммутативные алгебры $\mathcal{Z}$ над ними теряют свое значение, так как могут быть лишь

тривиальными $\mathcal{Z}\mathbb{K} = \mathcal{Z} = \{0\}$, более того, над алгеброй октонионов ассоциативность тоже теряет свое значение. Поэтому во втором параграфе вводится понятие квазикоммутативных алгебр над $\mathbb{K}$, и для них доказан аналог теоремы Гельфанда—Мазура. Более того, рассмотрены спектральные разложения унитарных и самосопряженных операторов, доказан аналог теоремы Стоуна над телом кватернионов и алгеброй октонионов для однопараметрических семейств унитарных операторов.

В третьем параграфе исследованы C^*-алгебры над $\mathbb{K}$. Для них доказаны аналоги теорем Гельфанда—Наймарка—Сигала, фон Неймана, Капланского и т.д. Изучен вопрос о топологической и алгебраической неприводимости действия C^*-алгебры квазилинейных операторов на гильбертовом пространстве над $\mathbb{K}$.

2. Теория неограниченных операторов

2.1. Определения и замечания. Пусть X — векторное пространство над телом кватернионов $\mathbb{H}$ или алгеброй октонионов $\mathbb{O}$, т.е. X — аддитивная группа, а умножения векторов $v \in X$ на скаляры $a, b \in \mathbb{H}$ слева и справа удовлетворяют аксиомам ассоциативности и дистрибутивности, а в случае $\mathbb{O}$ ассоциативность заменяется альтернативностью с сохранением дистрибутивности, где левая дистрибутивность означает, что $(a+b)v = av + bv$ и $a(v+w) = av + aw$ для любых $a, b \in \mathbb{K}$, $v, w \in X$, $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, правая дистрибутивность означает, что $v(a+b) = va + vb$ и $(v+w)a = va+wa$ для любых $a, b \in \mathbb{K}$, $v, w \in X$, ассоциативность слева означает, что $a(bv) = (ab)v$ для любых $a, b \in \mathbb{H}$ и $v \in X$, а ассоциативность справа означает, что $(vb)a = v(ba)$ для любых $a, b \in \mathbb{H}$ и $v \in X$, альтернативность слева означает, что $b(bv) = (b^2)v$ для любых $b \in \mathbb{O}$ и $v \in X$, а альтернативность справа означает, что $(vb)b = v(b^2)$ для любых $b \in \mathbb{K}$ и $v \in X$.

Если существует норма $\|v\|_X =: \|v\|$ на X, относительно которой X полно, где $\|av\| = |a|_{\mathbb{K}}\|v\|$, $\|vb\| = |b|_{\mathbb{K}}\|v\|$, $\|v+w\| \leqslant \|v\|+\|w\|$ для любых $v, w \in X$, $a, b \in \mathbb{K}$, то X называется банаховым пространством над $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Тогда X имеет также структуру банахова пространства $X_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$, так как $\mathbb{K}$ является алгеброй над $\mathbb{R}$ размерности 4 для $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ и 8 для $\mathbb{K} = \mathbb{O}$.

Оператор T на плотном векторном подпространстве $\mathcal{D}(T)$ в X со значениями в банаховом пространстве Y над $\mathbb{K}$ называется ($\mathbb{K}$-)праволинейным, если $T(va) = (T(v))a$, $T(v+w) = (T(v)) + (T(w))$ для любого $a \in \mathbb{K}$ и любых $v, w \in \mathcal{D}(T)$ и дополнительно T $\mathbb{R}$-линеен на $\mathcal{D}(T)_{\mathbb{R}}$. Для праволинейного оператора также пишем Tv вместо $T(v)$. Если T $\mathbb{R}$-линеен и $T(av) = a(T(v))$, $T(v+w) = (T(v)) + (T(w))$ для любого $a \in \mathbb{K}$, то T называется ($\mathbb{K}$-)леволинейным. Для леволинейного оператора также пишем vT вместо $T(v)$.

Оператор T называется ($\mathbb{K}$-)линейным, если он леволинейный и праволинейный оператор одновременно. (Однако, av в общем случае не равно va для $v \in X$ и $a \in \mathbb{K}$, а также в общем случае cz не равно zc для $z \in Y$ и $c \in \mathbb{K}$, поэтому линейность оператора над $\mathbb{K}$ отличается от линейности оператора над коммутативными полями $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, т.е. лучше избегать такой терминологии линейности над $\mathbb{K}$.)

Оператор $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$ назовем ($\mathbb{K}$-)квазилинейным, если он аддитивен $T(v+w) = T(v)+T(w)$ и $\mathbb{R}$-однороден $T(av) = aT(v) = T(va)$ для любых $a \in \mathbb{R}$, v и $w \in X$, где $\mathcal{R}(T) \subset Y$ обозначает область значений оператора. Например, производные кватернионно голоморфных функций $\mathbb{H}$-квазилинейны (см. [13]).

Пусть $L_q(X,Y)$ ($L_r(X,Y)$; $L_l(X,Y)$) обозначают банахово пространство всех ограниченных квазилинейных операторов T из X в Y (право или леволинейных операторов соответственно), $\|T\| := \sup\limits_{v\neq 0} \|Tv\|/\|v\|$. Также положим $L_q(X) := L_q(X,X)$, $L_r(X) := L_r(X,X)$ и $L_l(X) := L_l(X,X)$. Резольвентное множество $\rho(T)$ квазилинейного оператора T определяется как

$$\rho(T) := \{z \in \mathbb{K} : \exists R(z;T) \in L_q(X, \mathcal{D}(T))\},$$

где $R(z;T) := R_z(T) := (zI - T)^{-1}$, I - единичный оператор на X, $Iv = v$ для любых $v \in X$, аналогично для право или леволинейного оператора, где $\mathcal{D}(T)$ плотно в X. Спектр определяется как $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T)$.

2.2. Лемма. *Для любых z_1 и $z_2 \in \rho(T)$*

$$R(z_2;T) - R(z_1;T) = R(z_1;T)((z_1 - z_2)R(z_2;T)) = (R(z_1;T)(z_1 - z_2))R(z_2;T). \qquad (2.1)$$

Доказательство. Алгебра $\mathbb{O}$ альтернативна, поэтому $a^{-1}(av) = v$ для любого $a \in \mathbb{O}$ с $a \neq 0$ и $v \in X$, так как $a^{-1} = \tilde{a}/|a|$, $|a| \in \mathbb{R}$, $Z(\mathbb{O}) = \mathbb{R}$. Если оператор $A : X \to X$ обратим, где $A \in L_q(X, X)$, то существует $A^{-1} \in L_q(A(X), X)$. В частности, если $A(X) = X$ для обратимого A, то $A(X)$ и X изоморфны как $\mathbb{K}$-векторные пространства. Поскольку векторная оболочка над $\mathbb{K}$ для $A(X)$ является $\mathbb{K}$-векторным подпространством в X, то $A^{-1}(Av) = v$ для любого $v \in X$, в частности, для $v = R(z,T)u$, где $u \in X$, $z \in \rho(T)$. Поэтому выполняются тождества

$$R(z_1;T)((z_1I - z_2I)R(z_2;T)) = (z_1I - T)^{-1}((z_1I - T - (z_2I - T_2))(z_2I - T)^{-1}) = (z_2I - T)^{-1} - (z_1I - T)^{-1},$$

так как умножение в теле кватернионов $\mathbb{H}$ ассоциативно, а в алгебре $\mathbb{O}$ альтернативно. □

2.3. Лемма. *Если T — замкнутый квазилинейный оператор, то $\rho(T)$ открыто в $\mathbb{K}$ и $R(z;T)$ $\mathbb{K}$-голоморфно на $\rho(T)$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in \rho(T)$, тогда оператор $R(z_0;T)$ замкнут и, по теореме о замкнутом графике, ограничен, так как он определен всюду. Если $z \in \mathbb{K}$ и $|z_0 - z| < \|(z_0I - T)^{-1}\|^{-1}$, то

$$(zI - T) = (z_0I - T)(I - R(z_0;T)(z_0 - z)),$$

причем

$$R(z;T) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [R(z_0;T)(z_0 - z)]^n \right\} R(z_0;T) \in L_s(X), \tag{2.2}$$

так как этот ряд сходится относительно топологии нормы в $L_s(X)$. В силу (2.2), $R(z;T)$ $\mathbb{K}$-локально z-аналитична, следовательно, голоморфна на $\rho(T)$, согласно [13, теорема 2.16], [15]. □

2.4. Замечания и определения. Для нормированного (или банахова) пространства X над $\mathbb{K}$ его топологически правосопряженное пространство X_r^* определяется как состоящее из всех функционалов $f : X \to \mathbb{K}$ таких, что f являются $\mathbb{R}$-линейными и $\mathbb{K}$-праволинейными, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Аналогично положим $X_q^* := L_q(X, \mathbb{K})$ и $X_l^* := L_l(X, \mathbb{K})$, где X_q^* — топологически квазисопряженное пространство, X_l^* — топологически левосопряженное пространство. Тогда X_s^* — банахово пространство над $\mathbb{K}$ с нормой $\|f\| := \sup_{x \neq 0} |fx|/\|x\|$. Если X и Y — нормированные (или банаховы) пространства над $\mathbb{K}$ и $T : X \to Y$ принадлежит $L_s(X, Y)$, то T^* определяется уравнением $(T^*y^*)(x) := y^* \circ T(x)$ для любых $y^* \in Y_s^*$, $x \in X$. Тогда $T^* \in L_l(Y_r^*, X_r^*)$ для любых $T \in L_r(X, Y)$. Если $T \in L_l(X, Y)$, то $T^* \in L_r(Y_l^*, X_l^*)$, так как $y^* \circ T(x) = xT^*y^*$ в симметричных обозначениях, где $x \in X$. Если $T \in L_q(X, Y)$, то $T^* \in L_q(Y_q^*, X_q^*)$.

Пусть $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ — образы относительно естественного вложения X и Y в $(X_q^*)_q^*$ и $(Y_q^*)_q^*$ соответственно. Для любого $T \in L_s(X, Y)$ определим $\hat{T} \in L_s(\hat{X}, \hat{Y})$ уравнением $\hat{T}(\hat{x}) = \hat{y}$, где $y = T(x)$. Каждая функция S, определенная на области $(X_q^*)_q^* \supset \mathrm{dom}(S) \supset \hat{X}$ и такая, что $S(\hat{x}) = T(\hat{x})$ для любых $\hat{x} \in \hat{X}$, называется расширением T.

Положим по индукции

$$\mathcal{D}(T^n) := \{x : x \in \mathcal{D}(T^{n-1}), T^{n-1}(x) \in \mathcal{D}(T)\},\ \mathcal{D}(T^\infty) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(T^n),$$

где $T^0 := I$, $T^n(x) := T(T^{n-1}(x))$.

2.4.1. Theorem. *Пусть Y — $\mathbb{K}$-векторное подпространство $\mathbb{K}$-векторного нормированного пространства X, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Тогда каждому $\mathbb{K}$-квазилинейному функционалу $g \in Y_q^*$ соответствует $f \in X_q^*$ такой, что $|f| = |g|$ и $f(y) = g(y)$ для любого $y \in Y$.*

Доказательство. Если X — $\mathbb{R}$-векторное пространство, то доказываемое утверждение вытекает из теоремы Хана—Банаха при $p(x) := |g||x|$. Напомним, что теорема Хана—Банаха утверждает, что если вещественнозначная функция p на вещественном линейном пространстве X удовлетворяет условиям $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$, $p(ax) = ap(x)$ для любых $x, y \in X$, $a \geqslant 0$, а g — вещественнозначный линейный функционал на $\mathbb{R}$-линейном подпространстве Y в X таков, что $g(x) \leqslant p(x)$ для любого $x \in Y$, то существует вещественный линейный функционал f на всем X такой, что $f(x) = g(x)$ для любого $x \in Y$ и $f(x) \leqslant p(x)$ для любого $x \in X$.

Рассмотрим теперь общий случай нормированного $\mathbb{K}$-векторного пространства X. Тогда квазилинейный функционал g имеет разложение $g(y) = g_0(y) + g_1(y)i_1 + \cdots + g_m(y)i_m$ для любого $y \in Y$, где $g_0(y), \ldots, g_m(y)$ — вещественнозначные функционалы на Y, $\{i_0, \ldots, i_m\}$ — множество стандартных генераторов алгебры $\mathbb{K}$, $i_0 = 1$, $m = 3$ для $\mathbb{H}$, $m = 7$ для $\mathbb{O}$. Тогда для вещественных чисел $a, b \in \mathbb{R}$ и произвольных векторов $x, y \in Y$ получим

$$g_j(ax + by) = ag_j(x) + bg_j(y), \qquad |g_j(y)| \leqslant |g(y)| \leqslant |g||y|.$$

Существует разложение пространства X вида

$$X = X_0 \oplus X_1 i_1 \oplus \cdots \oplus X_m i_m,$$

где $X_0, \ldots, X_m$ — попарно изоморфные вещественные линейные нормированные пространства. Тогда из начала доказательства данной теоремы следует, что существуют вещественнозначные линейные функционалы f_j на X такие, что $|f_j| \leqslant |g_j|$ для любого $j = 0, 1, \ldots, m$, $f_j(y) = g_j(y)$ для любого $y \in Y$. Тогда квазилинейный функционал f на X можно задать формулой

$$f(x) := f_0(x) + f_1(x)i_1 + \cdots + f_m(x)i_m.$$

Пусть $f(x) = r\exp(Mt)$, где $t \in \mathbb{R}$, $0 < r < \infty$, $M \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Re}(M) = 0$ (см. полярное разложение элементов $z \in \mathbb{K}$ в [15, следствие 3.6]). Тогда

$$|f(x)| = \exp(-tM)f(x) \leqslant |g||x|,$$

так как алгебра $\mathbb{K}$ альтернативна, следовательно, $|f| \leqslant |g|$. С другой стороны, так как f является продолжением g, то $|f| \geqslant |g|$, следовательно, $|f| = |g|$. □

2.4.2. Лемма. *Пусть Y — $\mathbb{K}$-векторное подпространство $\mathbb{K}$-векторного нормированного пространства X, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, причем $\inf\limits_{y \in Y} |y - x| = d > 0$. Тогда существует $f \in X_q^*$ такой, что $f(x) = 1$, $|f| = 1/d$, $f(y) = 0$ для любого $y \in Y$.*

Доказательство. Если $x \notin Y$, то $\mathbb{K}x = x\mathbb{K}$, в силу альтернативности алгебры $\mathbb{K}$. Следовательно, $(\mathbb{K}x) \cap Y = \{0\}$, так как Y является $\mathbb{K}$-векторным пространством. Тогда каждый вектор z из $\mathbb{K}$-векторной оболочки $Z := \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(Y, \{x\})$ однозначно представляется в виде $z = y + ax$, где $a \in \mathbb{K}$, $y \in Y$. Для $z = y + ax$ можно задать $f(z) := a$, тогда f — $\mathbb{K}$-квазилинейный функционал на Z. Если $a \neq 0$, то $|z| = |y + ax| = |a||a^{-1}y + x| \geqslant |a|d$, следовательно, $|f(z)| \leqslant |z|/d$, $|f| \leqslant 1/d$. Пусть $y_n \in Y$ — последовательность векторов такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} |x - y_n| = d$, следовательно, $1 = f(x - y_n) \leqslant |f||x - y_n|$. Поэтому $d^{-1} \leqslant |f|$, тогда $|f| = 1/d$. В силу теоремы 2.4.1, существует продолжение $\mathbb{K}$-квазилинейного функционала f на X. □

2.4.3. Следствие. *Пусть x — вектор, не принадлежащий замкнутому $\mathbb{K}$-векторному подпространству Y $\mathbb{K}$-векторного нормированного пространства X, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Тогда существует $f \in X_q^*$ такой, что $f(x) = 1$, $f(y) = 0$ для любого $y \in Y$.*

2.4.4. Следствие. *Для любого $x \neq 0$ в $\mathbb{K}$-векторном нормированном пространстве X, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, существует $g \in X_q^*$ такой, что $|g| = 1$, $g(x) = |x|$.*

Доказательство. Применение леммы 2.4.2 при $Y = \{0\}$ дает $\mathbb{K}$-квазилинейный функционал $g(y) := |x|f(y)$ для любого $y \in X$, где $f \in X_q^*$ с $f(x) = 1$. □

2.4.5. Следствие. *Для любого $x \in X$ в $\mathbb{K}$-векторном нормированном пространстве X, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, существует $|x| = \sup\limits_{f \in S_q^*} |f(x)|$, где S_q^* — замкнутая сфера единичного радиуса с центром в нуле в X_q^*. Если $f(x) = f(y)$ для любого $f \in X_q^*$, то $x = y$.*

2.4.6. Лемма. *Отображение $T \mapsto T^*$ является изометрическим изоморфизмом пространства $L_q(X, Y)$ в $L_q(Y_q^*, X_q^*)$, где X и Y — нормированные пространства над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$.*

Доказательство. Если $\mathbb{K}$-квазилинейный функционал $f \circ T$ непрерывен, то $T^* \circ f^* \in X_q^*$, причем отображение $T \mapsto T^*$ $\mathbb{K}$-квазилинейно. В силу следствия 2.4.5, $|T(x)| = \sup\limits_{|f|\leqslant 1} |f(T(x))|$, следовательно,

$$|T^*| = \sup_{|f|\leqslant 1} |T^* \circ f^*| = \sup_{|f|\leqslant 1, |x|\leqslant 1} |f(T(x))| =$$
$$= \sup_{|x|\leqslant 1} \sup_{|f|\leqslant 1} |f(T(x))| = \sup_{|x|\leqslant 1} |T(x)| = |T|,$$

поэтому, $T \mapsto T^*$ — изометрический изоморфизм из $L_q(X,Y)$ в $L_q(Y_q^*, X_q^*)$. □

2.4.7. Лемма. *Пусть X и Y — два $\mathbb{K}$-векторных нормированных пространства, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Тогда оператор T^*, сопряженный $T \in L_q(X,Y)$, является непрерывным $\mathbb{K}$-квазилинейным оператором из Y_q^* в X_q^*.*

2.4.8. Лемма. *Пусть X, Y, Z — $\mathbb{K}$-векторные нормированные пространства, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Если $T \in L_q(X,Y)$, $U \in L_q(Y,Z)$, то $(UT)^* = T^*U^*$, причем оператор I^* для $I \in L_q(X) := L_q(X,X)$ является единичным в $L_q(X_q^*)$.*

Доказательство. Если $f \in Z_q^*$, $g \in X_q^*$, то

$$((UT)^* \circ f)(x) = f(U(T(x))) = (U^* f)(T(x)) = ((T^*U^*) \circ f)(x),$$

а также $I^* g = g \circ I = g$. Таким образом, отображение $T \mapsto T^*$ кольца $L_q(X)$ в кольцо $L_q(X^*)$ является антиизоморфизмом. □

2.4.9. Лемма. *Если $T \in L_q(X,Y)$, где X и Y — $\mathbb{K}$-векторные нормированные пространства, $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, то повторно сопряженный оператор $T^{**} : (X_q^*)_q^* \to (Y_q^*)_q^*$ является продолжением $\mathbb{K}$-квазилинейного оператора T.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, $g \in Y_q^*$. Тогда $(T^{**}\hat{x})g = \hat{x}(T^*g) = (T^*g)(x) = g(T(x)) = (\hat{T}\hat{x})(g)$. □

2.4.10. Лемма. *Пусть X и Y — два $\mathbb{K}$-векторных нормированных пространства над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Тогда следующие два условия эквивалентны*:

1) *существует обратный оператор $T^{-1} \in L_q(Y,X)$ и T^{-1} определен на всем Y*;
2) *сопряженный оператор T^* имеет обратный $(T^*)^{-1} \in L_q(X_q^*, Y_q^*)$ и $(T^*)^{-1}$ определен на всем X_q^*.*

Доказательство. Пусть $T^{-1} \in L_q(Y,X)$. Тогда, в силу леммы 2.4.8, выполняются равенства $(TT^{-1})^* = (T^{-1})^* T^* = I$ на Y_q^*, а $(T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*$ — единичный оператор на X_q^*. Итак, существует $(T^*)^{-1} \in L_q(X_q^*, Y_q^*)$ и $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Обратно, если существует $(T^*)^{-1} \in L_q(X_q^*, Y_q^*)$, то, в силу только что доказанного, существует $(T^{**})^{-1} \in L_q((Y_q^*)_q^*, (X_q^*)_q^*)$. Таким образом, отображение T^{**} является гомеоморфизмом. Для $T \in L_q(X,Y)$ имеем

$$((b_1 f_1 + b_2 f_2) \circ T)(x) = ((b_1 f_1) \circ T)(x) + ((b_2 f_2) \circ T)(x) b_1(f_1(T(x)) + b_2(f_2(T(x)) =$$
$$= (T^*(b_1 f_1))(x) + (T^*(b_2 f_2))(x) = b_1(T^*(f_1)(x)) + b_2(T^*(f_2(x))$$

для любых $x \in X$ и любых $b_1, b_2 \in \mathbb{K}$, $f_1, f_2 \in Y^*$. Поскольку T^* имеет обратный $(T^*)^{-1}$, определенный на всем X_q^*, то $T(X)$ является $\mathbb{K}$-векторным пространством. В силу леммы 2.4.9, T^{**} служит продолжением оператора T, следовательно, T взаимно однозначен и $T(X)$ замкнуто. Если $y \in Y$ и $y \notin T(X)$, то, в силу следствия 2.4.3, существует $g \in Y_q^*$ такой, что $g \neq 0$, $gT = T^*g = 0$. Но это противоречит взаимной однозначности оператора T^*, т.е. $T(X) = Y$. □

2.5. Лемма. *Пусть $T \in L_s(X)$. Тогда $\sigma(T^*) = (\sigma(T))\tilde{}$ и $(R(\lambda, T))^* = R(\lambda^*, T^*)$, где $\lambda^* I := (\lambda I)^*$, $s \in \{q, r, l\}$.*

Доказательство. Если $S \in L_s(X,Y)$ и существует $S^{-1} \in L_s(Y,X)$, то $S^* \in L_u(Y_s^*, X_s^*)$ имеет обратный $(S^*)^{-1} \in L_u(X_s^*, Y_s^*)$ и $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$, где $(s,u) \in \{(q,q);(r,l);(l,r)\}$. Тогда

$$(\lambda I - T)^* y^* = y^* \circ (\lambda I - T) = y^* \circ (\lambda I) - y^* \circ T,$$

следовательно,

$$(\lambda^* I - T^*)[(\lambda I - T)^*]^{-1} = I \quad \text{и} \quad (R(\lambda, T))^* = R(\lambda^*, T^*).$$

Лемма доказана. □

2.6. Определение и замечание. Обозначим через $\mathcal{H}(T)$ семейство всех голоморфных функций f по переменной $z \in \mathbb{K}$ на окрестностях V_f для $\sigma(T)$, где $T \in L_s(X)$, $s \in \{q,r,l\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Для квазилинейного оператора T пусть $\mathcal{H}_\infty(T)$ — множество голоморфных функций на окрестности U_f, $U_f \subset \mathbb{K}$, для $\sigma(T)$ и ∞ в одноточечной компактификации $\hat{\mathbb{K}}$ алгебры $\mathbb{K}$ как локально компактного топологического пространства. Выберем отмеченную точку $z_0 \in \sigma(T)$. Для любого $M = x_0 i_0 + \cdots + x_m i_m \in \mathbb{K}$ с $|M| = 1$ и $\mathrm{Re}(M) = 0$, где $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, существует замкнутый спрямляемый путь η, состоящий из конечного объединения дуг $\eta(s) = z_0 + r_p \exp(2\pi s M)$ с $s \in [a_p, b_p] \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$ и сегментов прямых линий $\{z \in \mathbb{K} : z = z_0 + (r_p t + r_{p+1}(1-t)) \exp(2\pi b_p M), t \in [0,1]\}$, соединяющих их, причем $\eta \subset U \setminus \sigma(T)$, где $a_p < b_p$ и $0 < r_p < \infty$ для любых $p = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, $b_p = a_{p+1}$ для любых $p = 1, \ldots, m-1$, $a_1 = 0$, $b_m = 1$. Тогда существуют спрямляемый замкнутый путь ψ, гомотопный η, и окрестность U, удовлетворяющие условиям [13, теорема 3.9] и такие, что $\psi \subset U \setminus \sigma(T)$. Для $T \in L_q(X)$ определим

$$f(T) := (2\pi)^{-1} \left(\int\limits_{\psi} f(\zeta) R(\zeta; T) d\zeta \right) M^{-1}, \tag{2.3}$$

где сходимость предполагается в слабой операторной топологии. Этот интеграл зависит от f, T и не зависит от U, ψ, η, γ, M. Для неограниченного квазилинейного оператора T пусть $A := -R(a;T)$ и $\Psi : \hat{\mathbb{K}} \to \hat{\mathbb{K}}$, $\Psi(z) := (z-a)^{-1}$, $\Psi(\infty) = 0$, $\Psi(a) = \infty$, где $a \in \rho(T)$. Для $f \in \mathcal{H}_\infty(T)$ определим $f(T) := \phi(A)$, где $\phi \in \mathcal{H}_\infty(A)$ дается уравнением $\phi(z) := f(\Psi^{-1}(z))$.

2.7. Замечание. Рассмотрим банахово пространство X над телом кватернионов $\mathbb{H}$ как банахово пространство $X_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$. Тогда

$$X_{\mathbb{C}} = X_1 \oplus X_2 j, \tag{2.4}$$

где X_1 и X_2 — банаховы пространства над $\mathbb{C}$ такие, что X_1 изоморфно X_2. Комплексное сопряжение в $\mathbb{C}$ индуцирует комплексное сопряжение векторов в X_m, где $m = 1$ или $m = 2$. Каждый вектор $x \in X$ можно записать в матричной форме

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -\bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$. Тогда каждый квазилинейный оператор T можно записать в виде

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ -\bar{T}_2 & \bar{T}_1 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где $T_1 : X_1 \supset \mathcal{D}(T_1) \to Y_1$, $T_2 : X_1 \supset \mathcal{D}(T_2) \to Y_2$, $T(x) = Tx$ для $s \in \{q,r\}$, $T(x) = xT$ для $s = l$.

$$\bar{T}_m x := \overline{T_m \bar{x}}, \tag{2.7}$$

где $m = 1$ или $m = 2$.

В частности, для коммутатора $[\zeta I, T]$ при $\zeta = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$, где $b \in \mathbb{C}$, выполняется формула

$$[\zeta I, T] = 2(-1)^{1/2} \mathrm{Im}(b) \begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ -\bar{T}_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

где $\mathrm{Im}(b)$ — мнимая часть b, т.е. $2(-1)^{1/2} \mathrm{Im}(b) = (b - \bar{b})$.

2.8. Теорема. *Если $f \in \mathcal{H}_\infty(T)$ над алгеброй $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, то $f(T)$ не зависит от $a \in \rho(T)$ и*

$$f(T) = f(\infty)I + (2\pi)^{-1}\left(\int\limits_{\psi} f(\lambda)R(\lambda;T)d\lambda \right)M^{-1}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Если $a \in \rho(T)$, то $0 \ne b = (\lambda - a)^{-1}$ при $\lambda \ne a$ и

$$(T - aI)(T - \lambda I)^{-1} = (bI - A)^{-1}b,$$

поэтому

$$I + b^{-1}(T - \lambda I)^{-1} = b(bI - A)^{-1}b - bI$$

и $b \in \rho(A)$. Если $0 \ne b \in \rho(A)$, то $A(bI - A)^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}b^{-1}$ и $\lambda \in \rho(T)$. Точка $b = 0 \in \sigma(A)$, так как $A^{-1} = T - aI$ не ограничен. Пусть $a \notin V$, тогда $U = \psi^{-1}(V) \supset \sigma(A)$ и U открыто в $\hat{\mathbb{K}}$, а $\phi(z) := f(\psi^{-1}(z)) \in \mathcal{H}_\infty(U)$. В силу [13, следствие 3.26] и [15, [следствие 3.25], получим формулу (2.9). □

2.9. Теорема. *Пусть $a, b, c, e \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{H}_\infty(T)$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Тогда*

(i) $afc + bge \in \mathcal{H}_\infty(T)$ *и* $afc(T) + bge(T) = (afc + bge)(T)$;

(ii) $fg \in \mathcal{H}_\infty(T)$ *и* $f(T)g(T) = (fg)(T)$;

(iii) *если f раскладывается в сходящийся ряд*

$$f(z) = \sum_k \{(b_k, z^k)\}_{q(2m(k))}$$

в окрестности $\sigma(T)$, то

$$f(T) = \sum_k \{(b_k, T^k)\}_{q(2m(k))}$$

на $\mathcal{D}(T^\infty)$, где $b_k = (b_{k,1}, \ldots, b_{k,m(k)})$, $\{(b_k, z^k)\}_{q(2m(k))} := \{b_{k,1}z^{k_1} \ldots b_{k,m(k)}z^{k_{m(k)}}\}_{q(2m(k))}$, $b_{k,j} \in \mathbb{K}$;

(iv) *$f \in \mathcal{H}_\infty(T^*)$ и $f^*(T^*) = (f(T))^*$, где $f^*(z) := (f(z^*))^*$, $q(v)$ — вектор, указывающий на порядок произведения в $\{*\}$ в неассоциативном случае ($\mathbb{K} = \mathbb{O}$), как и в* [15, § 2.1], *который можно опустить в ассоциативном случае ($\mathbb{K} = \mathbb{H}$).*

Доказательство. **(i)** Возьмем $V_f \cap V_g =: V$ и для него построим U, η и ψ, как в § 2.6. Тогда первое утверждение следует из (2.3).

(ii) В силу [13, теорема 3.28] или [15, теорема 3.27], функция $\tilde{g}(\tilde{z}) =: \phi(z)$ принадлежит $\mathcal{H}_\infty(T)$ и $\tilde{\phi}(\tilde{z}) = g(z)$, где $\tilde{z} = x_0i_0 - x_1i_1 - \cdots - x_mi_m$, $z = x_0i_0 + x_1i_1 + \cdots + x_mi_m$, $x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, $z \in V_g \subset \mathbb{K}$. Используя $\phi(A)$, рассмотрим случай ограниченного T. В силу 2.6(i),

$$(\tilde{y}^*(\phi(\tilde{T})\tilde{h})) \ = (2\pi)^{-1}y^*\left(M \int\limits_{\psi} (d\tilde{\zeta}R(\tilde{\zeta}, T)g(\tilde{\zeta}))h \right),$$

где $\tilde{y}^*(\tilde{T}\tilde{h}) := (y^*(Th))\tilde{}$ и $\tilde{y}^*\tilde{h} := (y^*h)\tilde{}$ для любых $y^* \in X_q^*$ и $h \in X$. Поэтому

$$(\tilde{y}^*(\phi(\tilde{T})\tilde{h}))\tilde{} = (2\pi)^{-1}y^*\left(M \int\limits_{\tilde{\psi}} (d\zeta R(\zeta, T)g(\zeta))h \right),$$

следовательно,

$$(\phi(\tilde{T}))\tilde{} = (2\pi)^{-1}M\left(\int\limits_{\tilde{\psi}} d\zeta R(\zeta, T)g(\zeta) \right) = g(T),$$

так как левые и правые интегралы совпадают в пространстве голоморфных функций над $\mathbb{K}$. Функция fg голоморфна на V (см. [13, §§ 2.1 и 2.12], [15]). Существуют ψ_f и ψ_g такие, как в § 2.6, содержащиеся в $U \setminus \sigma(T)$, где $\bar{U} \subset V$. В силу теоремы Фубини, существует произведение

$$f(T)g(T) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{\psi_f} \int\limits_{\psi_g} (f(\zeta_1)R(\zeta_1;T)(d\zeta_1))((d\zeta_2)R(\zeta_2,T)g(\zeta_2)), \tag{2.10}$$

где $\zeta_1 \in \psi_f$ и $\zeta_2 \in \psi_g$. Выполняются тождества

$$R(\zeta;T)d\zeta = d_\zeta \operatorname{Ln}(\zeta I - T), \qquad (d\zeta)R(\zeta;T) = d_\zeta \operatorname{Ln}(\zeta I - T)$$

для выбранной ветви Ln (см. [13, §§ 3.7, 3.8], [15]), следовательно,

$$(R(\zeta_1;T)(d\zeta_1))((d\zeta_2)R(\zeta_2;T)) = d_{\zeta_1}(d_{\zeta_2}(\operatorname{Ln}(\zeta_1 I - T)\operatorname{Ln}(\zeta_2 I - T))) = ((d\zeta_1)R(\zeta_1;T))(R(\zeta_2;T)d\zeta_2).$$

В силу леммы 2.2,

$$R(a;T)R(b;T) = [R(a;T) - R(b;T)](b-a)^{-1} + R(a;T)([R(b;T),(b-a)I](b-a)^{-1}), \tag{2.11}$$

$$[R(b;T),(b-a)I] = R(b;T)([T,(b-a)I]R(b;T)), \tag{2.12}$$

так как $[(bI-T),(b-a)I] = -[T,(b-a)I]$, где $a, b \in \rho(T)$. Пусть, в частности, ψ_f и ψ_g содержатся в плоскости $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ в $\mathbb{H}$, где i, j, k — генераторы $\mathbb{H}$ такие, что $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$. В случае же $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ можно вложить соответствующую копию $\mathbb{H}$ в $\mathbb{O}$, и интеграл над $\mathbb{O}$ вдоль пути тогда сводится к интегралу над $\mathbb{H}$ вдоль пути. При этом можно воспользоваться инвариантностью интеграла при соответствующих условиях относительно выбора гомотопных путей (см. [15, теоремы 2.11 и 3.9]). Следует отметить, что оператор T однозначно определен всевозможными своими ограничениями на подпространства $X_{\mathbb{H}}$ над $\mathbb{H}$ в X при всевозможных вложениях тела кватернионов $\mathbb{H}$ в качестве подалгебры в алгебру октонионов $\mathbb{O}$, где $X = X_0 \oplus X_1 l$, X_0 и X_1 — банаховы пространства над $\mathbb{H}$, изоморфные $X_{\mathbb{H}}$, $l \in \mathbb{O} \setminus \mathbb{H}$, такие, что $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l$ — алгебра, изоморфная $\mathbb{O}$, $|l| = 1$, l — генератор процедуры удвоения $\mathbb{H}$ до $\mathbb{O}$ с точностью до изоморфизма алгебр. В самом деле, для любого $x \in X$ существует $X_{\mathbb{H}}$ с $x \in X_{\mathbb{H}}$. В силу (2.8) и (2.12),

$$\int\limits_{\psi_f} \int\limits_{\psi_g} f(\zeta_1)R(\zeta_1;T)[R(\zeta_2;T),(\zeta_2-\zeta_1)I](\zeta_2-\zeta_1)^{-1}d\zeta_1 d\zeta_2 g(\zeta_2) = 0, \tag{2.13}$$

так как ветвь Ln может быть выбрана одной и той же вдоль оси j в $\mathbb{H}$. В силу принципа аргумента [13, 3.30], она соответствует вычету $c(\zeta_1 - z)^{-1}(\zeta_2 - z)^{-1}b(\zeta_2 - \zeta_1)(\zeta_2 - z)^{-1}(\zeta_2 - \zeta_1)^{-1}$. В случае $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ в этом равенстве подразумеваются ограничения T на всевозможные $X_{\mathbb{H}}$. Тогда из (2.10), (2.11), (2.13) следует:

$$f(T)g(T) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{\psi_f} \int\limits_{\psi_g} f(\zeta_1)[R(\zeta_1;T) - R(\zeta_2,T)](\zeta_2-\zeta_1)^{-1}d\zeta_1 d\zeta_2 g(\zeta_2). \tag{2.14}$$

Выберем ψ_g такой, что $|\psi_g(s) - z_0| > |\psi_f(s) - z_0|$ для любого $s \in [0,1]$. Из аддитивности интеграла вдоль пути и теоремы Фубини следует:

$$\begin{aligned} f(T)g(T) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{\psi_f} f(\zeta_1)R(\zeta_1;T)d\zeta_1 \left(\int\limits_{\psi_g} (\zeta_2-\zeta_1)^{-1}d\zeta_2 g(\zeta_2) \right) - \\ -(2\pi)^{-2} \int\limits_{\psi_g} \left(\int\limits_{\psi_f} f(\zeta_1)d\zeta_1 R(\zeta_2,T)(\zeta_2-\zeta_1)^{-1} \right) d\zeta_2 g(\zeta_2). \end{aligned} \tag{2.15}$$

В силу [13, теоремы 3.9, 3.24] или [15, теоремы 3.9, 3.28], второй интеграл в правой части (2.15) равен нулю, так как

$$\int\limits_{\psi_f} f(\zeta_1)d\zeta_1 R(\zeta_2;T)(\zeta_2-\zeta_1)^{-1} = 0,$$

а первый интеграл дает

$$f(T)g(T) = (2\pi)^{-1}\left(\int\limits_{\psi_f} f(\zeta_1)R(\zeta_1;T)d\zeta_1 g(\zeta_1)\right)M^{-1} = (2\pi)^{-1}\left(\int\limits_{\psi_f} f(\zeta)g(\zeta)d\,\mathrm{Ln}(\zeta I - T)\right)M^{-1},$$

где $\zeta \in \psi_f$.

(iii) следует из применения **(i)**, **(ii)** по индукции и сходимости ряда в сильной операторной топологии.

(iv) В силу леммы 2.5, $\sigma(T^*) = (\sigma(T))\tilde{}$, тогда $f \in \mathcal{H}_\infty(T^*)$. Поскольку $(f(T))^*y^* = y^* \circ f(T)$ для любых $y^* \in X_q^*$, то, в силу леммы 2.5, $R(\zeta^*;T^*) = (R(\zeta;T))^*$, следовательно,

$$(f(T))^*y^* = (2\pi)^{-1}(M^{-1})^*\left(\int\limits_{\psi} (d\zeta^*)R(\zeta^*;T^*)((f(\zeta))^*y^*)\right),$$

где $(f(\zeta))^*y^* := y^* \circ f(\zeta)$. Если $f(\zeta)$ представлен рядом

$$f(\zeta) = \sum_n \{(a_n, \zeta^n)\}_{q(2m(n))},$$

сходящимся в шаре, то

$$f(\zeta^*) = \sum_n \{a_{n,1}\zeta^{*n_1}\dots a_{n,m(n)}\zeta^{*n_{m(n)}}\}_{q(2m(n))};$$

следовательно,

$$[f(\zeta^*)]^* = \sum_n \{\zeta^{n_{m(n)}}a^*_{n,m(n)}\dots\zeta^{n_1}a^*_{n,1}\}_{q'(2m(n))},$$

где $q'(v)$ соответствует порядку ассоциированного умножения в сопряженном произведении по сравнению с $q(v)$, и

$$(f(T))^* = (2\pi)^{-1}(M^{-1})^* \int\limits_{\psi} (d\zeta^*)R(\zeta^*;T^*)f^*(\zeta^*) = f^*(T^*).$$

Теорема доказана. □

2.10. Теорема. *Пусть оператор T ограничен, $T \in L_q(X)$, где X — банахово пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $f \in \mathcal{H}(T)$. Тогда $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$.*

Доказательство. Предположим, что $b \in \mathrm{sp}(T)$, тогда $L_q(X)(T-bI)$ и $(T-bI)L_q(X)$ — собственные левый и правый идеалы в $L_q(X)$. Пусть для определенности $L_q(X)(T-bI)$ — собственный левый идеал в $L_q(X)$. Согласно (2.3), имеем

$$f(T) = (2\pi)^{-1}\left(\int\limits_{\psi} f(z)R(z;T)dz\right)M^*.$$

Если $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, то для данного $b \in \mathbb{K}$ выберем копию $\mathbb{H}$, вложенную в $\mathbb{O}$ такую, что $b \in \mathbb{H}$. Пользуясь инвариантностью интеграла вдоль пути для гомотопных путей в $\rho(T)$, удовлетворяющих условиям [15, теорема 3.9], можно полагать $\psi \subset \mathbb{H}$.

В силу формулы (2.12), для каждого ограничения $T|_{X_{\mathbb{H}}}$ получим

$$\int\limits_{\psi} f(z)[R(z;T),(z-b)I]dz = 0,$$

а значит, и на всем банаховом пространстве X, где $b \in \rho(T)$. Выполняются тождества

$$[(zI-T)(z-b)]^{-1}(T-bI) = [(z-b)^{-1}(zI-T)^{-1}][(T-zI)+(z-b)I] =$$
$$= -(z-b)^{-1} + (z-b)^{-1}((zI-T)^{-1}(z-b)).$$

Так как алгебра $\mathbb{K}$ альтернативна, $(vK)(x) = v(K(x))$ для любых $K \in L_q(X)$, $v \in \mathbb{K}$, $x \in X$, иммем также

$$(vB^{-1}) \circ B(x) = vx$$

для любого обратимого оператора B, любого вектора $x \in X$ и любого $v \in \mathbb{K}$. При этом

$$(z-b)^{-1}((zI-T)^{-1}(z-b)) = (z-b)^{-1}((z-b)(zI-T)^{-1}) + (z-b)^{-1}([(zI-T)^{-1}, (z-b)I]),$$

а, в силу альтернативности алгебры $\mathbb{K}$,

$$(z-b)^{-1}((z-b)(zI-T)^{-1}) = (zI-T)^{-1},$$

следовательно,

$$(z-b)^{-1}((zI-T)^{-1}(z-b)) = (zI-T)^{-1} + (z-b)^{-1}([(zI-T)^{-1}, (z-b)I]),$$

поэтому

$$[(zI-T)^{-1} - (z-b)^{-1}] = [(zI-T)^{-1} - (z-b)^{-1}I] + (z-b)^{-1}([(zI-T)^{-1}, (z-b)I]).$$

Тогда

$$[f(T) - f(I)] = (2\pi)^{-1}\left(\int\limits_{\psi} f(z)[(zI-T)^{-1} - (z-b)^{-1}]dz \right) M^* =$$

$$= \left(\left(\int\limits_{\psi} f(z)[(zI-T)(z-b)]^{-1}dz \right)(T-bI) \right) M^* \in L_q(X)(T-bI),$$

так как интеграл вдоль пути является леволинейным, а интеграл от члена с коммутатором равен нулю, как и в доказательстве теоремы 2.9, следовательно, $f(b) \in \mathrm{sp}(f(T))$, т.е. $f(\mathrm{sp}(T)) \subset \mathrm{sp}(f(T))$.

Если $b \notin f(\mathrm{sp}(T))$, то $(f(z)-b)^{-1} =: g(z)$ голоморфна на открытой окрестности $\mathrm{sp}(T)$. В силу теоремы 2.9, $g(T)$ является двусторонне обратным оператором для $f(T) - bI$ в $L_q(X)$, так как $g(z)(f(z)-b) = 1$ на открытой окрестности спектра $\mathrm{sp}(T)$. Итак, $b \notin \mathrm{sp}(f(T))$, т.е. $\mathrm{sp}(f(T)) \subset f(\mathrm{sp}(T))$. Таким образом, $\mathrm{sp}(f(T)) = f(\mathrm{sp}(T))$. □

2.11. Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{H}_\infty(T)$, $T \in L_q(X)$, X — банахово пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $f(U)$ открыто для некоторого открытого $U \subset \mathrm{dom}(f) \subset \hat{\mathbb{H}}$, $g \in \mathcal{H}_\infty(T)$ и $f(U) \supset \sigma(T)$, $\mathrm{dom}(g) \supset f(U)$. Тогда $F := g \circ f \in \mathcal{H}(T)$ и $F(T) = g(f(T)$.*

Доказательство. По предположению теоремы функция g голоморфна на открытом подмножестве U_1, содержащем $\mathrm{sp}(f(T))$, и f голоморфна на открытом подмножестве U_2, содержащем $\mathrm{sp}(T)$. В силу теоремы 2.10, $f(\mathrm{sp}(T)) = \mathrm{sp}(f(T)) \subset U_1$, так что $\mathrm{sp}(T) \subset f^{-1}(U_1)$. В силу непрерывности f, $f^{-1}(U_1) \cap U_2 =: U$ — открытое подмножество в $\mathbb{K}$, на котором функция $g \circ f$ голоморфна, $\mathrm{sp}(T) \subset U$. Таким образом, $g \circ f \in \mathcal{H}(T)$. Выберем спрямляемые замкнутые пути (т.е. петли) ψ и ψ_g, охватывающие $\mathrm{sp}(T)$ и $\mathrm{sp}(f(T))$ соответственно, где $\psi \subset U$, $\psi_g \subset U_2$. Тогда для любого $\zeta \in \psi_g$ функция $h_\zeta := [\zeta - f(z)]^{-1}$ голоморфна на открытом подмножестве V в $\mathbb{K}$, где $\psi \subset V \subset U$ и $f(V) \subset U_1$. Тогда, в силу теоремы 2.9, $h_\zeta(T) = [zI-T]^{-1}$ для любого $\zeta \in \psi_g$. Поэтому

$$g(f(T)) = (2\pi)^{-1}\left(\int\limits_{\psi_g} f(\zeta)[\zeta I - f(T)]^{-1}d\zeta \right) M_g^* = (2\pi)^{-1}\left(\int\limits_{\psi_g} f(\zeta)h_\zeta(T)d\zeta \right) M_g^* =$$

$$= (2\pi)^{-1}\left(\int\limits_{\psi_g} \left(\left((2\pi)^{-1} \int\limits_{\psi} h_\zeta(z)(zI-T)^{-1}dz \right) M^* \right) d\zeta \right) M_g^*,$$

где $M, M_g \in \mathbb{K}$, $|M| = |M_g| = 1$, $\mathrm{Re}(M) = \mathrm{Re}(M_g) = 0$, M соответствует петле ψ, а M_g соответствует петле ψ_g. Рассмотрим ограничения T на всевозможные подпространства $X_{\mathbb{H}}$, вложенные в X, при всевозможных вложениях $\mathbb{H}$ в качестве подалгебры в $\mathbb{O}$. В частности, для $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ возьмем $X_{\mathbb{H}} = X$. Используя гомотопность петель при выполнении условий [13, 15, теорема 3.9], можно

полагать ψ и ψ_g содержащимися в одной и той же копии тела кватернионов $\mathbb{H}$. Выберем $M = M_g$, тогда

$$g(f(T)) = (2\pi)^{-1}\left(\int\limits_{\psi} \left(\left((2\pi)^{-1} \int\limits_{\psi_g} g(\zeta)[\zeta - f(z)]^{-1} d\zeta \right) M^* \right) (zI - T)^{-1} dz \right) M^* =$$

$$= (2\pi)^{-1}\left(\int\limits_{\psi} (g \circ f)(z)(zI - T)^{-1} dz \right) M^* = (g \circ f)(T),$$

так как интеграл вдоль пути лево- и праволинеен. В силу произвольности $X_{\mathbb{H}}$, отсюда вытекает утверждение теоремы также в случае $\mathbb{O}$, так как объединение всевозможных копий тела кватернионов, вложенных в алгебру октонионов, покрывает ее как множество: $\bigcup\limits_{\theta} \theta(\mathbb{H}) = \mathbb{O}$, где $\theta : \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{O}$ — вложение $\mathbb{H}$ в $\mathbb{O}$ в качестве подалгебры. □

2.12. Определение и замечание. Пусть $\mathcal{A}$ — банахово пространство и алгебра над $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, с единицей e, имеющей свойства $|e| = 1$ и $|xy| \leqslant |x||y|$ для любых x и $y \in \mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}$ называется банаховой алгеброй или C-алгеброй над $\mathbb{K}$. Банахову алгебру $\mathcal{A}$ назовем квазикоммутативной, если существует коммутативная алгебра $\mathcal{A}_0$ над $\mathbb{R}$ такая, что $\mathcal{A}$ изоморфна алгебре $\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 i_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_m i_m$, где алгебры $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_m$ попарно изоморфны над $\mathbb{R}$, $\{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ — стандартные генераторы алгебры $\mathbb{K}$, $m = 3$ для $\mathbb{H}$, $m = 7$ для $\mathbb{O}$.

Рассмотрим X над $\mathbb{R}$: $X = X_0 i_0 \oplus X_1 i_1 \oplus \cdots \oplus X_m i_m$, где $X_0, \ldots, X_m$ — попарно изоморфные банаховы пространства над $\mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 i_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_m i_m$, где $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_m$ — алгебры над $\mathbb{R}$. Умножая $\mathcal{A}$ на $S \in \{i_0, \ldots, i_m\}$, получим автоморфизмы $\mathcal{A}$, следовательно, $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_m$ попарно изоморфны.

2.13. Определения и замечания. Банахова алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ снабжена инволюцией, когда существует операция $*$: $\mathcal{A} \ni T \mapsto T^* \in \mathcal{A}$ такая, что $(T^*)^* = T$, $(T+V)^* = T^* + V^*$, $(TV)^* = V^* T^*$, $(\alpha T)^* = T^* \tilde{\alpha}$ для любых $\alpha \in \mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$.

Элемент $x \in \mathcal{A}$ называется регулярным, если существует $x^{-1} \in \mathcal{A}$. В противном случае он называется сингулярным. Тогда спектр $\sigma(x)$ для x определяется как множество всех $z \in \mathbb{K}$, для которых $ze - x$ сингулярен, а его спектральный радиус равен $|\sigma(x)| := \sup\limits_{z \in \sigma(x)} |z|$. Резольвентное множество определяется как

$$\rho(x) := \{z \in \mathbb{K} : ze - x \text{ регулярен}\}$$

и резольвента как $R(z; x) := (ze - x)^{-1}$ для любых $z \in \rho(x)$.

Если заданы банахова алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K}$ и ее замкнутая подалгебра $\mathcal{B}$ над $\mathbb{K}$, то факторалгебра $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ по определению состоит из элементов, которые являются классами смежных элементов $[x] := x + \mathcal{B}$, где $x \in \mathcal{A}$, $S + V := \{z : z = s + v, s \in S, v \in V\}$ для $S, V \subset \mathcal{A}$. Подалгебра $\mathcal{B}$ называется левым (правым) идеалом, если $\mathcal{A}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ соответственно). Если подалгебра $\mathcal{B}$ является одновременно левым и правым идеалом, то $\mathcal{B}$ называется двусторонним идеалом или идеалом.

2.14. Лемма. *Спектр $\sigma(x)$ элемента $x \in \mathcal{A}$ является непустым компактным подмножеством в $\mathbb{K}$. Его резольвента $x(z) := R(z; x)$ голоморфна на $\rho(x)$, $x(z)$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$ и*

$$x(z) - x(y) = x(z)(y - z)x(y) \quad \textit{для любых} \quad y, z \in \rho(x).$$

Доказательство вытекает из равенств

$$((ze - x)x(z))x(y) = x(y), \qquad x(z)(x(y)(ye - x)) = x(z),$$

$$(ze - x)((x(z) - x(y))(ye - x)) = (ye - x) - (ze - x) = (y - z)e,$$

следовательно,

$$x(z) - x(y) = R(z; x)((y - z)R(y; x)) = x(z)((y - z)x(y)).$$

Поэтому $x(z)$ непрерывна по z на $\rho(x)$ и существует

$$\left(\frac{\partial[x(z+y)x^{-1}(y)]}{\partial z}\right)\cdot h = -x(y)h$$

для любого $h \in \mathbb{K}$. Для любой отмеченной точки y член $x^{-1}(y)$ постоянен на $\mathcal{A}$, причем $\left(\frac{\partial[x(z+y)x^{-1}(y)]}{\partial \tilde{z}}\right) = 0$, следовательно, $x(z) \in \mathcal{H}(\rho(x))$. Второе утверждение получается рассмотрением комплексификации $\mathbb{C}\otimes\mathcal{A}$.

2.15. Теорема. *Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый собственный идеал над $\mathbb{K}$ в квазикоммутативной банаховой алгебре $\mathcal{A}$ над алгеброй $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$. Факторалгебра $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ изометрически изоморфна $\mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда идеал $\mathcal{B}$ максимален.*

Доказательство. Тело кватернионов получается из поля комплексных чисел применением процедуры удвоения с помощью генератора $j = i_2$, а алгебра октонионов получается применением процедуры удвоения из тела кватернионов с помощью генератора $l = i_4$. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна прямой сумме $\mathcal{A}_0 \oplus i_1\mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus i_m\mathcal{A}_m$, где алгебры $\mathcal{A}_0,\ldots,\mathcal{A}_m$ над полем $\mathbb{R}$ попарно изоморфны, $\{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ — стандартные генераторы алгебры $\mathbb{K}$. Тогда алгебры $\mathcal{A}_{0,1} := \mathcal{A}_0 \oplus i_1\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{B}_{0,1} := \mathcal{B}_0 \oplus i_1\mathcal{B}_1$ являются коммутативными над полем комплексных чисел. При этом $\mathcal{B}_{0,1}$ — идеал в $\mathcal{A}_{0,1}$, так как $\mathcal{A}\mathbb{K} = \mathbb{K}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}\mathbb{K} = \mathbb{K}\mathcal{B} = \mathcal{B}$. В силу теоремы Гельфанда—Мазура (см. [2, глава III, § 11, теорема 1]), факторалгебра $\mathcal{A}_{0,1}/\mathcal{B}_{0,1}$ изоморфна $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда собственный идеал $\mathcal{B}_{0,1}$ максимален в $\mathcal{A}_{0,1}$. С другой стороны, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ получаются из $\mathcal{A}_{0,1}$ и $\mathcal{B}_{0,1}$ соответственно с помощью процедур удвоения, однократных в случае $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ и двукратных в случае $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, поэтому факторалгебра $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ изоморфна $\mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ — максимальный собственный идеал в $\mathcal{A}$. □

2.16. Определения. C^*-алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$ — это банахова алгебра над $\mathbb{K}$ с инволюцией $*$ такая, что $|x^*x| = |x|^2$ для любого $x \in \mathcal{A}$.

Скалярное произведение на векторном пространстве X над $\mathbb{H}$ (т.е. линейном относительно правого и левого умножений раздельно на скаляры из $\mathbb{H}$) — это биаддитивное $\mathbb{R}$-билинейное отображение $\langle *;*\rangle : X^2 \to \mathbb{H}$ такое, что

1) $\langle x;x\rangle = \alpha_0$, где $\alpha_0 \in \mathbb{R}$;
2) $\langle x;x\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
3) $\langle x;y\rangle = \langle y;x\rangle\tilde{}$ для любых $x, y \in X$;
4) $\langle x+z;y\rangle = \langle x;y\rangle + \langle z;y\rangle$;
5) $\langle xa;yb\rangle = \tilde{a}\langle x;y\rangle b$ для любых $x, y, z \in X$, $a, b \in \mathbb{H}$.

В случае векторного пространства X над $\mathbb{O}$ рассмотрим $\mathbb{O}$-значную функцию на X^2 такую, что

1′) $\langle\zeta,\zeta\rangle = a$ с $a \geqslant 0$ и $\langle\zeta,\zeta\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $\zeta = 0$,
2′) $\langle\zeta, z+\xi\rangle = \langle\zeta,z\rangle + \langle\zeta,\xi\rangle$,
3′) $\langle\zeta+\xi,z\rangle = \langle\zeta,z\rangle + \langle\xi,z\rangle$,
4′) $\langle\alpha\zeta,z\rangle = \alpha\langle\zeta,z\rangle = \langle\zeta,\alpha z\rangle$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\langle\zeta a,\zeta\rangle = \tilde{a}\langle\zeta,\zeta\rangle$ для любого $a \in \mathbb{O}$,
5′) $\langle\zeta,z\rangle\tilde{} = \langle z,\zeta\rangle$ для любых ζ,ξ и $z \in X$.

При представлении X в виде $X = X_0i_0 \oplus X_1i_i \oplus \cdots \oplus X_mi_m$, где $m = 3$ для $\mathbb{H}$ и $m = 7$ для $\mathbb{O}$, $X_0,\ldots,X_m$ — попарно изоморфные $\mathbb{R}$-линейные пространства, $\{i_0,\ldots,i_m\}$ — семейство стандартных генераторов алгебры $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, $i_0 = 1$, будем предполагать естественным образом, что

6) $\langle x_p, y_q\rangle \in \mathbb{R}$ и
7) $\langle x_pi_p, y_qi_q\rangle = \langle x_p,y_q\rangle i_p^*i_q$ для любых $x_p \in X_p, y_q \in X_q$, $p,q \in \{0,1,2,\ldots,m\}$.
8) Если X полно относительно топологии нормы $|x| := \langle x;x\rangle^{1/2}$, то X называется $\mathbb{K}$-гильбертовым пространством.

В частности, для $X = \mathbb{K}^n$ можно взять каноническое скалярное произведение

9) $\langle\zeta;z\rangle := (\zeta,z) = \sum\limits_{l=1}^{n} {}^l\tilde{\zeta}\,{}^lz$, где $z = ({}^1z,\ldots,{}^nz)$, ${}^lz \in \mathbb{K}$.

2.17. Лемма. *Банахова алгебра $L_q(X)$ на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$ с инволюцией*

$$\langle Tx;y\rangle =: \langle x;T^*y\rangle \quad \textit{для любых} \quad x,y\in X \tag{2.16}$$

— это C^*-алгебра.

Доказательство. Из (2.16), определений 2.13 и 2.16 вытекает инволютивность алгебры $L_q(X)$, так как $(bT)(x):=b(T(x))$ и $(Tb)(x):=(T(x))b$ для любых $T\in L_q(X)$, $x\in X$, $b\in\mathbb{K}$. Вместе с условиями 2.161)–7) это дает $(bT)^*=T^*b^*$ в силу того, что $T=T_0\oplus T_1i_1\oplus\cdots\oplus T_mi_m$, $T_j:X\to X_j$ для любого $j=0,1,\ldots,m$. При этом $\langle T^*(T(x)),y\rangle=\langle T(x),T(y)\rangle$ для любых $x,y\in X$, в частности, $\langle T^*(T(x)),x\rangle=\|T(x)\|^2$. Поэтому

$$\|T\|^2\leqslant\sup_{\|x\|=1}|<T^*(T(x)),x>|\leqslant\sup_{\|x\|=1,\|y\|=1}|\langle T^*(T(x)),y\rangle|=\|T^*T\|\leqslant\|T^*\|\|T\|,$$

и аналогичные неравенства получаются при замене T на T^*, что дает

$$\|T\|^2\leqslant\|T^*\|\|T\|\quad\text{и}\quad\|T^*\|^2\leqslant\|T\|\|T^*\|,$$

следовательно, $\|T\|=\|T^*\|$ и $\|T^*T\|=\|T\|^2$. □

2.18. Лемма. *Если $\mathcal{A}$ — квазикоммутативная C^*-алгебра над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, то $|x^2|=|x|^2$, $|x|=|x^*|$ и $I^*=I$, где I — единица в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Каждый вектор $x\in\mathcal{A}$ представим в виде $x=x_0i_0+\cdots+x_mi_m$, $x_j\in\mathcal{A}_j$ для любого $j=0,1,\ldots,m$. Тогда $x^*=x_0^*i_0-x_1^*i_1-\cdots-x_m^*i_m$, так как $(x_ji_j)^*=(-1)^{\kappa(i_j)}x_ji_j$, где $i_j\in\{i_0,i_1,\ldots,i_m\}$ для любого $j=0,1,\ldots,m$, $\kappa(i_0)=0$, $\kappa(i_j)=1$ при $j=1,2,\ldots,m$. Поэтому $[x,x^*]=0$ и $|x_j^2|=|x_j|^2$. Тогда

$$|x|^2=|x_0|^2+|x_1|^2+\cdots+|x_m|^2,\qquad |x^2|^2=|(x^2)^*x^2|=|(x^*)^2x^2|=|(xx^*)(xx^*)|=|x|^4;$$

следовательно, $|x^2|=|x|^2$. Поскольку $I=I_0$, то $I^*=I_0^*=I_0=I$. □

2.19. Определение. Гомоморфизм $h:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ C^*-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, сохраняющий инволюцию $h(x^*)=(h(x))^*$, называется $*$-гомоморфизмом. Если h — биективный $*$-гомоморфизм $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, то h называется $*$-изоморфизмом, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются $*$-изоморфными. Через $\sigma(\mathcal{A})$ обозначим структурное пространство для $\mathcal{A}$; оно также называется спектром для $\mathcal{A}$. Структурное пространство определяется аналогично комплексному случаю с помощью теоремы 2.15.

2.20. Предложение. *Для гильбертова пространства X над $\mathbb{H}$ пространства $L_l(X,\mathbb{H})$ и $L_r(X,\mathbb{H})$ изоморфны X, для банахова пространства X $L_q(X)$ изоморфно $L_l(X^2)$, $L_q(\mathbb{H})=\mathbb{H}^4$. Существует биекция между семейством квазилинейных операторов T на $\mathcal{D}(T)\subset X$ и семейством леволинейных операторов V на $\mathcal{D}(V)\subset X^2$.*

Доказательство. Для X имеется разложение $X=X_e\oplus X_jj$, где X_0 и X_j — изоморфные гильбертовы пространства над $\mathbb{C}$, т.е. $z=z_1+z_2j$ для любого $z\in X$, где $z_1\in X_e$, $z_2\in X_j$. При этом для $T\in L_q(X,Y)$ выполняется разложение $T=T_e\oplus T_jj$, где $T_e:X\to Y_e$, $T_j:X\to Y_j$, Y — гильбертово пространство над $\mathbb{H}$. Поскольку $T(z)=T(z_1)+T(z_jj)$, то справедливы равенства $T_e(z)=T_{1,1}(z_1)+T_{1,2}(z_2)$ и $T_j(z)=T_{2,1}(z_1)+T_{2,2}(z_2)$, где каждый оператор $T_{b,c}$ определен на комплексном гильбертовом пространстве X_c и принимает значения в комплексном гильбертовом пространстве X_b для любых $b,c\in\{1,2\}$. Тогда каждый оператор $T_{b,c}$, в силу своей $\mathbb{R}$-линейности, представляется в виде суммы двух операторов $T_{b,c}=T_{b,c,1}+T_{b,c,2}$, где $T_{b,c,1}(x)$ линеен по $x\in X_c$, а $T_{b,c,2}(x)$ сопряженно линеен по $x\in X_c$, т.е.

$$T_{b,c,1}(px+qy)=pT_{b,c,1}(x)+qT_{b,c,1}(y),\qquad T_{b,c,2}(px+qy)=\bar pT_{b,c,2}(x)+\bar qT_{b,c,2}(y)$$

для любых $x,y\in X_c$ и $p,q\in\mathbb{C}$, где $\bar p$ обозначает комплексно сопряженное число $p\in\mathbb{C}$. Пусть $L_q(X)\ni\alpha=\alpha_ee+\alpha_ii+\alpha_jj+\alpha_kk$. Поскольку $S\alpha S\in L_q(X)$ для любых $S\in\mathbb{H}$, то существуют кватернионные постоянные $S_{m,l,n}$ такие, что

$$\alpha_m(x)m=\sum_n S_{m,1,n}\alpha(x)S_{m,2,n}\quad\text{для любых}\quad m\in\{e,i,j,k\},\tag{2.17}$$

где $S_{m,1,n} = \gamma_{m,n}S_{m,2,n}$ с $\gamma_{m,n} = (-1)^{\phi(m,n)}/4 \in \mathbb{R}$, $\phi(m,n) \in \{1,2\}$, $S_{m,l,n} \in \mathbb{R}n$ для любых $n \in \{e,i,j,k\}$ (см. [13, §§3.7, 3.28]). Применяя для x разложение из § 2.12, в силу (2.17), получим (4×4)-блочный вид операторов над $\mathbb{R}$ и изоморфизм $L_q(X)$ с $L_l(X^2)$. □

2.21. Замечание. Для гильбертова пространства X над $\mathbb{O}$ воспользуемся разложением $X = X_1 \oplus X_2 l$, где X_1 и X_2 — два изоморфных гильбертовых пространства над $\mathbb{H}$, l — генератор процедуры удвоения тела $\mathbb{H}$ до алгебры $\mathbb{O}$. Тогда каждый оператор T на X со значениями в гильбертовом пространстве Y над $\mathbb{O}$ можно записать в виде $T(z) = T_1(z) \oplus T_2(z)l$ для любого $z \in X$, где $T_1 : X \to Y_1$, $T_2 : X \to Y_2$. При этом $T_p(z) = T_{p,1}(z_1) + T_{p,2}(z_2)$, где $T_{p,q} : X_q \to Y_p$ для любых $p,q \in \{1,2\}$, $z = z_1 + z_2 l$, $z_1 \in X_1$, $z_2 \in X_2$.

Для леволинейного оператора $T : D(T) \to X$ на $\mathbb{K}$-линейном подпространстве $D(T) \subset X$ для банахова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ ненулевой вектор $x \in D(T)$, удовлетворяющий условию $T(x) = \lambda x$ при некотором $\lambda \in \mathbb{K}$, называется собственным вектором, а λ называется собственным значением. Тогда $T(bx) = bT(x) = b(\lambda x)$ для любого $b \in \mathbb{K}$ и леволинейного оператора T, причем $\lambda I - T$ не инъективен и $\lambda \in \sigma(T)$. Множество всех собственных значений называется точечным спектром и обозначается через $\sigma_p(T)$. Если же λ не является собственным значением и если $\mathrm{Range}(\lambda I - T) := (\lambda I - T)(D(T))$ не плотно в X, то говорят, что λ лежит в остаточном спектре, который обозначается через $\sigma_r(T)$. Тогда понятия точечного $\sigma_p(T)$ и остаточного $\sigma_r(T)$ спектров над $\mathbb{H}$, в силу предложения 2.20, распространяются на квазилинейные операторы.

В силу теоремы Лебега о разложении меры, если μ — борелева мера на $\mathbb{K}$, то μ единственным образом представима в виде $\mu = \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{sing}} + \mu_{\mathrm{p}}$, где μ_{ac} абсолютно непрерывна относительно лебеговой меры, а μ_{sing} — непрерывная (т.е. без атомов) мера, сингулярная относительно лебеговой меры на $\mathbb{K}$ как на топологическом пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$, μ_{p} — чисто атомическая (точечная) мера, сингулярная относительно лебеговой меры.

Оператор T в гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ называется эрмитовым, если $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ для любых x и y из области определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T, где $\mathcal{D}(T) \subset X$. Оператор T в X называется симметрическим (симметричным), если он эрмитов и $\mathcal{D}(T)$ плотно в X. Оператор T в X называется самосопряженным, когда $\mathcal{D}(T)$ плотно в X и $T = T^*$ на $\mathcal{D}(T)$.

2.22. Теорема. *Квазикоммутативная C^*-алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ изометрически $*$-изоморфна алгебре $C(\Lambda, \mathbb{K})$ всех непрерывных $\mathbb{K}$-значных функций на ее спектре Λ.*

Доказательство вытекает из того, что отображение $x \mapsto x(\cdot)$ из $\mathcal{A}$ в $C(\Lambda, \mathbb{K})$ является $*$-гомоморфизмом, где $x(\mathcal{M})$ определяется равенством $x + \mathcal{M} = x(\mathcal{M}) + \mathcal{M}$ для любого максимального идеала $\mathcal{M}$. Пусть $x(\lambda) = \alpha_0 i_0 + \alpha_1 i_1 + \cdots + \alpha_m i_m$, тогда $x^*(\lambda) = \beta_0 i_0 + \beta_1 i_1 + \cdots + \beta_m i_m$, где $\alpha_0, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$, $i_0 = 1$, $\{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ — стандартные генераторы алгебры $\mathbb{K}$. Имеется разложение для $X := C(\Lambda, \mathbb{K})$ из § 2.12 с $X_0 = C(\Lambda, \mathbb{R})$ и $x_p = \sum\limits_n S_{p,1,n} z S_{p,2,n} \tilde{i}_p$ для любых $z \in \mathbb{K}$, где $z = x_0 i_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_m i_m$, $x_j \in \mathbb{R}$ для любого $j = 0, 1, \ldots, m$ (см. предложение 2.20). Поэтому применима теорема Стоуна—Вейештрасса для $\mathbb{K}$-значных функций. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — два максимальных идеала в Λ, то $y(\lambda_1) \neq y(\lambda_2)$ для $y \in \lambda_1 \setminus \lambda_2$. Следовательно, алгебра функций $x(\cdot)$ совпадает с $C(\Lambda, \mathbb{K})$.

2.22.1. Определения. В алгебре $L_q(X)$ на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ рассмотрим базу окрестностей оператора A, состоящую из множеств вида

$$V(A; x_1, \ldots, x_n; b) := \bigl\{B \in L_q(X) : \|(B - A)x_j\| < b, j = 1, 2, \ldots, m\bigr\},$$

где $x_1, \ldots, x_n \in X$, $b > 0$. Топология, образованная такой базой, называется сильной операторной топологией.

Введем также базу окрестностей

$$W(A; x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; b) := \bigl\{B \in L_q(X) : |\langle x_j, (A - B)y_j\rangle| < b, j = 1, 2, \ldots, n\bigr\}.$$

Порожденную ими топологию назовем слабой операторной топологией, где $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in X$, $b > 0$, т.е. она индуцирована функционалами $w_{x,y}(A) := \langle x, A(y)\rangle$.

Напомним, что C^*-алгебра над $\mathbb{C}$ называется алгеброй фон Неймана, если она содержится в алгебре $\mathbb{C}$-линейных ограниченных операторов на гильбертовом пространстве над $\mathbb{C}$, замкнута относительно слабой операторной топологии и содержит единицу.

2.22.2. Theorem. *Сильные и слабые замыкания $\mathbb{R}$-выпуклого подмножества Y в $L_q(X)$ для гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ совпадают.*

Доказательство. Поскольку $(A_1a_1 + A_2a_2)(y) = (A_1(y))a_1 + (A_2(y))a_2$ для любого $y \in X$, где $A_1, A_2 \in L_q(X)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, то над $\mathbb{H}$ каждый функционал $w_{x,y}(A)$ право-$\mathbb{H}$-линеен, что, в общем, не выполняется над $\mathbb{O}$. Если оператор A_s самосопряжен, $x_p \in X_0$, то

$$\langle x_p i_p, A_s(y) i_s\rangle = \langle x_p, A_s(y)\rangle i_p^* i_s,$$

где $\{i_0, i_1, \dots, i_m\}$ — стандартные генераторы алгебры $\mathbb{K}$, $i_0 = 1$, $X = x_0 \oplus X_1 i_1 \oplus \cdots \oplus X_m i_m$, где каждое X_s — гильбертово пространство над $\mathbb{R}$, изоморфное X_0. Тогда

$$\langle x, A(y)\rangle = \sum_{p,s,q} \langle x_p, A_s(y_q i_q)\rangle i_p^* i_s,$$

где использовано разложение $A = \sum\limits_{s=0}^{m} A_s i_s$ с самосопряженными операторами A_s на X со значениями в X_s. Здесь $X = X_0 \oplus X_1 i_1 \oplus \cdots \oplus X_m i_m$, $\{i_0, i_1, \dots, i_m\}$ — стандартные генераторы алгебры $\mathbb{K}$, $X_0, \dots, X_m$ — попарно изоморфные гильбертовы пространства над $\mathbb{K}$, и каждый оператор A_s самосопряжен. Значит, он коммутирует с каждым генератором i_p.

Если оператор принадлежит сильному операторному замыканию подмножества Y, то он принадлежит и слабому операторному замыканию. Пусть теперь A принадлежит слабому операторному замыканию для Y. Возьмем произвольные векторы $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n \in X$. Рассмотрим пространство $X^{\oplus n} := X \oplus \cdots \oplus X$, равное прямой сумме n копий пространства X. Обозначим $B^{\oplus n}(y_1, \dots, y_n) := (B(y_1), \dots, B(y_n)) \in X^{\otimes n}$, $B^{\oplus n} := B \oplus \cdots \oplus B$, где $B \in L_q(X)$. Тогда множество $Y^{\oplus n} := \{B^{\oplus n} : B \in Y\}$ выпукло над $\mathbb{R}$ в $L_q(X^{\oplus})$. Поскольку $A^{\oplus}$ принадлежит слабому операторному замыканию, то $A^{\oplus n}(y_1, \dots, y_n)$ принадлежит слабому замыканию для $Y^{\oplus n}(y_1, \dots, y_n)$. В силу теоремы Хана—Банаха над $\mathbb{R}$, рассматривая нижележащие пространства над $\mathbb{R}$, получим, что $A^{\oplus n}(y_1, \dots, y_n)$ принадлежит операторному замыканию для $Y^{\oplus n}(y_1, \dots, y_n)$ в $X^{\oplus n}$. Поэтому для любого $b > 0$ существует $F \in Y$ такой, что $\|(F - A)x_j\| < b$ для любого $j = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, слабые и сильные операторные замыкания для Y совпадают. □

2.22.3. Theorem. *Единичный шар в $L_q(X)$ для гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ компактен в слабой операторной топологии.*

Доказательство. В силу теоремы 2.22.2, образ $B_{x,y}$ единичного шара $B(L_q(X), 0, 1)$ при отображении $w_{x,y}(A)$ является шаром в $\mathbb{K}$ радиуса $\|x\|\|y\|$. Семейство $\{w_{x,y} : x, y \in X\}$ различает точки в $L_q(X)$, поэтому отображение

$$\theta(A) := \prod_{\substack{x,y\in\mathbb{K},\\ \|x\|=1,\\ \|y\|=1}} w_{x,y}(A)$$

является гомеоморфизмом на подмножество в $S := \prod\limits_{\substack{x,y\in\mathbb{K},\\ \|x\|=1,\\ \|y\|=1}} B_{x,y}$. Топологическое пространство S компактно в силу теоремы Тихонова, так как каждый шар $B_{x,y}$ компактен. Поскольку

$$\langle x, A(y)\rangle = \sum_{p,s,q} \langle x_p, A_s(y_q i_q)\rangle i_p^* i_s,$$

каждая непрерывная $\mathbb{R}$-билинейная форма $b_{p,s,q}$ на $X_p \times X_q i_q$ со значениями в $\mathbb{R} i_p^* i_s$, в силу теоремы представления Рисса, имеет вид $b_{p,s,q}(x_p, y_q i_q) = \langle x_p, A_s(y_q i_q)\rangle i_p^* i_s$ для некоторого ограниченного $\mathbb{R}$-линейного оператора A_s на $X_q i_q$. Если b является предельной точкой для $\theta(B(L_q(X), 0, 1))$, то

$$b(x, y) = \sum_{p,s,q} b_{p,s,q}(x_p, y_q i_q),$$

где каждая форма $b_{p,s,q}$ является $\mathbb{R}$-билинейной на $X_p \times X_q i_q$ и принимает значения в $\mathbb{R}i_p^* i_s$, так как для любого $t > 0$ существуют $F_s \in L_q(X)$, $x_1, x_2 \in X_p$, $y_1, y_2 \in X_q$ такие, что

$$|ab_{p,s,q}(x_n, y_k) - a\langle x_n, T_s(y_k i_q)\rangle| < t, \qquad |b_{p,s,q}(x_n, y_k) - \langle x_n, T_s(y_k i_q)\rangle| < t,$$
$$|b_{p,s,q}(ax_1 + x_2, y_k) - \langle ax_1 + x_2, T_s(y_k i_q)\rangle| < t,$$
$$|b_{p,s,q}(x_n, ay_1 + y_2) - \langle x_n, T_s((ay_1 + y_2) i_q)\rangle| < t$$

для любого $j = 1, 2$, $k = 1, 2$, где $a \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|b_{p,s,q}(ax_1 + x_2, y_k) - ab_{p,s,q}(x_1, y_k i_q) - b_{p,s,q}(x_2, y_k)| < 3t,$$
$$|b_{p,s,q}(x_j, ay_1 + y_2) - ab_{p,s,q}(x_j, y_1 i_q) - b_{p,s,q}(x_j, y_2)| < 3t.$$

Поскольку $t > 0$ произвольно мало, то $b_{p,s,q}$ является $\mathbb{R}$-билинейным отображением на $X_p \times X_q i_q$. Итак, существует $A \in L_q(X)$, для которого $b(x, y) = \langle x, A(y)\rangle$. Таким образом, $\theta(B(L_q(X), 0, 1))$ замкнуто в S, следовательно, $\theta(B(L_q(X), 0, 1))$ компактно. □

2.22.4. Лемма. *Если $\{S_a : a \in \Upsilon\}$ — монотонно возрастающая направленность самосопряженных операторов на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ и $S_a \leqslant kI$ для любых a, где $S_a \in L_q(X)$, $0 < k < \infty$, Υ — непустое направленное множество, то $\{S_a : a \in \Upsilon\}$ сходится относительно сильной операторной топологии к самосопряженному оператору S, причем S является наименьшей верхней границей для $\{S_a : a \in \Upsilon\}$.*

Доказательство. Поскольку сходимость направленности $\{S_a : a \in \Upsilon\}$ эквивалентна сходимости направленности $\{S_a : a \in \Upsilon, a \geqslant a_0\}$ для некоторого $a_0 \in \Upsilon$, то без ограничения общности можно полагать, что направленность $\{S_a : a \geqslant a_0\}$ ограничена снизу. Поэтому $-\|S_{a_0}\| I \leqslant S_a \leqslant kI$ и $\{S_a : a\}$ — ограниченное множество операторов. Тогда, в силу теоремы 2.22.3, существует поднаправленность $\{S_c : c\}$, сходящаяся в слабой операторной топологии к оператору $S \in L_q(X)$. Поскольку S_a монотонно возрастает, т.е. $\langle S_a x, x\rangle \geqslant \langle S_c x, x\rangle$ для любых $a \geqslant c$ и $x \in X$, то $S \geqslant S_a$ для любых a. Если $a \geqslant c$, то $0 \leqslant S - S_a \leqslant S - S_c$, а также

$$0 \leqslant \langle (S - S_a)x, x\rangle = \|(S - S_a)^{1/2} x\|^2 \leqslant \langle (S - S_c)x, x\rangle$$

сходится к нулю по $c \in \Upsilon$ для любого $x \in X$. Итак, $\{(S - S_a)^{1/2} : a\}$ сходится относительно сильной операторной топологии к нулю. В силу непрерывности умножения относительно сильной операторной топологии на ограниченные подмножества операторов, $\{(S - S_a) : a\}$ тоже сходится к нулю. Если $F \geqslant S_a$ для любых a, то $\langle Fx, x\rangle \geqslant \langle Sx, x\rangle$ для любых $x \in X$, так как $\langle Sx, x\rangle = \lim\limits_a \langle S_a x, x\rangle$, а $\langle Fx, x\rangle \geqslant \langle S_a x, x\rangle$ для любых a. Таким образом, $F \geqslant S$, т.е. S является наименьшей верхней гранью. □

2.22.5. Лемма. *Если A — ограниченный оператор на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $0 \leqslant A \leqslant I$, то $\{A^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$ — монотонно возрастающая последовательность операторов, причем $\lim\limits_{n\to\infty} A^{1/n}$ — проекционный оператор на замыкание области значений оператора A.*

Доказательство. Рассмотрим C^*-алгебру, порожденную операторами A и I (см. теорему 2.22). Тогда $\{A^{1/n} : n\}$ — монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху оператором I. В силу леммы 2.22.4, $\{A^{1/n} : n\}$ имеет предел P относительно сильной операторной топологии, где $A^{1/n} \leqslant P$ для любых n. В то же время P^2 является пределом последовательности $\{A^{2/n} : n\}$, которая является подпоследовательностью последовательности $\{A^{1/n} : n\}$. Тогда $P^2 = P$, т.е. P — проекционный оператор. К алгебре $C(\Lambda, \mathbb{K})$ применим теорему Стоуна—Вейерштрасса над $\mathbb{K}$ (см. также [15, § 2.7]) и получим, что $A^{1/n}$ — предел в сильной операторной топологии семейства полиномов от A над $\mathbb{K}$ с нулевым постоянным членом. Поэтому $A^{1/n}x = 0$, если $Ax = 0$, следовательно, $Px = 0$. Если же $Px = 0$, то

$$0 = \langle Px, x\rangle \geqslant \langle A^{1/n}x, x\rangle = \|A^{1/(2n)}x\|^2 \geqslant 0,$$

т.е. $A^{1/(2n)}x = 0$. Тогда $Ax = 0$. Таким образом, $A^{-1}(0) = P^{-1}(0)$, следовательно, P — проекционный оператор на $\mathrm{cl}(\mathrm{Range}(A))$. □

2.22.6. Замечание. Пусть X — гильбертово пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Тогда существует лежащее под ним гильбертово пространство $X_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$. Скалярное произведение на X со значениями в $\mathbb{K}$ (см. определение 2.16) индуцирует скалярное произведение $(x,y) := \mathrm{Re}\langle x,y\rangle$ на $X_{\mathbb{R}}$ со значениями в $\mathbb{R}$. Тогда для $\mathbb{K}$-векторного подпространства Y в X можно задать ортогональное дополнение $Y^\perp$ относительно скалярного произведения (x,y). При этом уравнение $\hat{E}_e(y+z) = y$ для $y \in Y$, $z \in Y^\perp$ определяет $\mathbb{R}$-линейный оператор $\hat{E}_e$, действующий на гильбертовом пространстве X, т.е. $\hat{E}_e$ является проекцией на Y параллельно $Y^\perp$. Более того, $\hat{E}_e^2 = \hat{E}_e$, и имеем

(i) $Y = \{y : y = \hat{E}_e(x), x \in X\} = \{y \in X : \hat{E}_e(y) = y\}$;
(ii) $Y^\perp = \{z \in X : \hat{E}_e(z) = 0\}$.

Отметим, что $(I - \hat{E}_e)$ — ортогональная проекция из X на $Y^\perp$, так как $(Y^\perp)^\perp = Y$ и $(I-\hat{E}_e)(z+y) = z$ для любых $z \in Y^\perp$ и $y \in Y$. Рассмотрим разложение $X = X_0 \oplus X_1 i_1 \oplus \cdots \oplus X_m i_m$ гильбертова пространства над $\mathbb{K}$, где $\{i_0, i_1, \dots, i_m\}$ — семейство стандартных генераторов алгебры $\mathbb{K}$, $i_0 = 1$, $X_0, \dots, X_m$ — попарно изоморфные гильбертовы пространства над $\mathbb{R}$.

Семейство операторов $\hat{E}(a,*) \in L_q(X)$, $a \in \mathbb{K}$, назовем $\mathbb{K}$-градуированным проекционным оператором на X, если оно удовлетворяет следующим условиям 1)–7):

1) $\hat{E}(x) = \hat{E}_e(x)$ для любого $x \in X_0$, где
2) $\hat{E}(x) := \hat{E}(1,x)$ для любых $x \in X$,
3) $\hat{E}_e^2(x) = \hat{E}_e(x)$ для любого $x \in X$,
4) $\hat{E}(s,x) = \hat{E}(1,sx)$ для любых $s \in \mathbb{K}$ и $x \in X_0$,
5) $\hat{E}(sx) =: \hat{E}_s(x)$ для любых $s \in \mathbb{K}$ и $x \in X_0$,
6) $\hat{E}_s(\hat{E}_q(x)) = \hat{E}_{sq}(x)$ для любых $s, q \in \{i_0, \dots, i_m\}$ и $x \in X_0$,
7) $\hat{E}_s^* = (-1)^{\kappa(s)}\hat{E}_s$ на X_0 для любого $s \in \{i_0, \dots, i_m\}$, где $\kappa(s) = 2$ для $s = i_0$, $\kappa(s) = 1$ для $s \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, $\hat{E}_s^*$ обозначает сопряженный оператор.

2.22.7. Предложение. *Существует биективное соответствие* (*с точностью до изометрического автоморфизма алгебры* $\mathbb{K}$) *между замкнутыми* $\mathbb{K}$*-векторными подпространствами* Y *гильбертова пространства* X *над* $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ *или* $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ *и* $\mathbb{K}$*-градуированными проекционными операторами, удовлетворяющими условиям* 2.22.6(i),(ii). *При этом проекционные операторы* $\hat{E}_e$ *неотрицательны, а* $\|E\| = 1$, *если* $E \neq 0$.

Доказательство. Пусть задано замкнутое $\mathbb{K}$-векторное подпространство Y в X. Тогда существует биективное соответствие между подпространствами Y_0 над $\mathbb{R}$ в X_0 и проекционными операторами $\hat{E}_e$ на X_0, что устанавливается с помощью соотношений 2.22.6(i),(ii). С другой стороны, между Y_0 и Y существует биективное соответствие. При этом $\mathbb{K}$-градуированный проекционный оператор на X однозначно характеризуется соотношениями 2.22.6 1)–7) путем задания $\hat{E}_e$ на X_0. Ограничение $\hat{E}_e|_{X_0}$ является самосопряженным оператором. Более того, $\hat{E}_e(X_0) = Y_0$ тогда и только тогда, когда $\hat{E}(X) = Y$, так как

$$\hat{E}(x) = \sum_{p=0}^{m} \hat{E}(i_p x_p),$$

где $x_p \in X_p$, но $X_0, \dots, X_m$ попарно изоморфны, а

$$\hat{E}(i_p x_p) = \hat{E}_{i_p}(x_p), \qquad \hat{E}(a_1+a_2,x) = \hat{E}(1,(a_1+a_2)x) = \hat{E}(1,a_1x) + \hat{E}(1,a_2x) = \hat{E}(a_1,x) + \hat{E}(a_2,x)$$

для любых $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $x \in X_0$.

Из соотношения $\hat{E}_s(\hat{E}_s(x)) = \hat{E}_{s^2}(x)$ вытекает, что $\hat{E}_s^2|_{X_0} = -\hat{E}_e|_{X_0} = -\hat{E}_e^2|_{X_0}$ для любого $s = i_1, i_2, \dots, i_m$. Поэтому $\hat{E}^2(i_pX_p) \subset X_0$, но i_pX_p — ортогональное к X_0 подпространство относительно скалярного произведения (x,y). Поэтому $\hat{E}_e(X_0)$ ортогонально к $\hat{E}(i_pX_p)$ относительно (x,y), а, в силу 2.22.6 6), $\hat{E}(i_pX_p)$ ортогонально к $\hat{E}(i_qX_q)$ для любого $p \neq q \in \{i_0, \dots, i_m\}$. Пространства i_pX_p и i_qX_q попарно изоморфны над $\mathbb{R}$, следовательно, $\hat{E}(i_pX_p)$ и $\hat{E}(i_qX_q)$ попарно

изоморфны над $\mathbb{R}$ и ортогональны относительно скалярного произведения (x, y). Тогда вместе с соотношением $\hat{E}_s^2|_{X_0} = -\hat{E}_e|_{X_0} = -\hat{E}_e^2|_{X_0}$ это дает, что $\hat{E}(X)$ является $\mathbb{K}$-векторным пространством. Более того,

$$\langle \hat{E}_{i_p}(x_p), i_q x_q\rangle = \langle \hat{E}(i_p x_p), i_q x_q\rangle = \langle x_p, \hat{E}_{i_p}^*(i_q x_q)\rangle = (-1)^{\kappa(i_p)}\langle x_p, \hat{E}_{i_p}(i_q x_q)\rangle =$$
$$= (-1)^{\kappa(i_p)}\langle x_p, \hat{E}_e(i_p i_q x_q)\rangle = \langle x_p, \hat{E}_{ip^* i_q}(x_q)\rangle = \langle x_p, \hat{E}_e(i_p^* i_q x_q)\rangle = \langle \hat{E}_e(x_p), i_p^* i_q x_q\rangle$$

для любого $p \neq q$. Тогда $\|\hat{E}\| \leqslant 1$. С другой стороны, $\|\hat{E}|_{X_0}\| = 1$ для $\hat{E} \neq 0$.

Для любых $x, y \in X$, в силу условий замечания 2.22.6, выполняются тождества

$$\langle \hat{E}(x), y\rangle = \sum_{p,q=0}^{m} \langle \hat{E}(i_p x_p), i_q y_q\rangle = \sum_{p,q=0}^{m} \langle \hat{E}(i_p x_p), y_q\rangle i_q == \sum_{p,q=0}^{m} \langle i_p x_p, \hat{E}^*(y_q)\rangle i_q =$$
$$= \sum_{p,q=0}^{m} \langle i_p x_p, \hat{E}_e^*(y_q)\rangle i_q = \sum_{p,q=0}^{m} \langle x_p, \hat{E}(y_q)\rangle i_p^* i_q = \sum_{p,q=0}^{m} \langle \hat{E}(x_p), y_q\rangle i_p^* i_q,$$

так как $\langle x_p, y_p\rangle \in \mathbb{R}$. Поскольку $\hat{E}(X_p) = Y_0$ для любого p, то $\langle \hat{E}(x), y\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $y_q \in Y_0^{\perp}$ для любого q. Таким образом, $Y = \hat{E}(X) = \mathbb{K}Y_0$, $X = Y \oplus Y^{\perp}$, где $Y^{\perp} = \mathbb{K}Y_0^{\perp}$, $X_0 = Y_0 \oplus Y_0^{\perp}$, т.е. $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$. Таким образом, $\langle \hat{E}(x), y\rangle = 0$ для любого $x \in X$ тогда и только тогда, когда $y \in Y^{\perp}$. Очевидно, что градуированный проекционный оператор определен однозначно с точностью до $\mathbb{R}$-линейного изометрического автоморфизма алгебры $\mathbb{K}$. □

2.22.8. Определения. Для данного семейства $\{Y_a : a \in \Upsilon\}$ замкнутых $\mathbb{K}$-векторных подпространств гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ существует наибольшее замкнутое $\mathbb{K}$-векторное подпространство $\bigwedge\limits_a Y_a$, которое содержится в каждом из Y_a, а также существует наименьшее замкнутое $\mathbb{K}$-векторное подпространство $\bigvee\limits_a Y_a$, которое содержит каждое подпространство Y_a, и

$$\bigwedge_a Y_a = \bigcap_a Y_a, \qquad \bigvee_a Y_a = \mathrm{cl}\,(\bigcup_a Y_a).$$

В силу предложения 2.22.7, отношение упорядочения $\mathbb{K}$-векторных подпространств Y_a в X индуцирует упорядочение семейства градуированных проекционных операторов ${}_a\hat{E} \leqslant {}_c\hat{E}$ тогда и только тогда, когда $Y_a \subset Y_c$, причем существует нижняя грань $\bigwedge\limits_a {}_a\hat{E}_a$, а также верхняя грань $\bigvee\limits_a {}_a\hat{E}_a$ в семействе градуированных проекционных операторов. В частности, $\hat{E} \wedge \hat{F}$ и $\hat{E} \vee \hat{F}$ называются пересечением и объединением двух градуированных проекционных операторов $\hat{E}$ и $\hat{F}$.

2.22.9. Предложение. *Если $\hat{E}$ и $\hat{F}$ — градуированные проекционные операторы из гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ на замкнутые $\mathbb{K}$-векторные подпространства Y и Z в X соответственно, то следующие условия эквивалентны*:

1) $Y \subset Z$;
2) $\hat{F}\hat{E}$ *совпадает с* $\hat{E}$ *и с* $\hat{E}\hat{F}$ (*с точностью до изометрического автоморфизма алгебры* $\mathbb{K}$);
3) $\|\hat{E}(x)\| \leqslant \|\hat{F}(x)\|$ *для любого* $x \in X$;
4) $\hat{E} \leqslant \hat{F}$.

Доказательство. Если $Y \subset Z$ — два замкнутых $\mathbb{K}$-векторных подпространства в X, то $\hat{E}(x) \in Y \subset Z$ для любого $x \in X$. Поэтому $\hat{F}(\hat{E}(X)) = \hat{E}(X)$, $\hat{F}_e(\hat{E}_e(x_0)) = \hat{E}_e(x_0)$ для любого $x_0 \in X_0$. С другой стороны, $\hat{E}\hat{F} = (\hat{F}\hat{E})^*$, но $\hat{E}_e|_{X_0}$ самосопряжен; следовательно, из 1) следует 2). Если же $\hat{E}\hat{F}$ совпадает с $\hat{E}$ с точностью до изометрического автоморфизма алгебры $\mathbb{K}$, то $\|\hat{E}(x)\| = \|\hat{E}(\hat{F}(x))\| \leqslant \|\hat{F}(x)\|$ для любого $x \in X$, так как $\|\hat{E}\| \leqslant 1$; поэтому из 2) следует 3). Если выполнено 3), то из $\langle \hat{E}(x), x\rangle = \langle \hat{E}^2(x), \hat{E}(x)\rangle = \|\hat{E}(x)\|^2$ (см. определение 2.22.8) и из аналогичного тождества $\langle \hat{F}(x), x\rangle = \|\hat{F}(x)\|^2$ вытекает 4). Если $\hat{E} \leqslant \hat{F}$, то из тождества

$$\langle \hat{E}(x), y\rangle = \sum_{p,q=0}^{m} \langle \hat{E}(x_p), y_q\rangle i_p^* i_q$$

для любых $x, y \in X$, где $\langle \hat{E}(x_p), y_q\rangle \in \mathbb{R}$, получим для любого $y \in Y$, что

$$\|y\|^2 = \langle \hat{E}(y), y\rangle \leqslant \langle \hat{F}(y), y\rangle = \|\hat{F}(y)\|^2 \leqslant \|y\|^2,$$

откуда $\|\hat{F}(y)\| = \|y\|$ и $y \in Z$, т.е. из 4) следует 1). □

2.22.10. Следствие. *Предположим, что $\hat{E}$ и $\hat{F}$ являются градуированными операторами проектирования из гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ на замкнутые $\mathbb{K}$-векторные подпространства Y и Z соответственно, а $\hat{E} \leqslant \hat{F}$. Тогда $\hat{F} - \hat{E}$ — градуированный оператор проектирования из X на $Z \wedge Y^{\perp}$.*

Доказательство. Отображение $\hat{E} \mapsto I - \hat{E}$ обращает упорядочение градуированных операторов проектирования, поэтому

$$\bigvee_a (I - {}_a\hat{E}) = I - \bigwedge_a {}_a\hat{E}, \qquad \bigwedge (I - {}_a\hat{E}) = I - \bigvee_a {}_a\hat{E}$$

для любого семейства $\{{}_a\hat{E} : a \in \Upsilon\}$ градуированных проекционных операторов. Это дает соотношения

$$\bigvee_a Y_a^{\perp} = \Big(\bigwedge_a Y_a\Big)^{\perp}, \qquad \bigwedge_a Y_a^{\perp} = \Big(\bigvee_a Y_a\Big)^{\perp}$$

для любого семейства $\mathbb{K}$-векторных замкнутых подпространств в X. Для $\mathbb{K}$-векторных подпространств A и B в X ортогональности относительно скалярных произведений (x, y) и $\langle x, y\rangle$ совпадают, так как $\mathbb{K}A = A\mathbb{K}$, $\mathbb{K}B = B\mathbb{K}$. Поскольку $Y = \hat{E}(X)$, $Z = \hat{F}(X)$, а также

$$\langle \hat{E}(x), y\rangle = \sum_{p,q=0}^{m} \langle \hat{E}(x_p), y_q\rangle i_p^* i_q$$

для любых $x, y \in X$, где $\langle \hat{E}(x_p), y_q\rangle \in \mathbb{R}$, то $\langle \hat{E}\hat{F}(x), y\rangle = \langle \hat{F}(x), \hat{E}(y)\rangle$ для любых $x, y \in X$. Поэтому Y ортогонально Z тогда и только тогда, когда $\hat{E}\hat{F} = 0$. Если выполнено последнее равенство, то $\hat{F}\hat{E} = (\hat{E}\hat{F})^* = 0$, тогда $\hat{E}_e|_{X_0}$ и $\hat{F}_e|_{X_0}$ коммутируют, причем их произведение равно нулю. Следовательно, $\hat{E} \vee \hat{F} = \hat{E} + \hat{F}$, т.е. $Y \vee Z = Y + Z$. □

2.22.11. Следствие. *Если $\hat{E}$ и $\hat{F}$ — градуированные операторы проектирования из гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ на замкнутые подпространства Y и Z в X соответственно, а $\hat{E} \leqslant \hat{F}$, то $\hat{F} - \hat{E}$ — проекция из X на $Z \vee Y^{\perp}$.*

Доказательство. В силу предложения 2.22.9, $\hat{E}\hat{F} = \hat{F}\hat{E} = \hat{E}$, тогда градуированные операторы проектирования $\hat{F}(I - \hat{E})$, $(I - \hat{E})\hat{F}$ и $\hat{F} - \hat{E}$ совпадают с точностью до изометрического автоморфизма алгебры $\mathbb{K}$, и следовательно, $\hat{F} - \hat{E}$ — градуированный оператор проектирования $\hat{F} \vee (I - \hat{E})$ (с точностью до изометрического автоморфизма алгебры $\mathbb{K}$) из X на $Z \vee Y^{\perp}$. □

2.22.12. Предложение. *Если $\{{}_a\hat{E} : a \in \Upsilon\}$ — возрастающая направленность градуированных операторов проектирования из гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $\hat{E} = \bigvee {}_a\hat{E}$, то $\hat{E}(x) = \lim\limits_a {}_a\hat{E}(x)$ для любого $x \in X$.*

Доказательство. Поскольку $\{{}_a\hat{E}(X) : a\}$ — возрастающая направленность замкнутых подпространств в X, то $\bigcup {}_a\hat{E}(X)$ — $\mathbb{K}$-векторное подпространство в X с замыканием по норме, равным $\hat{E}(X)$. Предположим, что $x \in X$ и $b > 0$. Поскольку $\hat{E}(x) \in \hat{E}(X)$, то существует $y \in {}_a\hat{E}(X)$ для некоторого a такой, что $\|\hat{E}(x) - y\| < b$. Для $c \geqslant a$ выполняются неравенства ${}_a\hat{E} \leqslant {}_c\hat{E} \leqslant \hat{E}$, $y \in {}_a\hat{E}(X) \subset {}_c\hat{E}(X) \subset \hat{E}(X)$. Таким образом,

$$\|\hat{E}(x) - {}_c\hat{E}(x)\| = \|\hat{E}(\hat{E}(x) - y) - {}_c\hat{E}(\hat{E}(x) - y)\| \leqslant \|\hat{E} - {}_c\hat{E}\|\|\hat{E}(x) - y\| < b.$$

Предложение доказано. □

2.22.13. Следствие. *Если* $\{{}_a\hat{E} : a \in \Upsilon\}$ *— убывающая направленность градуированных операторов проектирования из гильбертова пространства* X *над* $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ *или* $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $\hat{E} = \bigwedge {}_a\hat{E}$, *то* $\hat{E}(x) = \lim\limits_{a\in\Upsilon} {}_a\hat{E}(x)$ *для любого* $x \in X$.

Доказательство получается путем применения предложения 2.22.12 к возрастающей направленности $\{I - {}_a\hat{E} : a \in \Upsilon\}$.

2.22.14. Определение. Если семейство градуированных операторов проектирования $\{{}_a\hat{E} : a \in \Upsilon\}$ удовлетворяет соотношениям ${}_a\hat{E}_c\hat{E} = 0$ для любых $a \neq c \in \Upsilon$ (что эквивалентно ортогональности $\mathbb{K}$-векторных подпространств ${}_a\hat{E}(X)$ и ${}_c\hat{E}(X)$), то такое семейство называется ортогональным.

2.22.15. Предложение. *Если задано ортогональное семейство градуированных операторов проектирования* $\{{}_a\hat{E} : a \in \Upsilon\}$, *действующих на гильбертовом пространстве* X *над* $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ *или* $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $\hat{E} := \bigvee {}_a\hat{E}$, *то* $\hat{E}(x) = \sum {}_a\hat{E}(x)$ *для любого* $x \in X$.

Доказательство. Для конечного семейства Υ это утверждение вытекает из следствия 2.22.10 путем математической индукции по числу элементов в Υ. Для бесконечного Υ пусть $\mathcal{G}$ обозначает семейство всех конечных подмножеств в Υ. Для любого $G \in \mathcal{G}$ рассмотрим $F_G := \left\{\bigvee {}_a\hat{E} : a \in G\right\}$; тогда $\hat{F}_G = \left\{\sum {}_a\hat{E} : a \in G\right\}$ и $\hat{F}_G$ — возрастающее семейство градуированных проекционных операторов, где $\mathcal{G}$ упорядочено по включению подмножеств из $\mathcal{G}$. Следовательно, $\hat{E} = \bigvee\limits_{G\in\mathcal{G}} \hat{F}_G$. В силу предложения 2.22.12, направленность $\hat{F}_G x$ сходится к $\hat{E}(x)$ по норме в X. □

2.22.16. Определение. Для оператора $T \in L_q(X)$ для гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ определим два подпространства: ядро оператора $\ker_{\mathbb{K}}(T) = \mathrm{cl}(\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{x \in X : T(x) = 0\})$ и пространство $[T(X)]_{\mathbb{K}} := \mathrm{cl}(\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{T(x) : x \in X\})$ значений оператора T. В общем случае $\mathbb{K}$-нелинейности оператора T взяты $\mathbb{K}$-векторные оболочки $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}(T^{-1}(0))$ и $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}(T(X))$ для $T^{-1}(0)$ и $T(X)$, где $\mathrm{cl}(A)$ обозначает замыкание подмножества A в X. С этими подпространствами мы ассоциируем два градуированных оператора проектирований $\hat{N}(T)$ и $\hat{R}(T)$ из X на $\ker_{\mathbb{K}}(T)$ и $[T(X)]_{\mathbb{K}}$ соответственно.

2.22.17. Предложение. *Если подпространства* $T^{-1}(0)$ *и* $T(X)$ *являются* $\mathbb{K}$*-векторными, то* $\ker_{\mathbb{K}} = T^{-1}(0)$, $[T(X)]_{\mathbb{K}} = \mathrm{cl}(T(X))$, $\hat{R}(T) = I - \hat{N}(T^*)$, $\hat{N}(T) = I - \hat{R}(T)$, $\hat{R}(T^*T) = \hat{R}(T^*)$, $\hat{N}(T^*T) = \hat{N}(T)$.

Доказательство. Если подпространство S является $\mathbb{K}$-векторным, то $\mathrm{span}_{\mathbb{K}} S = S$, так как

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}(S) := \{z \in X : z = a_1(x_1b_1) + \cdots + a_m(x_mb_m) + (c_1y_1)t_1 + \cdots + (c_ly_l)t_l,$$

$$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_l, t_1, \ldots, t_l \in \mathbb{K},\ x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_l \in X\}.$$

Тогда $[S]_{\mathbb{K}} = \mathrm{cl}(S) = \mathrm{cl}(\mathrm{span}_{\mathbb{K}}(S))$, так как замыкание $\mathbb{K}$-векторного подпространства S в банаховом пространстве над $\mathbb{K}$ также является $\mathbb{K}$-векторным. Если выполнены предположения данного предложения, то $T^{-1}(0) = \ker_{\mathbb{K}}(T)$, в силу непрерывности оператора T, и $[T(X)]_{\mathbb{K}} = \mathrm{cl}(T(X))$. Тогда

$$\{x \in X : T(x) = 0\} = \{x \in X : \langle T(x), y\rangle = 0 \text{ для любого } y \in X\} =$$

$$= \{x \in X : \langle x, T^*y\rangle = 0 \text{ для любого } y \in X\} = (T^*(X))^{\perp} = [T^*(X)]^{\perp},$$

т.е. $T^*(X)$ является $\mathbb{K}$-векторным подпространством. Отсюда следует, что $\hat{N}(T) = I - \hat{R}(T^*)$. Замена T на T^* дает равенство $\hat{N}(T^*) = I - \hat{R}(T)$; следовательно, $(T^*)^{-1}(0) = (T(X))^{\perp}$ также является $\mathbb{K}$-векторным подпространством. Поскольку $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle T^*(T(x)), x\rangle$, то $T(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $T^*(T(x)) = 0$, т.е. $\hat{N}(T) = \hat{N}(T^*T)$. Тогда получаем, что $\hat{R}(T^*T) = I - \hat{N}(T^*T) = I - \hat{N}(T) = \hat{R}(T^*)$. В частности, для самосопряженного элемента $T \in L_q(X)$ выполняется равенство $\hat{R}(T) = I - \hat{N}(T)$. □

2.22.18. Предложение. *Если $\hat{E}$ и $\hat{F}$ — градуированные операторы проектирований для гильбертова пространства X над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, то*

$$\hat{R}(\hat{E}+\hat{F})=\hat{E}\vee\hat{F},\qquad \hat{R}(\hat{E}\hat{F})=\hat{E}-\hat{E}\wedge(I-\hat{F})$$

с точностью до изометрического автоморфизма алгебры $\mathbb{K}$.

Доказательство. Подпространства $\hat{E}(X)$ и $\hat{F}(X)$, $\hat{E}^{-1}(0)$ и $\hat{F}^{-1}(0)$ являются $\mathbb{K}$-векторными подпространствами в X (см. предложение 2.22.7). Поскольку $\|\hat{E}(x)\|^2+\|\hat{F}(x)\|^2=\langle\hat{E}(x),x\rangle+\langle\hat{F}(x),x\rangle=\langle(\hat{E}+\hat{F})(x),x\rangle$ для любого вектора $x\in X$, то $(\hat{E}+\hat{F})(x)=0$ тогда и только тогда, когда $\hat{E}(x)=0$ и $\hat{F}(x)=0$. Таким образом,

$$\hat{N}(\hat{E}+\hat{F})=\hat{N}(\hat{E})\wedge\hat{N}(\hat{F})=(I-\hat{E})\wedge(I-\hat{F}).$$

В силу предложения 2.22.17 и следствия 2.22.10,

$$\hat{R}(\hat{E}+\hat{F})=I-(I-\hat{E})\wedge(I-\hat{F})=\hat{E}\vee\hat{F}$$

с точностью до изометрического автоморфизма алгебры $\mathbb{K}$, так как

$$\langle\hat{E}(x),y\rangle=\sum_{p,q=0}^{m}\langle\hat{E}(x_p),y_q\rangle i_p^*i_q=\sum_{p,q=0}^{m}\langle x_p,\hat{E}(y_q)\rangle i_p^*i_q=\langle x,\hat{E}(y)\rangle$$

для любых $x,y\in X$.

Градуированные операторы проектирований $I-\hat{E}$ и $\hat{E}\wedge(I-\hat{F})$ взаимно ортогональны. Если $x\in X$ и $\hat{F}\hat{E}=0$, то

$$\hat{E}(x)=(I-\hat{F})(\hat{E}(x))\in(\hat{E}\wedge(I-\hat{F}))(X),$$

поэтому

$$x=(I-\hat{E})(x)+\hat{E}(x)\in(I-\hat{E}+\hat{E}\wedge(I-\hat{F}))(X).$$

Каждый вектор $x\in(I-\hat{E}+\hat{E}\wedge(I-\hat{F}))(X)$ можно выразить в виде $y+z$, где $y=(I-\hat{E})(y)$, $z=\hat{E}(z)=(I-\hat{F})(z)$. Тогда

$$\hat{F}(\hat{E}(x))=\hat{F}(\hat{E}(y))+\hat{F}(\hat{E}(z))=\hat{F}(\hat{E}(y))+\hat{F}(\hat{E}(z))=\hat{F}(\hat{E}((I-\hat{E})(y)))+\hat{F}((I-\hat{F})(z))=0.$$

Следовательно,

$$\hat{N}(\hat{F}\hat{E})=I-\hat{E}+\hat{E}\wedge(I-\hat{F}),$$

что вместе с предложением 2.22.17 дает $\hat{R}(\hat{E}\hat{F})=I-\hat{N}(\hat{F}\hat{E})=\hat{E}-\hat{E}\wedge(I-\hat{F})$. □

2.22.19. Предложение. *Если $\{y_a:a\in\Upsilon\}$ — ортонормированный базис над $\mathbb{K}$ в замкнутом $\mathbb{K}$-векторном подпространстве Y гильбертова пространства X над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, а $\hat{E}$ — градуированный оператор проектирования из X на Y, то*

$$\hat{E}(x)=\sum_{a\in\Upsilon}\langle x,y_a\rangle y_a$$

для любого $x\in X$.

Доказательство. Гильбертово пространство X имеет разложение $X=X_0\oplus X_1i_1\oplus\cdots\oplus X_mi_m$, где $X_0,\dots,X_m$ — попарно изоморфные гильбертовы пространства над $\mathbb{R}$, $\{i_0,i_1,\dots,i_m\}$ — семейство стандартных генераторов алгебры $\mathbb{K}$, $i_0=1$, $m=3$ для $\mathbb{H}$, $m=7$ для $\mathbb{O}$. В силу известной структурной теоремы о гильбертовых пространствах над $\mathbb{R}$, пространство X_0 изоморфно гильбертову пространству $l_2(\omega,\mathbb{R})$ над $\mathbb{R}$ с ортонормированным базисом e_j мощности $\operatorname{card}(\omega)$, где множество ω можно полагать некоторым ординалом, в силу леммы Куратовского—Цорна, $j\in\omega$, e_j — направленность чисел $\{x_{i,j}\in\{0,1\}:i\in\omega\}$, $x_{j,j}=1$, $x_{i,j}=0$ для любых $i\neq j\in\omega$. При этом $\operatorname{card}(\omega)=\chi(X)$ равна топологическому характеру X. Тогда X изоморфно $l_2(\omega,\mathbb{K})$. Поскольку ортонормированный базис в Y можно дополнить до ортонормированного базиса в X, то, с точностью до изометрического изоморфизма, Y изоморфно подпространству $l_2(\nu,\mathbb{K})$ для некоторого ординала ν такого, что

$\nu \leqslant \omega$, $\mathrm{card}(\nu) = \mathrm{card}(\Upsilon)$. С другой стороны, $\mathbb{K}e_j = e_j\mathbb{K}$ для любого j, поэтому $\hat{E}(x) \in Y$ имеет разложение

$$\hat{E}(x) = \sum_{a\in\Upsilon} \langle \hat{E}(x), y_a\rangle y_a = \sum_{a\in\Upsilon} \langle x, \hat{E}(y_a)\rangle y_a = \sum_{a\in\Upsilon} \langle x, y_a\rangle y_a.$$

Предложение доказано. □

2.22.20. Предложение. *Если $\mathcal{H}$ — самосопряженная C^*-алгебра операторов из $L_q(X)$, действующая на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, и $\mathcal{H}$ замкнута относительно слабой операторной топологии, то объединение и пересечение любого семейства градуированных операторов проектирования для $\mathcal{H}$ принадлежит $\mathcal{H}$. Существует градуированный оператор проектирования $\hat{P} \in \mathcal{H}$, который больше, чем другие градуированные операторы проектирования в $\mathcal{H}$, и $\hat{P}A = A\hat{P} = A$ для любого $A \in \mathcal{H}$ такого, что $A^{-1}(0)$ и $A(X)$ являются $\mathbb{K}$-векторными подпространствами в X.*

Доказательство. В силу предложения 2.22.17, $\hat{R}(T^*T) = \hat{R}(T^*)$, если $T(X)$ и $T^{-1}(0)$ являются $\mathbb{K}$-векторными подпространствами в X и градуированный оператор проектирования для такого самосопряженного оператора из $\mathcal{H}$ принадлежит $\mathcal{H}$, а значит и для любого такого оператора $T \in \mathcal{H}$, у которого $T(X)$ и $T^{-1}(0)$ являются $\mathbb{K}$-векторными подпространствами в X. В частности, для произвольного градуированного оператора проектирования $\hat{E}$ из $\mathcal{H}$ можно взять $T = \hat{E}$ в качестве такого оператора. В силу леммы 2.22.5, $\hat{R}(A)$ является пределом относительно сильной операторной топологии (а значит, и слабой операторной топологии) последовательности $A^{1/n}$, когда $0 \leqslant A \leqslant I$. Если $A \in \mathcal{H}$, то $A^{1/n} \in \mathcal{H}$, так как C^*-алгебра $\mathcal{H}$ замкнута относительно операторной нормы. Таким образом, $\hat{R}(A) \in \mathcal{H}$, следовательно, $\hat{R}(T) \in \mathcal{H}$ для любого $T \in \mathcal{H}$, если $T(X)$ и $T^{-1}(0)$ являются $\mathbb{K}$-векторными подпространствами в X.

Если $\hat{E}$ и $\hat{F}$ — градуированные операторы проектирований, то $\hat{R}(\hat{E} + \hat{F}) = \hat{E} \vee \hat{F}$, в силу предложения 2.22.18. Таким образом, $\hat{E} \vee \hat{F} \in \mathcal{H}$, если $\hat{E}, \hat{F} \in \mathcal{H}$. Если $\{{}_a\hat{E} : a \in \Upsilon\}$ — семейство градуированных операторов проектирований из $\mathcal{H}$, то их конечные объединения принадлежат $\mathcal{H}$ и образуют возрастающую направленность, ограниченную сверху единичным оператором I. В силу леммы 2.22.4, эта направленность имеет верхнюю грань, являющуюся ее пределом относительно сильной операторной топологии. Таким образом, $\hat{E} \in \mathcal{H}$, $\hat{E} = \bigvee {}_a\hat{E}$. В силу следствия 2.22.10, примененного к $\hat{P}(X)$, где $\hat{P}$ — объединение всех градуированных операторов проектирования из $\mathcal{H}$, имеем

$$\bigwedge {}_a\hat{E} = \hat{P} - \bigvee_a (\hat{P} - {}_a\hat{E}).$$

В силу предыдущего доказательства, $\hat{P} \in \mathcal{H}$ и $\bigwedge {}_a\hat{E} \in \mathcal{H}$. Гильбертово пространство X имеет разложение $X = X_0 \oplus X_1 i_1 \oplus \cdots \oplus X_m i_m$, где $X_0, \ldots, X_m$ — попарно изоморфные гильбертовы пространства над $\mathbb{R}$, $\{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ — семейство стандартных генераторов алгебры $\mathbb{K}$, $i_0 = 1$, $m = 3$ для $\mathbb{H}$, $m = 7$ для $\mathbb{O}$. Поскольку $\hat{P}$ содержит $\hat{R}(A)$ для любого $A \in \mathcal{H}$ такого, что $A^{-1}(0)$ и $A(X)$ являются $\mathbb{K}$-векторными подпространствами в X, то $\hat{P}A = A$ и $\hat{P}A^* = A^*$, т.е. $\hat{P}_s A_q = (-1)^{\kappa(s)\kappa(q)} A_q \hat{P}_s$ для любых $s \neq q$ из стандартного множества $\{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ генераторов алгебры $\mathbb{K}$, где $\kappa(1) = 0$, $\kappa(i_p) = 1$ для любого $p \geqslant 1$, $\hat{P}_s A_s = A_s \hat{P}_s$ для любого $s \in \{i_0, \ldots, i_m\}$, $A_{i_p}(x_p) := A(x_p i_p)$ и $\hat{P}_{i_p}(x_p) := \hat{P}(x_p i_p)$ для любого $x_p \in X_p$. Таким образом, $\hat{P}A = A\hat{P} = A$. □

2.23. Определение. Пусть X и Y — гильбертовы пространства над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ и $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств хаусдорфова топологического пространства Λ. Введем постоянные $S_{v,p,n} \in \mathbb{K}$ такие, что каждый оператор $T \in L_q(X, Y)$ имеет следующее разложение:

$$T(x) = \sum_{v=0}^{m} T_v(x) i_v, \tag{2.18}$$

$$T_v(x) i_v = \sum_{n=0}^{m} S_{v,1,n} T(x) S_{v,2,n} \tag{2.19}$$

для любых $x \in X$, $v = 0, \ldots, m$, где $S_{v,1,n} = \gamma_{v,n} S_{v,2,n}$ с $\gamma_{v,n} \in \mathbb{R}$, $S_{v,l,n} \in \mathbb{R} i_n$ для любых $n = 0, 1, \ldots, m$, где каждый оператор T_v определен на X и принимает значения в Y_v, $X = X_0 i_0 \oplus X_1 i_1 \oplus \cdots \oplus X_m i_m$, $X_0, \ldots, X_m$ — гильбертовы попарно изоморфные пространства над $\mathbb{R}$. Эти постоянные происходят из тождеств

$$z_0 = \Big(z + (2^r - 2)^{-1} \Big\{ - z + \sum_{n=1}^{2^r - 1} i_n (z i_n^*) \Big\} \Big) \Big/ 2, \tag{2.20}$$

$$z_v = \Big(- z i_v + i_v (2^r - 2)^{-1} \Big\{ - z + \sum_{n=1}^{2^r - 1} i_n (z i_n^*) \Big\} \Big) \Big/ 2 \tag{2.21}$$

для любых $v = 1, 2, \ldots, 2^r - 1$ и $z \in \mathbb{K}$, где $z = z_0 i_0 + z_1 i_1 + \cdots + z_m i_m$, $z_0, \ldots, z_m \in \mathbb{R}$, $r = 2$ для $\mathbb{H}$, $r = 3$ для $\mathbb{O}$, $m = 2^r - 1$.

Рассмотрим отображение $\hat{E}$, определенное на $\mathcal{B} \times X^2$ и определяющее единственную X-проекторнозначную спектральную меру $\hat{E}$ такую, что $\langle \hat{E}(\delta) x; y \rangle = \hat{\mu}(\delta; x, y)$ — регулярная (некоммутативная) $\mathbb{K}$-значная мера для любых $x, y \in X$, где $\delta \in \mathcal{B}$. По определению это означает, что

$$\hat{\mu}(\delta; x, y) = \hat{\mu}(x, y) \cdot \chi_\delta, \tag{2.22}$$

$$\hat{\mu}(x, y).f := \sum_{v,l,n} \int_\Lambda S_{v,1,n} f(\lambda) S_{v,2,n} \tilde{i}_v i_l \mu_{i_v, i_l}(d\lambda; x, y), \tag{2.23}$$

где χ_δ — характеристическая функция для $\delta \in \mathcal{B}$, μ_{i_v, i_l} — регулярная действительнозначная мера, $q, n, l = 0, 1, \ldots, m$, $p = 1$ или $p = 2$, f — произвольная $\mathbb{K}$-значная функция на Λ, которая μ_{i_v, i_l}-интегрируема для любых v, l;

$$(\hat{E}_S(\delta))^* = (-1)^{\kappa(S)} \hat{E}_S(\delta), \tag{2.24}$$

где $(\hat{E}_S(\delta) \cdot e)x := (\hat{E}_S(\delta))x = (\hat{E}(\delta) \cdot S)x$, $S = c i_q$, $q = 0, 1, \ldots, m$, $c = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, $x \in X_0$,

$$\hat{E}_{bS} = b \hat{E}_S \tag{2.25}$$

для любых $b \in \mathbb{R}$ и любого чистого вектора $S = c i_q$;

$$\hat{E}_{S_1 S_2}(\delta \cap \gamma) = \hat{E}_{S_1}(\delta) \hat{E}_{S_2}(\gamma) \tag{2.26}$$

для любых чистых $\mathbb{K}$-векторов S_1 и S_2 и любых $\delta, \gamma \in \mathcal{B}$.

Хотя из (2.24) следует, что

$$\hat{E}(\delta) \cdot \lambda = \lambda_0 \hat{E}_{i_0}(\delta) + \lambda_1 \hat{E}_{i_1}(\delta) + \cdots + \lambda_m \hat{E}_{i_m}(\delta) =: \hat{E}_\lambda(\delta),$$

но в общем случае может быть

$$(\hat{E}(\delta) \cdot \lambda)x \neq (\hat{E}(\delta))\lambda x,$$

где $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

2.24. Теорема. *Каждая квазикоммутативная C^*-алгебра $\mathcal{A}$, содержащаяся в $L_q(X)$, для гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ изометрически $*$-эквивалентна алгебре $C(\Lambda, \mathbb{K})$, где Λ — ее спектр. Более того, каждый изометрический $*$-изоморфизм $f \mapsto T(f)$ между $C(\Lambda, \mathbb{K})$ и $\mathcal{A}$ определяет единственную X-проекторнозначную спектральную меру $\hat{E}$ на $\mathcal{B}(\Lambda)$ такую, что*

$$\langle \hat{E}(\delta) x; y \rangle = \hat{\mu}(\delta; x, y) \tag{2.27}$$

— регулярная $\mathbb{K}$-значная мера для любых $x, y \in X$, где $\delta \in \mathcal{B}$;

$$\hat{E}_{S_1}(\delta) \cdot T(S_2 f) = (-1)^{\kappa(S_1)\kappa(S_2)} T(S_2 \hat{E}_{S_1}(\delta) \cdot f) \tag{2.28}$$

для любых $f \in C(\Lambda, \mathbb{R})$, $\delta \in \mathcal{B}$ и чистых векторов $S_1 \neq S_2 \in \mathbb{K}$, $\kappa(1) := 0$, $\kappa(i_v) = 1$ при $v = 1, 2, \ldots, n$;

$$T(f) = \int_\Lambda \hat{E}(d\lambda) \cdot f(\lambda) \tag{2.29}$$

для любой $f \in C(\Lambda, \mathbb{K})$, причем $\hat{E}$ σ-аддитивна в сильной операторной топологии.

Доказательство. Отметим, что Λ компактно. Существует разложение $C(\Lambda,\mathbb{K})$, описанное в определении 2.12 и лемме 2.18. Каждый $\psi\in C_q^*(\Lambda,\mathbb{K})$ имеет разложение

$$\psi(f)=\psi_0(f)i_0+\psi_1(f)i_1+\cdots+\psi_m(f)i_m,$$

где $f\in C(\Lambda,\mathbb{K})$. Более того,

$$\psi_l(f)=\psi_l(f_0i_0)+\psi_l(f_1i_1)+\cdots+\psi_l(f_mi_m),$$

где $f_v\in C(\Lambda,\mathbb{R})$, $v,l=0,1,\ldots,m$. Тогда

$$\psi(f)=\sum_{v,n,l}\psi_l(S_{v,1,n}fS_{v,2,n})i_l, \tag{2.30}$$

где $v,n,l=0,1,\ldots,m$. В силу теоремы представления Рисса [7, IV.6.3], имеем

$$\psi_l(gi_v)=\int\limits_\Lambda g(\lambda)\mu_{i_v,i_l}(d\lambda)$$

для любой $g\in C(\Lambda,\mathbb{R})$, где μ_{i_v,i_l} — σ-аддитивная действительнозначная мера. Покомпонентное интегрирование матричнозначной функции дает

$$\psi(f)=\sum_{v,n,l}\int\limits_\Lambda S_{v,1,n}f(\lambda)S_{v,2,n}\tilde{i}_vi_l\mu_{i_v,i_l}(d\lambda). \tag{2.31}$$

Для $\psi(f):=\langle T(f)x;y\rangle$ для любой $f\in C(\Lambda,\mathbb{K})$ и отмеченных $x,y\in X$ из (2.31) следует, что

$$\langle T(f)x;y\rangle=\sum_{v,n,l}\int\limits_\Lambda S_{v,1,n}f(\lambda)S_{v,2,n}\tilde{i}_vi_l\mu_{i_v,i_l}(d\lambda;x,y), \tag{2.32}$$

так как $|\langle T(f)x;y\rangle|\leqslant|f||x||y|$. Следовательно,

$$\mu_{i_v,i_l}(\delta;xa,yb)=a\mu_{i_v,i_l}(\delta;x,y)b$$

для любых $a,b\in\mathbb{R}$, причем

$$\sup_{\delta\in\mathcal{B}}\Big(\sum_l\Big|\sum_v z_vi_v\mu_{i_v,i_l}(\delta;x,y)\Big|^2\Big)^{1/2}\leqslant|z||x||y| \tag{2.33}$$

для любых $z=z_0i_0+z_1i_1+\cdots+z_mi_m\in\mathbb{K}$, так как $|i_l|=1$.

Из (2.32) следует, что $\mu_{i_v,i_l}(\delta;x,y)$ является $\mathbb{R}$-биоднородной и биаддитивной по x, y. Если $f(\lambda)\in\mathbb{R}i_v$ для μ-п.в. $\lambda\in\Lambda$ и некоторого $v=0,1,\ldots,m$, то

$$T(f)=T((-1)^{\kappa(i_v)}\tilde{f})=(-1)^{\kappa(i_v)}T(f)^*;$$

следовательно,

$$\langle T(f)x;y\rangle=(-1)^{\kappa(i_v)}\langle T(f)y;x\rangle\tilde{}.$$

Тогда

$$\mu_{i_v,i_l}(\delta;x,y)=(-1)^{\kappa(i_v)\kappa(i_l)}\mu_{i_v,i_l}(\delta;y,x)$$

для любых $v\ne l=0,1,\ldots,m$, $x,y\in X$. □

2.25. Определение. Оператор T на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$ называется нормальным, если $TT^*=T^*T$; T унитарен, если $TT^*=I$ и $T^*T=I$; T симметричен, если $\langle Tx;y\rangle=\langle x;Ty\rangle$ для любых $x,y\in\mathcal{D}(T)$; T самосопряжен, если $T^*=T$. Далее для T^* предполагается, что $\mathcal{D}(T)$ плотно в X.

2.26. Лемма. *Оператор $T\in L_q(X)$ для гильбертова пространства X над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$ нормален тогда и только тогда, когда минимальная* ($\mathbb{K}$-)*подалгебра $\mathcal{A}$ в $L_q(X)$, содержащая T и T^*, квазикоммутативна.*

Доказательство. Пусть T нормален. Тогда на $X = X_0 i_0 \oplus X_1 i_1 \oplus \cdots \oplus X_m i_m$ он может быть представлен в виде $T = T_0 i_0 + T_1 i_1 + \cdots + T_m i_m$, где $\mathrm{Range}(T_v) \subset X_v$ и $T_v \in \mathcal{A}$ для любых $v = 0, 1, \ldots, m$. Поэтому

$$\langle s(Ts)(x); s(Ts)(y)\rangle = \langle s(T^*s)(x); s(T^*s)(y)\rangle$$

для любых $s \in \mathbb{K}$ с $|s| = 1$ и $\mathrm{Re}(s) = 0$, следовательно,

$$(s(Ts))(s(Ts))^* = (s(Ts))^*(s(Ts)).$$

Пространство X изоморфно $l_2(\upsilon, \mathbb{K})$, в котором

$$\langle x; y\rangle = \sum_{b\in\upsilon} {}^b\tilde{x}\ {}^b y,$$

где υ — множество, $x = \{\ {}^l x :\ {}^l x \in \mathbb{K}, l \in \upsilon\} \in l_2(\upsilon, \mathbb{K})$. Тогда в $L_q(l_2(\upsilon, \mathbb{K}))$ выполняется $T^* = \tilde{T}$, причем $\bar{A}^* = A$ и $\bar{B}^* = B$. Поэтому $TT^* = T^*T$ дает $AA^* = A^*A$, также автоморфизм $j : X \to X$ и равенство $(s(Ts))(s(Ts))^* = (s(Ts))^*(s(Ts))$ с $s = \theta$, $s = (i_v + j_w)/2$ и $s = (i_v + i_w)\theta/2$ для любых $v < w \in \{1, \ldots, m\}$, $\theta = \exp(\pi i_1/4)$ приводит к попарному коммутированию $\{T_0, T_1, \ldots, T_m\}$.

Обратно, если $\mathcal{A}$ квазикоммутативна, то $\{T_v : v = 0, 1, \ldots, m\}$ попарно коммутируют, следовательно, $TT^* = T^*T$. □

2.27. Лемма. *Пусть T — симметрический оператор и $a \in \mathbb{K}\setminus\mathbb{R}e$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Тогда существует $R(a;T)$ и $|x| \leqslant 2|R(a;T)x|/|a - \tilde{a}|$ для любых $x \in \mathcal{D}(T)$. Пусть T — замкнутый оператор. Тогда множества $\rho(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ не пересекаются, и их объединение есть все $\mathbb{K}$. Для самосопряженного квазилинейного оператора T $\sigma(T) \subset \mathbb{R}e$, причем $R(a;T)^* = R(a^*;T)$.*

Доказательство аналогично комплексному случаю. В самом деле, в общем случае для квазилинейного оператора (не обязательно симметричного) при разложении компонент $\mu_{i_v,i_l}(d\lambda; x, y)$ проекторнозначной меры $\hat{\mu}(x, y).f$, определенной в § 2.23 в виде суммы точечной $(\mu_{i_v,i_l})_{\mathrm{p}}$, абсолютно непрерывной $(\mu_{i_v,i_l})_{\mathrm{ac}}$ и непрерывной сингулярной $(\mu_{i_v,i_l})_{\mathrm{sing}}$ мер, согласно теореме Лебега (см. замечание 2.21), имеем

$$L^2(\mathbb{K}, \mu_{i_v,i_l}, \mathbb{K}) = \mathcal{H}_{\mathrm{p},v,l} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{ac},v,l} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{sing},v,l},$$

где

$$\mathcal{H}_{\mathrm{p},v,l} := L^2(\mathbb{K}, (\mu_{i_v,i_l})_p, \mathbb{K}), \qquad \mathcal{H}_{\mathrm{ac},v,l} := L^2(\mathbb{K}, (\mu_{i_v,i_l})_{\mathrm{ac}}, \mathbb{K}), \qquad \mathcal{H}_{\mathrm{sing},v,l} := L^2(\mathbb{K}, (\mu_{i_v,i_l})_{\mathrm{sing}}, \mathbb{K}).$$

При этом для симметричного оператора $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ и в силу соотношений, приведенных в определении 2.23 для компонент проекторнозначной меры, носители всех этих мер для различных v, l согласованы и содержатся в $\mathbb{R}$.

2.28. Теорема. *Для самосопряженного квазилинейного оператора T существует однозначно определенная регулярная счетно-аддитивная самосопряженная спектральная мера $\hat{E}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{K})$, $\hat{E}|_{\rho(T)} = 0$, такая, что*

a) $\mathcal{D}(T) := \left\{x : x \in X;\ \int\limits_{\sigma(T)} \langle(\hat{E}(dz)\cdot z^2)x; x\rangle < \infty\right\}$;

b) $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} (\hat{E}(dz)\cdot z)x,\ x \in \mathcal{D}(T)$.

Доказательство. В силу предложения 2.20, замечания 2.21 и определения 2.16 5), пространство $\mathcal{D}(T)$ является $\mathbb{K}$-векторным. Воспользуемся леммой 2.27 и возьмем отмеченный элемент $q \in \{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$; тогда $h(z) := (q - z)^{-1}$ — гомеоморфизм сферы $S^m := \{z \in \mathbb{K} : |z| = 1\}$ и для $A := (q-z)(R(z;T)(q-z)) + (q-z)I$ и любого $z \in \rho(T)\setminus\{q\}$ выполняется тождество $(hI - R(q;T))A = I$. Если $z = q$, то $h = \infty$, следовательно, $h \notin \sigma(R(q;T))$. Пусть $0 \neq h \in \rho(R(q;T))$. Тогда существует $B := R(q;T)A$, где $A := (hI - R(z;T))^{-1}$. Следовательно, B взаимно однозначен, $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(T)$ и $(zI - T)B = (z - q)I$, т.е. $z \in \rho(T)$. При $h = 0 \in \rho(R(q;T))$ оператор $R(q;T)^{-1} = (hI - T) -$

ограниченный всюду определенный оператор; этот случай рассмотрен в теореме 2.24. Для любого $\delta \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$ положим $\hat{E}(\delta) := \hat{E}^1(h(\delta))$, где $\hat{E}^1$ — разложение единицы для нормального оператора $R(q;T)$, тогда конец доказательства аналогичен [7, теорема XII.2.3]. □

2.29. Замечание и определение. Единственная спектральная мера, связанная с самосопряженным квазилинейным оператором T, называется разложением единицы для T. Для $\mathbb{K}$-значной борелевской функции f, определенной $\hat{E}$-п.в., $f(T)$ определяется соотношением

$$\mathcal{D}(f(T)) := \{x : \text{существует } \lim_n f_n(T)x\},$$

где $f_n(z) := f(z)$ при $|f(z)| \leqslant n$, $f_n(z) := 0$ при $|f(z)| > n$, $f(T)x := \lim_n f_n(T)x$, $x \in \mathcal{D}(f(T))$, $n \in \mathbb{N}$.

2.30. Теорема. *Пусть $\hat{E}$ — разложение единицы для самосопряженного квазилинейного оператора T и f из § 2.28. Тогда $f(T)$ — замкнутый квазилинейный оператор со всюду плотной областью определения, причем выполняются следующие соотношения*:

a) $\mathcal{D}(f(T)) = \left\{x : \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 \langle \hat{E}(dz)x; x\rangle < \infty\right\}$;

b) $\langle f(T)x; y\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{E}(dz)\cdot f(z)x; y\rangle$, $x \in \mathcal{D}(f(T))$;

c) $|f(T)x|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 \langle \hat{E}(dz)x; x\rangle$, $x \in \mathcal{D}(f(T))$;

d) $f(T)^* = \tilde{f}(T)$;

e) $R(q;T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(dz)\cdot(q-z)$, $q \in \rho(T)$.

Доказательство. Возьмем f_n из § 2.29 и $\delta_n := \{z : |f(z)| \leqslant n\}$. Тогда

$$|f(T)x|^2 = \lim_n |f_n(T)x|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 \langle \hat{E}(dz)x; x\rangle$$

для любых $x \in \mathcal{D}(f(T))$. Отсюда вытекает c), а замкнутость $f(T)$ и a) проверяется аналогично комплексному случаю. Некоммутативная мера $\hat{\mu}$ на алгебре Υ подмножеств множества $\mathcal{S}$ соответствует квазилинейному оператору со значениями $\mathbb{K}$ и, в силу предложения 2.20, она полностью характеризуется $\mathbb{R}$-значными мерами μ_{i_v,i_l} такими, что $\mu_{i_v,i_l}(f_v) = \hat{\mu}(f_v)\tilde{i}_l$ для любой $\hat{\mu}$-интегрируемой $\mathbb{K}$-значной функции f с компонентами f_v, где $v, l = 0, 1, \ldots, m$. Тогда можно определить вариацию

$$V(\hat{\mu}, U) := \sup_{W_l \subset U} \sum_l |\hat{\mu}(\chi_{W_l})|$$

по всем конечным дизъюнктным системам $\{W_l\}$ подмножеств $W_l \in \Upsilon$ в U с $\bigcup\limits_l W_l = U$. Если $\hat{\mu}$ ограничен, то он является квазилинейным оператором ограниченной вариации с

$$V(\hat{\mu}, \mathcal{S}) \leqslant 2^{2^{m+2}} \sup_{U \in \Upsilon} |\hat{\mu}(\chi_U)|,$$

причем $V(\hat{\mu}, *)$ аддитивна на Υ. Функцию f назовем $\hat{\mu}$-измеримой, если каждая f_v μ_{i_v,i_l}-измерима для любых v и $l = 0, 1, \ldots, m$. Пространство всех $\hat{\mu}$-измеримых $\mathbb{K}$-значных функций f с $V(\hat{\mu}, |f|^p)^{1/p} =: |f|_p < \infty$ обозначим через $L^p(\hat{\mu})$ при $0 < p < \infty$; $L^\infty(\hat{\mu})$ — пространство всех f, для которых существует $|f|_\infty := \operatorname*{ess\text{-}sup}\limits_{V(\hat{\mu},*)} |f| < \infty$. Подробно пишем $L^p(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu}, \mathbb{K})$ вместо $L^p(\hat{\mu})$.

Подмножество W в $\mathcal{S}$ назовем μ-нуль-множеством, если $V^*(\hat{\mu}, W) = 0$, где V^* — продолжение полной вариации V по формуле

$$V^*(\hat{\mu}, A) := \inf_{\Upsilon \ni F \supset A} V(\hat{\mu}, F)$$

для $A \subset \mathcal{S}$. Некоммутативную меру $\hat{\lambda}$ на $\mathcal{S}$ назовем абсолютно непрерывной относительно $\hat{\mu}$, если $V^*(\hat{\lambda}, A) = 0$ для любого подмножества $A \subset \mathcal{S}$ с $V^*(\hat{\mu}, A) = 0$. Меру $\hat{\mu}$ назовем положительной, если каждая $\mu_{m,n}$ неотрицательна и $\sum\limits_{m,n} \mu_{m,n}$ положительна. Использование компонент $\mu_{m,n}$ и классической теоремы Радона—Никодима (см. [7, теоремы III.10.2, III.10.7]) приводит к следующим некоммутативным вариантам.

(i) Если $(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu})$ — пространство с σ-конечной положительной некоммутативной $\mathbb{K}$-значной мерой $\hat{\mu}$, а $\hat{\lambda}$ — абсолютно непрерывная относительно $\hat{\mu}$ конечная некоммутативная мера, определенная на Υ, то существует единственная $f \in L^p(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu}, \mathbb{K})$ такая, что $\hat{\lambda}(U) = \hat{\mu}(f\chi_U)$ для любого $U \in \Upsilon$, причем $V(\hat{\mu}, \mathcal{S}) = |f|_1$.

(ii) Если $(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu})$ — пространство с конечной некоммутативной $\mathbb{K}$-значной мерой $\hat{\mu}$, а $\hat{\lambda}$ — абсолютно непрерывная относительно $\hat{\mu}$ некоммутативная мера, определенная на Υ, то существует единственная $f \in L^1(\hat{\mu})$ такая, что $\hat{\lambda}(U) = \hat{\mu}(f\chi_U)$ для любого $U \in \Upsilon$. В силу (ii), существует борелевская измеримая функция ϕ такая, что

$$\hat{\nu}(\delta) := \hat{\mu}_{x,y}(\phi\chi_\delta) = \langle \hat{E}(\phi\chi_\delta)x; y\rangle$$

для любых $\delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. В силу (i), $|\phi(z)| = 1$ $\hat{\nu}$-п.в. Рассмотрим $f^1(z) := |f(z)|\phi(z)$, тогда, в силу a),

$$\mathcal{D}(f^1(T)) = \mathcal{D}(f(T)), \qquad \langle f^1(T)x; y\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\hat{\nu}(dz).$$

Поэтому

$$\langle f(T)x; y\rangle = \lim_n \int\limits_{\delta_n} \langle \hat{E}(dz).f(z)x; y\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{E}(dz).f(z)x; y\rangle,$$

и отсюда следует b).

(d) Из $\hat{E}^*_S = (-1)^{\kappa(S)}\hat{E}_S$ для любого $S = cs$, $0 \neq c \in \mathbb{R}$, $s \in \{i_0, \dots, i_m\}$, следует, что $\hat{E}\cdot\tilde{f} = \hat{E}^*\cdot f$. Возьмем $x, y \in \mathcal{D}(\tilde{f}(T)) = \mathcal{D}(f(T))$, тогда

$$\langle \tilde{f}(T)x; y\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{E}(dz)\cdot\tilde{f}(z)x; y\rangle = \langle x; f(T)y\rangle,$$

следовательно, $\tilde{f}(T) \subset f(T)^*$. Если $y \in \mathcal{D}(f(T)^*)$, то для любых $x \in X$ и $t \in \mathbb{N}$ $\tilde{f}_t(T)y := \hat{E}(\delta_t)\cdot f(T)^*y$ сходится к $f(T)^*y$ при $t \to \infty$, следовательно, $y \in \mathcal{D}(\tilde{f}(T))$. В силу теоремы 2.24, утверждение e) вытекает из того, что ${}_t\hat{E}(\delta) := \hat{E}(\delta_t \cap \delta)$ является разложением единицы для ограничения $T|_{X_t}$, где $X_t := \hat{E}(\delta_t)X$. □

2.31. Теорема. *Ограниченный нормальный оператор T на гильбертовом пространстве над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ является унитарным, эрмитовым или положительным тогда и только тогда, когда $\sigma(T)$ содержится в $S^m := \{z \in \mathbb{K} : |z| = 1\}$, $\mathbb{R}$ или $[0, \infty)$ соответственно.*

Доказательство. В силу теоремы 2.24, равенство $T^*T = TT^* = I$ равносильно $z\tilde{z} = 1$ для любых $z \in \sigma(T)$. Если $\sigma(T) \subset [0, \infty)$, то

$$\langle Tx; x\rangle = \int\limits_{\sigma(T)} \langle \hat{E}(dz).zx; x\rangle \geqslant 0$$

для любых $x \in X$. Окончание доказательства аналогично комплексному случаю с использованием техники, данной выше. □

2.32. Определение. Семейство $\{T(t) : 0 \leqslant t \in \mathbb{R}\}$ ограниченных квазилинейных операторов в векторном пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ называется сильно непрерывной полугруппой, если

(i) $T(t+q) = T(t)T(q)$ для любых $t, q \geqslant 0$;
(ii) $T(0) = I$;
(iii) $T(t)x$ — непрерывная функция по $t \in [0, \infty)$ для любых $x \in X$.

2.33. Теорема. *Для любой сильно непрерывной полугруппы $\{U(t) : 0 \leqslant t \in \mathbb{R}\}$ унитарных квазилинейных операторов в гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ существует и единственный самосопряженный квазилинейный оператор B в X такой, что $U(t) = \exp(tMB)$, где $M \in \mathbb{K}$, $|M| = 1$, $\mathrm{Re}(M) = 0$.*

Доказательство. Если $\{T(t) : 0 \leqslant t\}$ — полугруппа, непрерывная в равномерной топологии, то в данном случае аналогично [7, теорема VIII.1.2] существует ограниченный оператор A на X такой, что $T(t) = \exp(tA)$ для любых $t \geqslant 0$. Если $\mathrm{Re}(z) := (z + \tilde{z})/2 > |A|$, то

$$|\exp(-t(zI - A))| \leqslant \exp(t(|A| - \mathrm{Re}(z)) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Для таких $z \in \mathbb{K}$, в силу теоремы Лебега,

$$(zI - A) \int\limits_0^\infty \exp(-t(zI - A))dt = I.$$

По лемме 2.3 существует

$$R(z; A) = \int\limits_0^\infty \exp(-t(zI - A))dt.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ пусть $A_\varepsilon x := (T(\varepsilon)x - x)/\varepsilon$, где $x \in X$ такой, что существует $\lim\limits_{0<\varepsilon\to 0} A_\varepsilon x$. Множество таких x обозначим через $\mathcal{D}(A)$. Очевидно, что $\mathcal{D}(A)$ является $\mathbb{K}$-векторным подпространством в X. Зададим на нем инфинитезимальный квазилинейный оператор $Ax := \lim\limits_{0<\varepsilon\to 0} A_\varepsilon x$. Рассматривая $\mathbb{K}$ как банахово пространство над $\mathbb{R}$, получим аналоги [7, § VIII.1, леммы 3,4,7, следствия 5,9 и теорема 10], причем $\mathcal{D}(A)$ плотно в X, а A — замкнутый квазилинейный оператор на $\mathcal{D}(A)$. Пусть $w_0 := \lim\limits_{t\to\infty} \ln(|T(t)|)/t$ и $z \in \mathbb{K}$ с $\mathrm{Re}(z) > w_0$. Для любого $w_0 < \delta < \mathrm{Re}(z)$, в силу [7, следствие VIII.1.5], существует константа $M > 0$ такая, что $|T(t)| \leqslant M \exp(\delta t)$ для любых $t \geqslant 0$. Тогда существует

$$R(z)x := \int\limits_0^\infty \exp(-t(zI - A))x\, dt$$

для любых $x \in X$ и $\mathrm{Re}(z) > w_0$. Следовательно, $R(z)x \in \mathcal{D}(A)$. Пусть T_z — квазилинейный оператор, соответствующий $z^{-1}A$ вместо T для A, где $0 \neq z \in \mathbb{K}$, причем $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(z^{-1}A)$. Тогда

$$z^{-1}A \int\limits_0^\infty \exp(-t(I - z^{-1}A))x\, dt = \int\limits_0^\infty \exp(-t(I - z^{-1}A)z^{-1}Ax\, dt.$$

Следовательно, $R(z)(zI - A)x = x$ для любого $x \in \mathcal{D}(A)$ и $R(z) = R(z; A)$. Итак,

$$R(z; A)x = \int\limits_0^\infty \exp(-t(zI - A))x\, dt$$

для любых $z \in \rho(A)$ и $x \in X$.

С учетом (2.7) для квазилинейного оператора A существует квазилинейный оператор B такой, что $A = MB$, где $M \in \mathbb{K}$, $|M| = 1$, $\mathrm{Re}(M) = 0$. Поскольку $U(t)U(t)^* = U(t)^*U(t) = I$, то оператор

A коммутирует с A^* и $\exp(t(A+A^*))=I$. Из соотношения $R(z;B)^*=R(\tilde{z},B)$ следует, что можно выбрать $B=B^*$. Если $\hat{E}$ — разложение единицы для B и $V(t):=\exp(MtB)$, то по теореме 2.30

$$\langle V(t)x;y\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle\hat{E}(dz)\cdot\exp(Mtz)x;y\rangle.$$

В силу теоремы Фубини,

$$\int\limits_0^{\infty}\langle V(t)\cdot\exp(-bt)x;y\rangle dt=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle\hat{E}(dz)\cdot\exp(-(b-Mz)t)x;y\rangle dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle\hat{E}(dz)\cdot(b-Mz)^{-1}x;y\rangle=\langle R(b;MB)x;y\rangle$$

для любых $b\in\mathbb{K}$ с $\operatorname{Re}(b)>0$. Поэтому

$$\int\limits_0^{\infty}\langle V(t)\cdot\exp(-bt)x;y\rangle dt=\int\limits_0^{\infty}\langle U(t)\cdot\exp(-bt)x;y\rangle dt$$

при $\operatorname{Re}(b)>0$. В силу [7, лемма VIII.1.15],

$$\langle V(t)\cdot\exp(-\varepsilon t)x;y\rangle=\langle U(t)\cdot\exp(-\varepsilon t)x;y\rangle$$

для любых $t\geqslant 0$ и $\operatorname{Re}(b)>0$, следовательно, $U(t)=V(t)$. □

2.34. Обозначения. Пусть X — $\mathbb{K}$-векторное локально выпуклое пространство. Рассмотрим левые, правые и двусторонние $\mathbb{K}$-векторные оболочки семейства векторов $\{v^a:a\in\mathbb{A}\}$, где

$$\operatorname{span}^l_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\}:=\left\{z\in X:z=\sum_{\substack{q_a\in\mathbb{K}\\a\in\mathbb{A}}}q_av^a\right\};$$

$$\operatorname{span}^r_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\}:=\left\{z\in X:z=\sum_{\substack{q_a\in\mathbb{K}\\a\in\mathbb{A}}}v^aq_a\right\};$$

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\}:=\left\{z\in X:z=\sum_{\substack{q_a,r_a\in\mathbb{K}\\a\in\mathbb{A}}}q_av^ar_a\right\}.$$

2.35. Лемма. $\operatorname{span}^l_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\}=\operatorname{span}^r_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\}=\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\}$.

Доказательство. В силу непрерывности сложения и умножения векторов в X, используя сходимость направленностей векторов, достаточно доказать утверждение леммы для конечного множества $\mathbb{A}$. Тогда пространство $Y:=\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\}$ конечномерно над $\mathbb{K}$, и очевидно, что левые и правые $\mathbb{K}$-векторные оболочки содержатся в нем. Тогда в Y может быть выбран базис над $\mathbb{K}$, и каждый вектор может быть записан в виде $v^a=\{v^a_1,\dots,v^a_n\}$, где $n\in\mathbb{N}$, $v^a_s\in\mathbb{K}$. С другой стороны, алгебра $\mathbb{K}$ альтернативна, а $X=X_0i_0\oplus X_1i_1\oplus\dots\oplus X_mi_m$, где $X_0,\dots,X_m$ — попарно изоморфные $\mathbb{R}$-линейные локально выпуклые пространства. Поэтому

$$\operatorname{span}^l_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\}\cap\operatorname{span}^r_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\}\supset\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\},$$

что вместе с включением

$$\operatorname{span}^r_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\}\cup\operatorname{span}^l_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\}\subset\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v^a:a\in\mathbb{A}\},$$

доказанным выше, приводит к утверждению леммы. □

2.36. Лемма. *Пусть X — гильбертово пространство над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, а $X_{\mathbb{R}}$ — то же пространство, рассматриваемое над полем $\mathbb{R}$. Вектор $x\in X$ ортогонален $\mathbb{K}$-векторному подпространству Y в X относительно $\mathbb{K}$-значного скалярного произведения в X тогда и только тогда, когда x ортогонален $Y_{\mathbb{R}}$ относительно скалярного произведения в $X_{\mathbb{R}}$. Пространство X изоморфно стандартному гильбертову пространству $l_2(\alpha,\mathbb{K})$ над $\mathbb{K}$ сходящихся по норме последовательностей $v=\{v^a : a\in\alpha\}$ со скалярным произведением $\langle v;w\rangle := \sum\limits_a \tilde{v}^a w_a$, причем* $\mathrm{card}(\alpha)\aleph_0 = w(X)$, *где* $\mathrm{card}(\alpha)$ — *мощность множества* α, $\aleph_0=\mathrm{card}(\mathbb{N})$.

Доказательство. В силу леммы 2.35, используя трансфинитную индукцию, получим, что в Y существует $\mathbb{K}$-линейно независимая система векторов $\{v^a : a\in\mathbb{A}\}$ такая, что $\mathrm{span}^r_{\mathbb{K}}\{v^a : a\in\mathbb{A}\}$ всюду плотно в Y. Иными словами, в Y существует базис Гамеля над $\mathbb{K}$. Вектор x по определению ортогонален Y тогда и только тогда, когда $\langle v;x\rangle=0$ для любого $v\in Y$, что эквивалентно $\langle v^a;x\rangle=0$ для любого $a\in\mathbb{A}$. Пространство X изоморфно прямой сумме $X_0\oplus X_1 i_1\oplus\cdots\oplus X_m i_m$, где X_0, …, X_m — попарно изоморфные гильбертовы пространства над $\mathbb{R}$, а $X_{\mathbb{R}}=X_0\oplus X_1\oplus\cdots\oplus X_m$. Тогда скалярное произведение $\langle x;y\rangle$ в X можно записать в виде

$$\langle x;y\rangle = \sum_{v,n=0}^{m}\langle x_v;y_n\rangle\tilde{i}_v i_n, \tag{2.34}$$

где $\langle x_v;y_n\rangle\in\mathbb{R}$, в силу определения 2.16. Тогда скалярное произведение $\langle x;y\rangle$ в X индуцирует скалярное произведение

$$\langle x;y\rangle_{\mathbb{R}} := \sum_{v=0}^{m}\langle x_v;y_v\rangle \tag{2.35}$$

в $X_{\mathbb{R}}$. Поэтому из ортогональности x подпространству Y относительно $\langle x;y\rangle$ следует ортогональность x подпространству $Y_{\mathbb{R}}$ относительно $\langle x;y\rangle_{\mathbb{R}}$. В силу леммы 2.35, из $y\in Y$ следует, что $y_v i_v\in Y$ для любого $v=0,1,\ldots,m$. Тогда из $\langle x;y_v\rangle_{\mathbb{R}}=0$ для любых $y\in Y$ и v, в силу определения 2.16 5), следует, что $\langle x;y\rangle=0$ для любых $y\in Y$. Тогда по теореме о трансфинитной индукции [4] в X существует ортонормированный базис над $\mathbb{K}$, в котором каждый вектор представляется в виде сходящегося ряда левых (или правых) $\mathbb{K}$-векторных комбинаций базисных векторов. Для любого $x\in X$, в силу нормированности X, база окрестностей счетна. Для топологической плотности выполняется равенство $d(X)=\mathrm{card}(\alpha)\aleph_0$, так как $\mathbb{K}$ сепарабельно. Поэтому $w(X)=d(X)$. Отсюда вытекает последнее утверждение леммы. □

2.37. Лемма. *Для любого квазилинейного оператора T в гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$ сопряженный оператор T^* в X относительно $\mathbb{K}$-скалярного произведения совпадает с сопряженным оператором $T^*_{\mathbb{R}}$ в $X_{\mathbb{R}}$ относительно $\mathbb{R}$-значного скалярного произведения в $X_{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}(T)$ — область определения оператора T, которая плотна в X. В силу формул (2.34), (2.35) и существования автоморфизмов $z\mapsto zi_v$ в $\mathbb{K}$, для любых $v=0,1,\ldots,m$ получаем, что непрерывности $\langle Tx;y\rangle$ и $\langle Tx;y\rangle_{\mathbb{R}}$ по $x\in\mathcal{D}(T)$ эквивалентны. Поэтому, в силу леммы 2.35, семейство всех $y\in X$, для которых $\langle Tx;y\rangle$ непрерывно по $x\in\mathcal{D}(T)$, образует $\mathbb{K}$-линейное подпространство в X, оно то же самое относительно $\langle Tx;y\rangle_{\mathbb{R}}$ и является областью определения $\mathcal{D}(T^*)$ оператора T^*. Тогда сопряженный оператор T^* определен равенством $\langle Tx;y\rangle =: \langle x;T^*y\rangle$, а $T^*_{\mathbb{R}}$ равенством $\langle Tx;y\rangle_{\mathbb{R}}=\langle x;T^*_{\mathbb{R}}y\rangle_{\mathbb{R}}$, где $x\in\mathcal{D}(T)$, $y\in\mathcal{D}(T^*)$. В силу формул (2.34), (2.35), $\langle x_v;(T^*y)_v\rangle=\langle x_v;(T^*y)_v\rangle_{\mathbb{R}}$ для любых $x\in\mathcal{D}(T)$, $y\in\mathcal{D}(T^*)$ и $v=0,1,\ldots,m$. Поскольку, в силу предложения 2.20 и леммы 2.35, $\mathcal{D}(T)$ и $\mathcal{D}(T^*)$ — $\mathbb{K}$-векторные пространства, то автоморфизмы тела $\mathbb{K}$, данные выше, приводят к $T^*=T^*_{\mathbb{R}}$. □

2.38. Определение. Ограниченный квазилинейный оператор P в гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}$ называется частичной $\mathbb{R}$-изометрией (или $\mathbb{K}$-изометрией), если существует замкнутое $\mathbb{R}$-векторное ($\mathbb{K}$-векторное соответственно) подпространство Y такое, что $\|Px\|=\|x\|$ для $x\in Y$ и $P(Y^{\perp}_{\mathbb{R}})=\{0\}$ ($P(Y^{\perp})=\{0\}$ соответственно), где $Y^{\perp}:=\{z\in X:\ \langle z;y\rangle=0\ \forall y\in Y\}$, $Y^{\perp}_{\mathbb{R}}:=\{z\in X_{\mathbb{R}}:\ \langle z;y\rangle_{\mathbb{R}}=0\ \forall y\in Y\}$.

2.39. Теорема. *Если T — замкнутый квазилинейный оператор на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}$, то $T = PA$, где P — частичная $\mathbb{R}$-изометрия на $X_{\mathbb{R}}$ с начальной областью* $\mathrm{cl}(\mathrm{Range}(T^*))$, *а A — самосопряженный квазилинейный оператор такой, что* $\mathrm{cl}(\mathrm{Range}(A)) = \mathrm{cl}(\mathrm{Range}(T^*))$. *Если T является $\mathbb{K}$-векторным (т.е. лево- или право-$\mathbb{K}$-линейным), то P — частичная $\mathbb{K}$-изометрия.*

Доказательство. В силу спектральной теоремы 2.28, самосопряженный квазилинейный оператор T положителен тогда и только тогда, когда его спектр $\sigma(T) \subset [0, \infty)$ (см. [7, лемма XII.7.2]). В алгебре $\mathbb{K}$ каждый полином имеет корень (см. [15, теорема 3.17]). Поэтому если T — положительный самосопряженный квазилинейный оператор, то существует единственный положительный квазилинейный оператор A такой, что $A^2 = T$ (см. [7, лемма XII.7.2]). Тогда существует положительный квадратный корень A оператора T^*T. При этом A является право- и лево-$\mathbb{K}$-линейным, если T является право- и лево-$\mathbb{K}$-линейным. Положим $SAx = Tx$ для любых $x \in \mathcal{D}(T^*T)$, а V — изометрическое расширение S на $\mathrm{cl}(\mathrm{Range}(A))$. Пространство $\mathrm{cl}(\mathrm{Range}(A))$ является $\mathbb{R}$-линейным. Если, дополнительно, A лево- (или право-)$\mathbb{K}$-линейно, то $\mathrm{cl}(\mathrm{Range}(A))$ — $\mathbb{K}$-векторное подпространство в силу леммы 2.35. В силу леммы 2.36, существует перпендикулярная проекция E из X на $\mathrm{cl}(\mathrm{Range}(A))$, причем E является право- и лево-$\mathbb{K}$-линейной, если $\mathrm{cl}(\mathrm{Range}(A))$ — $\mathbb{K}$-векторное подпространство. Тогда положим $P = VE$. Из $\langle Ax; Ax\rangle = \langle Tx; Tx\rangle$ для любого $x \in \mathcal{D}(T^*T)$ следует, что $PAx = Tx$ для любого $x \in \mathcal{D}(T^*T)$. Остальная часть доказательства проводится аналогично доказательству [7, теорема XII.7.7] с помощью лемм 2.35–2.37. □

2.40. Замечание и определение. В отличие от случая поля $\mathbb{C}$, нетривиальные полиномы кватернионных или октонионных переменных могут иметь корни, которые являются не точками, а замкнутыми подмногообразиями в $\mathbb{K}$ с размерностью над $\mathbb{R}$ от 0 до m (см. [13, 15]).

Замкнутое подмножество $\lambda \subset \sigma(T)$ называется изолированным подмножеством спектра, если существует окрестность U подмножества λ такая, что $\sigma(T) \cap U = \lambda$. Изолированное подмножество λ спектра $\sigma(T)$ называется полюсом спектра (порядка p), если $R(z;T)$ имеет нуль на λ (порядка p, т.е. каждая $z \in \lambda$ является нулем порядка $0 < p(z) \leqslant p$ для $R(z;T)$ и $\max\limits_{z\in\lambda} p(z) = p$). Подмножество λ, открыто-замкнутое (одновременно открытое и замкнутое) в $\sigma(T)$, называется спектральным множеством.

Пусть η_1 — замкнутый спрямляемый путь в U, охватывающий λ и не пересекающийся с λ, характеризуемый вектором $M_1 \in \mathbb{K}$, $|M_1| = 1$, $M_1 + \tilde{M}_1 = 0$ (см. [13, теорема 3.22] и [15, теорема 3.21]). Обозначим

$$\phi_n(z,T) := (2\pi)^{-1}\left\{ \int\limits_{\eta_1} R(\zeta;T)((((\zeta - a)^{-1}(z-a))^n(\zeta-a)^{-1}d\zeta)M_1^{-1} \right\}, \tag{2.36}$$

где $\eta_1 \subset B(\mathbb{K}, a, R) \setminus B(\mathbb{K}, a, r)$, $B(\mathbb{K}, a, R) \subset U$, $\lambda \subset B(\mathbb{H}, a, r)$, $0 < r < R < \infty$. Скажем, что индекс λ равен p тогда и только тогда, когда существует вектор $x \in X$ такой, что

$$(zI - T)^{s_1}((v_1\hat{E}(\delta(z);T)v_2)\cdots((zI-T)^{s_m}(v_{2m-1}\hat{E}(\delta(z);T)(x)))\cdots) = 0 \tag{2.37}$$

для любого $z \in \lambda$, любых $0 \leqslant s_n \in \mathbb{Z}$ с $s_1 + \cdots + s_m = p$ и любых $v_1, \ldots, v_{2m-1}$, где $v_1 = v_1(\delta, T) \in \mathbb{K}$, $\ldots$, $v_{2m-1} = v_{2m-1}(\delta, T) \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$, $\delta := \delta(z) \ni z$, $\delta(z) \in \mathcal{B}(\lambda)$, а выражение в (2.37) отлично от нуля для некоторых $z \in \lambda$ и $s_1, \ldots, s_m$ с $s_1 + \cdots + s_m = p - 1$.

2.41. Теорема. *Подмножество λ — полюс порядка p квазилинейного оператора $T \in L_q(X)$ для $U = B(\mathbb{K}, \alpha, R')$, $0 < R < R' < \infty$ (см. определение* 2.40*), где $0 < r < \infty$, тогда и только тогда, когда λ имеет индекс p.*

Доказательство. Выберем с помощью гомотопии относительно $U \setminus \lambda$ замкнутые пути η_1 и η_2, гомотопные γ_1 и γ_2, причем $\inf\limits_{\theta} |\eta_1(\theta)| > \sup\limits_{\theta} |\eta_2(\theta)|$, где γ_1 и γ_2 выбраны, как в [13, теорема 3.22]

или как в [15, теорема 3.21] (см. также [15, теорема 3.9]), $\theta \in [0,1]$. В силу этих теорем, $\mathbb{K}$-разложение Лорана $R(z;T)$ в окрестности $B(\mathbb{K},a,R) \setminus B(\mathbb{K},a,r)$ имеет вид

$$R(z;T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n(z,T) + \psi_n(z,T)),$$

где ϕ_n дается формулой (2.36) и

$$\psi_n(z,T) := (2\pi)^{-1} \left\{ \int\limits_{\eta_2} R(\zeta;T)((z-a)^{-1}((\zeta-a)(z-a)^{-1})^n d\zeta) M_2^{-1} \right\}. \tag{2.38}$$

Если λ является полюсом порядка p, то $\phi_p = 0$ и $\phi_{p-1} \neq 0$, тогда существует $x \in X$ такой, что

$$\phi_{p(z)}(z,T)x = 0 \quad \text{для любого} \quad z \in \lambda, \tag{2.39}$$

$$\phi_{p-1}(z,T)x \neq 0 \quad \text{для некоторого} \quad z \in \lambda. \tag{2.40}$$

Аналогичные разложения с соответствующими ϕ_n верны для произведения $f(T)(R(z;T)g(T))$, где f и g — голоморфные функции на окрестности $\sigma(T)$ в $\mathbb{K}$, отличные от нуля всюду на λ. Функции ϕ_n для $R(z;T)$ аппроксимируются с любой точностью в сильной операторной топологии в виде левых $\mathbb{K}$-линейных комбинаций функциями, фигурирующими в (2.39), в силу леммы 2.35 и определения $\mathbb{K}$-интеграла вдоль спрямляемого пути, так как при $|\xi| > \sup|\chi|$ ряд $R(\xi;T_\chi)$ сходится в равномерной операторной топологии для спектрального множества χ спектра $\sigma(T)$, где $T_\chi = T|_{X_\chi}$, $X_\chi := \hat{E}_e(\chi;T)X$. Варьирование f и g дает, что индекс λ не меньше p. Обратно, пусть выполнены условия (2.39) для некоторого n. Резольвента $R(z;T)x$ регулярна на $\mathbb{K} \setminus B(\mathbb{K},a,r)$ и

$$x = (2\pi)^{-1} \left\{ \int\limits_{\eta} R(\zeta;T)x d\zeta \right\} M^{-1} (2\pi)^{-1} \left\{ \int\limits_{\eta_2} R(\zeta;T)x d\zeta \right\} M_2^{-1} \omega(T)x,$$

где $\omega(T)$ — функция, равная 1 на окрестности λ и нулю на $\mathbb{K} \setminus U$, η — соответствующий замкнутый спрямляемый путь, охватывающий $\sigma(T)$ и характеризуемый условиями $M \in \mathbb{K}$, $|M| = 1$, $M + \tilde{M} = 0$. Тогда, в силу (2.39), $\phi_{p(z)}(z,T)x = 0$ для любого $z \in \lambda$. □

2.42. Замечание. Изолированная точка λ спектра $\sigma(T)$ для нормального квазилинейного оператора $T \in L_q(X)$ на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}$ может и не иметь собственных векторов из-за некоммутативности проекторнозначной меры $\hat{E}$, в отличие от случая линейных операторов на гильбертовом пространстве над $\mathbb{C}$.

2.43. Примеры. 1. Рассмотрим гильбертово пространство $X := L^2(B(\mathbb{K},0,1),\nu,\mathbb{K})$ всех классов ν-измеримых функций на $B(\mathbb{K},0,1)$ с конечной нормой, снабженное скалярным произведением

$$(f,g) := \int\limits_{B(\mathbb{K},0,1)} \tilde{f}(z)g(z)\nu(dz)$$

и нормой $\|f\| := (f,f)^{1/2}$, где ν — мера Лебега на $\mathbb{R}^{2^{m+1}}$, ограничение которой дает меру на шаре единичного радиуса в $\mathbb{K}$ с центром в нуле, f и g — измеримые функции с конечной нормой из $B(\mathbb{K},0,1)$ в $\mathbb{K}$, $m = 3$ для $\mathbb{H}$, $m = 7$ для $\mathbb{O}$.

Рассмотрим на этом гильбертовом пространстве X оператор, задаваемый формулой $(Af)(x) = xf(x)$. Тогда A не имеет собственных значений. Если $Af = bf$ для некоторого $b \in \mathbb{K}$, то $f = 0$ на $B(\mathbb{K},0,1) \setminus \{b\}$, следовательно, $f = 0$ ν-п.в., т.е. $f = 0 \in X$. Однако $\mathrm{sp}_{L_q(X)} = B(\mathbb{K},0,1)$. Для доказательства последнего равенства рассмотрим характеристические функции $y_n := \chi_{B(\mathbb{K},b,1/(2n))}$ шаров $B(\mathbb{K},b,1/(2n))$. Возьмем $x_n := y_n/[\nu(B(\mathbb{K},b,1/(2n)))]^{1/2}$. Поскольку $\nu(B(\mathbb{K},z,r)) = (2\pi)^{2^m} r^{2^{m+1}}/[(2^{m+1})!!]$ (см. [1, § XI.4.2, пример 3]), где $m = 3$ для $\mathbb{H}$, $m = 7$ для $\mathbb{O}$, то $\|x_n\| = 1$, и при $B(\mathbb{K},b,1/(2n)) \subset B(\mathbb{K},0,1)$ выполняется равенство

$$\|(A - bI)x_n\|^2 = \int\limits_{B(\mathbb{K},b,1/(2n))} |x-b|^2 \nu(dx)/\nu(B(\mathbb{K},b,1/(2n))) = Cn^{-2},$$

где $C = \mathrm{const} > 0$. Если $B = (A - bI)^{-1}$, то

$$1 = \|x_n\| = \|B(A - bI)x_n\| \leqslant \|B\|\|(A - bI)x_n\| = \|B\|C^{1/2}/n.$$

Итак, $\|B\| \geqslant nC^{-1/2}$ для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$; следовательно, B не ограничен, т.е. $(A - bI)$ не имеет двусторонне обратного оператора в $L_q(X)$, и неизбежно $B(\mathbb{K}, 0, 1) \subset \mathrm{sp}_{L_q(X)}(A)$. Если $b \notin B(\mathbb{K}, 0, 1)$, то функция $f = (x - b)^{-1}$ при $|x| \leqslant 1$ непрерывна на $B(\mathbb{K}, 0, 1)$. Умножение на f в X является ограниченным оператором, который является двусторонне обратным оператором к $(A - bI)$:

$$f(A - bI) = (A - bI)f = I.$$

Поэтому $b \notin \mathrm{sp}_{L_q(X)}(A)$, следовательно, $\mathrm{sp}_{L_q(X)} = B(\mathbb{K}, 0, 1)$.

2. Пусть $\{e_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ — ортонормированный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве X. Зададим оператор $Ae_n = b_n e_n$, где $b_n \in \mathbb{K}$ для любого n. Если последовательность $\{b_n : n = 1, 2, 3, ..\}$ ограничена, то $\|A\| = \sup\limits_n |b_n|$, и оператор A является нормальным. При этом $\mathrm{sp}_{L_q(X)}(A) = \mathrm{cl}\{b_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$, так как спектр оператора замкнут, согласно общей теореме. Оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда $b_n \in \mathbb{R}$ для любого n. Унитарность оператора A равносильна тому, что $|b_n| = 1$ для любого n.

3. Пусть $(X, \hat{\mu})$ является σ-конечным пространством с (некоммутативной) $\mathbb{K}$-значной мерой. Рассмотрим $\hat{\mu}$-измеримую функцию f с конечной нормой $\|f\|_{L^\infty(X,\hat{\mu},\mathbb{K})} < \infty$. Определим на пространстве $L^2(X, \hat{\mu}, \mathbb{K}) =: X$ оператор умножения M_f на функцию f, т.е. $M_f(g) := fg$. Этот оператор ограничен. Пусть точка b принадлежит $\hat{\mu}$-существенной области значений функции f:

$$\mathrm{sp}(f) := \big\{z \in \mathbb{K} : \|\hat{\mu}\|(f^{-1}(U)) > 0 \text{ для любого открытого подмножества } U \subset \mathbb{K} \text{ с } z \in U\big\}.$$

Пусть $y_n := \chi_{f^{-1}(U_n)}$, где $\|\hat{\mu}\|(f^{-1}(U_n)) = a_n > 0$ и $U_n := \{z \in \mathbb{K} : |z - b| < 1/n\}$. Положим $x_n := (a_n)^{-1/2} y_n$, следовательно, $\|x_n\| = 1$ и

$$\|(M_f - bI)x_n\|^2 = \int\limits_{f^{-1}(U_n)} |f(z) - b|^2 y_n(z)\hat{\mu}(dz)/a_n \leqslant n^{-2}.$$

Поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} \|(M_f - bI)x_n\| = 0$ и $b \in \mathrm{sp}_{L_q(X)}(M_f)$.

3. Алгебры операторов

3.1. Определение. Пусть V — компактное хаусдорфово пространство, а $C(V, \mathbb{K})$ — квазикоммутативная алгебра всех непрерывных ограниченных функций $f : V \to \mathbb{K}$ с супремум-нормой $\|f\| := \sup\limits_{z\in V} |f(z)|$ и поточечным умножением, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Квазилинейный функционал $p \in L_q(C(V, \mathbb{K}), \mathbb{K})$, удовлетворяющий условию $p(fg) = p(f)p(g)$ для любых $f, g \in C(V, \mathbb{K})$, называется мультипликативным.

3.2. Теорема. *Если J — замкнутый идеал в $C(V, \mathbb{K})$, то существует замкнутое подмножество S в V такое, что J является идеалом $C(V, \mathbb{K})_S$ всех функций из $C(V, \mathbb{K})$, обращающихся в нуль на S с точностью до автоморфизма алгебры $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Обратно, если S — замкнутое подмножество в V, то $C(V, \mathbb{K})_S$ — замкнутый идеал в $C(V, \mathbb{K})$. Идеал J в $C(V, \mathbb{K})$ максимален тогда и только тогда, когда соответствующее замкнутое подмножество $S = S(J)$ является одноточечным.*

Доказательство. Банахова алгебра $C(V, \mathbb{K})$ не коммутативна, более того она не ассоциативна для $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Если $f \in C(V, \mathbb{K})$, то $f^{-1}(0)$ — замкнутое подмножество в V. Тогда $S := \bigcap\limits_{f\in J} f^{-1}(0)$ замкнуто в V. Если $J = C(V, \mathbb{K})$, то $S = \varnothing$. Если J идеал алгебры $C(V, \mathbb{K})$ и $\theta : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ — автоморфизм алгебры $\mathbb{K}$ такой, что $\theta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, то J и $J \circ \theta := \{g = f \circ \theta : f \in J\}$ изоморфны. При этом группа генераторов $\{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ порождает изоморфную группу $\{\theta(i_0), \theta(i_1), \ldots, \theta(i_m)\}$, где $m = 3$ для $\mathbb{H}$ и $m = 7$ для $\mathbb{O}$ (в последнем случае группа не ассоциативна), $i_0 := 1$, $i_1 := i$, $i_2 := j$, $i_3 := k$, $i_4 := l$, $i_5 = i_1 l$, $i_6 = i_2 l$, $i_7 = i_3 l$, где l — генератор

процедуры удвоения при построении $\mathbb{O}$ из $\mathbb{H}$ (см. [3, 5]). С другой стороны, если два идеала J_1 и J_2 изоморфны, то $J_1 \cap C(V,\mathbb{R})$ и $J_2 \cap C(V,\mathbb{R})$ — изоморфные алгебры над $\mathbb{R}$, а продолжение этого изоморфизма на J_1 и J_2 индуцирует автоморфизм алгебры $\mathbb{K}$, так как для компактного множества V любые постоянные из $\mathbb{K}$ принадлежат $C(V,\mathbb{K})$, а J_1 и J_2 — алгебры над $\mathbb{K}$, т.е. они являются линейными пространствами над $\mathbb{K}$, и в них определено дистрибутивное умножение элементов (ассоциативное в частном случае $\mathbb{K}=\mathbb{H}$).

Рассмотрим функцию $f \in C(V,\mathbb{K})$ с нулевым ограничением f на S, $f|_S = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ множество $S_{f,\varepsilon} := \{z \in V : |f(z)| \geqslant \varepsilon\}$ компактно и $S_{f,\varepsilon} \cap V = \varnothing$. Если $z \in S_{f,\varepsilon}$, то существует функция $f_z \in J$ такая, что $f_z(z) \neq 0$, следовательно, функция $\tilde{f}_z f_z$ положительна на некоторой окрестности U_z точки z. В силу компактности множества $S_{f,\varepsilon}$, существует конечное множество точек $z_1,\dots,z_n$ таких, что $S_{f,\varepsilon} \subset \bigcup\limits_{m=1}^{n} U_{z_m}$, следовательно, $h_\varepsilon := \sum\limits_{m=1}^{n} \tilde{f}_{z_m} f_{z_m} > 0$ на $S_{f,\varepsilon}$ и достигает на этом компактном множестве минимума u в некоторой точке t с $h_\varepsilon(t) > 0$. Тогда уравнение $w_\varepsilon(z) := \max(h_\varepsilon(z), u)$ определяет непрерывную функцию на V, удовлетворяющую неравенствам $w_\varepsilon(z) > 0$ и $w_\varepsilon(z) \geqslant h_\varepsilon(z) \geqslant 0$ для любого $z \in V$. Поскольку $1/w_\varepsilon \in C(V,\mathbb{K})$ и $h_\varepsilon \in J$, то возьмем функцию $g_\varepsilon := h_\varepsilon w_\varepsilon^{-1}$. Она удовлетворяет условиям $g_\varepsilon \in J$ и $0 \leqslant g_\varepsilon(z) \leqslant 1$ для любой точки $z \in V$, а $g_\varepsilon(z) = 1$ на $S_{f,\varepsilon}$. Тогда $fg_\varepsilon \in J$ и $\|f - fg_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$, так как $\|1 - g_\varepsilon\| \leqslant 1$ и $1 = g_\varepsilon(z)$ для любого $z \in S_{f,\varepsilon}$. Поскольку идеал J замкнут, то $f \in J$.

Каждое компактное хаусдорфово пространство нормально. Если S — замкнутое подмножество в V и $z \in V \setminus S$, то, в силу теоремы Титца—Урысона (см. [4, теоремы 2.1.8, 3.1.7 и 3.1.9]) о продолжении непрерывных функций, существует непрерывная функция на V такая, что $f|_S = 0$ и $f(z) = 1$. Таким образом, $f \in J$ и $f(z) \neq 0$; следовательно, если $J = C(V,\mathbb{K})_T$, то $S(J) = T$.

Последнее утверждение теперь очевидно, так как $C(V,\mathbb{K})_T \supset C(V,\mathbb{K})_S$, если замкнутое множество T содержится в замкнутом множестве S. Кончено, идеалы здесь определены с точностью до автоморфизма алгебры $\mathbb{K}$, что дает изоморфизмы идеалов. □

3.3. Следствие. *Для каждого ненулевого непрерывного квазилинейного мультипликативного функционала p на банаховой алгебре $C(V,\mathbb{K})$ существует точка $z_0 \in V$ такая, что $p(f) = f(z_0)$ для любой функции $f \in C(V,\mathbb{K})$ с точностью до автоморфизма алгебры $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$.*

Доказательство. Банахова алгебра $C(V,\mathbb{K})$ имеет разложение в прямую сумму:

$$C(V,\mathbb{K}) = C(V,\mathbb{R}) \oplus i_1 C(V,\mathbb{R}) \oplus \cdots \oplus i_m C(V,\mathbb{R}),$$

где $\{i_0, i_1, \dots, i_m\}$ — стандартные генераторы алгебры $\mathbb{K}$, $m = 3$ для тела кватернионов $\mathbb{H}$, $m = 7$ для алгебры октонионов $\mathbb{O}$, $i_0 := 1$. $i_1 := i$, $i_2 := j$, $i_3 := k$, $i_4 := l$, $i_5 = i_1 l$, $i_6 = i_2 l$, $i_7 = i_3 l$, где l — генератор процедуры удвоения при построении $\mathbb{O}$ из $\mathbb{H}$. Тогда

$$p(f) = p(f_0)p(i_0) + p(f_1)p(i_1) + \cdots + p(f_m)p(i_m),$$

где $f = f_0 + f_1 i_1 + \cdots + f_m i_m$, $f_0, f_1, \dots, f_m \in C(V,\mathbb{R})$, $f \in C(V,\mathbb{K})$. Из тождеств для генераторов и мультипликативности функционала p следует, что $p(1) = p(1^2) = p(1)^2 = 1$, так как константы принадлежат алгебре $C(V,\mathbb{K})$, $p(i_q^2) = -1$ при $q = 1, 2, \dots, m$,

$$p(ij) = -p(ji) = p(k) = p(i)p(j) = -p(j)p(i), \qquad p(jk) = -p(kj) = p(i) = p(j)p(k) = -p(k)p(j),$$

$$p(ki) = -p(ik) = p(j) = p(k)p(i) = -p(i)p(k), \qquad p(il) = -p(li), \qquad p((il)i) = -p(i(il)) = -p(l)$$

и т.д., т.е. p задает автоморфизм алгебры $\mathbb{K}$. Ядро $M := p^{-1}(0)$ функционала p — собственный максимальный идеал в $C(V,\mathbb{K})$. Пусть $f \in C(V,\mathbb{K})$, тогда $f - p(f)1 \in M$. В силу теоремы 3.2, идеал M характеризуется однозначно с точностью до автоморфизма алгебры $\mathbb{K}$ некоторой точкой $z_0 \in V$. Таким образом, $f(z_0) = p(f)$ для любой $f \in C(V,\mathbb{K})$ с точностью до изоморфизма алгебр и идеалов относительно автоморфизмов алгебры $\mathbb{K}$. □

3.4. Теорема. *Отображение ϕ алгебры $C(V,\mathbb{K})$ на алгебру $C(W,\mathbb{K})$ для компактных хаусдорфовых пространств V и W является изоморфизмом тогда и только тогда, когда существуют гомеоморфизм $g : V \to W$ и автоморфизм θ алгебры $\mathbb{K}$ такие, что $\phi(f) = \theta \circ f \circ g$ для любых $f \in C(V,\mathbb{K})$.*

Доказательство. Если существуют гомеоморфизм $g : V \to W$ и автоморфизм θ алгебры $\mathbb{K}$ такие, что $\phi(f) = \theta \circ f \circ g$ для любых $f \in C(V, \mathbb{K})$, то из квазилинейности и мультипликативности θ вытекает квазилинейность и мультипликативность отображения ϕ, так как

$$(f_1 f_2) \circ g(z) = f_1(g(z)) f_2(g(z)), \qquad (af_1 + bf_2) \circ g(z) = af_1(g(z)) + bf_2(g(z))$$

для любых $f_1, f_2 \in C(V, \mathbb{K})$, $a, b \in \mathbb{K}$ и любого $z \in V$.

Пусть теперь ϕ является алгебраическим изоморфизмом алгебры $C(V, \mathbb{K})$ на алгебру $C(W, \mathbb{K})$. Тогда для максимального идеала M в $C(W, \mathbb{K})$ его прообраз $\phi^{-1}(M)$ является максимальным идеалом в $C(V, \mathbb{K})$. Поскольку V и W компактны, то константы из $\mathbb{K}$ принадлежат этим алгебрам $C(V, \mathbb{K})$ и $C(W, \mathbb{K})$. Следовательно, ограничение ϕ на подалгебру в $C(V, \mathbb{K})$, изоморфную $\mathbb{K}$, дает некоторый автоморфизм θ алгебры $\mathbb{K}$ такой, что $\theta^{-1} \circ \phi =: \phi_1$ является тождественным отображением на $\mathbb{K}$. Если $z \in W$ — точка, соответствующая M, то обозначим через $q(z)$ точку в V, соответствующую $\phi_1^{-1}(M)$. Поскольку каждый максимальный идеал M_0 в $C(V, \mathbb{K})$ имеет вид $\phi_1^{-1}(\phi_1(M_0))$ с максимальным идеалом $\phi_1(M_0)$ в $C(W, \mathbb{K})$, то $q : W \to V$ — взаимно однозначное отображение. Поскольку $f - f(q(z))1$ обращается в нуль в точке $q(z)$ для любой функции $f \in C(V, \mathbb{K})$, то $\phi_1(f - f(q(z))1)$ обращается в нуль в точке $q(z)$. Поскольку компактное хаусдорфово пространство вполне регулярно, то множества вида $\phi^{-1}(U)$, где U — открытые подмножества в $\mathbb{K}$ и $f \in C(V, \mathbb{K})$, образуют (под)базу топологии в V. Из соотношения $q^{-1}(f^{-1}(U)) = \phi_1(f)^{-1}(U)$ и непрерывности функции $\phi_1(f) : W \to \mathbb{K}$ для непрерывной функции $f : V \to \mathbb{K}$ следует, что отображение q непрерывно, так как прообраз q^{-1} переводит каждое открытое множество подбазы в V в открытое множество подбазы топологии в W. Симметрично q^{-1} тоже непрерывно, поэтому $q : W \to V$ — гомеоморфизм. □

3.5. Определения. Пусть $C(V, \mathbb{R})$ — пространство всех непрерывных функций из тихоновского топологического пространства V в $\mathbb{R}$ и $\mathcal{P}$ — его подмножество, удовлетворяющее следующим свойствам:

(i) если $f \in \mathcal{P}$ и $-f \in \mathcal{P}$, то $f = 0$;
(ii) если a — положительная константа и $f \in \mathcal{P}$, то $af \in \mathcal{P}$;
(iii) если $f, g \in \mathcal{P}$, то $f + g \in \mathcal{P}$. В этом случае $\mathcal{P}$ называется конусом в $C(V, \mathbb{R})$.

Если X_0 — линейное (над $\mathbb{R}$) подпространство в $C(V, \mathbb{R})$ и $\mathcal{P}$ — конус в нем, то в X_0 задано частичное упорядочение: $f \leqslant g$ тогда и только тогда, когда $g - f \in \mathcal{P}$. Постоянная функция I, равная 1 на V, называется единицей упорядочения в X_0, если для любой $f \in X_0$ существует константа $a > 0$ такая, что $-aI \leqslant f \leqslant aI$.

Пусть X_0 — частично упорядоченное подпространство в $C(V, \mathbb{R})$ с единицей упорядочения I, а p — квазилинейный функционал на $\mathbb{K}$-линейном подпространстве X в $C(V, \mathbb{K})$ таком, что $X_0 = X \cap C(V, \mathbb{R})$. Предположим, что функционал p удовлетворяет следующим условиям:

(iv) $p(f) \geqslant 0$ для любой $f \in X_0$ с $f \geqslant 0$;
(v) ограничение p на $\mathbb{K}$ является автоморфизмом алгебры $\mathbb{K}$ при $p \neq 0$.

Тогда p называется положительным. Если дополнительно

(vi) $p(I) = 1$,

то p называется состоянием на X.

Если p является крайней точкой (выпуклого) семейства $\mathcal{L}(X)$ состояний для X, то p называется чистым состоянием на $\mathbb{K}$-линейном (под)пространстве X.

3.6. Теорема. *Ненулевой квазилинейный функционал p на $C(V, \mathbb{K})$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ и V — компактное хаусдорфово топологическое пространство, является чистым состоянием на $C(V, \mathbb{K})$ тогда и только тогда, когда он мультипликативен.*

Доказательство. Рассмотрим сначала ограничение p_0 функционала p на X_0. Пусть p_0 удовлетворяет следующему свойству: для любого положительного функционала q на X_0 такого, что $q \leqslant p$, существует константа $a \geqslant 0$, для которой $q = ap_0$. Предположим, что $p_0 = aq_1 + (1 - a)q_2$, где q_1 и q_2 — состояния на X_0, $0 < a < 1$. Тогда $0 \leqslant aq_1 \leqslant p_0$, поэтому $aq_1 = bp_0$ для некоторой константы $b > 0$. Из соотношения $p_0(I) = q_1(I) = 1$ следует, что $a = b$ и $q_1 = p_0$. Аналогично $q_2 = p_0$, следовательно, p_0 является чистым состоянием.

Если p_0 является чистым состоянием и $0 \leqslant q \leqslant p_0$ на X_0, то $0 \leqslant q(I) \leqslant p_0(I) = 1$. В случае, когда $q(I) = 0$, для любой $f \in X_0$ выполняются неравенства $0 = q(-aI) \leqslant q(f) \leqslant q(aI) = 0$ для некоторой константы a. Следовательно, $q(f) = 0$ и $q = 0$. Если $q(I) = 1 = p_0(I)$, то рассуждения выше показывают, что положительный функционал $p_0 - q$ равен нулю, т.е. $q = p_0$. Если $0 < q(I) < 1$, то $q = (1-b)q_1 + bq_2$, где $b = q(I)$, а q_1 и q_2 являются состояниями, определяемыми формулами $q_1 = (1-b)^{-1}(p_0 - q)$, $q_2 = b^{-1}q$. Поскольку p_0 — чистое состояние, то $q_2 = p_0$ и $q = bp_0$. Таким образом, p_0 является чистым состоянием на X_0 (без условия (v)) с единицей упорядочения I тогда и только тогда, когда для любого положительного функционала q на X_0 такого, что $q \leqslant p_0$, существует константа $a \geqslant 0$, для которой $q = ap_0$.

В силу следствия 3.3, для мультипликативного функционала p существуют точка $z_0 \in V$ и автоморфизм θ алгебры $\mathbb{K}$ такие, что $p_1(f) = f(z_0)$ для любой функции $f \in C(V, \mathbb{K})$, где $p_1 = \theta \circ p$. Каждая непрерывная функция, обращающаяся в нуль в точке z_0, является линейной комбинацией двух неотрицательных функций, обращающихся в нуль в точке z_0. Поэтому если $0 < q \leqslant p$ для некоторого квазилинейного функционала q на $C(V, \mathbb{K})$, то $q(f) = 0$ при $f(z_0) = 0$. Таким образом, функционалы q и p имеют одни и те же подпространства функций в $C(V, \mathbb{K})$, на которых они обращаются в нуль. Поэтому существует автоморфизм $\theta_{p,q}$ алгебры $\mathbb{K}$, для которого $q = a\theta_{p,q} \circ p$ для некоторой положительной константы a. В силу первой части доказательства, p является чистым состоянием на $C(V, \mathbb{K})$, так как $p(I) = 1$.

Предположим теперь, что p является чистым состоянием на $C(V, \mathbb{K})$. Если $0 \leqslant f \leqslant 1$ и $q(g) = p(fg)$, то q является квазилинейным функционалом на $C(V, \mathbb{K})$ таким, что $q \leqslant p$. Итак, $q = ap$ для некоторой константы $a \geqslant 0$. Если $p(h) = 0$, то $p(fh) = q(h) = ap(h) = 0$. Поскольку каждая $g \in C(V, \mathbb{K})$ является $\mathbb{K}$-линейной комбинацией функций с неотрицательными значениями между 0 и 1, то $p(gh) = 0$ для любой непрерывной функции $g \in C(V, \mathbb{K})$. Таким образом, ядро функционала p является максимальным идеалом в $C(V, \mathbb{K})$. Из $p(I) = 1$ следует мультипликативность функционала p. □

3.7. Определение. Пусть V — тихоновское топологическое пространство, $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Квазилинейный фукционал p на $C(V, \mathbb{K})$ называется эрмитовым, если $p(\tilde{f}) = (p(f))\tilde{}$ для любой непрерывной функции $f \in C(V, \mathbb{K})$ и $p(fi_q) = p(f)p(i_q)$ для любой непрерывной вещественной функции $f \in C(V, \mathbb{R})$ и стандартного генератора i_q алгебры $\mathbb{K}$, $q = 0, 1, \ldots, m$, $m = 3$ для $\mathbb{H}$, $m = 7$ для $\mathbb{O}$, где число $b \in \mathbb{O}$ также рассматривается как постоянная функция на V.

3.8. Предложение. *Семейство P эрмитовых квазилинейных функционалов p на $C(V, \mathbb{K})$, обладающее свойством $p_1(i_q) = p_2(i_q)$ для любых $p_1, p_2 \in P$ и любого $q = 0, 1, \ldots, m$, порождает решетку в нормированном двойственном пространстве.*

Доказательство. Для эрмитовых функционалов p_1 и p_2 и положительной непрерывной функции $f \in C(V, \mathbb{K})$ положим

$$(p_1 \vee p_2)(f) := \sup\{p_1(f_1) + p_2(f_2) : f_1, f_2 \in C(V, \mathbb{K}), 0 \leqslant f_1, 0 \leqslant f_2, f = f_1 + f_2\}. \tag{3.1}$$

Тогда

$$|p_1(f_1) + p_2(f_2)| \leqslant \|p_1\|\|f_1\| + \|p_2\|\|f_2\| \leqslant (\|p_1\| + \|p_2\|)\|f\|,$$

следовательно, $(p_1 \vee p_2)(f)$ конечно. Поскольку $f + 0 = 0 + f = f$, то $p_1 \leqslant p_1 \vee p_2$ и $p_2 \leqslant p_1 \vee p_2$. Если q — эрмитов квазилинейный функционал такой, что $p_1 \leqslant q$ и $p_2 \leqslant q$, то

$$p_1(f_1) + p_2(f_2) \leqslant q(f_1) + q(f_2) = q(f),$$

т.е. $p_1 \vee p_2 \leqslant q$.

Покажем, что $p_1 \vee p_2$ является $\mathbb{R}$-линейным на конусе положительных элементов. Рассмотрим неотрицательные непрерывные функции на V. Выберем g_1 и g_2 такие, что $g = g_1 + g_2$, а h_1 и h_2 такие, что $h = h_1 + h_2$. Тогда $g_1 + h_1 + g_2 + h_2 = g + h$ и

$$p_1(g_1 + h_1) + p_2(g_2 + h_2) = p_1(g_1) + p_1(h_1) + p_2(g_2) + p_2(h_2) \leqslant (p_1 \vee p_2)(g + h).$$

Таким образом,

$$(p_1 \vee p_2)(g) + (p_1 \vee p_2)(h) \leqslant (p_1 \vee p_2)(g + h). \tag{3.2}$$

Пусть $g+h=f_1+f_2$ и $p_1(f_1)+p_2(f_2)$ аппроксимирует $(p_1\vee p_2)(g+h)$. Воспользуемся разложениями $f_1=f_{11}+f_{12}$, $f_2=f_{21}+f_{22}$ с $f_{11}+f_{21}=g$, $f_{12}+f_{22}=h$. Это возможно, так как $f_1\leqslant g+h$, $f_{11}\leqslant g$ и $f_{12}\leqslant h$, $f_2=g+h-f_1=g-f_{11}+h-f_{12}$, $f_{12}=g-f_{11}$ и $f_{22}=h-f_{12}$. Поэтому

$$p_1(f_1)+p_2(f_2)=p_1(f_{11})+p_1(f_{12})+p_2(f_{21})+p_2(f_{22})\leqslant(p_1\vee p_2)(g)+(p_1\vee p_2)(h).$$

Таким образом,

$$(p_1\vee p_2)(g+h)\leqslant(p_1\vee p_2)(g)+(p_1\vee p_2)(h). \tag{3.3}$$

Тогда из неравенств (3.2), (3.3) следует аддитивность $p_1\vee p_2$ на конусе положительных функций. Если $0<a$, $f_1+f_2=f$ и $p_1(f_1)+p_2(f_2)$ аппроксимирует $(p_1\vee p_2)(f)$, то

$$a(p_1(f_1)+p_2(f_2))\leqslant(p_1\vee p_2)(af),$$

т.е. $a(p_1\vee p_2)(f)\leqslant(p_1\vee p_2)(af)$; следовательно,

$$a^{-1}(p_1\vee p_2)(af)\leqslant(p_1\vee p_2)(a^{-1}af)=(p_1\vee p_2)(f).$$

Таким образом, $a(p_1\vee p_2)=(p_1\vee p_2)(af)$.

Пусть теперь $f\in C(V,\mathbb{R})$. Тогда существуют неотрицательные непрерывные функции f_1 и f_2 такие, что $f=f_1-f_2$. Тогда определим

$$(p_1\vee p_2)(f):=(p_1\vee p_2)(f_1)-(p_1\vee p_2)(f_2).$$

Если $f=g_1-g_2$ с неотрицательными функциями g_1 и g_2, то $f_1+g_2=g_1+f_2$, поэтому

$$(p_1\vee p_2)(f_1+g_2)=(p_1\vee p_2)(f_1)+(p_1\vee p_2)(g_2)=(p_1\vee p_2)(g_1+f_2)=(p_1\vee p_2)(g_1)+(p_1\vee p_2)(f_2),$$

следовательно,

$$(p_1\vee p_2)(f_1)-(p_1\vee p_2)(f_2)=(p_1\vee p_2)(g_1)-(p_1\vee p_2)(g_2).$$

Таким образом, $(p_1\vee p_2)$ продолжается на $C(V,\mathbb{R})$ однозначно. Из аддитивности и положительной однородности $(p_1\vee p_2)$ на конусе неотрицательных функций следует аддитивность и вещественная однородность функционала $(p_1\vee p_2)$ на $C(V,\mathbb{R})$.

Поскольку $p_1(i_q)=p_2(i_q)$ для любого $q=0,1,\dots,m$ и любых $p_1,p_2\in P$, то для произвольной непрерывной функции $f\in C(V,\mathbb{K})$ и $p:=p_1\vee p_2$ положим

$$p(f)=p(f_0)p(1)+p(f_1)p(i_1)+\dots+p(f_m)p(i_m),$$

где $p(i_q):=p_1(i_q)$ для любого $q=0,1,\dots,m$, функция f записана в виде $f=f_0+f_1i_1+\dots+f_mi_m$ с вещественными непрерывными функциями $f_0,f_1,\dots,f_m\in C(V,\mathbb{R})$ и стандартными генераторами $\{i_0,i_1,\dots,i_m\}$, $i_0=1$, $m=3$ для $\mathbb{H}$, $m=7$ для $\mathbb{O}$. Из соотношения $p_s(\tilde f)=(p_s(f))\tilde{}$ для $s=1$ и $s=2$ следует, что

$$p(\tilde f)=p(f_0)-p(f_1)p(i_1)-\dots-p(f_m)p(i_m)=(p(f))\tilde{}.$$

Положим также $p_1\wedge p_2:=-((-p_1)\vee(-p_2))$. Поэтому $p_1\vee p_2$ и $p_1\wedge p_2$ имеют конечные нормы. □

3.9. Предложение. *Если p — ограниченный квазилинейный функционал на $C(V,\mathbb{K})$, $p^+:=p\vee0$, $p^-:=-(p\wedge0)$, то*

$$p=p^+-p^-,\quad p^+\wedge p^-=0,\quad \|p\|=\|p^+\|+\|p^-\|=p^+(1)+p^-(1).$$

Доказательство. Для положительной непрерывной функции $f\in C(V,\mathbb{R})$ выполняются следующие равенства:

$$p^+(f)=\sup\{p(f_1):0\leqslant f_1\leqslant f,\ f_1\in C(V,\mathbb{R})\},$$

$$\begin{aligned}-p^-(f)=(p\wedge0)(f)&=-((-p)\vee0)(f)=\\&=-\sup\{-p(g):0\leqslant g\leqslant f,\ g\in C(V,\mathbb{R})\}=\\&=\inf\{p(g):0\leqslant g\leqslant f,\ g\in C(V,\mathbb{R})\}=\\&=\inf\{p(f-f_1):0\leqslant f_1\leqslant f,\ f_1\in C(V,\mathbb{R})\}=\\&=p(f)-\sup\{p(f_1):0\leqslant f_1\leqslant f,\ f_1\in C(V,\mathbb{R})\}=p(f)-p^+(f).\end{aligned}$$

Таким образом, $p = p^+ - p^-$, так как $0(f) = 0$ для любой $f \in C(V, \mathbb{K})$. Положим $p^+(i_q) = p^-(i_q) = p(i_q)$ для любого $q = 0, 1, \ldots, m$. Для неотрицательной функции $f \in C(V, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(p^+ \wedge p^-)(f) &= \inf\left\{p^+(f_1) + p^-(f - f_1) : 0 \leqslant f_1 \leqslant f,\ f_1 \in C(V, \mathbb{R})\right\} = \\ &= \inf\left\{p(f_1) + p^-(f) : 0 \leqslant f_1 \leqslant f,\ f_1 \in C(V, \mathbb{R})\right\} = \\ &= p^-(f) + \inf\left\{p(f_1) : 0 \leqslant f_1 \leqslant f,\ f_1 \in C(V, \mathbb{R})\right\} = 0.\end{aligned}$$

Если v — неотрицательный квазилинейный функционал и $v(1) = 0$, то $v = 0$, так как I является единицей упорядочения. Поэтому $\|v\| = v(1) = 0$. Если $v(1) \neq 0$, то $v(1)^{-1}v$ является состоянием на $C(V, \mathbb{K})$ и $\|v(1)^{-1}v\| = 1$, следовательно, $\|v\| = v(1)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\|p\| \leqslant \|p^+\| + \|p^-\| &= p^+(1) + p^-(1) = \\ &= \sup\left\{p(f) : 0 \leqslant f \leqslant 1,\ f \in C(V, \mathbb{R})\right\} - \\ &- \inf\left\{p(g) : 0 \leqslant g \leqslant 1,\ g \in C(V, \mathbb{R})\right\}.\end{aligned}$$

Для подходящих $f, g \in C(V, \mathbb{R})$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant f \leqslant 1$ и $0 \leqslant g \leqslant 1$, $p(f) - p(g)$ аппроксимирует $p^+(1) + p^-(1)$, и

$$p(f) - p(g) \leqslant \|p\|\|f - g\| \leqslant \|p\|.$$

Поэтому $p^+(1) + p^-(1) \leqslant \|p\|$, и получаем $\|p\| = \|p^+\| + \|p^-\| = p^+(1) + p^-(1)$. □

3.10. Теорема. *Если $\mathcal{A}$ — замкнутая относительно нормы подалгебра в $C(V, \mathbb{K})$ для хаусдорфова компактного топологического пространства V, $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $1 \in \mathcal{A}$, $\tilde{f} \in \mathcal{A}$ для любой функции $f \in \mathcal{A}$, а для любой пары различных точек $z_0, z_1 \in V$ существует функция $f \in \mathcal{A}$ такая, что $f(z_0) \neq f(z_1)$, то $\mathcal{A} = C(V, \mathbb{K})$.*

Доказательство. Алгебра $\mathcal{A}$ имеет разложение $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 i_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_m i_m$, где $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap C(V, \mathbb{R})$, $i_0, i_1, \ldots, i_m$ — генераторы алгебры $\mathbb{K}$, $\mathcal{A}_q \subset C(V, \mathbb{R})$ для любого q. При этом алгебры $\mathcal{A}_q$ над $\mathbb{R}$ содержатся в $C(V, \mathbb{R})$, а каждая алгебра $\mathcal{A}_q$ изоморфна $\mathcal{A}_0$ для любого $q = 1, \ldots, m$, так как $\mathcal{A}$ является алгеброй над $\mathbb{K}$. В частности, она инвариантна относительно умножения на любое $b \in \mathbb{K}$, $b \neq 0$, где $i_0 = 1$. Данная теорема выполняется для алгебр над $\mathbb{R}$, т.е. $\mathcal{A}_0 = C(V, \mathbb{R})$ (теорема Стоуна—Вейерштрасса), следовательно, $\mathcal{A} = C(V, \mathbb{K})$. □

3.11. Теорема. *Элемент A банаховой алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K}$ имеет спектральный радиус $r(A)$, даваемый формулой $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$.*

Доказательство. В силу леммы 2.14, выполняется неравенство $r(A) \leqslant \|A\|$. Если $a \in \mathrm{sp}(A)$, то, в силу теоремы 2.22, $a^n \in \mathrm{sp}(A^n)$, так как тело кватернионов ассоциативно, а алгебра октонионов альтернативна. Поэтому $|a^n| \leqslant \|A^n\|$ и

$$|a| \leqslant \underline{\lim}\|A^n\|^{1/n}, \quad r(A) \leqslant \underline{\lim}\|A^n\|^{1/n}.$$

Функция $R(z; A)$ по переменной z $\mathbb{K}$-голоморфна на $\rho(A)$. Степенной ряд, соответствующий $R(z; A)$, расходится при $|z| > (\overline{\lim}\|A^n\|^{1/n})^{-1}$, т.е. если $0 \leqslant a' < \overline{\lim}\|A^n\|^{1/n}$, то существует $a \in \mathbb{K}$ такое, что $a' < |a|$, для которого $I - a^{-1}A$, а значит и $A - aI$ не имеют обратных элементов в $\mathcal{C}$. Поэтому $a \in \mathrm{sp}(A)$ и $a' < r(A)$. Поскольку a' — произвольное неотрицательное число, $a' < \overline{\lim}\|A^n\|^{1/n}$, то

$$\overline{\lim}\|A^n\|^{1/n} \leqslant r(A) \leqslant \underline{\lim}\|A^n\|^{1/n}.$$

С другой стороны, всегда выполняется неравенство $\underline{\lim}\|A^n\|^{1/n} \leqslant \overline{\lim}\|A^n\|^{1/n}$, следовательно, существует предел $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$. □

3.12. Следствие. *Если A и B — коммутирующие элементы в банаховой алгебре $\mathcal{C}$, то*

$$r(AB) \leqslant r(A)r(B), \quad r(A + B) \leqslant r(A) + r(B).$$

Доказательство. В силу теоремы 3.11, $r_{\mathcal{B}}(A) = r_{\mathcal{C}})(A)$, когда A принадлежит банаховой подалгебре $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$. Если A и B — коммутирующие элементы алгебры $\mathcal{C}$, то, в силу теоремы 2.22, для квазикоммутативной подалгебры $\mathcal{B}$, порожденной A и B, из

$$\|(AB)^n\| = \|A^nB^n\| \leqslant \|A^n\|\|B^n\| \quad \text{и} \quad \|(A+B)^n\| \leqslant \sum_{m=0}^{n} \|A^m\|\|B^{n-m}\|$$

следует утверждение следствия. □

3.13. Предложение. *Пусть A — элемент C^*-алгебры $\mathcal{C}$.*

(i) *Если A нормален, то $r(A) = \|A\|$.*

(ii) *Если A самосопряжен, то $\operatorname{sp}(A)$ — компактное подмножество в $\mathbb{R}$, и спектр содержит, по крайней мере, одно из чисел $-\|A\|$ или $\|A\|$.*

(iii) *Если A — унитарный элемент в $\mathcal{A}$, то $\|A\| = 1$, и $\operatorname{sp}(A)$ — компактное подмножество в сфере $\{z \in \mathbb{K} : |z| = 1\}$.*

Доказательство. (i) Для самосопряженного оператора B в $\mathcal{C}$ и натурального числа $n > 0$ имеем

$$\|(B)^{2n}\| = \|(B^n)^*B^n\| = \|B^n\|^2.$$

Индукцией по t получим, что $\|B^q\| = \|B\|^q$ для $q = 2^m$, а, в силу теоремы 3.11, $r(B) = \lim\limits_{q\to\infty} \|B^q\|^{1/q} = \|B\|$. Для нормального элемента A и самосопряженного $B = AA^*$ из предыдущего обсуждения, следствия 3.12 и C^*-свойства нормы вытекает, что

$$\|A^2\| = \|A^*A\| = r(A^*A) \leqslant r(A^*)r(A) = r(A)^2 \leqslant \|A\|^2,$$

следовательно, $r(A) = \|A\|$.

(ii) Для самосопряженного элемента A в алгебре $\mathcal{C}$ спектр $\operatorname{sp}(A)$ компактен, согласно лемме 2.14, и поэтому содержит скаляр с абсолютным значением $r(A)$, а $r(A) = \|A\|$, в силу п. (i) данного предложения. Поэтому достаточно доказать, что $\operatorname{sp}(A) \subset \mathbb{R}$. Пусть $t \in \operatorname{sp}(A)$, $t = a + Mb$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $M + \tilde{M} = 0$, $|M| = 1$, $M \in \mathbb{K}$. Положим $B_n = A - aI + MnbI$, тогда $M(n+1)b = a + Mb - a + Mnb \in \operatorname{sp}(B_n)$. При этом

$$\begin{aligned}(n^2+2n+1)b^2 = |M(n+1)b|^2 \leqslant [r(B_n)]^2 \leqslant \|B_n\|^2 = \|B_n^*B_n\| = \\ = \|(A - aI - MnbI)(A - aI + MnbI)\| = \\ = \|(A-aI)^2 + n^2b^2I + AM - MA\| \leqslant \|A - aI\| + 2\|A\| + n^2b^2,\end{aligned}$$

так как $B_n^*B_n$ самосопряжен,

$$(MA)^* = A^*M^* = -AM, \quad A^*M + M^*A = AM - MA.$$

Таким образом, $(2n+1)b^2 \leqslant \|A - aI\|^2 + 2\|A\|$ для любого $n = 1, 2, \ldots$, поэтому $b = 0$ и $t = a \in \mathbb{R}$.

(iii) Для унитарного оператора, в силу свойства нормы в C^*-алгебре, имеем

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|I\| = 1.$$

Поэтому $\|A\| = 1$. Если $z \in \operatorname{sp}(A)$, то $a^{-1} \in \operatorname{sp}(A^{-1}) = \operatorname{sp}(A^*)$, следовательно, $|a| \leqslant \|A\| = 1$, $|a|^{-1} \leqslant \|A^*\| = 1$, откуда $|a| = 1$. □

3.14. Следствие. *Если A — нормальный элемент C^*-алгебры $\mathcal{C}$ и $A^k = 0$ для некоторого положительного числа k, то $A = 0$.*

Доказательство. Поскольку $A^n = 0$ при $n \geqslant k$, то из предложения 3.13 следует, что

$$\|A\| = r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = 0.$$

Следствие доказано. □

3.15. Теорема. *Если A — самосопряженный элемент C^*-алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, то существует единственное непрерывное отображение $f : C(\operatorname{sp}(A), \mathbb{K}) \to \mathcal{C}$ такое, что*

(i) *$f(A)$ имеет элементарное значение, если f — полином.*

Более того, если $f, g \in C(\operatorname{sp}(A), \mathbb{K})$, $a, b \in \mathbb{K}$, то

(ii) $\|f(A)\| = \|f\|$;
(iii) $(af + bg)(A) = af(A) + bg(A)$;
(iv) $(fg)(A) = f(A)g(A)$;
(v) $f(A)$ *нормален*;
(vi) $\tilde{f}(A) = [f(A)]^*$, *в частности,* $f(A)$ *самосопряжен тогда и только тогда, когда* $f(\mathrm{sp}(A)) \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. В силу предложения 3.13, $\mathrm{sp}(A)$ — компактное подмножество в $\mathbb{R}$. Теорема 3.10 утверждает, что множество всех полиномов с коэффициентами в $\mathbb{K}$ (со всевозможными порядками констант и переменных в каждом одночлене для $\mathbb{H}$ или $\mathbb{O}$ и возможно различными порядками ассоциированных произведений в случае $\mathbb{O}$) плотно в $C(\mathrm{sp}(A), \mathbb{K})$. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}$ в $\mathcal{C}$, порожденную оператором A. В силу теоремы 2.22, элемент $f(A)$ алгебры $\mathcal{C}$ нормален, так как в $C(\Lambda, \mathbb{K})$ каждый элемент z коммутирует со своим сопряженным. В силу той же теоремы, существует отображение $f \mapsto f(A)$, которое изометрично. □

3.16. Замечание. В отличие от комплексного случая, в общем, из-за некоммутативности алгебры $\mathbb{K}$ свойство $f(A)B = Bf(A)$ для любого элемента $B \in \mathcal{C}$, коммутирующего с A, не выполняется для произвольной функции $f \in C(\mathrm{sp}(A), \mathbb{K})$, так как bI не обязано коммутировать с B для любого $b \in \mathbb{K}$.

3.17. Предложение. *Если* A *— самосопряженный элемент* C^**-алгебры* $\mathcal{C}$*, то множество* $\{f(A) : f \in C(\mathrm{sp}(A), \mathbb{K})\}$ *— наименьшая квазикоммутативная* C^**-подалгебра* $\mathcal{C}(A)$ *в* $\mathcal{C}$*, содержащая* A *и* I*, а каждый элемент из* $\mathcal{C}(A)$ *является пределом последовательности полиномов от* A*, где* $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ *или* $\mathbb{K} = \mathbb{O}$.

Доказательство. В силу теорем 2.22 и 3.15, отображение $C(\mathrm{sp}(A), \mathbb{K}) \ni f \mapsto f(A) \in \mathcal{C}$ является изометрическим $*$-изоморфизмом, $\mathrm{id}(A) = A$, где $\mathrm{id}(z) = z$ — тождественная функция на $\mathrm{sp}(A)$, $z \in \mathrm{sp}(A)$. Из полноты метрического пространства $C(\mathrm{sp}(A), \mathbb{K})$ следует, что его образ $\{f(A) : f \in C(\mathrm{sp}(A), \mathbb{K})\}$ — полное метрическое пространство, следовательно, оно замкнуто в $\mathcal{C}$. Таким образом, $I, A \in \mathcal{C}(A)$, каждый элемент из $\mathcal{C}(A)$ является пределом полиномов, но $\mathcal{C}(A)$ содержит все полиномы от I, A. □

3.18. Предложение. *Если* $\mathcal{C}$ *—* C^**-алгебра над* $\mathbb{K}$*, а* $\mathcal{E}$ *—* C^**-подалгебра в* $\mathcal{C}$*,* $B \in \mathcal{E}$*, где* $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ *или* $\mathbb{K} = \mathbb{O}$*, то* $\mathrm{sp}_{\mathcal{C}}(B) = \mathrm{sp}_{\mathcal{E}}(B)$.

Доказательство. Если $u \in \mathrm{sp}_{\mathcal{C}}(B)$, то $uI - B$ не имеет обратного элемента в $\mathcal{C}$. Следовательно, $uI - B$ не имеет обратного элемента в $\mathcal{E}$, поэтому $u \in \mathrm{sp}_{\mathcal{E}}(B)$. Таким образом, $\mathrm{sp}_{\mathcal{E}}(B) \subset \mathrm{sp}_{\mathcal{C}}(B)$.

Для доказательства обратного утверждения достаточно убедиться, что если $A \in \mathcal{E}$ и A имеет обратный элемент A^{-1} в $\mathcal{C}$, то $A^{-1} \in \mathcal{E}$. Пусть сначала B самосопряжен, тогда поскольку $0 \notin \mathrm{sp}_{\mathcal{C}}(A)$, то уравнение $f(t) = 1/t$ определяет непрерывную функцию на $\mathrm{sp}_{\mathcal{C}}(A)$. Согласно теореме 3.15, примененной к $\mathcal{C}$, существует $f(A) \in \mathcal{C}$. В силу предложения 3.17, существует $f(A) \in \mathcal{E}$. Поскольку $tf(t) = 1$ для любого $t \in \mathrm{sp}(A)$, то, согласно теореме 3.15, получим $Af(A) = I$, т.е. $A^{-1} = f(A) \in \mathcal{E}$.

Рассмотрим теперь не обязательно самосопряженный элемент $A \in \mathcal{C}$, имеющий обратный элемент $Y \in \mathcal{C}$. Тогда $A^* \in \mathcal{E}$ и имеет обратный элемент $Y^* \in \mathcal{C}$. Из того, что элемент $AA^* \in \mathcal{C}$ самосопряжен и имеет обратный элемент $YY^* \in \mathcal{C}$, следует, что, в силу доказательства выше, $YY^* \in \mathcal{E}$. Таким образом, $A^{-1} = Y = (YY^*)A^* \in \mathcal{E}$. □

3.19. Замечание. Согласно предложению 3.18, можно опустить индекс $\mathcal{C}$ или $\mathcal{E}$ и писать просто $\mathrm{sp}(B)$ для спектра элемента B.

3.20. Теорема. *Если* A *— самосопряженный элемент* C^**-алгебры* $\mathcal{C}$ *над* $\mathbb{K}$*, где* $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ *или* $\mathbb{K} = \mathbb{O}$*, и* $f \in C(\mathrm{sp}(A), \mathbb{K})$*, то* $\mathrm{sp}(f(A)) = \{f(t) : t \in \mathrm{sp}(A)\}$.

Доказательство. В силу предложений 3.17 и 3.18, можно рассматривать спектр $\mathrm{sp}(f(A))$ относительно C^*-подалгебры $\mathcal{C}(A)$ в $\mathcal{C}$. С другой стороны, отображение

$$C(\mathrm{sp}(A), \mathbb{K}) \ni f \mapsto f(A) \in \mathcal{C}(A) \subset C(\mathrm{sp}(A), \mathbb{K})$$

является изометрическим $*$-изоморфизмом, поэтому спектр элемента $f(A)$ таков: $\mathrm{sp}(f(A)) = \{f(t) : t \in \mathrm{sp}(A)\}$. □

3.21. Теорема. *Каждый элемент A C^*-алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, является конечной линейной комбинацией унитарных элементов.*

Доказательство. Поскольку алгебра $\mathcal{C}$ является также векторным пространством над $\mathbb{K}$, то $\mathcal{C}$ изоморфна прямой сумме $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 i_0 \oplus \mathcal{C}_1 i_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_m i_m$, где $\{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ — генераторы алгебры $\mathbb{K}$, а пространства $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ над $\mathbb{R}$ попарно изоморфны. При этом каждый элемент $A_p \in \mathcal{C}_p$ самосопряжен, в силу теоремы 2.22 и предложений 3.13, 3.17, где $p = 0, 1, \ldots, m$.

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда элемент $A \in \mathcal{C}$ самосопряжен. Перенормировкой $A \mapsto A/\|A\|$ при $A \neq 0$ сведем рассмотрение к случаю, когда $\|A\| \leqslant 1$. В таком случае $\mathrm{sp}(A) \subset [-1, 1]$, и можно задать функцию $f \in C(\mathrm{sp}(A), \mathbb{K})$ формулой $f(t) = t + M(1 - t^2)^{1/2}$, где $M + \tilde{M} = 0$, $|M| = 1$, $M \in \mathbb{K}$. Поскольку $t = [f(t) + \tilde{f}(t)]/2$, $f(t)\tilde{f}(t) = \tilde{f}(t)f(t) = 1$ для любого $t \in \mathrm{sp}(A)$, то оператор $f(A) =: U \in \mathcal{C}$ удовлетворяет соотношениям $A = (U + U^*)/2$, $UU^* = U^*U = I$. □

3.22. Теорема. *Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$ — C^*-алгебры над $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, а $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ — C^*-изоморфизм. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(i) $\mathrm{sp}(\phi(A)) \subset \mathrm{sp}(A)$ *и* $\|\phi(A)\| \leqslant \|A\|$ *для любого* $A \in \mathcal{C}$, *в частности,* ϕ *непрерывно*;
(ii) *если* A *— самосопряженный элемент в* $\mathcal{C}$ *и* $f \in C(\mathrm{sp}(A), \mathbb{K})$, *то* $\phi(f(A)) = f(\phi(A))$;
(iii) *если* ϕ *является* $*$*-изоморфизмом, то* $\|\phi(A)\| = \|A\|$ *и* $\mathrm{sp}(\phi(A)) = \mathrm{sp}(A)$ *для любого* $A \in \mathcal{C}$, *а* $\phi(A)$ *является* C^**-подалгеброй в* $\mathcal{E}$.

Доказательство. (i) Если $b \notin \mathrm{sp}(A)$, то $bI - A$ имеет обратный элемент $Y \in \mathcal{C}$. Поскольку $\phi(I) = I$, $bI - \phi(A)$ имеет обратный элемент $\phi(S)$ в $\mathcal{E}$. Поэтому $b \notin \mathrm{sp}(\phi(A))$, следовательно, $\mathrm{sp}(\phi(A)) \subset \mathrm{sp}(A)$. В силу предложения 3.13, выполняются равенства

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = r(A^*A),$$

$$\|\phi(A)\|^2 = \|\phi(A)^*\phi(A)\| = \|\phi(A^*A)\| = r(\phi(A^*A).$$

Поскольку $\mathrm{sp}(\phi(A^*A)) \subset \mathrm{sp}(A^*A)$, то $r(\phi(A^*A)) \leqslant r(A^*A)$, поэтому $\|\phi(A)\| \leqslant \|A\|$.

(ii) Если $\{p_n : n\}$ — последовательность полиномов, сходящаяся к f равномерно на $\mathrm{sp}(A)$, то, в силу (i), она сходится равномерно также на $\mathrm{sp}(\phi(A))$. Следовательно, существуют

$$\lim_{n\to\infty} \phi(p_n(A)) = \phi(f(A)),$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\phi A) = f(\phi(A)).$$

Тогда так как ϕ — гомоморфизм, то из соотношения $\phi(p_n(A)) = p_n(\phi(A))$ для любого n следует утверждение (ii).

(iii) Для самосопряженного элемента B из $\mathcal{C}$, в силу утверждения (i), выполняется включение $\mathrm{sp}(\phi(B)) \subset \mathrm{sp}(B)$. Если эти множества различны, то существует функция $0 \neq f \in C(\mathrm{sp}(B), \mathbb{K})$ такая, что $f|_{\mathrm{sp}(B)} = 0$. В силу п. (ii) теоремы, получим $f(B) \neq 0$, $\phi(f(B)) = f(\phi(B)) = 0$, что противоречит взаимной однозначности изоморфизма ϕ. Тогда

$$\mathrm{sp}(\phi(B)) = \mathrm{sp}(B) \quad \text{и} \quad r(\phi(B)) = r(B)$$

для любого самосопряженного элемента $B \in \mathcal{C}$. Если $A \in \mathcal{C}$ и $B = A^*A$, то

$$\|A\|^2 = r(A^*A) = r(\phi(A^*A)) = \|\phi(A)\|^2, \quad \|\phi(A)\| = \|A\|.$$

Поскольку $\mathcal{C}$ является полным метрическим пространством, а $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ — изометрия, то $\phi(\mathcal{C})$ замкнута в $\mathcal{E}$ и содержит единицу. Следовательно, она является C^*-подалгеброй в $\mathcal{E}$. В силу предложения 3.18, спектр $\phi(A)$ в $\mathcal{E}$ тот же, что и в $\phi(\mathcal{C})$, а $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}_{\phi(\mathcal{C})}(\phi(A))$, так как $\phi : \mathcal{C} \to \phi(\mathcal{C})$ — изоморфизм. □

3.23. Теорема. *Если $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$ — C^*-алгебры над $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, а ϕ — $*$-гомоморфизм из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{E}$, то $\phi(\mathcal{C})$ является C^*-подалгеброй в $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Поскольку $\phi(\mathcal{C})$ является $*$-подалгеброй в $\mathcal{E}$, то достаточно доказать, что $\phi(\mathcal{C})$ замкнута в $\mathcal{E}$. Рассмотрим $B \in \mathcal{E}$ и последовательность $\{A_n : n, A_n \in \mathcal{C}\}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|B - \phi(A_n)\| = 0$. В силу теоремы 3.21, достаточно рассмотреть случай самосопряженных операторов $B, A_1, A_2, \ldots$. Без потери общности возьмем подпоследовательность и в тех же обозначениях предположим, что $\|\phi(A_{n+1}) - \phi(A_n)\| < 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $f_n : \mathbb{R} \to [-2^{-n}, 2^{-n}]$ такой, что $f_n(t) = t$ при $|t| \leqslant 2^{-n}$. Из теоремы 3.22 следует, что

$$\phi(A_{n+1}) - \phi(A_n) = f_n(\phi(A_{n+1} - A_n)) = \phi(f_n(A_{n+1} - A_n)).$$

Поскольку $\|f_n(A_{n+1} - A_n)\| \leqslant 2^{-n}$, то ряд $A_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(A_{n+1} - A_n)$ сходится к элементу $A \in \mathcal{C}$. В силу непрерывности ϕ, существует

$$\phi(A) = \lim_{m\to\infty} \left\{ \phi(A_1) + \sum_{n=1}^{m-1} \phi(f_n(A_{n+1} - A_n)) \right\} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left\{ \phi(A_1) + \sum_{n=1}^{m-1} [\phi(A_{n+1}) - \phi(A_n)] \right\} = \lim_{n\to\infty} \phi(A_m).$$

Следовательно, $B \in \phi(\mathcal{C})$, т.е. $\phi(\mathcal{C})$ полна и является C^*-алгеброй. □

3.24. Определение. Элемент A из C^*-алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, называется неотрицательным, если A самосопряжен и $\mathrm{sp}(A) \subset [0, \infty) \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{C}^+$ множество всех неотрицательных элементов в $\mathcal{C}$.

3.25. Лемма. *Если A — самосопряженный элемент C^*-алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $b \in \mathbb{R}$, $b \geqslant \|A\|$, то $A \in \mathcal{C}^+$ тогда и только тогда, когда $\|A - bI\| \leqslant b$.*

Доказательство. В силу предложения 3.13, $\mathrm{sp}(A) \subset [-b, b]$ и

$$\|A - bI\| = r(A - bI) = \sup_{t\in\mathrm{sp}(A)} |t - b| = \sup_{t\in\mathrm{sp}(A)} (b - t),$$

поэтому $\|A - bI\| \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{sp}(A) \subset [0, \infty)$. □

3.26. Теорема. *Пусть $\mathcal{C}$ — это C^*-алгебра над $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *$\mathcal{C}^+$ замкнута в $\mathcal{C}$;*
(ii) *$bA \in \mathcal{C}^+$, если $A \in \mathcal{C}^+$ и $b \in [0, \infty)$;*
(iii) *$A + B \in \mathcal{C}^+$, если $A, B \in \mathcal{C}^+$;*
(iv) *$AB \in \mathcal{C}^+$, если $A, B \in \mathcal{C}^+$ и $AB = BA$;*
(v) *$A = 0$, если $A \in \mathcal{C}^+$ и $-A \in \mathcal{C}^+$.*

Доказательство. (i) В силу леммы 3.25,

$$\mathcal{C}^+ = \Big\{ A \in \mathcal{C} : A = A^* \text{ и } \big\|A - \|A\|I\big\| \leqslant \|A\| \Big\};$$

следовательно, $\mathcal{C}^+$ замкнута в $\mathcal{C}$.

(ii) Если $A \in \mathcal{C}^+$ и $b \in [0, \infty)$, то bA самосопряжен и $\mathrm{sp}(bA) = \{bt : t \in \mathrm{sp}(A)\} \subset [0, \infty)$.

(iii) В силу леммы 3.25,

$$\big\|A - \|A\|I\big\| \leqslant \|A\|, \quad \big\|B - \|B\|I\big\| \leqslant \|B\|.$$

Поэтому

$$\big\|A + B - (\|A\| + \|B\|)I\big\| \leqslant \|A\| + \|B\|,$$

и из той же леммы для $b = \|A\| + \|B\|$ следует, что $A + B \in \mathcal{C}^+$.

(iv) Каждый элемент A, B, AB имеет один и тот же спектр в $\mathcal{C}$ и в квазикоммутативной C^*-подалгебре, порожденной $\{I, A, B\}$. В силу теоремы 3.20, $\mathrm{sp}(AB) \subset \{st : s \in \mathrm{sp}(A),\ t \in \mathrm{sp}(B)\} \subset [0, \infty)$.

(v) Если $A \in \mathcal{C}^+$, $-A \in \mathcal{C}^+$, то A самосопряжен и $\mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty) \cap (-\infty, 0] = \{0\}$. Поэтому $\|A\| = r(A) = 0$. □

3.27. Предложение. *Предположим, что A — самосопряженный элемент C^*-алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, и $f\in C(\mathrm{sp}(A),\mathbb{K})$, тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) $f(A)\in\mathcal{C}^+$ *тогда и только тогда, когда* $f(t)\geqslant 0$ *для любого* $t\in\mathrm{sp}(A)$;

(ii) $\|A\|I+sA\in\mathcal{C}^+$ *для* $s=1$ *и* $s=-1$;

(iii) A *можно выразить в виде* A^+-A^-, *где* $A^+,A^-\in\mathcal{C}^+$ *и* $A^+A^-=A^-A^+=0$, *причем эти условия определяют* A^+ *и* A^- *однозначно, а* $\|A\|=\max(\|A^+\|,\|A^-\|)$.

Доказательство. (i) В силу теоремы 3.20, $f(A)$ имеет спектр $\{f(t):t\in\mathrm{sp}(A)\}$, поэтому f неотрицательна на $\mathrm{sp}(A)$, если $f(A)\in\mathcal{C}^+$. Обратно, если $f(t)\geqslant 0$ для любого $t\in\mathrm{sp}(A)$, то $f(A)$ самосопряжен, так как $\mathrm{sp}(f(A))\subset[0,\infty)$.

(ii) Функция $f\in C(\mathrm{sp}(A),\mathbb{K})$, заданная формулой $f(t):=\|A\|+st$, принимает неотрицательные значения, тогда, в силу (i), $f(A)\in\mathcal{C}^+$, т.е. $\|A\|I+sA\in\mathcal{C}^+$.

(iii) Для непрерывных функций $f(t)=t$, $f^+(t):=\max(t,0)$, $f^-(t):=\max(-t,0)$ выполняются тождества $f=f^+-f^-$, $f^+f^-=f^-f^+=0$. Тогда $A=A^+-A^-$, $A^+A^-=A^-A^+=0$, где $A^+=f^+(A)$, $A^-=f^-(A)$. Согласно п. (i), элементы A^+ и A^- принадлежат $\mathcal{C}^+$. Из равенства $\|f\|=\max(\|f^+\|,\|f^-\|)$ следует, что $\|A\|=\max(\|A^+\|,\|A^-\|)$. Для доказательства единственности рассмотрим разложение $A=B-C$, где $B,C\in\mathcal{C}^+$ и $BC=CB=0$. Тогда $A^n=B^n=(-C)^n$ для любого $n=1,2,\ldots$, поэтому $p(A)=p(B)+p(-C)$, когда p — полином с нулевым постоянным членом. Существует последовательность $\{p_n:n\}$ полиномов, которая сходится к f^+ равномерно на $\mathrm{sp}(A)\cup\mathrm{sp}(B)\cup\mathrm{sp}(-C)$, причем

$$f^+(A)=\lim_{n\to\infty}p_n(A)=\lim n\to\infty[p_n(B)+p_n(-C)]=f^+(B)-f^+(-C).$$

Поскольку $f^+(B)=B$, $f^-(-C)=0$, то $B=f^+(A)=A^+$, $C=B-A=A^+-A=A^-$. □

3.28. Следствие. *Если $A\in\mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, то A является $\mathbb{K}$-линейной комбинацией не более чем $2p$ членов из $\mathcal{C}^+$, где $p=4$ для $\mathbb{H}$ и $p=8$ для $\mathbb{O}$.*

Доказательство. В силу §3.21, A является $\mathbb{K}$-линейной комбинацией не более чем p самосопряженных элементов из $\mathcal{C}$. В силу предложения 3.27, каждый самосопряженный элемент является разностью двух неотрицательных элементов. □

3.29. Лемма. *Если $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, $A\in\mathcal{C}$, $-A^*A\in\mathcal{C}^+$, то $A=0$.*

Доказательство. Элемент A имеет разложение в виде суммы $A=\sum\limits_{s=0}^{m}i_sA_s$, где $\{i_0,i_1,\ldots,i_m\}$ — генераторы алгебры $\mathbb{K}$, A_s — самосопряженные элементы из $\mathcal{C}$ для любого s (см. теорему 3.21). Из $\mathrm{sp}(A_s)\subset\mathbb{R}$ следует, что $\mathrm{sp}(A_s^2)\subset[0,\infty)$. Поскольку AA^* самосопряжен, то $\mathrm{sp}(AA^*)\subset\mathbb{R}$. В силу условия леммы и определения 3.24, $\mathrm{sp}(-A^*A)\subset[0,\infty)$. Если $b\neq 0$ и $b\in\mathrm{sp}(A^*A)$, то $b\in\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}$ является центром алгебры $\mathbb{K}$. Тогда A^*A-bI, и следовательно, $b^{-1}A^*A-I$ необратим. Покажем, что $I-A^*A$ обратим тогда и только тогда, когда $I-AA^*$ обратим. Пусть $(I-A^*A)$ обратим. Проверим, что тогда $(I-AA^*)$ также обратим:

$$(I-A^*A)[A^*((I-A^*A)^{-1}A)+I]=A^*((I-A^*A)^{-1}A)+I-(A^*A)(A^*(I-A^*A)^{-1}A)-A^*A.$$

Тогда, в силу альтернативности алгебры $\mathbb{K}$ и теоремы 2.22, имеем

$$(I-A^*A)[A^*((I-A^*A)^{-1}A)+I]=A^*[(I-A^*A)^{-1}-(AA^*)(I-AA^*)^{-1}]A+I-A^*A=I,$$

и аналогичное равенство выполняется при правом умножении на $(I-A^*A)$.

Таким образом, $\mathrm{sp}(-AA^*)\subset\mathrm{sp}(-A^*A)\cup\{0\}\subset[0,\infty)$, т.е. элемент $-AA^*$ неотрицателен. Тогда

$$A^*A+AA^*=\left(A_0-\sum_{s=1}^{m}i_sA_s\right)\left(A_0+\sum_{p=1}^{m}i_sA_s\right),$$

так как, в силу теоремы 2.22, каждому A_s соответствует самосопряженная функция $f_s=\tilde{f}_s$ из $C(\mathrm{sp}(A),\mathbb{K})$. Поэтому

$$A^*A+AA^*=2\sum_{s=0}^{m}A_s^2,\quad A^*A=2\sum_{s=0}^{m}A_s^2+(-AA^*),$$

где все члены в правой части равенства неотрицательны. Таким образом, A^*A и $(-A^*A)$ неотрицательны, поэтому $A^*A = 0$, в силу теоремы 3.26. Таким образом, $\|A\|^2 = \|A^*A\| = 0$, следовательно, $A = 0$. □

3.30. Теорема. *Если $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, то следующие условия эквивалентны*:

(i) $A \in \mathcal{C}^+$;
(ii) $A = H^2$ *для некоторого* $H \in \mathcal{C}^+$;
(iii) $A = B^*B$ *для некоторого* $B \in \mathcal{C}$.

При выполнении этих условий H единственен. Если X — гильбертово пространство над $\mathbb{K}$, а $\mathcal{C}$ — подалгебра в $L_q(X)$, то эти условия эквивалентны следующему условию:

(iv) $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ *для любого* $x \in X$.

Доказательство. В алгебре $\mathbb{K}$ каждый полином имеет корень (см. [15, теорема 3.17]). Если $A \in \mathcal{C}^+$, то уравнение $f(t) = t^{1/2}$ определяет неотрицательную непрерывную функцию f на $\mathrm{sp}(A) \subset [0, \infty)$. Для $H = f(A)$, очевидно, $H \in \mathcal{C}^+$ и $H^2 = A$ в силу теоремы 2.22, т.е. из (i) следует (ii), а из (ii) следует (iii).

Предположим, что $A = B^*B$, где $B \in \mathcal{C}$. Из самосопряженности A следует, что $A = A^+ - A^-$, согласно предложению 3.27. Если $C := BA^-$, то $C^*C = (A^-B^*)(BA^-)$. Из теоремы 2.22, примененной к C^*-подалгебре, порожденной B, используя $C(\mathrm{sp}(B), \mathbb{K})$ и альтернативность алгебры $\mathbb{K}$, получим, что

$$C^*C = A^-(A^+ - A^-)A^- = -(A^-)^3.$$

Поскольку $A^- \in \mathcal{C}^+$ и $(A^-)^3$ имеет спектр $\{t^3 : t \in \mathrm{sp}(A^-)\}$, то $-C^*C = (A^-)^3 \in \mathcal{C}^+$. В силу леммы 3.29, $C = 0$, следовательно, $A^- = 0$, согласно следствию 3.14, так как A^- самосопряжен. Таким образом, $A = A^+ \in \mathcal{C}^+$, и из (iii) вытекает (i).

Докажем единственность H в (ii) для $A \in \mathcal{C}^+$. Пусть $G \in \mathcal{C}^+$, $G^2 = A$ и $H = f(A)$ (см. выше). Существует последовательность полиномов p_n, сходящаяся к f на $\mathrm{sp}(A)$. Положим $q_n(t) = p_n(t^2)$. Так как $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(G^2) = \{t^2 : t \in \mathrm{sp}(G)\}$, видим, что

$$\lim_{n\to\infty} q_n(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t^2) = f(t^2) = t$$

равномерно на $\mathrm{sp}(G)$, следовательно,

$$G = \lim_{n\to\infty} q_n(G) = \lim_{n\to\infty} p_n(G^2) = \lim_{n\to\infty} p_n(A) = f(A) = H,$$

т.е. H единственен.

Если $\mathcal{C}$ — подалгебра в $L_q(X)$, то $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C} \cap (L_q(X))^+$. Поэтому для доказательства эквивалентности (i) и (iv) достаточно рассмотреть $\mathcal{C} = L_q(X)$. Тогда утверждение об эквивалентности вытекает из того, что если $A \in L_q(X)$, то $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ для любого $x \in X$ тогда и только тогда, когда $A = A^*$ и $\mathrm{sp}(A) \subset [0, \infty)$ (см. лемму 2.17 и теорему 2.31). □

3.31. Замечание. Элемент H в теореме 3.30 называется неотрицательным корнем $A \in \mathcal{C}^+$ и обозначается через $A^{1/2}$. Аналогичную процедуру можно применить для построения элемента A^b для других действительных значений $b > 0$ с помощью функции $f_b(t) := t^b$, причем для обратимого A можно брать любые $b \in \mathbb{R}$ с $f_0(t) := 1$ такие, что $A^bA^c = A^{c+b}$ для любых $b, c \in \mathbb{R}$ для обратимого $A \in \mathcal{C}^+$.

Линейное (над $\mathbb{R}$) подпространство $\mathcal{C}_h$ всех эрмитовых элементов C^*-алгебры $\mathcal{C}$ замкнуто в $\mathcal{C}$, следовательно, является банаховым пространством. При этом $\mathcal{C}_h$ частично упорядочено отношением «$A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда $B - A \in \mathcal{C}^+$». Тогда $\mathcal{C}^+ = \{A \in \mathcal{C}_h : A \geqslant 0\}$.

3.32. Определения и обозначения. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$ такая, что $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{M}$ — самосопряженная алгебра, и $\mathcal{M}$ линейна над $\mathbb{K}$ (т.е. имеет структуру векторного пространства над $\mathbb{K}$) с $I \in \mathcal{M}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Через $\mathcal{M}^+$ обозначим $\mathcal{M} \cap \mathcal{C}^+$. В силу следствия 3.28, каждый элемент из $\mathcal{M}$ является $\mathbb{K}$-линейной комбинацией элементов из $\mathcal{M}^+$.

Функционал $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{K}$ назовем эрмитовым, если $\rho \in L_q(\mathcal{M}, \mathbb{K})$ и $\rho = \rho^*$, т.е. $\rho(A^*) = (\rho(A))^{\widehat{}}$.

Функционал $\rho \in L_q(\mathcal{M}, \mathbb{K})$ назовем неотрицательным, если $\rho(A) \geqslant 0$ для любого $A \in \mathcal{M}^+$. Если, кроме того, $\rho(I) = 1$, то неотрицательный функционал называется состоянием.

Каждый функционал $\rho \in L_q(\mathcal{M}, \mathbb{K})$ запишем в виде

$$\rho(A) = \sum_{s \in \{i_0, i_1, \ldots, i_m\}} s\rho_s(A),$$

где $\rho_s(A) \in \mathbb{R}$ для любого $A \in \mathcal{M}$ и любого $s \in \{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$, $\{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ — множество стандартных генераторов алгебры $\mathbb{K}$. Положим также $\rho_{bs}(A) := b\rho_s(A)$ для любого $b \in \mathbb{R}$.

3.33. Лемма. *Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathbb{K}$ такие же, как в определении* 3.32.

(i) *Если $\rho \in L_l(\mathcal{M}, \mathbb{K})$, то $\rho_s(A) = \rho_{qs}(qA)$ для любых $s, q \in \{i_0, \ldots, i_m\}$, $A \in \mathcal{M}$.*

(ii) *Если $\rho \in L_r(\mathcal{M}, \mathbb{K})$, то $\rho_s(A) = \rho_{sq}(Aq)$ для любых $s, q \in \{i_0, \ldots, i_m\}$, $A \in \mathcal{M}$.*

(iii) *Если функционал $\rho \in L_q(\mathcal{M}, \mathbb{K})$ эрмитов, то $\rho_s(A) = 0$ для любого $A = A^* \in \mathcal{M}$ и любого $s \in \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$.*

Доказательство. (i) Пусть $\rho \in L_l(\mathcal{M}, \mathbb{K})$. Тогда $\rho(aA) = a\rho(A)$ для любых $a \in \mathbb{K}$ и $A \in \mathcal{M}$. В частности, при $a \in \{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ имеем

$$\rho(aA) = \sum_{q \in \{i_0, \ldots, i_m\}} q\rho_q(aA) = \sum_{s \in \{i_0, \ldots, i_m\}} as\rho_s(A),$$

следовательно, $\rho_{as}(aA) = \rho_s(A)$ для любого $s \in \{i_0, \ldots, i_m\}$.

(ii) В случае $\rho \in L_r(\mathcal{M}, \mathbb{K})$ доказательство аналогично.

(iii) Из эрмитовости функционала следует равенство

$$\rho(A) = \rho_{i_0}(A_{i_0}) + \sum_{s \in \{i_1, \ldots, i_m\}} s\rho_s(A_s) = \rho(A^*) = \rho_{i_0}(A_{i_0}) - \sum_{s \in \{i_1, \ldots, i_m\}} s\rho_s(A_s)$$

для любого $A = A^*$, следовательно, $\rho_s(A) = 0$ для любого $s \in \{i_1, \ldots, i_m\}$. □

3.34. Лемма. *Если $\rho \in L_l(\mathcal{M}, \mathbb{K})$ или $\rho \in L_r(\mathcal{M}, \mathbb{K})$, то $\|\rho\| \leqslant (p)^{1/2}\|\rho_e\|$, где $p = 4$ для $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ и $p = 8$ для $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Если дополнительно функционал ρ эрмитов, то $\|\rho\| = \|\rho_e\| = \sup\{\rho(A) : A = A^* \in \mathcal{M}\}$.*

Доказательство. В силу леммы 3.33, $\rho_s(A) = \rho_e(sA)$ при $\rho \in L_l(\mathcal{M}, \mathbb{K})$ или $\rho_s(A) = \rho_s(As)$ при $\rho \in L_r(\mathcal{M}, \mathbb{K})$ для любого $A \in \mathcal{M}$. Поэтому $\|\rho_s\| = \|\rho_e\|$ для любого $s \in \{i_0, \ldots, i_m\}$, где $\|\rho\| := \sup_{0 \neq A \in \mathcal{M}} |\rho(A)|/\|A\|$, но $|\rho(A)|^2 = \sum_{s \in \{i_0, \ldots, i_m\}} \rho_s^2(A) \leqslant p \max_s \rho_s^2(A)$. Если функционал ρ эрмитов, то $\rho_s(A) = 0$ для любого $A = A^*$ и любого $s \in \{i_1, \ldots, i_m\}$, следовательно, $|\rho(A)| = |\rho_e(A)|$ для $A = A^*$. Остается доказать, что $\|\rho\| = \sup\{\rho(A) : A = A^* \in \mathcal{M}\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $A \in \mathcal{M}$ с $\|A\| = 1$ такой, что $|\rho(A)| > \|\rho\| - \varepsilon$. Для подходящего числа $b \in \mathbb{K}$ с $|b| = 1$ получим $\|\rho\| - \varepsilon < \|\rho\| = \rho(bA) = (\rho(bA))\tilde{} = \rho((bA)^*)$. Возьмем действительную часть $\mathrm{Re}(bA) =: (bA)_0$ элемента bA, тогда $|\mathrm{Re}(bA)| \leqslant 1$ и $\rho((bA)_0) > \|\rho\| - \varepsilon$. Таким образом, $\|\rho\| \leqslant \sup\{\rho(A) : A = A^* \in \mathcal{M}, \|A\| \leqslant 1\}$, а обратное неравенство очевидно. □

3.35. Лемма. *Если функционал ρ неотрицателен, то ρ эрмитов.*

Доказательство. Если функционал ρ неотрицателен, $A = A^* \in \mathcal{M}$, то $\rho(\|A\|I + cA) \geqslant 0$ для $c = 1$ и $c = -1$, так как $\|A\|I + cA \in \mathcal{M}^+$, а $\rho(A) \in \mathbb{R}$, так как $\rho(A) = [\rho(\|A\|I + A) + \rho(\|A\|I - A)]/2$, следовательно, ρ — эрмитов функционал. □

3.36. Замечание. Действительное векторное пространство $\mathcal{M}_h$, состоящее из всех самосопряженных элементов из $\mathcal{M}$, является частично упорядоченным векторным пространством с положительным конусом $\mathcal{M}^+$ и единицей упорядочения I. Если функционал ρ принадлежит $L_l(\mathcal{M}, \mathbb{K})$ или $L_r(\mathcal{M}, \mathbb{K})$, то он эрмитов тогда и только тогда, когда $\rho|_{\mathcal{M}_h}$ $\mathbb{R}$-линеен. Дополнительно, каждый $\mathbb{R}$-линейный функционал на $\mathcal{M}_h$ может быть продолжен единственным образом до эрмитова лево- или право-$\mathbb{K}$-линейного функционала на $\mathcal{M}$ с помощью соотношений леммы 3.33.

Все неотрицательные лево-$\mathbb{K}$-линейные (или право-$\mathbb{K}$-линейные) функционалы на $\mathcal{M}$ образуют конус $\mathcal{P}_l$ (или $\mathcal{P}_r$ соответственно) в действительном векторном пространстве, состоящем из всех

эрмитовых функционалов из $L_l(\mathcal{M},\mathbb{K})$ или $L_r(\mathcal{M},\mathbb{K})$ соответственно. При этом $\mathcal{P}_s \cap (-\mathcal{P}_s) = \{0\}$, где $s = l$ или $s = r$, так как $\mathcal{M}$ является $\mathbb{K}$-линейной оболочкой множества $\mathcal{M}^+$. Множество эрмитовых функционалов частично упорядочено: $\rho_1 \leqslant \rho_2$ тогда и только тогда, когда $\rho_2 - \rho_1 \in \mathcal{P}_s$, где $s = l$ или $s = r$.

Если X — гильбертово пространство над $\mathbb{K}$, то для $x \in X$ формула $w_x(A) := \langle x, A(x)\rangle$ определяет право-$\mathbb{K}$-линейный функционал $w_x \in L_r(\mathcal{M},\mathbb{K})$ на $\mathbb{K}$-линейном подпространстве $\mathcal{M}$ в $L_q(X)$. При этом $w_x(I) = \|x\|^2$, следовательно, w_x неотрицателен. Функционал w_x является состоянием, если $\|x\| = 1$.

Следует отметить, что если $\rho \in L_l(\mathcal{M},\mathbb{K}) \cap L_r(\mathcal{M},\mathbb{K})$ или $A \in L_l(\mathcal{M},\mathcal{N}) \cap L_r(\mathcal{M},\mathcal{N})$, то это не означает $\mathbb{K}$-линейность функционала ρ или оператора A в том же смысле, что и в обычном случае коммутативного поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ (см. лемму 3.33), так как $\mathcal{M}$ является $\mathbb{K}$-линейной оболочкой конуса $\mathcal{M}^+$ неотрицательных элементов, где $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — алгебры над $\mathbb{K}$. В самом деле, равенства

$$\rho(a(bx)) = a\rho(bx) = a\rho(xb) = a\rho(x)b, \quad \rho(a(bx)) = (ab)\rho(x)$$

не гарантированы для произвольных элементов $a, b \in \mathbb{K}$ и вектора x. Под право- и лево-$\mathbb{K}$-линейным функционалом или оператором над $\mathbb{K}$ будем понимать функционал или оператор A, который одновременно право- и лево-$\mathbb{K}$-линеен, например, оператор A на $l_2(\mathbb{K})$ такой, что $A(e_j) = \sum\limits_i a_{j,i}e_i$ с действительными коэффициентами $a_{j,i}$, где $\{e_j : j = 1, 2, \ldots\}$ — стандартный ортонормированный базис сепарабельного гильбертова пространства над $\mathbb{K}$, т.е., $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ с единицей на j-м месте и остальными нулевыми координатами.

Если $\mathcal{C}$ — C^*-подалгебра в $L_q(X)$, а $\mathcal{M}$ — самосопряженная подалгебра в $\mathcal{C}$, $I \in \mathcal{M}$, то $w_x|_{\mathcal{M}}$ — неотрицательный функционал на $\mathcal{M}$. Состояния алгебры $\mathcal{M}$, возникающие этим путем из единичных векторов в X, называются векторными состояниями алгебры $\mathcal{M}$.

В силу леммы 3.33, семейство функционалов, принадлежащих $L_l(\mathcal{M},\mathbb{K}) \cap L_r(\mathcal{M},\mathbb{K})$, непусто и характеризуется условиями $\rho_s(A_s i_s) = \rho_s(i_s A_s) = i_s \rho_1(A_s)$ для любого $s \in \{0, 1, \ldots, m\}$, где $A = \sum\limits_{s=0}^{m} A_s i_s$ — самосопряженное разложение элемента $A \in \mathcal{M}$, $A_s \in \mathcal{M}_0$ для любого $s \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $\rho_1(A_s) \in \mathbb{R}$, $A_s^* = A_s$.

3.37. Предложение. *Если ρ — неотрицательный право- и лево-$\mathbb{K}$-линейный функционал на C^*-алгебре $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K}$, то $|\rho(B^*A)|^2 \leqslant \rho(A^*A)\rho(B^*B)$ для любых $A, B \in \mathcal{C}$.*

Доказательство. Если $A \in \mathcal{C}$, то $A^*A \in \mathcal{C}^+$, и следовательно, $\rho(A^*A) \geqslant 0$. Уравнение $\langle A, B\rangle := \rho(A^*B)$ для любых $A, B \in \mathcal{C}$ определяет скалярное произведение (может быть без свойства 2) из определения 2.16). Тогда утверждение предложения следует из неравенства Коши—Шварца—Буняковского для скалярного произведения $\langle A, B\rangle$ на $\mathcal{C}$. Поэтому остается доказать неравенство Коши—Шварца—Буняковского для векторного пространства X над $\mathbb{K}$ с функцией $\langle x, y\rangle$, удовлетворяющей условиям 2.16 1), 3)–7) для любых $x, y \in X$.

Из условий 2.16 1), 3)–7) следует, что $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{p,q} \langle x_p, y_q\rangle i_p^* i_q$. Поэтому, в силу альтернативности алгебры $\mathbb{K}$, выполняется тождество $\langle xa, xa\rangle = \langle x, x\rangle$ для любых $x \in X$ и $a \in \mathbb{K}$ с $|a| = 1$. С другой стороны, для данных $x, y \in X$ существует $a \in \mathbb{K}$ с $|a| = 1$ такой, что $\langle xa, y\rangle = |\langle x, y\rangle| \in [0, \infty)$. Тогда без потери общности можно предполагать, что $\langle x, y\rangle \geqslant 0$. Если $\langle x, y\rangle = 0$, то неравенство $|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ тривиально. Рассмотрим случай $\langle x, y\rangle > 0$ и функцию $f(b) := \langle xb + y, xb + y\rangle$, где $b \in \mathbb{R}$. В силу свойств 2.16 1), 3)–7), $f(b) = b^2\langle x, x\rangle + 2b\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$ при $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$. Поскольку $\langle z, z\rangle \geqslant 0$ для любого $z \in X$, то эта функция f неотрицательна для любых действительных чисел b тогда и только тогда, когда дискриминант неположителен, т.е. $\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqslant 0$. Таким образом, $|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ для любых $x, y \in X$. □

3.38. Теорема. *Если $\mathcal{M}$ — самосопряженное подпространство над $\mathbb{K}$ в C^*-алгебре $\mathcal{C}$ и $I \in \mathcal{M}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, то лево- и право-$\mathbb{K}$-линейный функционал ρ неотрицателен тогда и только тогда, когда ρ ограничен и $\|\rho\| = \rho(I)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что ρ неотрицателен, следовательно, он эрмитов. В силу правой и левой $\mathbb{K}$-линейности функционала, существует $a \in \mathbb{K}$ такой, что $a\rho(A) \geqslant 0$. Пусть

$H = \mathrm{Re}(aA) := (aA)_0 \in \mathcal{C}_0$. Тогда

$$\|H\| \leqslant \|A\|, \quad H \leqslant \|H\|I \leqslant \|A\|I, \quad \|A\|\rho(I) - \rho(H) = \rho(\|A\|I - H) \geqslant 0,$$

поэтому

$$|\rho(A)| = \rho(aA) = (\rho(aA))\tilde{} = \rho(A^*\tilde{a}) = \rho((aA + A^*\tilde{a})/2) = \rho(H) \leqslant \rho(I)\|A\|.$$

Это показывает, что ρ ограничен и $\|\rho\| \leqslant \rho(I)$. Обратное неравенство очевидно.

Обратно, предположим, что ρ ограничен и $\|\rho\| = \rho(I)$. Достаточно рассмотреть случай, где $\|\rho\| = \rho(I) = 1$. Для $A \in \mathcal{M}^+$ рассмотрим $\rho(A) = a + Mb$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $M + \tilde{M} = 0$, $M \in \mathbb{K}$, $|M| = 1$. Надо проверить, что $a \geqslant 0$ и $b = 0$. Для малого положительного числа c имеется включение $\mathrm{sp}(I - cA) = \{1 - ct : t \in \mathrm{sp}(A)\} \subset [0, 1]$, так как $\mathrm{sp}(A) \subset [0, \infty)$. Поэтому

$$\|I - cA\| = r(I - cA) \leqslant 1, \quad 1 - ca \leqslant |1 - c(a + Mb)| = |\rho(I - cA)| \leqslant 1.$$

Значит, $a \geqslant 0$. Рассмотрим $B_n := A - aI + MnbI$ для любого натурального числа $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\|B_n\|^2 = \|B_n^* B_n\| = \|(A - aI)^2 + n^2 b^2 I\| \leqslant \|A - aI\|^2 + n^2 b^2,$$

следовательно,

$$(n^2 + 2n + 1)b^2 = |\rho(B_n)|^2 \leqslant \|A - aI\|^2 + n^2 b^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому $b = 0$. □

3.39. Замечание. В силу теоремы 3.38, право- и лево-$\mathbb{K}$-линейные состояния ρ образуют множество $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, содержащееся в сфере единичного радиуса с центром в нуле в двойственном пространстве $\mathcal{M}^*$ всех право- и лево-$\mathbb{K}$-линейных функционалов. При этом $\mathcal{M}^*$ является $\mathbb{R}$-линейным пространством. Базу слабой* топологии в $\mathcal{M}^*$ образуют подмножества вида

$$W_c(\eta; A_1, \ldots, A_n) := \Big\{ |\rho(A_p) - \eta(A_p)| < c,\ p = 1, \ldots, n \Big\},$$

где $c > 0$, $\eta \in \mathcal{M}^*$. Относительно слабой* топологии $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ — компактное топологическое тихоновское пространство, причем $\mathbb{R}$-выпуклое, так как

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \Big\{ \rho \in \mathcal{M}^* : \rho(I) = 1,\ \rho(A) \geqslant 0\ \forall A \in \mathcal{M}^+ \Big\},$$

а $B(\mathbb{K}, 0, 1)^{\omega_0}$ компактно в тихоновской топологии произведения, где $B(\mathbb{K}, z, r)$ — шар в $\mathbb{K}$ радиуса r с центром в z, ω_0 — первый счетный ординал.

3.40. Теорема. *Если $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, то $\mathcal{M}$ — самосопряженное подпространство над $\mathbb{K}$ в $\mathcal{C}$ с единицей $I \in \mathcal{M}$. Если $A \in \mathcal{M}$, $a \in \mathrm{sp}(A)$, то существует право- и лево-$\mathbb{K}$-линейное состояние ρ на $\mathcal{M}$ такое, что $\rho(A) = a$.*

Доказательство. Для любых $b, c, q \in \mathbb{K}$ выполняются включения $ab + c \in \mathrm{sp}(Ab + cI)$, $qa + c \in \mathrm{sp}(qA + cI)$. Следовательно,

$$|ab + c| \leqslant \|Ab + cI\|, \quad |qa + c| \leqslant \|qA + cI\|.$$

Тогда уравнения $\rho^0(Ab + cI) = ab + c$ и $\rho^0(qA + cI) = qa + c$ однозначно определяют право- и лево-$\mathbb{K}$-линейный функционал ρ^0 на $\mathbb{K}$-векторном подпространстве Y над $\mathbb{K}$, порожденном векторами вида $\{qA + cI, Ab + cI : b, c, q \in \mathbb{K}\}$, $\rho^0(A) = a$, $\rho^0(I) = 1$, $\|\rho^0\| = 1$. В силу леммы 3.33 и замечания 3.36, функционал ρ_0^0 на $\mathcal{M}_0$ однозначно восстанавливается из право- и лево-$\mathbb{K}$-линейного функционала ρ^0 на $\mathcal{M}$. С другой стороны, функционал ρ_0^0 является действительнозначным и $\mathbb{R}$-линейным на $\mathbb{R}$-линейном пространстве Y_0. По теореме Хана—Банаха функционал ρ_0^0 продолжается до $\mathbb{R}$-линейного функционала ρ_0 с Y_0 на $\mathcal{M}_0$. Следовательно, искомое право- и лево-$\mathbb{K}$-линейное состояние ρ на $\mathcal{M}$ существует. □

3.41. Теорема. *Пусть $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ с единицей $I \in \mathcal{C}$, $\mathcal{M}$ — самосопряженное подпространство в $\mathcal{C}$, $I \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{M}$.*

(i) *Если $\rho(A) = 0$ для любого право- и лево-$\mathbb{K}$-линейного состояния ρ на $\mathcal{M}$, то $A = 0$.*
(ii) *Если $\rho(A) \in \mathbb{R}$ для любого право- и лево-$\mathbb{K}$-линейного состояния ρ на $\mathcal{M}$, то $A = A^*$.*
(iii) *Если $\rho(A) \geqslant 0$ для любого право- и лево-$\mathbb{K}$-линейного состояния ρ на $\mathcal{M}$, то $A \in \mathcal{M}^+$.*

(iv) *Если A — нормальный элемент из $\mathcal{M}$, то существует право- и лево-$\mathbb{K}$-линейное состояние ρ на $\mathcal{M}$ такое, что $|\rho(A)| = \|A\|$.*

Доказательство. (i) В силу теоремы 3.40, $\mathrm{sp}(A) = \{0\}$, если A самосопряжен и $\rho(A) = 0$ для любого состояния ρ на $\mathcal{M}$. Для произвольного A воспользуемся разложением $A = \sum\limits_{s=0}^{m} A_s i_s$, где каждый элемент A_s самосопряжен. Тогда $\rho(A) = \sum\limits_{s=0}^{m} \rho(A_s) i_s$ и $\rho(A_s) \in \mathbb{R}$ для любого s, но тогда $\rho(A_s) = 0$ для любого s. Также, в силу начала доказательства, $A_s = 0$ для любого s, следовательно, $A = 0$.

(ii) Если $\rho(A) \in \mathbb{R}$ для любого состояния ρ на $\mathcal{M}$, то $\rho(A - A^*) = \rho(A) - (\rho(A))\tilde{} = 0$, т.е. $A - A^* = 0$.

(iii) Если $\rho(A) \geqslant 0$ для любого состояния ρ на $\mathcal{M}$, то A самосопряжен, в силу п. (ii), а $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$, согласно теореме 3.40. Поэтому, $A \in \mathcal{M}^+$.

(iv) Если A нормален, то $r(A) = \|A\|$, и следовательно, $\mathrm{sp}(A) \ni a$, $|a| = \|A\|$, где $a \in \mathbb{K}$. В силу теоремы 3.40, $a = \rho(A)$ для некоторого состояния ρ на $\mathcal{M}$. Поэтому $|\rho(A)| = \|A\|$. □

3.42. Обозначения. Для подмножества Y в двойственном пространстве $\mathcal{M}^*$ (оно линейно над $\mathbb{R}$) обозначим через

$$\overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}(Y) := \big\{z = ax + by : a + b = 1,\ 0 \leqslant a \leqslant 1,\ 0 \leqslant b \leqslant 1,\ x, y \in Y\big\}$$

замкнутую оболочку для Y над $\mathbb{R}$.

3.43. Лемма. *Предположим, что $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $\mathcal{M}$ — самосопряженное (над $\mathbb{K}$) подпространство в $\mathcal{C}$ с $I \in \mathcal{M}$, $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ — множество всех состояний на $\mathcal{M}$. Если $\|H\| = \sup\{|\rho(H)| : \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{M})\}$ для любого самосопряженного $H \in \mathcal{M}$, то $\overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}\big[(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup -\mathcal{L}(\mathcal{M})\big]$ — набор всех эрмитовых право- и лево-$\mathbb{K}$-линейных функционалов в двойственном пространстве $\mathcal{M}^*$.*

Доказательство. Для любого $\mathbb{K}$-линейного эрмитова функционала ρ выполняются равенства

$$\rho((bA)^*) = \rho(A^*\tilde{b}) = \rho(A^*)\tilde{b} = (\rho(A))\tilde{}\,\tilde{b} = (b\rho(A))\tilde{}$$

для любых $A \in \mathcal{M}$ и $b \in \mathbb{K}$. Поскольку ρ еще и аддитивен, то его эрмитовость сохраняется при взятии $\mathbb{K}$-линейных комбинаций элементов из $\mathcal{M}$. Эрмитовы фукнкционалы образуют $\mathbb{R}$-линейное пространство, причем каждый эрмитов право- и лево-$\mathbb{K}$-линейный функционал однозначно восстанавливается по своей части ρ_0 в разложении (см. лемму 3.33 и замечание 3.36). Множество всех эрмитовых функционалов в единичном шаре с центром в нуле в $\mathcal{M}^*$ выпукло над $\mathbb{R}$, слабо* замкнуто и содержит в себе $(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup -\mathcal{L}(\mathcal{M})$. Поэтому оно содержит в себе также $\overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}[(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup -\mathcal{L}(\mathcal{M})]$.

Предположим, что существует эрмитов право- и лево-$\mathbb{K}$-линейный функционал $\rho^0 \notin \overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}\big[(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup -\mathcal{L}(\mathcal{M})\big]$ с $\|\rho^0\| \leqslant 1$. Применим теорему Хана—Банаха к действительнозначным частям ρ_0 эрмитовых функционалов ρ. Тогда слабо непрерывные право- и лево-$\mathbb{K}$-линейные функционалы на $\mathcal{M}^*$ возникают из элементов, принадлеэащих $\mathcal{M}$, так как достаточно рассмотреть $\mathcal{M}_0^*$ и $\mathcal{M}_0$ для таких функционалов. Существуют $A \in \mathcal{M}$ и $b \in \mathbb{R}$, для которых $\mathrm{Re}\,\rho^0(A) > b$, $\mathrm{Re}\,\rho(A) < b$ для $\rho \in \overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}\big[(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup -\mathcal{L}(\mathcal{M})\big]$. Для любого эрмитова $\mathbb{K}$-линейного функционала ρ и действительной части H элемента $A \in \mathcal{M}$ выполняется равенство

$$\rho(H) = \frac{[\rho(A) + \rho(A^*)]}{2} = \mathrm{Re}\,\rho(A).$$

Поэтому $\rho^0(A) > b$, $\rho(H) \leqslant b$ для $\rho \in \overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}\big[(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup -\mathcal{L}(\mathcal{M})\big]$. Таким образом, $|\rho(H)| \leqslant b$ для $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ и

$$b < \rho^0(H) \leqslant \|H\| = \sup\big\{|\rho(H)| : \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{M})\big\} \leqslant b,$$

что приводит к противоречию. □

3.44. Лемма. *Пусть $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $\mathcal{M}$ — $\mathbb{K}$-векторное подпространство в $\mathcal{C}$. Тогда $\mathcal{M}$ самосопряжено.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{M}$ является векторным пространством над $\mathbb{K}$, то оно имеет разложение в прямую сумму $\mathcal{M} = \sum\limits_{p=0}^{m} \mathcal{M}_p i_p$, где $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ — попарно изоморфные пространства над $\mathbb{R}$ для различных p и q, $\{i_0, \dots, i_m\}$ — множество стандартных генераторов алгебры $\mathbb{K}$. При этом $A \in \mathcal{M}$ раскладывается в сумму $A = \sum\limits_{p=0}^{m} A_p i_p$, где каждый элемент A_p эрмитов. В силу теоремы 3.22(ii), подалгебра над $\mathbb{K}$, порожденная элементом A_p, изоморфна $C(\mathrm{sp}(A_p), \mathbb{K})$. При этом $\mathrm{sp}(A_p) \subset \mathbb{R}$. Но каждая вещественнозначная функция f_s на $\mathrm{sp}(A_p)$ коммутирует с i_q для любого q, следовательно, A_p коммутирует со всеми генераторами i_q. Поскольку

$$A^* = A_0 - \sum_{p=1}^{m} i_p A_p = A_0 - \sum_{p=1}^{m} A_p i_p,$$

то

$$A^* = (m-1)^{-1}\Big\{ - A + \sum_{p=1}^{m} i_p (A i_p^*\Big\},$$

где $m = 3$ для $\mathbb{H}$ и $m = 7$ для $\mathbb{O}$. □

3.45. Теорема. *Если $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $\mathcal{M}$ — $\mathbb{K}$-векторное подпространство в $\mathcal{C}$, $I \in \mathcal{M}$, то каждый эрмитов право- и лево-$\mathbb{K}$-линейный функционал ρ на $\mathcal{M}$ можно представить в виде $\rho = \rho^+ - \rho^-$, где ρ^+ и ρ^- — неотрицательные право- и лево-$\mathbb{K}$-линейные функционалы на $\mathcal{M}$ и $\|\rho\| = \|\rho^+\| + \|\rho^-\|$. Если $\mathcal{M} = \mathcal{C}$, то эти условия определяют ρ^+ и ρ^- однозначно.*

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что $\|\rho\| = 1$. В силу леммы 3.44, множество $\mathcal{M}$ самосопряжено, т.е. $A^* \in \mathcal{M}$ для любого $A \in \mathcal{M}$. В силу теоремы 3.41, $\|A\| = \sup\big\{|\eta(A)| : \eta \in \mathcal{L}(\mathcal{M})\big\}$ для любого $A = A^* \in \mathcal{M}$, так как $\|\eta\| = 1$ для любого $\eta \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Согласно лемме 3.43, $\rho \in \overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}\big[(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup -\mathcal{L}(\mathcal{M})\big]$. С другой стороны, подмножество

$$F := \Big\{a\xi - b\eta : \xi, \eta \in \mathcal{L}(\mathcal{M}),\ a, b \in [0, \infty),\ a + b = 1\Big\}$$

выпукло и содержится в $\overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}\big[(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup -\mathcal{L}(\mathcal{M})\big]$. При этом $F \supset \big[(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup -\mathcal{L}(\mathcal{M})\big]$. Более того, F слабо* компактно, так как является непрерывным образом для $[\mathcal{L}(\mathcal{M})]^2 \times [0,1]$ относительно отображения $(\eta, \xi, a) \mapsto a\eta - (1-a)\xi \in \mathcal{M}^*$. Поэтому $F = \overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}\big[(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup -\mathcal{L}(\mathcal{M})\big]$. Таким образом, $\rho = a\eta - b\xi$ для некоторых $\eta, \xi \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, $a, b \in [0,1]$, $a + b = 1$. Тогда возьмем $\rho^+ = a\eta$ и $\rho^- = b\xi$, следовательно,

$$\|\rho^+\| + \|\rho^-\| = a + b = 1 = \|\rho\|.$$

Пусть теперь $\mathcal{M} = \mathcal{C}$. Докажем единственность разложения $\rho = \eta - \xi = \eta' - \xi'$ с неотрицательными право- и лево-$\mathbb{K}$-линейными функционалами. Для даннного $\varepsilon > 0$ выберем самосопряженный элемент $H \in \mathcal{C}$, для которого $\rho(H) > \|\rho\| - \varepsilon^2/2$. Пусть $B = (I - H)/2$. Тогда

$$0 \leqslant B \leqslant I, \quad \eta(I) + \xi(I) = \|\eta\| + \|\xi\| = \|\rho\| < \rho(H) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} = \eta(H) - \xi(H) + \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \eta(I - H) + \nu(I - H) < \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \eta(B) + \xi(I - B) < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Поскольку функционалы η и ξ неотрицательны, а $B, I - B \in \mathcal{C}^+$, то

$$0 \leqslant \eta(B) < \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad 0 \leqslant \xi(I - B) < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Для $A \in \mathcal{C}$ неравенство Коши—Шварца—Буняковского (см. предложение 3.37) дает

$$|\eta(BA)|^2 = |\eta(B^{1/2}(B^{1/2}A))|^2 \leqslant \eta(B)\eta((A^*B^{1/2})(B^{1/2}A)) \leqslant \frac{\varepsilon^2\|A\|^2}{4},$$

$$|\xi((I - B)A)|^2 = \xi(I - B)\xi((A^*(I - B)^{1/2})((I - B)^{1/2}A)) \leqslant \frac{\varepsilon^2\|A\|^2}{4}.$$

Из этих неравенств и аналогичных рассуждений для η' и ξ' получим

$$|\eta(BA)| \leqslant \frac{\varepsilon\|A\|}{2}, \quad |\eta'(BA)| \leqslant \frac{\varepsilon\|A\|}{2}, \quad |\xi((I-B)A)| \leqslant \frac{\varepsilon\|A\|}{2}, \quad |\xi'((I-B)A)| \leqslant \frac{\varepsilon\|A\|}{2}.$$

Из соотношения $\eta - \eta' = \xi - \xi'$ следует, что

$$\eta(A) - \eta'(A) = \eta(BA) - \eta'(BA) + \xi((I-B)A) - \xi'((I-B)A)$$

и поэтому $|\eta(A) - \eta'(A)| < 2\varepsilon\|A\|$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, отсюда вытекает, что $\eta = \eta'$, а тогда и $\xi = \xi'$. □

3.46. Следствие. *Если $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $\mathcal{M}$ — $\mathbb{K}$-векторное подпространство в $\mathcal{M}$, $I \in \mathcal{M}$, то каждый ограниченный квазилинейный функционал является $\mathbb{K}$-линейной комбинацией самое большее n состояний на $\mathcal{M}$, где $n = 8$ для $\mathbb{H}$, $n = 16$ для $\mathbb{O}$.*

Доказательство. Каждый ограниченный квазилинейный функционал ρ на $\mathcal{M}$ имеет вид $\rho = \sum\limits_{p=0}^{m} \rho_p i_p$, где $\rho_p(A) \in \mathbb{R}$ и $\rho_p(A^*) = \rho_p(A)$ для любых $A \in \mathcal{M}$ и $p = 0, 1, \ldots, m$. Но, в силу теоремы 3.45, каждый функционал ρ_p является вещественной линейной комбинацией двух состояний на $\mathcal{M}$. □

3.47. Замечание. Поскольку пространство состояний $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ выпукло над $\mathbb{R}$ и слабо* компактно, то по теореме Крейна—Мильмана $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ совпадает с замыканием выпуклой над $\mathbb{R}$ оболочки $\overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}(\mathcal{M})$ множества $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ всех своих крайних точек. Элементы из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ называются чистыми состояниями для $\mathcal{M}$, а слабое* замыкание $\mathrm{cl}(\mathcal{P}(\mathcal{M}))$ называется пространством чистых состояний для $\mathcal{M}$. В общем случае $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ не замкнуто в $\mathcal{M}^*$, и множество чистых состояний содержитт состояния, которые не являются чистыми.

3.48. Теорема. *Предположим, что $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ с единицей $I \in \mathcal{C}$, $\mathcal{M}$ — $\mathbb{K}$-векторное подпространство в $\mathcal{C}$, $I \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{M}$. Тогда справедливы следующие соотношения*:

(i) *Если $\rho(A) = 0$ для любого чистого состояния ρ на $\mathcal{M}$, то $A = 0$.*
(ii) *Если $\rho(A) \in \mathbb{R}$ для любого чистого состояния ρ для $\mathcal{M}$, то $A = 0$.*
(iii) *Если $\rho(A) \geqslant 0$ для любого чистого состояния ρ для $\mathcal{M}$, то $A \in \mathcal{M}^+$.*
(iv) *Если A — нормальный элемент, то существует чистое состояние ρ^0 такое, что $|\rho^0(A)| = \|A\|$.*

Доказательство. (i)–(iii) вытекают из теоремы 3.41, так как каждое состояние является слабым* пределом выпуклых комбинаций чистых состояний. В силу леммы 3.44, множество $\mathcal{M}$ самосопряжено. Пусть теперь A — нормальный элемент, тогда по теореме 3.41 существуют константа $b \in \mathbb{K}$ и состояние η для $\mathcal{M}$ такие, что $\eta(A) = b$, $|b| = \|A\|$. Пусть теперь $\hat{T}$ — слабо* непрерывный право- и лево-$\mathbb{K}$-линейный функционал на $\mathcal{M}^*$ такой, что $\rho(T) =: \hat{T}(\rho)$, $a \in \mathbb{K}$, $|a| = 1$ и $\eta(aA) = |b| = \|A\|$. Известно, что если X — непустое компактное подмножество в локально выпуклом над $\mathbb{R}$ пространстве Y, а ρ_0 — непрерывный $\mathbb{R}$-линейный функционал на Y, то существует крайняя точка x_0 в X такая, что $\rho_0(x) \leqslant \rho_0(x_0)$ для любого $x \in X$. Поэтому существует $\rho^0 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ такой, что

$$\|A\| \geqslant |\rho^0(A)| \geqslant \mathrm{Re}(aA)\hat{}(\rho^0) \geqslant \sup\{\mathrm{Re}(aA)\hat{}(\rho) : \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{M})\} \geqslant \mathrm{Re}(aA)\hat{}(\eta) = \mathrm{Re}\,\eta(aA) = \|A\|.$$

Теорема доказана. □

3.49. Теорема. *Если $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $I \in \mathcal{C}$, $\mathcal{M}$ — $\mathbb{K}$-линейное подпространство в $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}(\mathcal{M})$, то следующие четыре условия эквивалентны*:

(i) *если $A \in \mathcal{M}$ и $\rho(A) \geqslant 0$ для любого $\rho \in \mathcal{L}_0$, то $A \in \mathcal{M}^+$;*
(ii) *$\|H\| = \sup\{|\rho(H)| : \rho \in \mathcal{L}_0\}$ для любого самосопряженного элемента H из $\mathcal{M}$;*
(iii) *$\overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}_0) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$;*
(iv) *$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ содержится в слабом* замыкании $\mathrm{cl}(\mathcal{L}_0)$ в $\mathcal{M}^*$.*

Доказательство. В силу леммы 3.44, множество $\mathcal{M}$ самосопряжено. Если $H = H^* \in \mathcal{M}$, то определим $b \leqslant \|H\|$ по формуле $b = \sup\{|\rho(H)| : \rho \in \mathcal{L}_0\}$ и отметим, что $\rho(bI + cH) = b + c\rho(H) \geqslant 0$ для $c = 1$ и $c = -1$ и любого $\rho \in \mathcal{L}_0$. Если это выполнено, то $bI + cH \in \mathcal{M}^+$, $-bI \leqslant H \leqslant bI$, следовательно, $\|H\| \leqslant b$, поэтому $b = \|H\|$, т.е. из (i) следует (ii). В силу леммы 3.43 и теоремы 3.45, из (ii) следует (iii), а из теоремы 3.48 вытекает импликация (iv) $\Longrightarrow$ (i). □

3.50. Следствие. *Если H — самосопряженный оператор, действующий на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, то $\|H\| = \sup\{|\langle Hx, x\rangle| : x \in X, \|x\| = 1\}$. Если $\mathcal{M}$ — $\mathbb{K}$-векторное подпространство в $L_q(X)$, содержащее I, и $\mathcal{L}_0$ — множество всех векторных состояний на $\mathcal{M}$, то $\mathcal{P}(\mathcal{M}) \subset \mathrm{cl}(\mathcal{L}_0)$ и $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}_0)$.*

Доказательство. В силу леммы 3.44, множество $\mathcal{M}$ самосопряжено. Если $A \in \mathcal{M}$ и $\rho(A) \geqslant 0$ для любого $\rho \in \mathcal{L}_0$, то $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ для любого $x \in X$ и, таким образом, $A \in \mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap L_q(X)^+$, в силу теоремы 3.30. Тогда, согласно теореме 3.49, $\overline{\mathrm{co}}_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}_0) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$, $\mathcal{P}(\mathcal{M}) \subset \mathrm{cl}(\mathcal{L}_0)$ и

$$\|H\| = \sup\Big\{|\rho(H)| : \rho \in \mathcal{L}_0\Big\} = \sup\Big\{|\langle Hx, x\rangle| : x \in X, \|x\| = 1\Big\}$$

для любого самосопряженного элемента H из $\mathcal{M}$. □

3.51. Определения и замечания. Пусть $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра, а X — гильбертово пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Тогда $*$-гомоморфизм $\phi : \mathcal{C} \to L_q(X)$ называется представлением C^*-алгебры $\mathcal{C}$ на гильбертовом пространстве X. Если дополнительно $*$-гомоморфизм ϕ взаимно однозначен, т.е. является $*$-изоморфизмом, то он называется точным представлением.

В силу нашего соглашения о $*$-гомоморфизмах, $\phi(I) = I$ сохраняет единицы алгебр, поэтому из теоремы 3.22 следует, что $\|\phi(A)\| \leqslant \|A\|$ для любых $A \in \mathcal{C}$, следовательно, ϕ непрерывно, $\|\phi(A)\| = \|A\|$, если ϕ — точное представление. Рассмотрим множество $\{A \in \mathcal{C} : \phi(A) = 0\}$ — замкнутый двусторонний идеал в $\mathcal{C}$, называемый ядром представления ϕ. Если существует вектор $x \in X$ такой, что $\mathbb{K}$-векторное пространство $\phi(\mathcal{C})x := \{B(x) : B = \phi(A), A \in \mathcal{C}\}$ плотно в X, то представление ϕ называется циклическим, а x называется циклическим вектором (или порождающим вектором) для ϕ.

Из определения $*$-гомоморфизма ϕ следует, что $\phi \in L_r(\mathcal{C}, L_q(X)) \cap L_l(\mathcal{C}, L_q(X))$. Для подмножества V в X обозначим через $[V]$ наименьшее замкнутое $\mathbb{K}$-векторное подпространство в X, содержащее V.

В качестве примера рассмотрим банахово пространство $L^p((S, \mathcal{F}, \hat{\mu}), \mathbb{K})$ всех μ-измеримых функций $f : S \to \mathbb{K}$ с конечной нормой $\|f\|_p < \infty$, где S — множество, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра его подмножеств, $\hat{\mu}$ — σ-конечная мера (которая может быть некоммутативной или неассоциативной (см. определение 2.23)) на $(S, \mathcal{F})$ со значениями в $\mathbb{K}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

$$\|f\|_p^p := \sum_{m,l} \int\limits_S |f_m(x)|^p |\mu_{m,l}|(dx)$$

для $1 \leqslant p < \infty$, $|\mu_{m,l}|$ — вариация действительнозначной меры $\mu_{m,l}$ и

$$\|f\|_\infty := \max_{m,l} \operatorname*{ess\text{-}sup}_{|\mu_{m,l}|} |f_m(x)|.$$

В качестве C^*-алгебры возьмем $L^\infty((S, \mathcal{F}, \hat{\mu}), \mathbb{K})$ с поточечным умножением функций и инволюцией, индуцированной сопряжением в $\mathbb{K}$, а в качестве гильбертова пространства X возьмем $L^2((S, \mathcal{F}, \hat{\mu}), \mathbb{K})$, предполагая, что

$$(f, q) := \sum_{m,l} \tilde{f}_m(x) q_m(x) |\mu_{m,l}|(dx).$$

Тогда каждая функция $f \in L^\infty((S, \mathcal{F}, \hat{\mu}), \mathbb{K})$ порождает оператор $M_f \in L_q(X)$ умножения на функцию f, $M_f(g) := f(x)g(x)$ для любых $g \in X$, $x \in S$. Таким образом, представление $f \mapsto M_f$ является точным.

3.52. Предложение. *Если ρ является право- и лево-$\mathbb{K}$-линейным состоянием C^*-алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, то множество $\mathcal{L}_\rho := \{A\in\mathcal{C} : \rho(A^*A)=0\}$ является замкнутым идеалом в $\mathcal{C}$, а $\rho(B^*A)=0$ для любых $A\in\mathcal{L}_\rho$ и $B\in\mathcal{C}$. При этом существует скалярное произведение $\langle A+\mathcal{L}_\rho, B+\mathcal{L}_\rho\rangle = \rho(B^*A)$ на факторпространстве $\mathcal{C}/\mathcal{L}_\rho$.*

Доказательство. Из доказательства предложения 3.37 следует, что можно задать внутреннее произведение $\langle A,B\rangle_0 := \rho(A^*B)$ для любых $A,B\in\mathcal{C}$, причем $\mathcal{L}_\rho=\{A\in\mathcal{C} : \langle A,A\rangle_0=0\}$, так как функционал ρ положителен, а значит, и эрмитов. Тогда $\mathcal{L}_\rho$ является $\mathbb{K}$-линейным подпространством в $\mathcal{C}$, и уравнение

$$\langle A+\mathcal{L}_\rho, B+\mathcal{L}_\rho\rangle = \langle A,B\rangle_0 = \rho(A^*B)$$

определяет скалярное произведение на $\mathcal{C}/\mathcal{L}_\rho$. Если $A\in\mathcal{L}_\rho$, $B\in\mathcal{C}$, то, в силу доказанного в предложении 3.37 аналога неравенства Коши—Шварца—Буняковского над $\mathbb{K}$ (вместо $\mathbb{C}$),

$$|\rho(B^*A)|^2 \leqslant \rho(B^*B)\rho(A^*A)=0,$$

следовательно, $\rho(B^*A)=0$. Элемент B^*B самосопряжен, поэтому, согласно теоремам 2.22 и 2.31, он коммутирует с каждым генератором i_p алгебры $\mathbb{K}$. Каждый элемент $A\in\mathcal{C}$ имеет разложение $A=\sum\limits_p i_pA_p$, где каждый A_p самосопряжен. Тогда

$$((B^*B)A)^*A = (BA)^*(BA),$$

в силу альтернативности алгебры $\mathbb{K}$, следовательно,

$$\rho((BA)^*(BA)) = \rho(((B^*B)A)^*A)=0$$

для $A\in\mathcal{L}_\rho$ и $B\in\mathcal{C}$, т.е. $BA\in\mathcal{L}_\rho$. Таким образом, $\mathcal{L}_\rho$ является замкнутым левым идеалом в $\mathcal{C}$, так как функционал ρ непрерывен. □

Назовем идеал $\mathcal{L}_\rho$ левым ядром функционала ρ.

3.53. Теорема. *Если ρ — лево- и право-$\mathbb{K}$-линейное состояние C^*-алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, то существует циклическое лево- и право-$\mathbb{K}$-линейное представление π_ρ алгебры $\mathcal{C}$ на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}$, и существует единичный циклический вектор x_ρ для π_ρ такой, что $\rho = w_{x_\rho}\circ\pi_\rho$, т.е. $\rho(A)=\langle\pi_\rho(A)x_\rho, x_\rho\rangle$ для любых $A\in\mathcal{C}$.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{L}_\rho=\rho^{-1}(0)$ — ядро функционала ρ. Тогда $\mathcal{C}/\mathcal{L}_\rho$ — предгильбертово пространство над $\mathbb{K}$ относительно внутреннего произведения $\langle A+\mathcal{L}_\rho, B+\mathcal{L}_\rho\rangle=\rho(B^*A)$, $A,B\in\mathcal{C}$, в силу предложения 3.52. Его пополнение является гильбертовым пространством $X=X_\rho$. Поскольку X — векторное пространство над $\mathbb{K}$, то для любого вектора $x\in X$ существует вектор $x_0\in X_0$ такой, что множества $\mathbb{K}x$ и $x\mathbb{K}$ совпадают и множества $\mathbb{K}x_0$ и $x_0\mathbb{K}$ совпадают. При этом $ax_0=x_0a$ для любого $a\in\mathbb{K}$, где $X=X_0\oplus i_1X_1\oplus\cdots\oplus i_mX_m$, $X_0,\ldots,X_m$ — гильбертовы пространства над $\mathbb{R}$, X_p изоморфно X_0 для любого p, $m=3$ для $\mathbb{H}$, $m=7$ для $\mathbb{O}$. Поэтому без ограничения общности можно выбрать $x_\rho\in X_0$.

Если $A,B_1,B_2\in\mathcal{C}$ и $B_1+\mathcal{L}_\rho=B_2+\mathcal{L}_\rho$, то $B_1-B_2\in\mathcal{L}_\rho$ и $AB_1-AB_2\in\mathcal{L}_\rho$, так как $\mathcal{L}_\rho$ — левый идеал в $\mathcal{C}$. Тогда уравнение $\pi(A)(B+\mathcal{L}_\rho)=AB+\mathcal{L}_\rho$ определяет единственный оператор $\pi(A)$, действующий на предгильбертовом пространстве $\mathcal{C}/\mathcal{L}_\rho$. При этом

$$\pi(a_1A_1+a_2A_2)=a_1\pi(A_1)+a_2\pi(A_2),$$

т.е. $\pi(A)$ лево-$\mathbb{K}$-линеен по A,

$$\pi(A)(B_1b_1+B_2b_2)=\pi(A)(B_1b_1)+\pi(A)(B_2b_2)$$

для любых $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{K}$, $A_1,A_2,B_1,B_2\in\mathcal{C}$, т.е. $\pi(A)B$ право-$\mathbb{K}$-линеен по переменной B в случае $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ и право-$\mathbb{K}$-альтернативен в случае $\mathbb{K}=\mathbb{O}$. Воспользуемся разложением $\mathcal{C}=\mathcal{C}_0\oplus i_1\mathcal{C}_1\oplus\cdots\oplus i_m\mathcal{C}_m$, где каждый элемент $G\in\mathcal{C}_p$ самосопряжен для любого $p=0,1,\ldots,m$, такой, что G коммутирует с каждым генератором i_q алгебры $\mathbb{K}$ (см. также доказательство предложения 3.52). В силу альтернативности алгебры $\mathbb{O}$, выполняется равенство $\rho(C^*C)=0$ для $C:=A(Bb)-(AB)b$ для любых $A,B\in\mathcal{C}$ и $b\in\mathbb{O}$. Следовательно, $A(Bb)-(AB)b\in\mathcal{L}_\rho$, т.е. $\pi(A)B$ индуцирует по B право-$\mathbb{O}$-линейный оператор на X над $\mathbb{O}$ так же, как и над $\mathbb{H}$. Рассмотрим теперь три произвольных

элемента $A, B, F \in \mathcal{C}$ и положим $C = (AB)F - A(BF)$. Тогда, в силу альтернативности алгебры $\mathbb{O}$ и упомянутого выше разложения алгебры $\mathcal{C}$, выполняется тождество $\rho(C^*C) =)$, т.е. $C \in \mathcal{L}_\rho$. В случае алгебры $\mathcal{C}$ над телом $\mathbb{H}$ из ассоциативности $\mathbb{H}$ следует, что $C = 0$. Следовательно, для $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ элемент A индуцирует мультипликативный оператор $\pi(A)$ на X, т.е. $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$, так как $(AB)F - A(BF) \in \mathcal{L}_\rho$. Применим это также к элементу $C = (AB)^*F - B^*(A^*F)$ для алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{O}$, тогда

$$\langle \pi_\rho(A)(B + \mathcal{L}_\rho), C + \mathcal{L}_\rho\rangle = \langle AB + \mathcal{L}_\rho, C + \mathcal{L}_\rho\rangle = \rho((AB)^*C) =$$
$$= \rho(B^*(A^*C)) = \langle B + \mathcal{L}_\rho, A^C + \mathcal{L}_\rho\rangle = \langle B + \mathcal{L}_\rho, \pi_\rho(A^*)(C + \mathcal{L}_\rho)\rangle,$$

в силу предложения 3.37. Для алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{H}$ рассмотрим нулевой элемент $C = 0$. Тождество

$$\langle \pi_\rho(A)(B + \mathcal{L}_\rho), C + \mathcal{L}_\rho\rangle = \langle B + \mathcal{L}_\rho, \pi_\rho(A^*)(C + \mathcal{L}_\rho)\rangle$$

выполнено также и в этом случае. Следовательно, $\pi(A^*) = (\pi(A))^*$ на X.

Тогда $\|A\|^2 I - A^*A = \|A^*A\|I - A^*A \in \mathcal{C}^+$, следовательно, $B^*((\|A\|^2 I - A^*A)B) \in \mathcal{C}^+$, поэтому

$$\|A\|^2\|B + \mathcal{L}_\rho\|^2 - \|\pi(A)(B + \mathcal{L}_\rho\|^2 = \|A\|^2\rho(B^*B) - \rho(B^*((A^*A)B)) = \rho(B^*((\|A\|^2 I - A^*A)B)) \geqslant 0$$

для любых $A, B \in \mathcal{C}$. Следовательно, $\pi(A)$ ограничен, $\|\pi(A)\| \leqslant \|A\|$, и $\pi(A)$ продолжается по непрерывности до ограниченного право-$\mathbb{K}$-линейного оператора $\pi(A)$, действующего на X. Поскольку $\pi(I) = I$ на $\mathcal{C}/\mathcal{L}_\rho$, то $\pi_\rho(I) = I$ на X_ρ. Таким образом, представление π_ρ лево- и право-$\mathbb{K}$-линейно на X, т.е.

$$\pi(a_1A_1 + a_2A_2)x = a_1(\pi(A_1)x) + a_2(\pi(A_2)x),$$
$$\pi(A_1a_1 + A_2a_2)x = ((\pi(A_1)a_1)x) + ((\pi(A_2)a_2)x)$$

для любых $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $x \in X$. Рассмотрим $x_\rho := I + \mathcal{L}_\rho$. Очевидно, что $x_\rho \in X_0$. Тогда

$$\pi_\rho(A)x_\rho = \pi_\rho(A)(I + \mathcal{L}_\rho) = A + \mathcal{L}_\rho,$$

где $A \in \mathcal{C}$, следовательно, $\pi_\rho(\mathcal{C})x_\rho$ всюду плотно в X, т.е. вектор x_ρ является циклическим. При этом

$$\pi_\rho(A_1a_1 + A_2a_2)(I + \mathcal{L}_\rho) = A_1a_1 + \mathcal{L}_\rho + A_2a_2 + \mathcal{L}_\rho = \pi(A_1)(I + \mathcal{L}_\rho)a_1 + \pi(A_2)(I + \mathcal{L}_\rho)a_2$$

для любых $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$. Более того,

$$\langle \pi_\rho(A)x_\rho, x_\rho\rangle = \langle A + \mathcal{L}_\rho, I + \mathcal{L}_\rho\rangle = \rho(A),$$

где $A \in \mathcal{C}$; в частности, $\|x_\rho\|^2 = \rho(1) = 1$. Таким образом, представление π_ρ лево- и право-$\mathbb{K}$-линейно. Поскольку $x_\rho \in X_0$, то композиция $w_{x_\rho} \circ \pi_\rho$ лево- и право-$\mathbb{K}$-линейна. □

Приведенная выше конструкция является некоммутативным неассоциативным аналогом конструкции C^*-алгебр над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, использованной Гельфандом, Наймарком и Сигалом в частном случае C^*-алгебр над коммутативным ассоциативным полем комплексных чисел.

3.54. Предложение. *Предположим, что ρ является право- и лево-$\mathbb{K}$-линейным состоянием C^*-алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, а π — (право- и лево-$\mathbb{K}$-линейным) циклическим представлением C^*-алгебры $\mathcal{C}$ на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}$ таким, что $\rho = w_x \circ \pi$ для некоторого циклического вектора x для π. Если X_ρ является гильбертовым пространством над $\mathbb{K}$, π_ρ циклическим представлением и x_ρ единичным циклическим вектором, полученным из ρ посредством конструкции, описанной в доказательстве теоремы* 3.53*, то существует право- и лево-$\mathbb{K}$-линейный изоморфизм U из X_ρ на X такой, что $x = U(\pi_\rho(A)U^*)$ для любого $A \in \mathcal{C}$.*

Доказательство. Для любого элемента $A \in \mathcal{C}$ выполняются равенства

$$\|\pi(A)x\|^2 = \langle \pi(A)x, \pi(A)x\rangle = \langle \pi(A^*A)x, x\rangle = \rho(A^*A) = \langle \pi_\rho(A^*A)x_\rho, x_\rho\rangle = \|\pi_\rho(A)x_\rho\|^2.$$

Если $A, B \in \mathcal{C}$ и $\pi_\rho(A)x_\rho = \pi_\rho(B)x_\rho$, то $\pi(A)x = \pi(B)x$. Тогда уравнение $U_0\pi_\rho(A)x_\rho = \pi(A)x$ для любого $A \in \mathcal{C}$ определяет сохраняющий норму оператор U_0 из $\pi_\rho(\mathcal{C})x_\rho$ на $\pi(\mathcal{C})x$, который лево- и право-$\mathbb{K}$-линеен, так как без ограничения общности можно выбрать $x \in X_0$ и $x_\rho \in (X_\rho)_0$ такие, что $bx = xb$ и $bx_\rho = x_\rho b$ для любого $b \in \mathbb{K}$. Поскольку $[\pi_\rho(\mathcal{C})x_\rho] = X_\rho$ и $[\pi(\mathcal{C})x] = X$, где

$[S]$ обозначает замыкание $\mathbb{K}$-линейной оболочки подмножества S в соответствующем $\mathbb{K}$-векторном топологическом пространстве, то U_0 продолжается по непрерывности до изоморфизма U из X_ρ на X, а $Ux_\rho = U_0(\pi_\rho(I)x_\rho) = \pi(I)x = x$. Для $A, B \in \mathcal{C}$ выполняются равенства

$$U(\pi_\rho(A)\pi_\rho(B))x_\rho = U(\pi_\rho(AB)x_\rho) = \pi(AB)x = \pi(A)(\pi(B)x) = \pi(A)(U(\pi_\rho(B)x_\rho)).$$

Поскольку множество векторов вида $\pi_\rho(B)x_\rho$ с произвольными $B \in \mathcal{C}$ образует подмножество, всюду плотное в X_ρ, то $U\pi_\rho(A) = \pi(A)U$, следовательно, $\pi(A) = U(\pi_\rho(A)U^*)$. □

3.55. Замечание и определение. Представления ϕ и ψ (право- и лево-$\mathbb{K}$-линейные) для C^*-алгебры $\mathcal{C}$ на гильбертовых пространствах X и Y называются унитарно эквивалентными, если существует изоморфизм U из X на Y такой, что $\psi(A) = U(\phi(A)U^*)$ для любого $A \in \mathcal{C}$.

Если ρ — право- и лево-$\mathbb{K}$-линейное состояние C^*-алгебры $\mathcal{C}$, π — (право- и лево-$\mathbb{K}$-линейное) циклическое представление для $\mathcal{C}$, $\rho = w_x \circ \pi$ для некоторого единичного циклического вектора x для π, то из предложения 3.54 следует, что π эквивалентно π_ρ, полученному из ρ с помощью конструкции, описанной в доказательстве теоремы 3.53. Более того, изоморфизм U можно выбрать так, чтобы $Ux_\rho = x$.

3.56. Следствие. *Если x — единичный вектор в гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $\mathcal{C}$ — C^*-подалгебра в $L_q(X)$, а ρ — векторное состояние $w_x|_{\mathcal{C}}$ с $x \in X_0$, то представление π_ρ, полученное из ρ посредством конструкции, описанной в доказательстве теоремы* 3.53*, эквивалентно представлению $A \mapsto A|_{[\mathcal{C}x]}$ для $\mathcal{C}$ на гильбертовом пространстве $[\mathcal{C}x]$. Изоморфизм $U : X_\rho \to [\mathcal{C}x]$, который осуществляет эквивалентность, можно выбрать так, чтобы $Ux_\rho = x$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из предложения 3.54, так как x — единичный циклический вектор для представления $\pi : A \mapsto A|_{[\mathcal{C}x]}$, где $\rho = w_x \circ \pi$. □

3.57. Предложение. *Если A — ненулевой элемент C^*-алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, то существует чистое состояние ρ для $\mathcal{C}$ такое, что $\pi_\rho(A) \neq 0$, где π_ρ является представлением, полученным из ρ посредством конструкции, описанной в доказательстве теоремы* 3.53.

Доказательство. В силу теоремы 3.48, существует чистое состояние ρ для $\mathcal{C}$ такое, что $\rho(A) \neq 0$. Это равносильно $\langle \pi_\rho(A)x_\rho, x_\rho\rangle \neq 0$, откуда следует, что $\pi_\rho(A) \neq 0$. □

3.58. Обозначения. Пусть $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $\{X_b : b \in \mathbb{B}\}$ — семейство гильбертовых пространств, а ϕ_b — представление C^*-алгебры $\mathcal{C}$ в гильбертовом пространстве X_b, $b \in \mathbb{B}$, такое, что прямая сумма $\bigoplus\limits_{b\in\mathbb{B}} \phi_b(A)$ является ограниченным линейным оператором, действующим на гильбертовом пространстве $\bigoplus\limits_{b\in\mathbb{B}} X_b$. Отображение $\phi : A \mapsto \bigoplus\limits_b \phi_b(A)$ является представлением $\mathcal{C}$ на $\bigoplus\limits_b X_b$. Назовем представление ϕ прямой суммой семейства $\{\phi_b : b \in \mathbb{B}\}$ представлений $\mathcal{C}$ и обозначим $\phi = \bigoplus\limits_b \phi_b$.

3.59. Теорема. *Каждая C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ имеет точное представление.*

Доказательство. Рассмотрим какое-либо семейство $\mathcal{L}_0$ право- и лево-$\mathbb{K}$-линейных состояний C^*-алгебры $\mathcal{C}$, содержащее все чистые право- и лево-$\mathbb{K}$-линейные состояния. Положим $\phi := \bigoplus\{\pi_\rho : \rho \in \mathcal{L}_0\}$, где π_ρ — состояние, полученное из ρ посредством конструкции, описанной в доказательстве теоремы 3.53. Если $A \in \mathcal{C}$, а $\phi(A) = 0$, то $\pi_\rho(A) = 0$ для любого $\rho \in \mathcal{L}_0$, так как $\phi(A) = \bigoplus\limits_\rho \pi_\rho(A)$, в частности, $\pi_\rho(A) = 0$ для любого чистого состояния ρ C^*-алгебры $\mathcal{C}$. При этом $A = 0$, в силу предложения 3.57, следовательно, ϕ является точным представлением для $\mathcal{C}$. □

3.60. Замечание. Если ϕ — точное представление C^*-алгебры $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}$, то ϕ является изометричным, а $\phi(\mathcal{C})$ является C^*-подалгеброй в $L_q(X)$, в силу теоремы 3.22.

Пусть $\mathcal{L}$ — семейство всех право- и лево-$\mathbb{K}$-линейных состояний C^*-алгебры $\mathcal{C}$. При $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ получается точное представление $F := \bigoplus\limits_{\rho\in\mathcal{C}} \pi_\rho$, которое назовем универсальным представлением

для $\mathcal{C}$. Для $\eta \in \mathcal{L}$ существует вектор x_η в X_η такой, что $\eta = w_{x_\eta} \circ \pi_\eta$ и $\|x_\eta\| = 1$, т.е. $\eta = w_y \circ F$, где $y = \bigoplus\limits_{\rho\in\mathcal{C}} y_\rho$, $y_\eta = x_\eta$, $y_\rho = 0$ при $\rho \neq \eta$. Поскольку отображение $\eta \mapsto \eta \circ F^{-1}$ переводит $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{C})$ в $\mathcal{L}(F(\mathcal{C}))$, где $F(\mathcal{C}) \subset L_q(X_F)$, $X_F := \bigoplus\limits_{\rho\in\mathcal{L}} X_\rho$, то каждое право- и лево-$\mathbb{K}$-линейное состояние для $F(\mathcal{C})$ является векторным состоянием.

3.61. Следствие. *Если $\mathcal{C}$ — C^*-алгебра над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $A \in \mathcal{C}^+$, $B \in \mathcal{C}$, то $B^*(AB) \in \mathcal{C}^+$.*

Доказательство. В силу теорем 3.30, 3.59 и замечания 3.60, существует $A^{1/2} \in \mathcal{C}^+$ такой, что

$$B^*(AB) = (A^{1/2}B)^*(A^{1/2}B),$$

так как

$$\langle B^*(A(B(x))), x\rangle = \langle A(B(x)), B(x)\rangle = \langle Ay, y\rangle \geqslant 0,$$

где $y = B(x) \in X$, $\mathcal{C}$ рассматривается как подалгебра в $L_q(X)$ для гильбертова пространства X над $\mathbb{K}$, $x \in X$. □

3.62. Предложение. *Пусть A и B — самосопряженные элементы C^*-алгебры $\mathcal{C}$.*

(i) *Если $-B \leqslant A \leqslant B$, то $\|A\| \leqslant \|B\|$.*
(ii) *Если $0 \leqslant A \leqslant B$, то $A^{1/2} \leqslant B^{1/2}$.*
(iii) *Если $0 \leqslant A \leqslant B$ и A обратим, то B обратим и $B^{-1} \leqslant A^{-1}$.*

Доказательство. В алгебре $\mathbb{K}$ любой полином имеет корни (см. [15, теорема 3.17]). Утверждение (i) вытекает из неравенств $-\|B\|I \leqslant -B \leqslant A \leqslant B \leqslant \|B\|I$.

(ii), (iii) Если $0 \leqslant A \leqslant B$ и A обратим, то $A \geqslant bI$ для некоторого $b > 0$, так как $\mathrm{sp}(A) \subset [a, \infty)$, где $a > 0$ тогда и только тогда, когда $0 \notin \mathrm{sp}(A)$, т.е. A обратим. При этом

$$0 \leqslant B^{-1/2}(AB^{-1/2}) \leqslant B^{-1/2}(BB^{-1/2}) = I,$$

а $\|B^{-1/2}(AB^{-1/2})\| \leqslant 1$ в силу (i). Таким образом,

$$\|A^{1/2}B^{-1/2}\| = \|(A^{1/2}B^{-1/2})^*(A^{1/2}B^{-1/2})\|^{1/2} = \|B^{-1/2}(AB^{-1/2})\|^{1/2} \leqslant 1, \tag{3.4}$$

поэтому $A^{1/2}(B^{-1}A^{1/2}) \leqslant I$, а $A^{1/2} \leqslant B^{1/4}IB^{1/4} = B^{1/2}$. Следовательно, утверждения (ii), (iii) доказаны для обратимого элемента A. В общем случае для $A, B \in \mathcal{C}$ с $0 \leqslant A \leqslant B$ выполняется неравенство $A + bI \leqslant B + bI$, и $A + bI$ обратим для любого $b > 0$. Тогда

$$(A + bI)^{1/2} \leqslant (B + bI)^{1/2}. \tag{3.5}$$

Возьмем $G \in \mathcal{C}^+$ и определим $f_b \in C(\mathrm{sp}(G), \mathbb{K})$ по формуле $f_b(t) := (t + b)^{1/2}$. Тогда $f_b(G) \in \mathcal{C}^+$ и $(f_b(G))^2 = G + bI$. Таким образом, $(G + bI)^{1/2} = f_b(G)$, а так как $\lim\limits_{b\to 0} f_b(t) = t^{1/2}$ равномерно на $\mathrm{sp}(G)$, то

$$\lim_{b\to 0} \|(G + bI)^{1/2} - G^{1/2}\| = 0.$$

Отсюда, в силу теоремы 3.26, предел при b, стремящемся к нулю, дает, в силу (3.5), что $A^{1/2} \leqslant B^{1/2}$. □

3.63. Предложение. *Если $\mathcal{G}$ — замкнутый левый идеал в C^*-алгебре $\mathcal{C}$, то каждый элемент $S \in \mathcal{G}$ можно представить в виде $S = AB$ с $A \in \mathcal{C}$ и $B \in \mathcal{G} \cap \mathcal{C}^+$.*

Доказательство. Если $F \in \mathcal{G} \cap \mathcal{C}^+$, то $F^{1/2} \in \mathcal{G} \cap \mathcal{C}^+$, так как $\mathcal{G}$ содержит все $p(K)$ для любого $K \in \mathcal{G}$ и любого полинома p с нулевым постоянным членом. Существует последовательность полиномов $\{p_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$, сходящаяся равномерно к $t^{1/2}$ на $\mathrm{sp}(F)$, в силу теоремы Стоуна—Вейерштрасса (см. также [15, § 2.7]). Поскольку $\mathcal{G}$ — замкнутый идеал, то

$$F^{1/2} = \lim_n p_n(F) \in \mathcal{G}.$$

Для $S \in \mathcal{G}$ пусть $H = (S^*S)^{1/2}$ и $B = H^{1/2}$. Тогда $S^*S \in \mathcal{G} \cap \mathcal{C}^+$, и следовательно, $H, B \in \mathcal{G} \cap \mathcal{C}^+$. Зададим элементы $A_n = S(I/n + H)^{-1/2}$, тогда $S = A_n(I/n + H)^{1/2}$, так как H коммутирует с каждым генератором i_p алгебры $\mathbb{K}$, а алгебра $\mathbb{K}$ альтернативна. Поэтому

$$\|A_m - A_n\| = \Big\|S\big[(I/m + H)^{-1/2} - (I/n + H)^{-1/2}\big]\Big\| =$$

$$= \Big\|\big[(I/m + H)^{-1/2} - (I/n + H)^{-1/2}\big]S^*S\big[(I/m + H)^{-1/2} - (I/n + H)^{-1/2}\big]\Big\|^{1/2} =$$

$$= \Big\|\big[(I/m + H)^{-1/2} - (I/n + H)^{-1/2}\big]H^2\big[(I/m + H)^{-1/2} - (I/n + H)^{-1/2}\big])\Big\|^{1/2} =$$

$$= \big\|[f_{m,n}(H)]^2\big\|^{1/2} = \|f_{m,n}(H)\|,$$

в силу теоремы 2.22 для алгебры, порожденной S^*S, а также следствия 3.46, где $f_{m,n}$ — непрерывная функция на $(0, \infty)$, задаваемая формулой

$$f_{m,n}(t) = t\big[(m^{-1} + t)^{-1/2} - (n^{-1} + t)^{-1/2}\big].$$

Таким образом,

$$\|A_m - A_n\| = \sup\{|f_{m,n}(t)| : t \in \mathrm{sp}(H)\},$$

причем

$$\lim_{\min(m,n)\to\infty} f_{m,n}(t) = 0$$

сходится равномерно на $\mathrm{sp}(H)$, т.е. $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность Коши в $\mathcal{C}$. Для $A = \lim_n A_n$ получим $S = AH^{1/2} = AB$. □

3.64. Следствие. *Каждый замкнутый двусторонний идеал $\mathcal{G}$ в C^*-алгебре $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ самосопряжен. Замкнутый двусторонний идеал $\mathcal{S}$ в $\mathcal{G}$ является двусторонним идеалом в $\mathcal{C}$.*

Доказательство. В силу замкнутости левого идеала в $\mathcal{C}$, каждый элемент $S \in \mathcal{G}$ имеет вид $S = AB$, где $A \in \mathcal{C}$, а $B = (S^*S)^{1/4} \in \mathcal{G} \cap \mathcal{C}^+$, в силу предложения 3.63. Поскольку $\mathcal{G}$ является также правым идеалом в $\mathcal{G}$, то $\mathcal{G}$ самосопряжен.

Пусть $S \in \mathcal{S}$. Тогда $S \in \mathcal{G}$, а так как $\mathcal{S}$ — левый идеал в $\mathcal{G}$, то $S^*S \in \mathcal{S} \cap \mathcal{C}^+$. Тогда, как и в доказательстве предложения 3.63, $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}^+$ содержит квадратный корень каждого своего члена. Поэтому, $B^{1/2} = (S^*S)^{1/8} \in \mathcal{S}$. Если $F \in \mathcal{C}$, то $F(AB^{1/2})$ и $B^{1/2}F \in \mathcal{G}$, так как $B^{1/2} \in \mathcal{G}$, а $\mathcal{G}$ — двусторонний идеал в $\mathcal{C}$. Поскольку $\mathcal{S}$ — левый идеал в $\mathcal{C}$, а $B^{1/2} \in \mathcal{S}$, то

$$FS = F(AB) = F(A(B^{1/2}B^{1/2})) \in \mathcal{S},$$

т.е. $\mathcal{S}$ — левый идеал в $\mathcal{C}$. Таким образом, $AB^{1/2} \in \mathcal{S}$, а так как $\mathcal{S}$ — правый идеал в $\mathcal{G}$, то

$$SF = A(BF) = A((B^{1/2}B^{1/2})F) \in \mathcal{S}.$$

Это доказывает, что $\mathcal{S}$ — двусторонний идеал в $\mathcal{C}$. □

3.65. Лемма. *Предположим, что $\mathcal{G}$ — замкнутая C^*-подалгебра (не обязательно с единицей) в C^*-алгебре $\mathcal{C}$ и $\Upsilon := \{B \in \mathcal{G} \cap \mathcal{C}^+ : \|B\| < 1\}$.*

(i) *Если $B_1, B_2 \in \Upsilon$, то существует элемент $B \in \Upsilon$ такой, что $B_1 \leqslant B$ и $B_2 \leqslant B$.*

(ii) *Если $F \in \mathcal{G}$ и $b > 0$, то существует элемент $J \in \Upsilon$ такой, что из $B \in \Upsilon$ и $B \geqslant J$ следует, что $\|F - FJ\| < b$.*

Доказательство. (i) Для данных $B_1, B_2 \in \Upsilon$ существует $b > 0$ такой, что $\|(1 + b)B_j\| \leqslant 1$ для $j = 1$ и $j = 2$. Для любого $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ и любого $0 \leqslant t \leqslant 1$ выполняется неравенство $t \leqslant t^{1/n}$; таким образом, $(1 + b)B_j \leqslant [(1 + b)B_j]^{1/n}$. Когда n имеет вид 2^q для некоторого $q \in \mathbb{N}$, то повторное применение предложения 3.62 приводит к неравенству

$$[(1 + b)(B_1 + B_2)]^{1/n} \geqslant [(1 + b)B_j]^{1/n} \geqslant (1 + b)B_j.$$

Тогда $B_1 \leqslant B$ и $B_2 \leqslant B$, где $B = (1 + b)^{-1}[(1 + b)(B_1 + B_2)]^{1/n}$ для $n = 2^q$. Таким образом, $(1 + b)(B_1 + B_2) \in \mathcal{G}$, $0 \leqslant (1 + b)(B_1 + B_2) \leqslant 2I$, а функция $t^{1/n}$ является равномерным пределом

на интервале $[0,2]$ полиномов без постоянных членов. Поскольку $\mathcal{G}$ замкнут, то $B \in \mathcal{G}$, причем $0 \leqslant B \leqslant (1+b)^{-1}2^{1/n}I$. Когда n достаточно велико, то $(1+b)^{-1}2^{1/n} < 1$, тогда $B \in \Upsilon$.

(ii) Для данного $F \in \mathcal{G}$ и $b > 0$ пусть $F = aQ$, где $a > \|F\|$, такой, что $Q \in \mathcal{G}$ и $\|Q\| < 1$. Возьмем $J = (Q^*Q)^{1/n}$ в Υ, где n достаточно велико, чтобы выполнялось неравенство $t(1-t)^{1/n} < b^2a^{-2}$ для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если $B \in \Upsilon$ и $B \geqslant J$, то

$$\|F - FB\| = a\|Q(I-B)\| = a\|Q((I-B)^2Q^*)\|^{1/2},$$

так как $B \geqslant 0$, алгебра $\mathbb{K}$ альтернативна и $\mathcal{C}$ имеет вложение в $L_q(X)$ для некоторого гильбертова пространства X над $\mathbb{K}$, в силу теоремы 3.59. Тогда $0 \leqslant I - B \leqslant I - J \leqslant I$, и таким образом,

$$0 \leqslant (I-B)^2 \leqslant I - B \leqslant I - J = I - (Q^*Q)^{1/n}.$$

Поэтому

$$0 \leqslant Q((I-B)^2Q^*) \leqslant Q([I-(Q^*Q)^{1/n}]Q^*),$$

следовательно,

$$\Big\|Q\big((I-B)^2Q^*\big)\Big\| \leqslant \Big\|Q\big([I-(Q^*Q)^{1/n}]Q^*\big)\Big\| = r\Big(Q\big([I-(Q^*Q)^{1/n}]Q^*\big)\Big) =$$
$$= r\Big(Q^*Q\big[I-(Q^*Q)^{1/n}\big]\Big) \leqslant \sup\Big\{t(1-t^{1/n}) : 0 \leqslant t \leqslant \Big\} < b^2a^{-2}$$

в силу предложений 3.13, 3.62 и теоремы 3.20, так как $\mathrm{sp}(Q^*Q) \subset [0,1]$. Поэтому,

$$\|F - FB\| = a\|Q((I-B)^2Q^*)\|^{1/2} < b.$$

Лемма доказана. □

3.66. Определение. Для замкнутого подмножества $\mathcal{S}$ в C^*-алгебре $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ скажем, что направленность $\{F_v : v \in V\}$ из самосопряженных элементов $F_v \in \mathcal{S}$ является возрастающим правым приближением единицы для $\mathcal{S}$, если

$$\lim_{v \in V} \|A - AF_v\| = 0$$

для любого $A \in \mathcal{S}$, причем $0 \leqslant F_v \leqslant F_u \leqslant I$ для любых $v \leqslant u \in V$, где V — направленное множество. Аналогично определяются возрастающие левые и двусторонние приближения единицы.

3.67. Предложение. *Замкнутый левый идеал в C^*-алгебре $\mathcal{C}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ имеет возрастающее правое приближение единицы, а замкнутая C^*-подалгебра имеет возрастающее двустороннее приближение единицы.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{G}$ — замкнутая C^*-подалгебра в $\mathcal{C}$. Множество Υ, введенное в лемме 3.65, направлено обычным частичным упорядочением на самосопряженных элементах из $\mathcal{C}$. Возьмем $F_B = B$ для $B \in \Upsilon$, тогда получим возрастающую направленность в шаре единичного радиуса с центром в нуле в $\mathcal{G}$. В силу леммы 3.65, $\lim\limits_{B \in \Upsilon} \|A - AF_B\| = 0$ для любого $A \in \mathcal{G}$. Так как $\mathcal{G}$ самосопряжена, то

$$\lim_{B \in \Upsilon} \|A - F_bA\| = \lim_{B \in \Upsilon} \|A^* - A^*F_B\| = 0.$$

Таким образом, $\{F_B : B \in \Upsilon\}$ — возрастающее двустороннее приближение единицы.

Пусть теперь $\mathcal{S}$ — замкнутый левый идеал в $\mathcal{C}$. Для замкнутого правого идеала $\mathcal{S}^* := \{A^* : A \in \mathcal{S}\}$ получим $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^*$ — замкнутую C^*-подалгебру в $\mathcal{C}$, которая содержит все самосопряженные элементы из $\mathcal{S}$. В силу доказательства, приведенного выше, $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^*$ имеет возрастающее двустороннее приближение единицы $\{F_v : v \in V\}$. В силу предложения 3.63, каждый элемент $A \in \mathcal{S}$ имеет вид $A = BG$, где $B \in \mathcal{S}$ и $G \in \mathcal{S} \cap \mathcal{C}^+ \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^*$. В силу неравнства

$$\|A - AF_v\| = \|B(G - GF_v)\| \leqslant \|B\|\|G - GF_v\|,$$

получим, что $\{F_v : v \in V\}$ — возрастающее правое приближение единицы для $\mathcal{S}$. □

3.68. Теорема. *Если квазикоммутативная алгебра $\mathcal{A}$ содержится в $L_q(X)$ для гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, содержит единицу I, замкнута относительно слабой операторной топологии, то $\mathcal{A}$ изометрически $*$-изоморфна алгебре $C(S, \mathbb{K})$ для вполне несвязного компактного хаусдорфова пространства S.*

Доказательство. В силу теоремы 2.22, $\mathcal{A}$ изометрически $*$-изоморфна алгебре $C(S,\mathbb{K})$, где S — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Этот изоморфизм сопоставляет упорядочению множества самосопряженных операторов из $\mathcal{A}$ поточечное упорядочение на множестве действительнозначных непрерывных функций на S. Каждой возрастающей направленности $\{f_a : a \in \Upsilon\}$ из $C(S,\mathbb{K})$, ограниченной константой w, соответствует возрастающая направленность $\{ {}_aA : a \in \Upsilon\}$ самосопряженных операторов из $\mathcal{A}$, ограниченная сверху оператором wI. В силу леммы 2.22.4, $\{ {}_aA : a \in \Upsilon\}$ имеет верхнюю грань A в $\mathcal{A}$. Существует функция $f \in C(S,\mathbb{K})$, соответствующая оператору A, причем $f = \sup\limits_{a\in\Upsilon} f_a$, $f(t) \leqslant w$ для любого $t \in S$. Для семейства Ω всех конечных подмножеств из направленного множества Υ и любого $\omega \in \Omega$ функция $\max\limits_{a\in\omega} f_a$ принадлежит $C(S,\mathbb{K})$, при этом $w \geqslant \max\limits_{a\in\omega} f_a$.

Таким образом, S характеризуется условием, что любая ограниченная сверху (снизу) направленность $\{f_a : a \in \Upsilon\} \subset C(S,\mathbb{R}) \subset C(S,\mathbb{K})$ имеет $\sup\limits_{a\in\Upsilon} f_a \in C(S,\mathbb{R})$ ($\inf\limits_{a\in\Upsilon} f_a \in C(S,\mathbb{R})$ соответственно). Пусть U — открытое подмножество в S, $\mathrm{cl}_S(U)$ — его замыкание в S. Рассмотрим семейство функций $\mathcal{G} \subset C(S,\mathbb{R})$ таких, что $0 \leqslant f \leqslant 1$ на S и $f(t) = 0$ для любого $t \in S \setminus \mathrm{cl}_S(U)$ и любой $f \in \mathcal{G}$. Пусть $f_0 := \sup\{f : f \in \mathcal{G}\}$. Тогда $f_0(t) \leqslant 1$ для любой точки $t \in S$. Если $t \in U$, то существует функция $f \in \mathcal{G}$ такая, что $f(t) = 1$. Следовательно, $f_0(t) = 1$ для любой точки $t \in U$, а значит, и для любой точки $t \in \mathrm{cl}_S(U)$, в силу непрерывности функции f_0. Обратно, если $t \in S \setminus \mathrm{cl}_S(U)$, то существует функция $g \in C(S,\mathbb{R})$ такая, что $0 \leqslant g \leqslant 1$ на S, $g(t) = 0$ для любого $t \in S \setminus \mathrm{cl}_S(U)$, $g(t) = 1$ для любого $t \in \mathrm{cl}_S(U)$, т.е. $g = \sup\{f : f \in \mathcal{G}\}$ и $f_0 \leqslant g$. Таким образом, $f_0(t) = 1$ на $\mathrm{cl}_S(U)$ и $f_0(t) = 0$ на $S \setminus \mathrm{cl}_S(U)$. В силу непрерывности функции f_0, множество $\mathrm{cl}_S(U)$ открыто, следовательно, S вполне не связно. □

3.69. Определения. Пусть $\mathcal{F} \subset L_q(X)$ для гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Если два оператора A и B принадлежат $L_q(X)$, то обозначим через $\{A,B\}$ минимальную подалгебру над $\mathbb{K}$ в $L_q(X)$, содержащую A и B. Подалгебру

$$\mathcal{F}^* := \big\{A \in L_q(X), \{A,B\} \text{ квазикоммутативна для любого } B \in \mathcal{F}\big\}$$

назовем суперкоммутантом над $\mathbb{K}$ для семейства (или подалгебры) $\mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{N}$ — C^*-алгебра операторов из $L_q(X)$ на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $I \in \mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ замкнута в слабой операторной топологии. Если центр $Z(\mathcal{N})$ состоит из $\mathbb{R}I$, то скажем, что $\mathcal{N}$ является фактором.

Например, $L_q(X)$ является фактором.

3.70. Теорема. *Если $\mathcal{C}$ — самосопряженная C^*-подалгебра в алгебре $L_q(X)$ для гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, $I \in \mathcal{C}$, то замыкания C^*-алгебры $\mathcal{C}$ относительно сильной и слабой операторных топологий совпадают с $(\mathcal{C}^*)^*$.*

Доказательство. Сначала отметим, что $\mathcal{C}^*$ замкнута относительно слабой операторной топологии, следовательно, $(\mathcal{C}^*)^*$ тоже замкнута относительно слабой операторной топологии. В силу теоремы 2.22.2, сильные и слабые замыкания $\mathbb{R}$-выпуклого подмножества Y в $L_q(X)$ для гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ совпадают. Поскольку $\mathcal{C}$ является $\mathbb{R}$-выпуклым множеством, то замыкания $\mathcal{C}$ относительно слабой и сильной операторных топологий совпадают. Докажем, что $(\mathcal{C}^*)^*$ является сильным операторным замыканием C^*-алгебры $\mathcal{C}$. Поскольку $\mathcal{C} \subset (\mathcal{C}^*)^*$, а $(\mathcal{C}^*)^*$ замкнута относительно сильной и слабой операторных топологий, то замыкание C^*-алгебры $\mathcal{C}$ относительно сильной операторной топологии содержится в $(\mathcal{C}^*)^*$.

Пусть $T \in (\mathcal{C}^*)^*$ и заданы векторы $x_1,\dots,x_n \in \mathcal{C}$. Найдем оператор $T_0 \in \mathcal{C}$ такой, что

$$\|((T - T_0)(x_j)\| < 1, \quad j = 1,\dots,n.$$

Пусть $X^{\oplus n} := X \oplus \cdots \oplus X$ обозначает n-кратную прямую сумму n копий гильбертова пространства X над $\mathbb{K}$. Для оператора $F \in L_q(X)$ положим $F^{\oplus n} := F \oplus \cdots \oplus F$. Тогда существует самосопряженная C^*-алгебра $\mathcal{C}^{\oplus n} := \{F^{\oplus n} : F \in \mathcal{C}\}$. Тогда $\mathbb{K}$-векторное пространство $[\mathcal{C}(x^{\oplus n})] := \mathrm{cl}_{X^{\oplus n}}(\mathcal{C}(x^{\oplus n}))$ инвариантно относительно $\mathcal{C}^{\oplus n}$, так как $\mathcal{C}(x^{\oplus n})$ является $\mathbb{K}$-векторным подпространством в $X^{\oplus n}$, в

силу следствия 3.46. В силу предложения 2.22.20, существует градуированный оператор проектирования $\hat{E}^{\oplus n} \in \mathcal{C}^{\oplus n}$ такой, что он больше, чем другие градуированные операторы проектирования в $\mathcal{C}^{\oplus n}$ и $\hat{E}^{\oplus n}A^{\oplus n} = A^{\oplus n}\hat{E}^{\oplus n} = A^{\oplus n}$ для любого $A^{\oplus n} \in \mathcal{C}^{\oplus n}$ такого, что $(A^{\oplus n})^{-1}(0)$ и $A^{\oplus n}(X^{\oplus n})$ являются $\mathbb{K}$-векторными подпространствами в $X^{\oplus n}$. Таким образом, $\hat{E}^{\oplus n} \in (\mathcal{C}^{\oplus n})^*$, так как $\hat{E}_0^{\oplus n}$ коммутирует с каждым $A_0^{\oplus n}$ для $A_0 \in \mathcal{C}_0$.

Отметим, что $T^{\oplus n}(x^{\oplus n}) = (T(x))^{\oplus n}$ для любого $x \in X$. Тогда $((\mathcal{C}^{\oplus n})^*)_0$ состоит из всех операторов вида

$$F = \bigoplus_{i,j=1}^{n} F_{i,j}, \quad F_{i,j} \in \mathcal{C}_0^*, \quad F_{i,j} : X^i \to X_0^j,$$

где X^i изоморфно X как гильбертову пространству над $\mathbb{K}$ для любого $i = 1, \ldots, n$, $X = X_0 \oplus X_1 i_1 \oplus \cdots \oplus X_m i_m$. Поэтому $(((\mathcal{C}^{\oplus n})^*)^*)_0$ состоит из всех операторов

$$F = \bigoplus_{i,j=1}^{n} F_{i,j}, \quad F_{i,j} \in (\mathcal{C}^*)_0^*, \quad F_{i,j} : X^i \to X_0^j,$$

где $F_{i,j} = 0$ для любого $i \neq j = 1, \ldots, n$, $F_{i,i} = F_{1,1}$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Тогда если $T \in (\mathcal{C}^*)^*$, то $T^{\oplus n} \in ((\mathcal{C}^{\oplus n})^*)^*$. Отсюда следует, что $\hat{E}^{\oplus n}T^{\oplus n} = T^{\oplus n}\hat{E}^{\oplus n}$, если $(T^{\oplus n})^{-1}(0)$ и $T^{\oplus n}(X^{\oplus n})$ являются $\mathbb{K}$-векторными пространствами, т.е. область значений оператора $\hat{E}^{\oplus n}$ инвариантна относительно действия оператора $\hat{T}^{\oplus n}$. Поскольку $\mathcal{C}^{\oplus n}(x^{\oplus n})$ плотно в $\mathrm{cl}_{X^{\oplus n}}(\mathcal{C}^{\oplus n}(x^{\oplus n}))$, то существует оператор $T_0 \in \mathcal{C}$ такой, что $\|((T - T_0)(x_j)\| < 1$ для любого $j = 1, \ldots, n$, так как $\mathcal{T}^{\oplus n}(x^{\oplus n})$ принадлежит области значений оператора $\hat{E}^{\oplus n}$, а $x^{\oplus n} = (Ix_1, \ldots, Ix_n) \in \hat{E}^{\oplus n}(\hat{X}^{\oplus n})$. □

3.71. Предложение. *Каждая непрерывная $\mathbb{K}$-значная функция на $\mathbb{K}$ для $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ при продолжении на ограниченное подмножество нормальных операторов из $L_q(X)$ является непрерывной относительно сильной операторной топологии на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}$.*

Доказательство. В общем случае множество ограниченных операторов содержится в шаре $B(L_q(X), 0, r)$ радиуса $r > 0$ с центром в нуле. Пусть ${}_0T$ — нормальный оператор в этом шаре, $b > 0$, $x_1, \ldots, x_n \in X$. Если $\|f(T) - f({}_0T)(x/\|x\|)\| < b/\|x\|$, то $\|f(T) - f({}_0T)(x)\| < b$, т.е. можно предполагать, что $\|x\| = 1$. В силу теоремы Вейерштрасса (см. также [15, § 2.7]), существует полином g по переменной z такой, что $\|f - g\|_{C(B(\mathbb{K},0,r),\mathbb{K})} < b/3$. Умножение на ограниченные подмножества операторов и операция сопряжения непрерывны на ограниченном множестве нормальных операторов. Поэтому существуют $y_1, \ldots, y_m \in X$ и $v > 0$ такие, что $\|(g(T) - g({}_0T))x\| < b/3$ для отмеченного вектора $x \in X$, если $\|(T - {}_0T)y_j\| < b$, T нормален, $\|T\| \leqslant r$. Далее можно продолжить эти рассуждения для $x = x_1, \ldots, x_m$ путем математической индукции. В этом случае

$$\Big\|\big(f(T) - f({}_0T)\big)x\Big\| \leqslant \Big\|\big(f(T) - g(T)\big)x\Big\| + \Big\|\big(g(T) - g({}_0T)\big)x\Big\| +$$
$$+ \Big\|\big(g({}_0T) - f({}_0T)\big)\Big\| + \frac{b}{3} \leqslant 2\|f - g\|_{C(B(\mathbb{K},0,r),\mathbb{K})} + \frac{b}{3} < b.$$

Для заключения о том, что $\|f(T) - g(T)\|$ и $\|f({}_0T) - g({}_0T)\|$ мажорируются посредством $\|f - g\|_{C(B(\mathbb{K},0,r),\mathbb{K})}$, в предшествующем неравенстве можно перейти к функциональному представлению квазикоммутативной алгебры, порожденной T и T^*, согласно теореме 2.22. Это представление выполняется на $\mathrm{sp}(T)$, причем T соответствует переменная z, а T^* соответствует z^*. Поскольку это представление является изометрией, то

$$\|f(T) - g(T)\| = \|f - g\|_{C(\mathrm{sp}(T),\mathbb{K})}, \qquad \|f({}_0T) - g({}_0T)\| = \|f - g\|_{C(\mathrm{sp}(T),\mathbb{K})}.$$

□

3.72. Замечание. Для самосопряженного оператора $T \in L_q(X)$ для гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ и любого $M \in \mathbb{K}$ с $|M| = 1$ и $\mathrm{Re}(M) = 0$ существует оператор

$$U_M(T) := (T - MI)(T + MI)^{-1}.$$

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и $M = i$ эта конструкция известна как преобразование Кэли.

3.73. Предложение. *Преобразование $T \mapsto U_M(T)$, введенное в замечании* 3.72*, непрерывно относительно сильной операторной топологии на подмножестве самосопряженных операторов в $L_q(X)$, причем оператор $U_M(T)$ унитарен для любого самосопряженного оператора T из $L_q(X)$ и любого $M \in \mathbb{K}$ такого, что $|M| = 1$, $\mathrm{Re}(M) = 0$.*

Доказательство. В силу леммы 2.27, $\mathrm{sp}(T) \subset \mathbb{R}$. В силу теоремы 2.22, алгебра, порожденная оператором T, изометрически изоморфна $C(\mathrm{sp}(T), \mathbb{K})$. Тогда оператор $U_M(T)$ корректно определен и принадлежит $L_q(X)$. Поскольку алгебра $\mathbb{K}$ альтернативна, то из функционального представления следует, что

$$U_M(T)U_M(T)^* = ((T - MI)(T + MI)^{-1})((T - MI)^{-1}(T + MI)) =$$
$$= (T - MI)((T^2 + I)^{-1}(T + MI)) = (T^2 + I)(T^2 + I)^{-1} = I$$

и, аналогично, $U_M(T)^*U_M(T) = I$. Более того, выполняются соотношения

$$(T + MI)((U_M(T) - U_M(A))(A + MI)) = 2M(T - A)$$

для любых самосопряженных операторов A, T из $L_q(X)$ (см. также доказательство леммы 3.44). Тогда

$$\|(U_M(T) - U_M(A))x\| = 2\|(T + MI)^{-1}((T - A)(A + MI)^{-1}(x))\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\|(T - A)((A + MI)^{-1}(x))\| \leqslant 2\|T - A\|\|x\|,$$

так как $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{p,q}\langle x_p, y_q\rangle i_p^* i_q$, а $\|(T+MI)^{-1}\| \leqslant 1$, в силу функционального представления алгебры, порожденной оператором T. □

3.74. Теорема. *Если f — непрерывная $\mathbb{R}$-значная функция на $\mathbb{R}$ и существует $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, то f является непрерывной относительно сильной операторной топологии на множестве самосопряженных операторов из $L_q(X)$ для гильбертова пространства X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$.*

Доказательство. Пусть $g(z) = f(-(z-1)^{-1}((z+1)M))$ для $z \neq 1$ и $|z| = 1$, где $M \in \mathbb{K}$, $|M| = 1$, $\mathrm{Re}(M) = 0$. Положим $g(1) = 0$, тогда функция g непрерывна на множестве $\partial B(\mathbb{K}, 0, 1) = S(\mathbb{K}, 0, 1) := \{z : z \in \mathbb{K}; |z| = 1\}$, причем $g(S(\mathbb{K}, 0, 1)) \subset \mathbb{R}$. Поскольку

$$(U_M^*(T) + I)(U_M(T) - I) = U_M(T) - U_M(T^*) = -(U_M^*(T) - I)(U_M(T) + I),$$

то

$$T^* = (M(U_M^*(T) + I))(U_M^*(T) - I)^{-1} = -(U_M(T) - I)^{-1}((U_M(T) + I)M) = T,$$

так как $M^* = -M$. Тогда $g(U_M(T)) = f(T)$ для любого самосопряженного оператора T. Поскольку g непрерывна на $S(\mathbb{K}, 0, 1)$, то она дает функцию на ограниченном множестве унитарных операторов, непрерывную относительно сильной операторной топологии, согласно предложению 3.71. Поскольку f является композицией преобразования $U_M(T)$ и g, то, в силу предложения 3.73, функция f непрерывна относительно сильной операторной топологии. □

3.75. Теорема. *Если $\mathcal{C}$ — самосопряженная C^*-алгебра операторов, содержащаяся в $L_q(X)$, где X — гильбертово пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, то для любого $T \in B(\mathrm{cl}_s(\mathcal{C}), 0, 1)$ из шара радиуса единица с центром в нуле в $\mathrm{cl}_s(\mathcal{C})$ (в замыкании C^*-алгебры $\mathcal{C}$ в $L_q(X)$ относительно сильной операторной топологии) выполняется включение $T \in \mathrm{cl}_s(B(\mathcal{C}, 0, 1))$. Если оператор T самосопряжен в $B(\mathrm{cl}_s(\mathcal{C}), 0, 1)$, то T принадлежит сильному операторному замыканию множества самосопряженных операторов из $B(\mathcal{C}, 0, 1)$.*

Доказательство. Если самосопряженный оператор T принадлежит $\mathrm{cl}_s(\mathcal{C})$, а $\{F_a : a \in \Upsilon\}$ — направленность операторов, сходящаяся к T в $\mathcal{C}$ относительно слабой операторной топологии, то направленность $\{F_a + F_a^* : a \in \Upsilon\}$ состоит из самосопряженных операторов и также сходится к T относительно слабой операторной топологии. Поскольку множество $\mathcal{C}$ выпукло над $\mathbb{R}$, то, в силу теоремы 2.22.2, T принадлежит $\mathrm{cl}_s(\mathcal{C})$.

Пусть оператор T самосопряжен и принадлежит $B(\mathrm{cl}_s(\mathcal{C}),0,1)$, а направленность самосопряженных операторов $\{F_a : a\in\Upsilon\}$ из $\mathcal{C}$ сходится к T относительно сильной операторной топологии. Рассмотрим функцию

$$\begin{cases} f(t)=t, & t\in[-1,1]\subset\mathbb{R},\\ f(t)=1/t, & |t|>1, \end{cases}$$

где $t\in\mathbb{R}$. Тогда $\lim\limits_{|t|\to\infty} f(t)=0$. Функция f порождает функцию g, фигурирующую в доказательстве теоремы 3.74. Поэтому направленность $f(F_a)$ сходится к $f(T)$ относительно сильной операторной топологии, где все F_a самосопряжены. Тогда $f(T)=T$, т.е. T принадлежит сильному операторному замыканию множества самосопряженных элементов из $B(\mathrm{cl}(\mathcal{C},0,1)$, где замыкание $\mathrm{cl}(A)$ подмножества A в $L_q(X)$ берется относительно топологии операторной нормы. С другой стороны, каждый самосопряженный элемент из $B(\mathrm{cl}(\mathcal{C},0,1)$ является пределом относительно топологии операторной нормы, а значит, и относительно сильной операторной топологии самосопряженных элементов из $B(\mathcal{C},0,1)$. □

3.76. Следствие. *Если $\mathcal{C}\subset L_q(X)$ — самосопряженная C^*-подалгебра операторов, действующих на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, и T — неотрицательный оператор из $B(\mathrm{cl}_s(\mathcal{C}),0,1)$, то T принадлежит сильному операторному замыканию для $B(\mathcal{C}^+,0,1)$.*

Доказательство. Поскольку $T\geqslant 0$, то $T=G^2$ для самосопряженного оператора G из $B(\mathrm{cl}_s(\mathcal{C}),0,1)$. В силу теоремы 3.75, G принадлежит сильному операторному замыканию самосопряженных операторов из $B(\mathcal{C},0,1)$. Из непрерывности умножения на $B(\mathcal{C},0,1)$ относительно сильной операторной топологии следует, что G^2 принадлежит сильному операторному замыканию семейства операторов F^2 для всех самосопряженных операторов из $B(\mathcal{C},0,1)$, но $F^2\in B(\mathcal{C}^+,0,1)$. □

3.77. Следствие. *Если $\mathcal{C}\subset L_q(X)$ — C^*-подалгебра операторов, действующих на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, U — унитарный оператор из $\mathrm{cl}_s(\mathcal{C})$, то U принадлежит замыканию относительно сильной операторной топологии множества унитарных операторов из $\mathcal{C}$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.33, $U=\exp(MT)$ для некоторого самосопряженного оператора T, $M\in\mathbb{K}$ такой, что $|M|=1$, $\mathrm{Re}(M)=0$. Согласно теореме 3.75, T является пределом относительно сильной операторной топологии направленности $\{F_a : a\in\Upsilon\}$ самосопряженных операторов из $B(\mathcal{C},0,\|T\|)$, где Υ — направленное множество. Из непрерывности функции $\mathbb{R}\ni t\mapsto\exp(Mt)\in\mathbb{K}$ следует, что $\{\exp(MF_a) : a\in\Upsilon\}$ сходится к $\exp(MF)$ относительно сильной операторной топологии. □

3.78. Определение. Семейство $\mathcal{G}$ из $L_q(X)$, где X — гильбертово пространство X над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, действует топологически неприводимо на X, когда $\{0\}$ и X являются единственными замкнутыми подпространствами в X, инвариантными относительно действия $\mathcal{G}$.

3.79. Теорема. *Пусть $\mathcal{G}$ — самосопряженное семейство, содержащееся в $L_q(X)$, где X — гильбертово пространство над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$. Семейство $\mathcal{G}$ действует топологически неприводимо на X тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}^*=\mathbb{K}$, что эквивалентно условию $(\mathcal{G}^*)^*=L_q(X)$.*

Доказательство. Если $\mathcal{G}^*=\mathbb{K}$, то $(\mathcal{G}^*)^*=L_q(X)$. Если $(\mathcal{G}^*)^*=L_q(X)$, то $((\mathcal{G}^*)^*)^*=\mathbb{K}$. С другой стороны, $\mathcal{G}\subset(\mathcal{G}^*)^*$. Поэтому $((\mathcal{G}^*)^*)^*\subset\mathcal{G}^*$, но $\mathcal{G}_0^*$ коммутирует с $((\mathcal{G}^*)^*)_0^*$, следовательно, $\mathcal{G}^*\subset((\mathcal{G}^*)^*)^*$. Таким образом, $\mathcal{G}^*=((\mathcal{G}^*)^*)^*$.

Для самосопряженного семейства $\mathcal{G}$ операторов из $L_q(X)$ C^*-алгебра $\mathcal{G}^*$ является замкнутой относительно слабой операторной топологии и содержит единичный оператор I. В силу теоремы 2.24, $\mathcal{G}^*=\mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда каждый градуированный оператор проектирования из $\mathcal{G}^*$ является либо 0, либо I. Поскольку семейство $\mathcal{G}$ самосопряжено, то градуированный оператор проектирования $\hat{E}$ принадлежит $\mathcal{G}^*$ тогда и только тогда, когда область его значений $\hat{E}(X)$ инвариантна относительно $\mathcal{G}$ (см. предложение 2.22.7). Таким образом, $\mathcal{G}$ действует топологически неприводимо на X тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}^*=\mathbb{K}$. □

3.80. Лемма. *Если $\{x_1,\dots,x_n\}$ — ортонормированные векторы в гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из определения* 2.16, *$z_1,\dots,z_n\in B(X,0,r)$, где $0<r<\infty$, то существует оператор $F\in L_q(X)$ такой, что $\|F\|\leqslant(2n)^{1/2}r$ и $Fx_j=z_j$ для любого $j=1,\dots,n$. Если $Ax_j=z_j$ для некоторого самосопряженного оператора A, то F можно выбрать самосопряженным.*

Доказательство. Пусть $\hat{E}$ — градуированный оператор проектирования из X на $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{x_1,\dots,x_n\}$. Такой оператор существует в силу предложения 2.22.7. Положим

$$T(x):=\sum_{j=1}^n\langle\hat{E}(x),x_j\rangle z_j.$$

Тогда $T\hat{E}=T$ и

$$\|T(x)\|\leqslant r\left(\sum_{j=1}^n|\langle\hat{E}(x),x\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^n 1\right)^{1/2}\leqslant n^{1/2}r\|\hat{E}(x)\|\leqslant n^{1/2}r\|x\|.$$

Таким образом, $\|T\|\leqslant n^{1/2}r$.

Если $Ax_j=z_j$ для некоторого самосопряженного оператора A, то $\hat{E}T=\hat{E}(A\hat{E})=(\hat{E}A)\hat{E}$, в силу предложения 2.22.9, следовательно, $\hat{E}T$ самосопряжен. Рассмотрим оператор

$$F=T+T^*(I-\hat{E})=\hat{E}T+(I-\hat{E})T+T^*(I-\hat{E}).$$

Тогда $Fx_j=Tx_j=z_j$. Поскольку $T(I-\hat{E})=0=(I-\hat{E})T^*$,

$$T(I-\hat{E})=T-T\hat{E}=0\quad\text{и}\quad(I-\hat{E})^2=(I-\hat{E}),$$

то

$$\|FF^*\|=\|F\|^2=\|FF^*+F^*((I-\hat{E})F)\|\leqslant 2\|FF^*\|=2\|F\|^2\leqslant 2nr^2.$$

Лемма доказана. □

3.81. Теорема. *Если C^*-алгебра $\mathcal{C}$ действует топологически неприводимо на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{O}$, $\{y_1,\dots,y_n\}$ — подмножество векторов в X, $\{x_1,\dots,x_n\}$ — $\mathbb{K}$-линейно независимый набор векторов в X, то существует оператор $F\in\mathcal{C}$ такой, что $Fx_j=y_j$ для любого $j=1,\dots,n$. Если $Bx_j=y_j$ для некоторого самосопряженного оператора B, то F можно выбрать самосопряженным.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathbb{K}$-линейную оболочку $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{x_1,\dots,x_n\}$. В этом $\mathbb{K}$-векторном подпространстве можно выбрать ортонормированный базис относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Поэтому без ограничения общности предположим, что векторы $x_1,\dots,x_n$ ортонормированы. Возьмем оператор ${}_0G\in L_q(X)$ такой, что ${}_0Gx_j=y_j$ для любого $j=1,\dots,n$. Поскольку $\operatorname{cl}_s(\mathcal{C})=(\mathcal{C}^*)^*=L_q(X)$, согласно теореме 3.79, то существует ${}_0S\in\mathcal{C}$ такой, что

$$\|{}_0Gx_j-{}_0Sx_j\|=\|{}_0Sx_j-y_j\|\leqslant[2(2n)]^{-1}.$$

В силу леммы 3.80, существует оператор ${}_1G\in L_q(X)$ такой, что ${}_1Gx_j=y_j-{}_0Sx_j$ для любого j, причем $\|{}_1G\|\leqslant 1/2$. Оператор ${}_0S$ можно выбрать самосопряженным, если оператор ${}_0G$ самосопряжен, так как семейство самосопряженных операторов плотно относительно сильной операторной топологии в $\operatorname{cl}_s(\mathcal{C})$. В этом случае, согласно лемме 3.79, оператор ${}_1G$ можно взять самосопряженным. В силу теоремы 3.75, существует оператор ${}_1S\in\mathcal{C}$ такой, что $\|{}_1S\|\leqslant 1/2$ и $\|{}_1Sx_j-{}_1Gx_j\|\leqslant[4(2n)^{1/2}]^{-1}$. При этом ${}_1S$ самосопряжен, если ${}_0G$ самосопряжен.

Предположим, что был построен оператор ${}_kG$ такой, что $\|{}_kG\|\leqslant 2^{-k}$, ${}_kGx_j=y_j-{}_0Sx_j-{}_1Sx_j-\dots-{}_{k-1}Sx_j$. Оператор ${}_kG$ самосопряжен, если ${}_0G$ самосопряжен. Выберем ${}_kS$ в $\mathcal{C}$ такой, что $\|{}_kS\|\leqslant 2^{-k}$, а $\|{}_kSx_j-{}_kGx_j\|\leqslant[2^{k+1}(2n)^{1/2}]^{-1}$ с помощью теоремы 3.75, где ${}_kS$ самосопряжен, если ${}_kG$ самосопряжен. В силу леммы 3.80, существует оператор ${}_{k+1}G$ такой, что $\|{}_{k+1}G\|\leqslant 2^{-(k+1)}S$ и ${}_{k+1}Gx_j=y_j-{}_0Sx_j-\dots-{}_kSx_j$, где оператор ${}_{k+1}G$ самосопряжен, если ${}_kS$ самосопряжен. Тогда

ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} {}_kS$ сходится к оператору $S \in \mathcal{C}$ относительно операторной нормы. При этом оператор S самосопряжен, если ${}_0G$ самосопряжен, и

$$y_j - Sx_j = y_j - \sum_{k=0}^{\infty} {}_kSx_j = \lim_{k\to\infty} (y_j - {}_0Sx_j - \cdots - {}_kSx_j) = \lim_k {}_{k+1}Gx_j = 0.$$

Теорема доказана. □

3.82. Следствие. *Если C^*-подалгебра $\mathcal{C}$ в $L_q(X)$ действует топологически неприводимо на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, то она действует алгебраически неприводимо на X.*

Таким образом, для C^*-подалгебр в $L_q(X)$ можно не различать топологическую и алгебраическую неприводимость действия на X.

3.83. Теорема. *Если C^*-подалгебра $\mathcal{C}$ в $L_q(X)$ действует топологически неприводимо на гильбертовом пространстве X над $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, а унитарный оператор V на X такой, что $Vx_1 = y_1, \dots, Vx_n = y_n$, то существует самосопряженный оператор S на X такой, что $Ux_1 = y_1, \dots, Ux_n = y_n$, где $U = \exp(MS)$, $M \in \mathbb{K}$ такой, что $|M| = 1$, $\mathrm{Re}(M) = 0$.*

Доказательство. Если $x \in X$, $x \neq 0$, то существует $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, такая, что $ax \in X_0$, где $X = X_0 \oplus X_1 i_1 \oplus \cdots \oplus X_m i_m$, $X_0, \dots, X_m$ — попарно изоморфные гильбертовы пространства над $\mathbb{R}$, $\{i_0, i_1, \dots, i_m\}$ — множество стандартных генераторов алгебры $\mathbb{K}$. Тогда для произвольного множества $\mathbb{K}$-линейно независимых векторов $x_1, \dots, x_m \in X$ существуют константы $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, $|a_1| = \cdots = |a_n| = 1$, для которых $z_1 := a_1x_1, \dots, z_n := a_nx_n \in X_0$. Но гильбертово пространство задано над полем действительных чисел, и ограничение скалярного произведения $\langle x, y\rangle$ из X на X_0 дает скалярное произведение (x, y) на X_0. Тогда процедура ортогонализации Шмидта может быть применена на X_0 к векторам $z_1, \dots, z_n$. Это дает ортонормированную систему векторов $q_1, \dots, q_n \in X$, для которой существует оператор $S \in L_q(X)$ такой, что $S(x_j) = q_j$ для любого $j = 1, \dots, n$. Поскольку n можно в общем случае взять любым, то по трансфинитной индукции в X существует ортонормированный базис.

Без ограничения общности возьмем в качестве $\{x_1, \dots, x_n\}$ ортонормированное множество векторов из X. То же можно предположить относительно $\{y_1, \dots, y_n\}$, так как оператор V унитарен, т.е. $\langle V(x), V(z)\rangle = \langle x, z\rangle$ для любых $x, z \in X$. Обозначим через $\{x_1, \dots, x_m\}$ и $\{y_1, \dots, y_m\}$ расширения наборов $\{x_1, \dots, x_n\}$ и $\{y_1, \dots, y_n\}$ соответственно до ортонормированных базисов пространства $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n\}$. Тогда можно определить оператор U на $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n\}$ по формуле $Ux_j = y_j$ для любого j. Рассмотрим другой ортонормированный базис такой, что $Ux_j = c_jx_j$ для любого j, где $|c_j| = 1$, в силу теорем 2.28 и 2.33. При этом $U = \exp(MT)$ для некоторого самосопряженного оператора $T \in L_q(X)$, где $M \in \mathbb{K}$ такой, что $|M| = 1$, $\mathrm{Re}(M) = 0$. В силу теоремы 3.81, этот оператор T можно взять в $\mathcal{C}$ таким, чтобы $Tx_j = a_jx_j$ для любого, где $a_j \in \mathbb{R}$, $\exp(Ma_j) = c_j$. Поскольку U является пределом полиномов по T относительно топологии нормы, то $U \in \mathcal{C}$, так как, согласно определению 2.16, $\mathcal{C}$ является банаховой алгеброй, т.е. полной относительно топологии операторной нормы. □

Благодарности. Автор искренне благодарен профессорам Хансу де Грооту и Фреду ван Ойстаену за обсуждение работы и гостеприимство на математических факультетах университетов Франкфурта-на-Майне и Антверпена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зорич В. А.* Математический анализ. — М.: Наука, 1984.
2. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.
3. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
5. *Baez J. C.* The octonions// Bull. Amer. Math. Soc. — 2002. — *39*, № 2. — С. 145–205.
6. *Connes A.* Noncommutative geometry. — San Diego: Academic Press, 1994.

7. *Dunford N., Schwartz J. C.* Linear operators. — New York: J. Wiley and Sons, Inc., 1966.
8. *Emch G.* Mécanique quantique quaternionienne et relativité restreinte// Helv. Phys. Acta. — 1963. — *36*. — С. 739–769.
9. *Kadison R. V., Ringrose J. R.* Fundamentals of the theory of operator algebras. — New York: Academic Press, 1983.
10. *Lawson H. B., Michelson M.-L.* Spin geometry. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1989.
11. *Ludkovsky S. V.* Generalized geometric loop groups of complex manifolds, Gaussian quasi-invariant measures on them, and their representations// J. of Math. Sci. — 2004. — *122*, № 1. — С. 2984–3011.
12. *Ludkovsky S. V.* Poisson measures for topological groups and their representations// Southeast Asian Bull. Math. — 2002. — *25*. — С. 653–680.
13. *Ludkovsky S. V., Oystaeyen F. van.* Differentiable functions of quaternion variables// Bull. Sci. Math. — 2003. — *127*. — С. 755–796
14. *Ludkovsky S. V.* Functions of several quaternion variables and quaternion manifolds//J. Math. Sci (в печати).
15. *Ludkovsky S. V.* Differentiable functions of Cayley—Dickson numbers// Los Alamos Nat. Lab., USA. Preprint `math.CV/0405471`.
16. *Oystaeyen F. van.* Algebraic geometry for associative algebras// Lect. Notes Pure and Appl. Math. — 2000. — *232*.