

ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 36

**ТРУДЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
ПО ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ**

СУЗДАЛЬ, 5-10 ИЮЛЯ 2004 Г.

ЧАСТЬ 2



**Тбилиси
2005**

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Е. С. Голод (Московский государственный университет)

И. Т. Кигурадзе (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

А. Лаши (Грузинский технический университет)

Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Овчинников (Московский государственный университет)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Сарычев (Университет Флоренции)

Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

Г. Г. Чоговадзе (Академия наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 36

**ТРУДЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
ПО ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ**

СУЗДАЛЬ, 5-10 ИЮЛЯ 2004 Г.

ЧАСТЬ 2

**კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი**

2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

О равномерных оценках положительных решений нелинейных дифференциальных уравнений (<i>И. В. Асташова</i>)	3
Эффективное решение сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений (<i>С. И. Безродных, В. И. Власов</i>)	8
Неравенства Фукса для систем линейных дифференциальных уравнений с регулярными осо- быми точками (<i>Р. Р. Гонцов</i>)	18
Разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи регулярной точки (<i>И. В. Горючкина</i>)	26
Степенные разложения решений модифицированного третьего уравнения Пенлеве в окрест- ности нуля (<i>А. В. Гриднев</i>)	33
О средних интегральных значениях решений обобщенного уравнения Коши—Римана (<i>В. И. Данченко, Е. П. Долженко</i>)	41
Некоторые граничные свойства решения уравнения Пуассона (<i>Д. Я. Данченко</i>)	45
Об индексе дефекта одного класса дифференциальных операторов (<i>И. Н. Долгих</i>)	49
Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с интеграль- ным условием (<i>С. С. Ежак</i>)	56
О структуре множества центральных движений косоугольного произведения отображений интервала (<i>Л. С. Ефремова</i>)	70
Качественный анализ задачи Коши $F(t, x, x') = 0$, $x(0) = 0$ (<i>А. Е. Зернов, Ю. В. Кузина</i>)	78
О сингулярных функционально-дифференциальных уравнениях (<i>А. Е. Зернов, О. Р. Чайчук,</i> <i>О. Р. Чайчук</i>)	86
Интегральные уравнения третьего рода с частными интегралами (<i>А. С. Калитвин</i>)	95
Разложения решений пятого уравнения Пенлеве вблизи неособой точки (<i>Е. С. Карулина</i>)	100
Об устойчивости неконсервативных систем с малой диссипацией (<i>О. Н. Кириллов</i>)	107
О структуре обратимой системы с гомоклинической траекторией к седло-центру (<i>О. Ю. Кольцова</i>)	118
Монодромия R -систем Веселова—Коно—Чередника (<i>В. П. Лексин</i>)	128
О задаче наименьшего и наибольшего усредненного сопротивления движущихся тел (<i>А. Ю. Плахов</i>)	142
Задача Стефана для одномерной гиперболической системы уравнений теплопроводности (<i>Е. Н. Стратилатова</i>)	149

О РАВНОМЕРНЫХ ОЦЕНКАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2005 г. **И. В. АСТАШОВА**

Аннотация. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p(x) |y|^{k-1} y = 0, \quad k > 1, \quad p(x) \geq p_* > 0.$$

Для положительных решений данного уравнения, определенных на отрезке $[a, b]$, получена оценка сверху с помощью степенной функции от $(x - a)$ с коэффициентом, зависящим только от n, k и p_* .

В работе [2] для уравнения

$$y^{(n)} + p(x) |y|^{k-1} y = 0, \quad k > 1, \quad p(x) \geq p_* > 0, \quad (1)$$

четного порядка была получена равномерная оценка положительных решений с помощью константы, зависящей только от $n, k, b - a$ и p_* . Следствием этой оценки было отсутствие положительных решений на неограниченных слева и/или справа интервалах.

Для нечетного n подобных оценок с помощью константы не может существовать, как показывает следующий простой пример. Заданные на отрезке $[0, 1]$ функции $y_\varepsilon(x) = (x + \varepsilon)^{-n/(k-1)} > 0, \varepsilon > 0$, являются при нечетном n решениями уравнения (1) с постоянной функцией

$$p(x) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{n}{k-1} + j \right).$$

При этом $y_\varepsilon(0) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако для нечетного n также можно равномерно оценить положительные решения уравнения (1), но не с помощью константы, а с помощью заданной на $(a, b]$ степенной функции.

Отметим, что равномерные интегральные оценки положительных решений квазилинейных эллиптических уравнений приводятся в [3]. В [1] приводятся более слабые равномерные оценки для положительных решений уравнения (1). В [4] получены равномерные оценки для модуля решений уравнения (1) второго порядка с комплекснозначным потенциалом $p(x)$.

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений, в которых будут использоваться следующие обозначения:

$$c_j = \prod_{i=1}^j 2^i = 2^{j(j+1)/2}, \quad S_j^n = \sum_{i=j}^{n-1} 2^i c_i = \sum_{i=j}^{n-1} 2^{i(i+3)/2},$$

$$e_j(x) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{x^i}{i!}, \quad \theta_j(x) = \theta(x) \frac{x^j}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Заметим, что $e_j(x) > 1$ и $\theta_j(x) > 0$ при $x > 0$,

$$\int_0^x e_j(x) dx = e_{j+1}(x) - 1, \quad \int_0^x \theta_j(x) dx = \theta_{j+1}(x).$$

Лемма 1. Пусть на отрезке длиной $\Delta > 0$ выполняется неравенство $|y(x)| \leq M$. Тогда на этом отрезке существуют как возрастающая, так и убывающая последовательности точек ξ_j , $j = 0, \dots, n-1$, для которых выполняются неравенства

$$|y^{(j)}(\xi_j)| \leq M \left(\frac{2^n}{\Delta} \right)^j.$$

Доказательство. Пусть

$$\delta = \frac{\Delta}{2^n - 2}.$$

Для $j = 1, \dots, n-1$ докажем, что на любом подотрезке исходного отрезка длиной $2\delta(2^j - 1)$ найдется точка ξ , в которой выполняется неравенство

$$|y^{(j)}(\xi)| \leq M\delta^{-j}. \quad (2)$$

Воспользуемся методом математической индукции. При $j = 1$ на отрезке длиной 2δ , на концах которого выполняется неравенство $|y(x)| \leq M$, по теореме Лагранжа найдется точка ξ , в которой $|y'(\xi)| \leq 2M/(2\delta) = M\delta^{-1}$.

Пусть для некоторого $j < n-1$ утверждение уже доказано. Докажем его для $j+1 \leq n-1$. Подотрезок длиной $2\delta(2^{j+1} - 1)$ разобьем на три подотрезка длиной соответственно $2\delta(2^j - 1)$, 2δ и $2\delta(2^j - 1)$. На первом и на третьем подотрезках найдем по одной точке, в которой выполняется (2). Расстояние между этими точками не меньше длины второго подотрезка, т.е. 2δ , а разность j -х производных в них по модулю не больше, чем $2M\delta^{-j}$. Поэтому по теореме Лагранжа между ними найдется точка ξ , в которой

$$|y^{(j+1)}(\xi)| \leq \frac{2M\delta^{-j}}{2\delta} = M\delta^{-(j+1)}.$$

Заметим, что при $j = n-1$ подотрезок, фигурирующий в утверждении, имеет самую большую длину, равную Δ . Итак, на исходном отрезке существует последовательность точек ξ_j , $j = 1, \dots, n-1$, для которых выполняется (2). При этом точку с бóльшим номером мы выбирали между двумя точками, подходящими в качестве членов этой последовательности с меньшим номером. Поэтому, двигаясь по j в обратном направлении, можем из двух возможных точек с меньшим номером выбирать левую и тогда получим монотонно возрастающую последовательность $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1}$. Выбирая каждый раз правую, получим убывающую последовательность. В качестве ξ_0 возьмем соответственно левый или правый конец исходного отрезка. Так как $\delta > \Delta/2^n$, то лемма доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть функция $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет неравенствам $y(x) \geq 0$ и $y^{(n)}(x) \leq 0$. Пусть также

$$M = \sup \{y(x) : x \in [a, a']\}, \quad \mu = \inf \{|y^{(n)}(x)| : x \in [b', b]\}, \quad a < a' \leq b' < b.$$

Тогда на отрезке $[b', b]$ выполняется неравенство

$$y(x) \leq Me_n \left(2^n \cdot \frac{x-a}{a'-a} \right) - \mu \theta_n(x-b').$$

Доказательство. Согласно лемме 1 на отрезке $[a, a']$ существуют точки $\xi_{n-1} < \xi_{n-2} < \dots < \xi_0$ такие, что

$$|y^{(j)}(\xi_j)| \leq MK^j, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad \text{где } K = \frac{2^n}{a'-a}.$$

Положим $\xi_n = a$. Обратной индукцией по $j = n, \dots, 0$ докажем, что на $[\xi_j, b]$ выполняется неравенство

$$y^{(j)}(x) \leq MK^j e_{n-j}(K \cdot (x-a)) - \mu \theta_{n-j}(x-b'). \quad (3)$$

При $j = n$ это неравенство превращается в $y^{(n)}(x) \leq 0$ на $[a, b']$ и $y^{(n)}(x) \leq -\mu$ на $[b', b]$, т.е. непосредственно вытекает из условия доказываемой леммы. Если для некоторого j неравенство (3) уже доказано, то, интегрируя по $x \in [\xi_{j-1}, b]$, получим:

$$\begin{aligned} y^{(j-1)}(x) &= y^{(j-1)}(\xi_{j-1}) + \int_{\xi_{j-1}}^x y^{(j)}(x) dx \leq \\ &\leq MK^{j-1} + MK^j \int_a^x e_{n-j}(K \cdot (x-a)) dx - \mu \int_{b'}^x \theta_{n-j}(x-b') dx \leq \\ &\leq MK^{j-1} + MK^{j-1} e_{n-j+1}(K \cdot (x-a)) - MK^{j-1} - \mu \theta_{n-j+1}(x-b') \leq \\ &\leq MK^{j-1} e_{n-(j-1)}(K \cdot (x-a)) - \mu \theta_{n-(j-1)}(x-b'), \end{aligned}$$

т.е. неравенство (3) доказано для $(j-1)$, а значит и для всех $j = 0, \dots, n-1$. В частности, когда $j = 0$ и $x \in [b', b]$, получается утверждение леммы. $\square$

Лемма 3. В условиях и обозначениях леммы 2 имеет место неравенство

$$\mu \leq \frac{Me_n \left(2^n \cdot \frac{b-a}{a'-a} \right)}{\theta_n(b-b')}.$$

Доказательство получается непосредственно из леммы 2 с учетом неотрицательности функции $y(x)$, в частности, в точке b .

Лемма 4. Пусть функция $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет неравенствам $y(x) \geq 0$ и $y^{(n)}(x) \leq 0$, a — середина отрезка $[a, b]$. Тогда справедлива оценка

$$\sup \{y(x) : x \in [a, c]\} \geq \frac{\sup \{y(x) : x \in [c, b]\}}{e_n(2^{n+1})}.$$

Доказательство. Согласно лемме 2 на отрезке $[c, b]$ выполняется неравенство

$$y(x) \leq \sup \{y(x) : x \in [a, c]\} e_n \left(2^n \cdot \frac{b-a}{c-a} \right) = \sup \{y(x) : x \in [a, c]\} e_n(2^{n+1}),$$

откуда непосредственно вытекает лемма 4. $\square$

Лемма 5. Пусть функция $y(x)$ на отрезке I длиной L удовлетворяет неравенству

$$|y^{(j)}(x)| \geq W > 0.$$

Тогда на некотором отрезке $I' \subset I$ длиной $4^{-j}L$ выполняется неравенство

$$|y(x)| \geq (2^{-1-j}L)^j W.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $j = 0$ условие и заключение леммы совпадают. Предположим, для некоторого j утверждение уже доказано. Тогда, если на отрезке I длиной L выполняется неравенство $|y^{(j+1)}(x)| \geq W$, то на некотором отрезке $I' \subset I$ длиной $L' = 4^{-j}L$ выполняется неравенство $|y'(x)| \geq W' = (2^{-1-j}L)^j W$. Поэтому функция $y(x)$ является на отрезке I' монотонной и обращается в нуль не более чем в одной точке этого отрезка. Пусть c — середина отрезка I' . Прделав, если надо, преобразования $y \mapsto -y$ и/или $x \mapsto 2c - x$, можно добиться того, чтобы $y(x)$ была неотрицательной в точке c и возрастала на I' . Тогда на отрезке $[c + L'/4, c + L'/2] \subset I' \subset I$ длиной $L'' = L'/4 = 4^{-(j+1)}L$ выполняется неравенство

$$y(x) \geq W' L'' = (2^{-1-j}L)^j W \cdot 4^{-(j+1)}L = 2^{-j-j^2-2j-2} L^{j+1} W = (2^{-2-j}L)^{j+1} W.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. Пусть на отрезке I длиной δ выполняется условие $p(x) \geq p_* > 0$. Тогда любое определенное на этом отрезке решение $y(x)$ уравнения (1) с $k > 1$ в некоторой точке $x_* \in I$ удовлетворяет неравенству

$$y(x_*) < \left(\frac{Y_{nk}}{p_* \delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad Y_{nk} = 2^{n^2+n+2n^2/(k-1)}. \quad (4)$$

Доказательство. Предположим, что для некоторого решения $y(x)$ неравенство (4) не выполняется ни в одной точке отрезка I . Тогда в силу уравнения (1) на отрезке I выполняется неравенство

$$|y^{(n)}(x)| \geq p_* \left(\frac{Y_{nk}}{p_* \delta^n} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Согласно лемме 5 найдется отрезок $I' \subset I$ длиной $\delta' = 4^{-n}\delta$, на котором выполняется неравенство

$$y(x) \geq (2^{-1-n}\delta)^n p_* \left(\frac{Y_{nk}}{p_* \delta^n} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{Y_{nk}}{p_*(\delta')^n} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Воспользовавшись еще раз уравнением (1) и леммой 5, получим отрезок $I'' \subset I'$ длиной $\delta'' = 4^{-n}\delta'$, на котором выполняется неравенство

$$y(x) \geq \left(\frac{Y_{nk}}{p_*(\delta'')^n} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Повторяя эту операцию, получим последовательность вложенных отрезков длиной $\delta_j \rightarrow 0$, на которых оценка снизу функции $y(x)$ стремится к ∞ при $j \rightarrow \infty$. Таким образом, заданное на конечном отрезке решение уравнения (1) оказывается неограниченным. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Теорема. Пусть $k > 1$, а на отрезке $[a, b]$ выполняется условие $p(x) \geq p_* > 0$. Тогда для любого заданного на этом отрезке положительного решения $y(x)$ уравнения (1) справедлива оценка

$$y(b) \leq A_{nk} p_*^{-\frac{1}{k-1}} (b-a)^{-\frac{n}{k-1}}, \quad A_{nk} = 2^{(2n^2+3n+2n^2/(k-1))/(k-1)} S_0^n e_n (2^{n+1}). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $\delta = (b-a)2^{-n-2}$. Индукцией по $j = 0, \dots, n-1$ докажем, что на любом отрезке $I \subset [a, b]$ длиной $(2^{j+1}-1)\delta$ найдется точка x , в которой $|y^{(j)}(x)| \leq (2/\delta)^j y_*$, где

$$y_* = \frac{A_{nk}}{S_0^n e_n (2^{n+1})} p_*^{-\frac{1}{k-1}} (b-a)^{-\frac{n}{k-1}}.$$

При $j = 0$ это утверждение непосредственно вытекает из леммы 6. Пусть для некоторого j оно уже доказано. Рассмотрим теперь произвольный отрезок длиной $(2^{j+2}-1)\delta$. Разобьем его на три отрезка длиной соответственно $(2^{j+1}-1)\delta$, δ и $(2^{j+1}-1)\delta$. На первом и третьем выберем по точке, в которой

$$|y^{(j)}(x)| \leq \left(\frac{2}{\delta} \right)^j y_*.$$

Так как расстояние между этими точками не меньше δ , то между ними по теореме Лагранжа найдется точка, в которой

$$|y^{(j+1)}(x)| \leq \left(\frac{2}{\delta} \right)^{j+1} y_*.$$

Рассмотрим отрезки $I = \left[\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3} \right]$ и $I' = \left[\frac{a+2b}{3}, b \right]$ и предположим, что теорема не верна. Тогда

$$\sup \{ |y(x)| : x \in I' \} \geq y(b) > y_* S_0^n e_n (2^{n+1}).$$

Для отрезка I докажем индукцией по $j = 0, \dots, n-1$ следующие оценки:

$$\sup \{ |y^{(j)}(x)| : x \in I \} > \frac{y_* S_j^n}{c_j \delta^j}.$$

При $j = 0$, используя лемму 4, получим

$$\sup \{ |y(x)| : x \in I \} \geq \frac{\sup \{ |y(x)| : x \in I' \}}{e_n(2^{n+1})} > y_* S_0^n.$$

Пусть при некотором $j < n - 1$ утверждение уже доказано и $x_j \in I$ — точка, в которой достигается соответствующий максимум. Слева или справа от x_j на расстоянии, не превышающем $(2^{j+1} - 1)\delta < (b - a)/6$, найдется точка $x'_j \in I$, в которой

$$|y^{(j)}(x'_j)| \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^j y_*.$$

Между x_j и x'_j по теореме Лагранжа найдется точка $x_{j+1} \in I$, в которой

$$|y^{(j+1)}(x_{j+1})| > \frac{1}{(2^{j+1} - 1)\delta} \left(\frac{y_* S_j^n}{c_j \delta^j} - \left(\frac{2}{\delta}\right)^j y_* \right) > \frac{y_*(S_j^n - 2^j c_j)}{2^{j+1} c_j \delta^{j+1}} = \frac{y_* S_{j+1}^n}{c_{j+1} \delta^{j+1}}.$$

В частности, при $j = n - 1$ найдется точка $x_{n-1} \in I$, в которой

$$|y^{(n-1)}(x_{n-1})| > \frac{y_* S_{n-1}^n}{c_{n-1} \delta^{n-1}} = \frac{y_* 2^{n-1} c_{n-1}}{c_{n-1} \delta^{n-1}} = \left(\frac{2}{\delta}\right)^{n-1} y_*.$$

И слева, и справа от x_{n-1} на расстоянии, не превышающем $(2^n - 1)\delta < (b - a)/3$, найдутся соответственно точки $x'_j, x''_j \in [a, b]$ (не обязательно из I), в которых

$$|y^{(n-1)}(x)| \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{n-1} y_* < |y^{(n-1)}(x_{n-1})|.$$

Если $y^{(n-1)}(x_{n-1}) > 0$, то

$$y^{(n-1)}(x'_j) < y^{(n-1)}(x_{n-1}).$$

Если же $y^{(n-1)}(x_{n-1}) < 0$, то

$$y^{(n-1)}(x''_j) > y^{(n-1)}(x_{n-1}).$$

В обоих случаях получаем противоречие с тем, что положительное решение $y(x)$ уравнения (1) должно иметь отрицательную n -ю производную. Теорема доказана. $\square$

Следствие. Пусть $k > 1$, а условие $p(x) \geq p_* > 0$ выполняется на неограниченном слева интервале. Тогда на этом интервале не существует отличных от нуля положительных решений уравнения (1).

Доказательство. Так как любую точку неограниченного слева интервала можно считать правым концом лежащего в этом интервале отрезка сколь угодно большой длины, то согласно доказанной теореме значение положительного решения в этой точке можно оценить сверху сколь угодно малой величиной. Поэтому это решение тождественно равно нулю. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асташова И. В. О качественных свойствах решений уравнений типа Эмдена—Фаулера // Усп. мат. наук. — 1996. — 51, № 5. — С. 185.
2. Асташова И. В. О равномерных оценках решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Фундам. прикл. мат. (в печати).
3. Кондратьев В. А. О качественных свойствах решений полулинейных эллиптических уравнений // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 1991. — 16. — С. 186–190.
4. Astashova I. V. Estimates of solutions to one-dimensional Schrödinger equation // Proc. 3 Int. ISAAC Congr. — Singapore: World Scientific, 2003. — 2. — С. 955–960.

И. В. Асташова

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики

E-mail: ast@diffiety.ac.ru

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2005 г. С. И. БЕЗРОДНЫХ, В. И. ВЛАСОВ

Аннотация. Рассмотрена краевая задача для сингулярно возмущенной системы трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающая при моделировании взаимодействия физических полей в полупроводниковом диоде. Предложен высокоточный метод решения этой задачи, основанный на сочетании операторного метода Ньютона и метода продолжения по параметру. При этом производная Фреше, функция Грина соответствующего дифференциального уравнения и начальное приближение найдены в явном аналитическом виде. Численная реализация подтвердила высокую эффективность и сверхэкспоненциальную скорость сходимости предложенного метода.

1. Постановка задачи. Рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\Psi(x)$, $P(x)$, $N(x)$, принадлежащих классу $\mathcal{B} := C^2[-1, 0] \cap C^2[0, 1] \cap C^1[-1, 1]$:

$$\varepsilon^2 \Psi'' + P - N - \operatorname{sign} x = 0, \quad (1)$$

$$\mathcal{Q}(\Psi)[P] := P'' + \Psi' P' + \Psi'' P = \delta_P R, \quad (2)$$

$$\mathcal{Q}(-\Psi)[N] = N'' - \Psi' N' - \Psi'' N = \delta_N R. \quad (3)$$

Искомые функции удовлетворяют на концах отрезка $[-1, 1]$ граничным условиям

$$\Psi(-1) = -V, \quad \Psi(1) = V; \quad P(-1) = 0, \quad P(1) = 1; \quad N(-1) = 1, \quad N(1) = 0. \quad (4)$$

Функция $R(x)$, фигурирующая в (2), (3), связана с $P(x)$ и $N(x)$ нелинейной зависимостью:

$$R = \mathcal{R}[P, N] := \frac{PN - N_i^2}{N + N_i + \tau(P + N_i)}. \quad (5)$$

Параметры ε , δ_P , δ_N , τ , N_i и V из соотношений (1)–(3), (5) безразмерны и лежат в следующих диапазонах:

$$\varepsilon \in [10^{-4}, 10^{-2}], \quad \delta_P \simeq \delta_N \in [10^{-4}, 10^{-2}], \quad \tau \in [0.1, 10], \quad N_i \simeq 10^{-9}, \quad V \in [-100, 100]. \quad (6)$$

Задача (1)–(5) является сингулярно возмущенной, поскольку множителем при старшей производной в уравнении (1) служит малый параметр ε^2 .

Уравнения (1)–(3) описывают одномерную модель полупроводникового диода в диффузионно-дрейфовом приближении [3]; функция Ψ представляет собой безразмерный электрический потенциал, а P и N — соответственно безразмерные плотности дырок и электронов. Функция R описывает генерацию и рекомбинацию электронов и дырок в модели Шокли—Рида—Холла [3]; V является безразмерной разностью потенциалов, подаваемой на диод.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00723), гранта Фонда содействия отечественной науке и программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН «Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач» (ГК 10002-251/ОМН-03/026-024/240603-805 от 24.06.2003).

2. Сведение к системе интегро-дифференциального и интегрального уравнений и подход к ее решению. Заметим, что оператор $\mathcal{Q}(\Psi)[P]$ из (2) линеен относительно P . Выпишем для него функцию Грина $\mathbf{P}(\Psi; x, \xi)$, соответствующую однородным условиям Дирихле на концах отрезка, т.е. $P(-1) = P(1) = 0$, и аналогичную функцию Грина $\mathbf{N}(\Psi; x, \xi)$ для оператора $\mathcal{Q}(-\Psi)$ из уравнения (3). Первая из них дается формулой $\mathbf{P}(\Psi; x, \xi) = \mathbf{P}^\pm(\Psi; x, \xi)$, где верхний индекс « $-$ » соответствует условию $x \in [-1, \xi]$, а « $+$ » — условию $x \in [\xi, 1]$; функции $\mathbf{P}^\pm$ определяются выражениями

$$\mathbf{P}^-(\Psi; x, \xi) := e^{-\Psi(x)} E_{-1}^\xi[\Psi] \frac{E_{-1}^x[\Psi]}{E[\Psi]}, \quad \mathbf{P}^+(\Psi; x, \xi) := e^{-\Psi(x)} E_1^\xi[\Psi] \frac{E_1^x[\Psi]}{E[\Psi]},$$

здесь использованы обозначения

$$E_\alpha^\beta[u] := \int_\alpha^\beta \exp[u(t)] dt, \quad E[u] := E_{-1}^1[u].$$

Вторая функция Грина дается соотношением $\mathbf{N}(\Psi; x, \xi) = \mathbf{N}^\pm(\Psi; x, \xi)$, где $\mathbf{N}^\pm$ определяется равенством

$$\mathbf{N}^\pm(\Psi; x, \xi) = \mathbf{P}^\pm(-\Psi; x, \xi).$$

Заметим, что для других вводимых ниже функций, зависящих от x и ξ , верхние индексы « $+$ » и « $-$ » будут выбираться по тому же правилу.

Используя функции Грина $\mathbf{P}$ и $\mathbf{N}$ и вводя для свертки обозначение

$$\langle g(x, \xi) * f(\xi) \rangle := \int_{-1}^1 g(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

получаем из уравнений (2), (3) следующие представления для P и N через функции Ψ и R :

$$P(x) = \mathcal{P}[\Psi, R] := \delta_P \langle \mathbf{P}(\Psi; x, \xi) * R(\xi) \rangle + e^{V-\Psi(x)} \frac{E_{-1}^x[\Psi]}{E[\Psi]}, \quad (7)$$

$$N(x) = \mathcal{N}[\Psi, R] := \delta_N \langle \mathbf{N}(\Psi; x, \xi) * R(\xi) \rangle + e^{V+\Psi(x)} \frac{E_x^1[-\Psi]}{E[-\Psi]}, \quad (8)$$

первые члены в правых частях равенств (7) и (8) представляют собой решения уравнений (2), (3) с однородными граничными условиями, а вторые — решения соответствующих однородных уравнений с неоднородными граничными условиями (4).

Подставляя $P = \mathcal{P}[\Psi, R]$ и $N = \mathcal{N}[\Psi, R]$ из формул (7), (8) в уравнение (1), приходим к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению относительно Ψ , которое вместе с граничными условиями из (4) составляет краевую задачу

$$\mathcal{L}(R)[\Psi] = 0, \quad \Psi(-1) = -V, \quad \Psi(1) = V; \quad (9)$$

здесь интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}(R)[\Psi]$, действующий на функцию $\Psi(x)$, определяется по формуле

$$\mathcal{L}(R)[\Psi] := \varepsilon^2 \Psi''(x) - \text{sign } x + \mathcal{S}[\Psi] + \mathcal{T}(R)[\Psi], \quad (10)$$

где введены обозначения

$$\mathcal{S}[\Psi] := e^{V-\Psi} \frac{E_{-1}^x[\Psi]}{E[\Psi]} - e^{V+\Psi} \frac{E_x^1[-\Psi]}{E[-\Psi]},$$

$$\mathcal{T}(R)[\Psi] := \delta_P \langle \mathbf{P}(\Psi; x, \xi) * R(\xi) \rangle - \delta_N \langle \mathbf{N}(\Psi; x, \xi) * R(\xi) \rangle.$$

Отметим, что в уравнении (9) функция $R(x)$ играет роль параметра.

Подставляя $P = \mathcal{P}[\Psi, R]$ и $N = \mathcal{N}[\Psi, R]$ из формул (7) и (8) в (5), получаем интегральное уравнение для функции $R(x)$:

$$\mathcal{K}(\Psi)[R] := R - \mathcal{R}[\mathcal{P}[\Psi, R], \mathcal{N}[\Psi, R]] = 0, \quad (11)$$

в котором роль параметра играет функция $\Psi(x)$.

Таким образом, задача (1)–(5) для тройки функций $\{\Psi, P, N\}_V$ сведена к краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения (9) и интегрального уравнения (11) относительно пары функций $\{\Psi, R\}_V$.

Для решения задачи (9), (11) предложен метод, основанный на итерационном (операторном) процессе Ньютона [1, 4, 5] в сочетании с методом [6] продолжения по параметру V от тех его значений, для которых начальное приближение строится явно (см. об этом ниже), до его произвольных значений. Процесс Ньютона имеет следующий вид:

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n - \mathbf{L}(\Psi_n, R_n) \left[\mathcal{L}(R_n)[\Psi_n] \right], \quad (12)$$

$$R_{n+1} = R_n - \mathbf{K}(\Psi_n, R_n) \left[\mathcal{K}(\Psi_n)[R_n] \right], \quad (13)$$

где $n = 0, 1, \dots$; здесь $\mathbf{L}$ и $\mathbf{K}$ — операторы, обратные к производной Фреше соответственно для операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{K}$. Заметим, что операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{K}$ были построены в аналитическом виде (первый с помощью метода ВКБ [7]), причем при реализации процесса (12), (13) удалось избежать численного дифференцирования.

В качестве начального приближения для процесса Ньютона (12), (13) при достаточно больших отрицательных V , т.е. при V , меньших некоторого $\tilde{V}$, берутся функции Ψ_0 и $R_0 = \mathcal{R}[P_0, N_0]$, где $\{\Psi_0, P_0, N_0\}$ — решение задачи, соответствующей бестоковой модели, рассмотренной в п. 3. Такая модель и постановка соответствующей краевой задачи дана в п. 3, а решение этой задачи получено в п. 4 в явном аналитическом виде.

3. Постановка задачи для бестоковой модели и оценка отличия ее решения от точного.

Если вместо диффузионно-дрейфовой модели [3], лежащей в основе вывода уравнений (1)–(3), принять модель, основанную на условии отсутствия электронного и дырочного токов, то вместо краевой задачи (1)–(5) возникает (см. [2]) следующая задача для Ψ_0 :

$$\varepsilon^2 \Psi_0''(x) + \frac{\text{sh } \Psi_0(x)}{\text{sh } V} - \text{sign } x = 0; \quad \Psi_0(-1) = -V, \quad \Psi_0(1) = V, \quad (14)$$

а P_0 и N_0 выражаются через Ψ_0 по формулам

$$P_0(x) = -\frac{e^{-\Psi_0(x)}}{2 \text{sh } V}, \quad N_0(x) = -\frac{e^{\Psi_0(x)}}{2 \text{sh } V}, \quad (15)$$

где, напомним, $V < 0$.

Теорема 1. *Решение $\Psi_0(x)$ задачи (14), где $V < 0$, существует и единственно в классе $\mathcal{B}$. Функция $x(\Psi_0)$, обратная к ее решению, представима в следующем виде:*

$$x(\Psi_0) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \int_0^{\Psi_0} \frac{dt}{\sqrt{\Omega(V, -|t|) + \alpha}},$$

где параметр $\alpha > 0$ есть решение уравнения

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \int_V^0 \left[\Omega(V, t) + \alpha \right]^{-1/2} dt = 1, \quad (16)$$

а $\Omega(V, t)$ определяется по формуле

$$\Omega(V, t) := t - V - \frac{\text{ch } t - \text{ch } V}{\text{sh } V}.$$

При условии, что V лежит в диапазоне $[-100, \tilde{V}]$, а остальные параметры подчинены условиям (6), с помощью предложенного метода могут быть установлены следующие оценки между точным решением $\{\Psi, P, N\}_V$ задачи (1)–(5) и решением $\{\Psi_0, P_0, N_0\}$, соответствующим описанной

бестоковой модели:

$$\begin{aligned}\max_{x \in [-1,1]} |\Psi(x) - \Psi_0(x)| &< C_1 e^{2V}, \\ \max_{x \in [-1,1]} |P(x) - P_0(x)| &< C_2 e^{2V}, \\ \max_{x \in [-1,1]} |N(x) - N_0(x)| &< C_3 e^{2V}.\end{aligned}$$

4. Построение начального приближения. Как будет показано ниже, решение Ψ_0 задачи (14) мало отличается от функции $u \in C^1(-\infty, \infty) \cap C^2(-\infty, 0] \cap C^2[0, \infty)$ — решения аналогичной задачи на бесконечном интервале:

$$\varepsilon^2 u''(x) = \operatorname{sign} x - \frac{\operatorname{sh} u(x)}{\operatorname{sh} V}, \quad x \in (-\infty, \infty); \quad u(-\infty) = -V, \quad u(\infty) = V; \quad (17)$$

при $[-100, \tilde{V}]$, а именно, при указанных V , справедлива следующая оценка:

$$\max_{x \in [-1,1]} |\Psi_0(x) - u(x)| \leq C \exp(-\delta^{-1}), \quad \delta := \varepsilon^{-1} \sqrt{-\operatorname{cth} V}. \quad (18)$$

Отметим, что переход от задачи (14) к задаче (17), во-первых, избавляет от необходимости численно решать сложное уравнение (16), а во-вторых, позволяет (как будет видно далее) в удобном виде представлять ее решение u , которое в силу (18) отличается от Ψ_0 на малую величину порядка $\exp(-\delta^{-1})$, $\delta = \varepsilon \sqrt{\operatorname{th}(-V)}$, где $\varepsilon \in [10^{-4}, 10^{-2}]$.

Теорема 2. *Решение $u(x)$ задачи (17), где $V < 0$, существует и единственно в классе $C^1(-\infty, \infty) \cap C^2(-\infty, 0] \cap C^2[0, \infty)$ и является строго монотонно убывающей функцией на интервале $(-\infty, \infty)$. Обратная функция $x(u)$ представляется в виде*

$$x(u) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{\Omega(V, -|t|)}}.$$

Эффективное представление функции $u(x)$ на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ основывается на ее нечетности и разложениях в ряды, вид которых и области их сходимости (в совокупности покрывающие правую полуось $\mathbb{R}^+$) определяет следующая теорема.

Теорема 3. *Для решения $u(x)$ задачи (14) справедливы следующие утверждения.*

1) *Функция $u(x)$ представима на множестве $\{x \in \mathbb{R}^+ \cap [\operatorname{Re} P^-, +\infty]\}$ в виде ряда*

$$u(x) = V + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(n \frac{x_0 - x}{\delta}\right), \quad (19)$$

который можно дифференцировать любое число раз на множестве

$$\{x \in \mathbb{R}^+ \cap (\operatorname{Re} P^-, +\infty)\}.$$

2) *Функция $u(x)$ представима на множестве $\{x \in [0, R]\}$ в виде ряда*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n, \quad (20)$$

который можно дифференцировать любое число раз на множестве $\{x \in [0, R]\}$.

3) *Функция $u(x)$ представима на множестве $\{x : |x - x_*| < R_*, x \in \mathbb{R}^+\}$, где $x_* \in \mathbb{R}^+$, в виде ряда*

$$u(x) = u_* + \sum_{n=1}^{\infty} E_n (x - x_*)^n, \quad (21)$$

где его можно дифференцировать любое число раз.

Для того чтобы определить фигурирующие в теореме 3 величины P^- , x_0 , R , R_* , введем аналитическую в полосе $\Pi := \{w = u + iv : 0 < \operatorname{Im} v < \pi\}$ функцию $z = \varphi(w)$ по формуле

$$\varphi(w) := -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{\Omega(V, t)}},$$

где путь интегрирования лежит в Π , и обозначим через λ образ прямой $\{\operatorname{Im} w = \pi\}$ при отображении $\varphi(w)$. Положим теперь

$$P^+ := \varphi(+\infty), \quad P^- := \varphi(-\infty), \quad R := \min_{z \in \lambda} |z|, \quad R_* := \min_{z \in \lambda} |z - x_*|.$$

Величина x_0 определяется равенством $x_0 := \varphi(w_0)$, где w_0 вычисляется через коэффициенты ряда (19) по формуле

$$w_0 := V + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Коэффициенты b_n в разложении (19) даются равенствами

$$b_1 = 1, \quad b_n = -\sum_{k=1}^{n-1} b_k F_{k,n}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

в которых величины $F_{1,k}$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$F_{1,k} = \varepsilon_k, \quad n \geq 1; \quad F_{n,k} = \sum_{m=n-1}^{k-1} F_{1,k-m} F_{n-1,m}, \quad k \geq 2, \quad n \geq k.$$

Здесь ε_k определяются выражениями

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_1^k}{k!} E_{k,n},$$

где $E_{k,n}$ находятся из рекуррентных соотношений

$$E_{1,m} = \frac{\sigma_m}{m\sigma_1}, \quad E_{k,m} = \sum_{n=k-1}^{m-1} E_{1,m-n} E_{k-1,n}; \quad k \geq 2, \quad m \geq k,$$

а σ_n — из соотношений

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = \frac{\delta_1}{2}, \quad \sigma_m = \frac{1}{2} \left[\delta_m - \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_k \sigma_{m-k} \right], \quad m = 2, 3, \dots,$$

в которых δ_k , в свою очередь, определяются по формулам

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \omega_{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

через величины ω_k :

$$\omega_0 = 1; \quad \omega_{2m-1} = -\frac{2 \operatorname{th}(-V)}{(2m+1)!}, \quad \omega_{2m} = \frac{2}{(2m+2)!}, \quad m \geq 1.$$

Коэффициенты A_n в разложении (20) представляются в виде

$$A_n = (-1)^n a_n (\sqrt{2T} \varepsilon^{-1})^n, \quad T := \operatorname{th} \frac{V}{2} - V,$$

где коэффициенты a_n вычисляются по рекуррентным формулам

$$a_1 = 1, \quad a_n = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k G_{k,n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Здесь $G_{k,n}$ находятся из рекуррентных соотношений

$$G_{1,n} = \frac{s_{n-1}}{n}, \quad n \geq 1; \quad G_{k,n} = \sum_{m=k-1}^{n-1} G_{1,n-m} G_{k-1,m}; \quad k \geq 2, \quad n \geq k,$$

а s_n — из соотношений

$$s_0 = 1, \quad s_1 = \frac{d_1}{2}; \quad s_n = \frac{1}{2} \left[d_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k s_{n-k} \right], \quad n = 2, 3, \dots,$$

в которых d_n , в свою очередь, определяются по формулам

$$d_0 = 1, \quad d_n = - \sum_{k=0}^{n-1} d_k c_{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

через величины c_k :

$$c_0 = 1, \quad c_1 = T^{-1}; \quad c_{2m} = [(2n)! T \operatorname{sh}(-V)]^{-1}, \quad c_{2m+1} = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Коэффициенты E_n в разложении (21) представляются в виде

$$E_n = (-1)^n e_n (\sqrt{2B\varepsilon}^{-1})^n, \quad B := u_* - V - \frac{\operatorname{ch} u_* - \operatorname{ch} V}{\operatorname{sh} V}, \quad u_* := \varphi(x_*),$$

где коэффициенты e_n вычисляются по рекуррентным формулам

$$e_1 = 1, \quad e_m = - \sum_{k=1}^{m-1} e_k H_{k,m}, \quad m = 2, 3, \dots,$$

в которых величины $H_{k,m}$ даются формулами

$$H_{1,m} = \frac{f_{m-1}}{m}, \quad m \geq 1; \quad H_{k,m} = \sum_{n=k-1}^{m-1} H_{1,m-n} H_{k-1,n}; \quad k \geq 2, \quad m \geq k.$$

Входящие в них коэффициенты f_m определяются рекуррентными соотношениями

$$f_0 = 1, \quad f_1 = \frac{g_1}{2}; \quad f_m = \frac{1}{2} \left[g_m - \sum_{k=1}^{m-1} f_k f_{m-k} \right], \quad m = 2, 3, \dots,$$

в которых величины g_m , в свою очередь, выражаются через h_m :

$$g_0 = 1, \quad g_m = - \sum_{k=0}^{m-1} g_k h_{m-k}, \quad m = 1, 2, \dots;$$

последние же вычисляются по формулам

$$h_0 = 1, \quad h_1 = \frac{\operatorname{sh} V - \operatorname{sh} u_*}{B \operatorname{sh} V}, \quad h_{2m} = - \frac{\operatorname{ch} u_*}{(2m)! B \operatorname{sh} V}, \quad h_{2m+1} = - \frac{\operatorname{sh} u_*}{(2m+1)! B \operatorname{sh} V}, \quad m \geq 1.$$

5. Итерационный метод. Для решения задачи (9), (11) относительно пары функций $\{\Psi, R\}_V$ предложен следующий итерационный алгоритм. На нулевом шаге строится начальное приближение $\{\Psi_0, R_0\}_V$; способ построения такого приближения при $V < \tilde{V}$ описан в п. 4, а для произвольных V — в п. 7. На первом и следующих шагах алгоритма находятся функция $\Psi_n(x)$ и $R_n(x)$ при помощи процесса Ньютона (12), (13). При этом функции $P_n(x)$ и $N_n(x)$ на каждом шаге алгоритма находятся через полученные $\Psi_n(x)$ и $R_n(x)$ по формулам, аналогичным (7), (8):

$$P_n = \mathcal{P}[\Psi_n, R_n], \quad N_n = \mathcal{N}[\Psi_n, R_n], \quad n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Для того чтобы построить операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{K}$, фигурирующие в процессе Ньютона (12), (13), приведем сначала вид обратных к ним, т.е. производных Фреше операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{K}$. Производная Фреше $\mathcal{L}'(u, f)[v]$ оператора $\mathcal{L}(f)[u]$ из (10) имеет вид

$$\mathcal{L}'(u, f)[v] = \varepsilon^2 v''(x) - \mathcal{F}(u, f; x)v(x) + \mathcal{H}(u, f)[v]. \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u, f; x) &:= e^{V-u} \frac{E_{-1}^x[u]}{E[u]} + e^{V+u} \frac{E_x^1[-u]}{E[-u]} + \delta_P \langle \mathbf{P}(u; x, \xi) * f(\xi) \rangle + \delta_N \langle \mathbf{N}(u; x, \xi) * f(\xi) \rangle, \\ \mathcal{H}(u, f)[v] &:= e^{V-u(x)} \frac{E_{-1}^x[u; v]E[u] - E_{-1}^x[u]E[u; v]}{(E[u])^2} + \\ &+ e^{V+u(x)} \frac{E_x^1[-u; v]E[-u] - E_x^1[-u]E[-u; v]}{(E[-u])^2} + \\ &+ \delta_P \langle p(u, v; x, \xi) \mathbf{P}(u; x, \xi) * f(\xi) \rangle + \delta_N \langle n(u, v; x, \xi) \mathbf{N}(u; x, \xi) * f(\xi) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения

$$E_\alpha^\beta[u; v] := \int_\alpha^\beta v(t) e^{u(t)} dt, \quad E[u; v] := E_{-1}^1[u; v],$$

функции p и n определяются выражениями

$$\begin{aligned} p^-(u, v; x, \xi) &= \frac{E_{-1}^x[u; v]}{E_{-1}^x[u]} + \frac{E_\xi^1[u; v]}{E_\xi^1[u]} - \frac{E[u; v]}{E[u]}, \\ p^+(u, v; x, \xi) &= \frac{E_1^x[u; v]}{E_1^x[u]} + \frac{E_{-1}^\xi[u; v]}{E_{-1}^\xi[u]} - \frac{E[u; v]}{E[u]}, \\ n^-(u, v; x, \xi) &= p^-(-u, v; x, \xi), \quad n^+(u, v; x, \xi) = p^+(-u, v; x, \xi). \end{aligned}$$

Производная Фреше $\mathcal{K}'(u, f)[v]$ оператора $\mathcal{K}(u)[f]$ из формулы (11) имеет вид

$$\mathcal{K}'(u, f)[v] = v(x) - \delta_p \mathcal{A}(u, f)[v],$$

где оператор $\mathcal{A}(u, f)[v]$ определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, f)[v] &:= \left[\mathcal{N}[u, f] \langle \mathbf{P}(u; x, \xi) * v(\xi) \rangle + (\delta_n / \delta_p) \mathcal{P}[u, f] \langle \mathbf{N}(u; x, \xi) * v(\xi) \rangle - \right. \\ &- \frac{\mathcal{P}[u, f] \mathcal{N}[u, f] - N_i^2}{\mathcal{N}[u, f] + N_i + \tau(\mathcal{P}[u, f] + N_i)} \left(\langle \mathbf{P}(u; x, \xi) * v(\xi) \rangle + \frac{\tau \delta_n}{\delta_p} \langle \mathbf{N}(u; x, \xi) * v(\xi) \rangle \right) \Big] \times \\ &\times \left[\mathcal{N}[u, f] + N_i + \tau(\mathcal{P}[u, f] + N_i) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\tilde{\Psi}_{n+1}$ разность функций Ψ_{n+1} и Ψ_n , т.е. $\tilde{\Psi}_{n+1} := \Psi_{n+1} - \Psi_n$. Построение оператора $\mathbf{L}$, фигурирующего в процессе Ньютона (12), эквивалентно решению следующей краевой задачи относительно $\tilde{\Psi}_{n+1}$:

$$\mathcal{L}'(\Psi_n, R_n)[\tilde{\Psi}_{n+1}] = -\mathcal{L}(R_n)[\Psi_n], \quad \tilde{\Psi}_{n+1}(\pm 1) = 0. \quad (24)$$

Функции $\tilde{\Psi}_{n+1}$ будем искать в виде ряда

$$\tilde{\Psi}_{n+1}^{(m)} = \sum_{m=0}^{\infty} \chi_{n+1}^{(m)},$$

члены $\chi_{n+1}^{(m)}$ которого являются решением следующих краевых задач:

$$\mathcal{D}(\Psi_n, R_n)[\chi_{n+1}^{(0)}] = -\mathcal{L}(R_n)[\Psi_n], \quad \chi_{n+1}^{(0)}(\pm 1) = 0, \quad (25)$$

$$\mathcal{D}(\Psi_n, R_n)[\chi_{n+1}^{(m)}] = -\mathcal{H}(\Psi_n, R_n)[\chi_{n+1}^{(j-1)}], \quad \chi_{n+1}^{(m)}(\pm 1) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где оператор $\mathcal{D}(u, f)[v]$ дается равенством

$$\mathcal{D}(u, f)[v] := \varepsilon^2 v''(x) - \mathcal{F}(u, f; x)v(x).$$

Решения $\chi_{n+1}^{(m)}$ задач (25), (26) представим в виде свертки

$$\begin{aligned}\chi_{n+1}^{(0)} &= -\left\langle \mathbf{G}(\Psi_n, R_n; x, \xi) * \mathcal{L}(R_n)[\Psi_n] \right\rangle, \\ \chi_{n+1}^{(m)} &= -\left\langle \mathbf{G}(\Psi_n, R_n; x, \xi) * \mathcal{H}(\Psi_n, R_n)[\chi_{n+1}^{(j-1)}] \right\rangle, \quad m = 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

правых частей уравнений (25), (26) с функцией Грина $\mathbf{G}(u, f; x, \xi)$ оператора $\mathcal{D}(u, f)[v]$ с однородными условиями Дирихле $v(\pm 1) = 0$. Поскольку параметр ε мал, то для вычислительных целей достаточно использовать вместо функции $\mathbf{G}$ главный член $\mathbf{G}_0$ ее асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$, вид которого, полученный методом ВКБ [7], таков:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_0^-(x, \xi) &= -\varepsilon^{-1} [\mathcal{F}(x)\mathcal{F}(\xi)]^{-1/4} \frac{\text{sh}(\mathcal{I}_{-1}^x) \text{sh}(\mathcal{I}_{\xi}^1)}{\text{sh}(\mathcal{I})}, \\ \mathbf{G}_0^+(x, \xi) &= \mathbf{G}_0^-(\xi, x), \quad \mathcal{I}_{\alpha}^{\beta} := \varepsilon^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\mathcal{F}(t)} dt, \quad \mathcal{I} := \mathcal{I}_{-1}^1;\end{aligned}$$

в этих формулах для краткости $\mathbf{G}_0^{\pm}(u, f; x, \xi)$ заменено на $\mathbf{G}_0^{\pm}(x, \xi)$, а $\mathcal{F}(u, f; x)$ — на $\mathcal{F}(x)$.

Обозначим через $\tilde{R}_{n+1}$ разность функций R_{n+1} и R_n , т.е. $\tilde{R}_{n+1} := R_{n+1} - R_n$. Построение оператора $\mathbf{K}$, фигурирующего в процессе Ньютона (13), эквивалентно решению следующего уравнения относительно $\tilde{R}_{n+1}$:

$$\mathcal{K}'(\Psi_n, R_n)[\tilde{R}_{n+1}] = -\mathcal{K}(\Psi_n)[R_n].$$

Функции R_{n+1} будем искать в виде ряда

$$\tilde{R}_{n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_p^m \eta_{n+1}^{(m)},$$

в котором функции $\eta_{n+1}^{(m)}$ даются следующими формулами:

$$\eta_{n+1}^{(0)} = -\mathcal{K}(\Psi_n)[R_n]; \quad \eta_{n+1}^{(m)} = \mathcal{A}(\Psi_n)[\eta_{n+1}^{(j-1)}], \quad m = 1, 2, \dots$$

Таким образом, при $V < \tilde{V}$ решение $\{\Psi, P, N\}_V$ задачи (1)–(5) представляется в виде пределов последовательностей

$$\Psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n, \quad P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n, \quad N = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n.$$

Теорема 4. *Существует такое $\tilde{V} < 0$, что при всех $V < \tilde{V}$ решение $\{\Psi, P, N\}_V$ задачи (1)–(5) существует в классе $\mathcal{B}$ и единственно в окрестности $\{\Psi_0, P_0, N_0\}_V$, где Ψ_0 — решение задачи (14), а P_0 и N_0 определяются по формулам (15). Последовательность $\{\Psi_n, P_n, N_n\}_V$, получаемая из итерационного процесса (12), (13), (22) с начальным приближением $\{\Psi_0, P_0, N_0\}_V$, сходится к решению задачи (1)–(5).*

6. Исключение операции дифференцирования. Отметим, что при осуществлении описанного в п. 5 алгоритма появляется необходимость вычисления выражения $\mathcal{L}(R_n)[\Psi_n]$, фигурирующего в формулах (12), (25). Если для этого вычисления непосредственно использовать определение (10) оператора $\mathcal{L}$, то возникают существенные трудности, связанные с численным дифференцированием быстро изменяющейся функции Ψ . Если же для этой цели использовать формулу (12) с дифференцированием по переменной x и редукцией по индексу n , то возникает необходимость вычисления сингулярных интегралов, что также приводит к большим трудностям. В данной работе предложен способ нахождения $\mathcal{L}(R_n)[\Psi_n]$, основанный на явном вычислении величины $\varepsilon^2 \Psi_n''$

при помощи уравнения (24), исключающий операцию дифференцирования функции Ψ_n . Приведем соответствующие формулы для $\mathcal{L}(R_n)[\Psi_n]$, вытекающие из (10), (14), (24):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(R_0)[\Psi_0] &= -\frac{\text{sh } \Psi_0}{\text{sh } V} + \mathcal{S}[\Psi_0] + \mathcal{T}(R_0)[\Psi_0], \\ \mathcal{L}(R_n)[\Psi_n] &= \mathcal{S}[\Psi_n] - \mathcal{S}[\Psi_{n-1}] + \mathcal{T}(R_n)[\Psi_n] - \mathcal{T}(R_{n-1})[\Psi_{n-1}] + \\ &\quad + \mathcal{F}(\Psi_{n-1}, R_{n-1}; x)[\tilde{\Psi}_n] - \mathcal{H}(\Psi_{n-1}, R_{n-1})[\tilde{\Psi}_n], \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

7. Метод продолжения по параметру. В соответствии с теоремой 4, при $V = V_* < \tilde{V}$ решение задачи (1)–(5) строится при помощи итерационного процесса, описанного в п. 5, и начального приближения $\{\Psi_0, P_0, N_0\}_{V_*}$, построенного в пп. 3, 4.

Для того чтобы получить решение этой задачи при $V = V^* > \tilde{V}$, разобьем отрезок $[V_*, V^*]$ точками V_m , $m = \overline{0, M}$, так, что

$$V_* =: V_0 < V_1 < \dots < V_m < \dots < V_M := V^*, \quad (27)$$

и обозначим через $\{\Psi, P, N\}_{V_m}$ решение задачи (1)–(5), соответствующее $V = V_m$ и состоящее из функций $\Psi(V_m)$, $P(V_m)$, $N(V_m)$. Если решение известно для $V = V_{m-1}$, то, основываясь на нем, можно получить решение $\{\Psi(V_m), P(V_m), N(V_m)\}$ при помощи метода, изложенного в п. 5. Для этого возьмем в качестве начального приближения $\{\Psi_0, P_0, N_0\}_{V_m}$ следующие функции:

$$\Psi_0(V_m) := \Psi(V_{m-1}) + (V_m - V_{m-1})x, \quad (28)$$

$$P_0(V_m) := P(V_{m-1}), \quad N_0(V_m) := N(V_{m-1}), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (29)$$

Тогда при помощи итерационного процесса (12), (13) с заменой Ψ_n , R_n на $\Psi_n(V_m)$, $R_n(V_m)$ и начальными приближениями (28), (29) получим в пределе

$$\Psi(V_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(V_m), \quad R(V_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(V_m). \quad (30)$$

Функции $P(V_m)$ и $N(V_m)$ получаются подстановкой $\Psi(V_m)$ и $R(V_m)$ в (7) и (8), т.е.

$$P(V_m) = \mathcal{P}[\Psi(V_m), R(V_m)], \quad N(V_m) = \mathcal{N}[\Psi(V_m), R(V_m)]. \quad (31)$$

Поскольку решение $\{\Psi, P, N\}_{V_0}$ известно, то такая процедура дает продолжение решения от меньших m к большим. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть решение $\{\Psi, P, N\}_{V_*}$ при $V_* < V_0$ известно. Тогда при достаточно мелком разбиении (27) алгоритм (30), (31) с начальным приближением (28), (29) дает на M -м шаге продолжения по t решение $\{\Psi, P, N\}_{V^*}$ задачи (1)–(5) при $V = V^*$. Для любого V решение задачи (1)–(5) существует в классе $\mathcal{B}$ и единственно в окрестности начального приближения (28), (29).

Изложенный метод решения задачи (1)–(5) был программно реализован. Получены численные результаты для широкого диапазона изменения входных параметров. Метод показал высокую эффективность, в том числе сверхэкспоненциальную скорость сходимости, при всех рассмотренных значениях входных параметров. При использовании четырех итераций метода (12), (13) решение было получено с относительной погрешностью 10^{-15} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
2. Безродных С. И., Власов В. И. Краевая задача для моделирования физических полей в полупроводниковом диоде// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — - 2004. — 44, № 12. — С. 2220–2251.
3. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. — М.: Мир, 1984.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
6. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. — М.: МФТИ, 1994.
7. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). — М.: Мир, 1965.

С. И. Безродных, В. И. Власов

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

E-mail: vlasov@ccas.ru

НЕРАВЕНСТВА ФУКСА ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

© 2005 г. **Р. Р. ГОНЦОВ**

Аннотация. Приводятся верхняя и нижняя оценки суммы всех показателей системы линейных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками, заданной на сфере Римана.

Введение. Настоящая работа посвящена одному вопросу аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \quad (1)$$

из p линейных дифференциальных уравнений с матрицей $B(z)$ мероморфных на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ коэффициентов, голоморфных вне множества особых точек $a_1, \dots, a_n$. Будем считать, что все особенности данной системы — *регулярные* (особая точка a_i называется регулярной, если любое решение системы при приближении аргумента z к точке a_i по любой секториальной окрестности с вершиной в точке a_i и раствора меньше 2π растет не быстрее некоторой степени величины $|z - a_i|$).

Пусть разложение в ряд Лорана матрицы $B(z)$ в окрестности особой точки $a_i \neq \infty$ имеет вид

$$B(z) = \frac{B_{-r_i-1}^i}{(z - a_i)^{r_i+1}} + \dots + \frac{B_{-1}^i}{z - a_i} + B_0^i + \dots, \quad B_{-r_i-1}^i \neq 0 \quad (2)$$

(если $a_i = \infty$, то главная часть матрицы $B(z)$ в окрестности бесконечности — многочлен степени $r_i - 1$). Число r_i называется *рангом Пуанкаре* системы (1), (2) в особой точке a_i .

Особенность a_i называется *фуксовой*, если ее ранг Пуанкаре r_i равен нулю. Фуксова особая точка всегда является регулярной (теорема Соважа, см. [4, гл. IV]).

Рассмотрим в окрестности неособой точки z_0 некоторую *фундаментальную матрицу* $Y(z)$ пространства решений системы (1) (т.е. матрицу, столбцы которой образуют базис в пространстве решений). Вдоль любой петли γ , начинающейся в точке z_0 и лежащей в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, матрица $Y(z)$ допускает аналитическое продолжение, результатом которого является (вообще говоря, другая) фундаментальная матрица $Y'(z)$. Поскольку столбцы матриц $Y(z)$ и $Y'(z)$ образуют базисы в пространстве решений системы (1), рассмотренной в окрестности точки z_0 , то получаем соотношение

$$Y(z) = Y'(z)G_\gamma, \quad G_\gamma \in GL(p, \mathbb{C}).$$

Соответствие $\gamma \mapsto G_\gamma$ зависит лишь от гомотопического класса $[\gamma]$ петли γ и задает гомоморфизм

$$\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \rightarrow GL(p, \mathbb{C})$$

фундаментальной группы пространства $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ в группу невырожденных комплексных матриц порядка p . Данный гомоморфизм называется *представлением монодромии* системы (1), а группа $\text{Im } \chi$ — *группой монодромии* этой системы. При заменах фундаментальной матрицы $Y(z)$ (на матрицы $Y(z)S$ со всевозможными $S \in GL(p, \mathbb{C})$) матрицы монодромии G_γ заменяются на матрицы $S^{-1}G_\gamma S$. Таким образом, монодромия системы (1) определена с точностью до эквивалентности.

Работа выполнена при поддержке гранта НШ-457.2003.1 и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-22000-НЦНИ-а).

Матрица $G_i = \chi(g_i)$, соответствующая продолжению вдоль простой петли g_i , обходящей особую точку a_i , называется *матрицей монодромии* системы (1) в особой точке a_i . Поскольку образующие $g_1, \dots, g_n$ фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0)$ связаны соотношением $g_1 \cdots g_n = e$, то

$$G_1 \cdots G_n = I.$$

Строение пространства решений системы (1) в окрестности регулярной особой точки описано А. Х. М. Левелем [8] (см. также [1, гл. I], [2, лекция 5]). Для каждой особенности такой системы определены *показатели* — числа, характеризующие скорость степенного роста решений в окрестности особой точки (определение показателей см. в п. 1).

Цель данной работы — представление некоторых оценок для суммы показателей системы (1) по всем особым точкам — так называемых *неравенств Фукса*. Эти неравенства могут быть использованы при исследовании отдельных вопросов аналитической теории дифференциальных уравнений (например, при нахождении кратностей нулей компонент решения системы в произвольной точке сферы Римана, см. [3]). Название этих оценок связано с именем немецкого математика Л. Фукса, еще в 1866 г. [7] получившего соотношение для суммы Σ показателей линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^p y}{dz^p} + b_1(z) \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \cdots + b_p(z) y = 0$$

порядка p с регулярными особыми точками $a_1, \dots, a_n$. Это соотношение имеет вид

$$\Sigma = \frac{(n-2)p(p-1)}{2}$$

и называется *классическим соотношением Фукса*.

Что же касается системы (1), то до недавнего времени было известно, что сумма Σ показателей этой системы является целым числом, не превосходящим нуля, при этом $\Sigma = 0$ тогда и только тогда, когда все особые точки фуксовы (см. [1, гл. I], [2, лекция 7]). И только в 1999 г. Э. Корелем [5] были получены эффективные оценки величины Σ , зависящие от размера системы p и рангов Пуанкаре $r_1, \dots, r_n$:

$$-\frac{p(p-1)}{2} \sum_{i=1}^n r_i \leq \Sigma \leq -\sum_{i=1}^n r_i.$$

В случае, когда ранги матриц $B_{-r_i-1}^i$, соответствующих не фуксовым особенностям a_i системы (1), максимальны, Э. Корель [6] нашел точное выражение для величины Σ :

$$\Sigma = -\frac{p(p-1)}{2} \sum_{i=1}^n r_i.$$

В настоящей работе уточняются полученные Э. Корелем неравенства Фукса. Уточнение происходит за счет появления в оценке зависимости от рангов матриц $B_{-r_i-1}^i$, $i = 1, \dots, n$.

1. Строение фундаментальной матрицы системы в окрестности регулярной особой точки.

Сначала скажем несколько слов о локальных *калибровочных преобразованиях* системы (1), используемых для получения неравенств Фукса. Это преобразования вида

$$y' = \Gamma(z)y,$$

где $\Gamma(z)$ — голоморфно обратимая (или мероморфно обратимая) в окрестности особой точки a_i системы матричная функция. Голоморфная обратимость матрицы $\Gamma(z)$ означает, что эта матрица голоморфна в окрестности точки a_i и $\det \Gamma(a_i) \neq 0$, мероморфная обратимость — что матрица $\Gamma(z)$ мероморфна в точке a_i и $\det \Gamma(z) \not\equiv 0$.

Замечание 1. Данное преобразование переводит систему (1) в систему (заданную в окрестности точки a_i) с матрицей коэффициентов

$$B'(z) = \Gamma(z)B(z)\Gamma^{-1}(z) + \frac{d\Gamma(z)}{dz}\Gamma^{-1}(z). \quad (3)$$

Голоморфно обратимое преобразование не меняет ранг Пуанкаре r_i , заменяя старший коэффициент — матрицу $B_{-r_i-1}^i$ — на матрицу $\Gamma(a_i)B_{-r_i-1}^i\Gamma^{-1}(a_i)$. Мероморфно обратимое преобразование может как повышать, так и понижать ранг Пуанкаре.

Для удобства (не ограничивая общности) будем считать, что особая точка a_1 системы (1) совпадает с нулем. В приведенной далее теореме указан вид фундаментальной матрицы данной системы в окрестности особой точки $z = 0$ (аналогичное разложение имеет место и для соответствующих фундаментальных матриц в окрестностях остальных особых точек).

Теорема 1 (А. Х. М. Левель [8]). *Существует фундаментальная матрица $Y(z)$ системы (1) (называемая левелевской), в окрестности особой точки $z = 0$ представимая в виде*

$$Y(z) = U(z)z^A z^E, \quad (4)$$

где $U(z)$ — голоморфная в окрестности нуля матрица, $A = \text{diag}(\varphi^1, \dots, \varphi^p)$ — целочисленная матрица нормирований системы в нуле, $\varphi^1 \geq \dots \geq \varphi^p$, $E = (1/2\pi i) \ln G$, G — матрица монодромии системы в нуле (т.е. матрица, на которую домножается $Y(z)$ справа после аналитического продолжения вокруг нуля) верхнетреугольного вида и собственные значения ρ^j матрицы E удовлетворяют условию

$$0 \leq \text{Re } \rho^j < 1. \quad (5)$$

При этом матрица $U(z)$ голоморфно обратима в нуле тогда и только тогда, когда нуль является фуксовой особой точкой системы (1).

Определение 1. Собственные значения $\beta^j = \varphi^j + \rho^j$ матрицы $A + E$ называются (левелевскими) показателями системы (1) в особой точке $z = 0$.

Стоит отметить, что хотя могут существовать несколько левелевских фундаментальных матриц вида (4) (с различными $U(z)$ и E), показатели системы определяются единственным образом (подробное описание понятия нормирований и построение левелевской фундаментальной матрицы см. также в [1, гл. I], [2, лекция 5]).

2. Неравенства Фукса. Для каждой особой точки a_i обозначим через $Y_i(z)$ соответствующую левелевскую фундаментальную матрицу вида

$$Y_i(z) = U_i(z)(z - a_i)^{A_i}(z - a_i)^{E_i},$$

где матрица $U_i(z)$ голоморфна в окрестности точки a_i , $A_i = \text{diag}(\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^p)$ — матрица нормирований системы (1) в точке a_i , $\varphi_i^1 \geq \dots \geq \varphi_i^p$, E_i — верхнетреугольная матрица, собственные значения ρ_i^j которой удовлетворяют условию (5).

Обозначим через $\beta_i^j = \varphi_i^j + \rho_i^j$ показатели системы (1) в точке a_i ($j = 1, \dots, p$). Выразим сумму

$$\Sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j = \sum_{i=1}^n \text{tr}(A_i + E_i)$$

всех показателей через порядки $\text{ord}_{a_i} \det U_i(z)$ нулей функций $\det U_i(z)$ в соответствующих точках a_i .

Из формулы Лиувилля

$$d \ln \det Y_i(z) = \text{tr } B(z) dz$$

и соотношения

$$\det Y_i(z) = \det U_i(z)(z - a_i)^{\text{tr}(A_i + E_i)}$$

следует, что

$$\begin{aligned} \text{res}_{a_i} \text{tr } B(z) dz &= \text{res}_{a_i} d \ln \det Y_i(z) = \text{res}_{a_i} d \ln \det U_i(z) + \\ &+ \text{res}_{a_i} d \ln(z - a_i)^{\text{tr}(A_i + E_i)} = \text{ord}_{a_i} \det U_i(z) + \text{tr}(A_i + E_i). \end{aligned}$$

Применив теорему о сумме вычетов к форме $\text{tr } B(z)dz$, получим формулу для величины Σ :

$$\Sigma = - \sum_{i=1}^n \text{ord}_{a_i} \det U_i(z). \quad (6)$$

Таким образом, сумма показателей системы (1) является целым числом, не превосходящим нуль (из теоремы 1 следует, что $\Sigma = 0$ тогда и только тогда, когда все особые точки системы фуксовы).

Для того чтобы получить более точные оценки для величины Σ , оценим порядки нулей функций $\det U_i(z)$ в соответствующих точках a_i (для этого достаточно оценить порядок нуля функции $\det U(z)$ из разложения (4) в точке $a_1 = 0$). Обозначим через r ранг Пуанкаре системы (1) в нуле. Тогда разложение в ряд Лорана матрицы $B(z)$ в окрестности нуля имеет вид

$$B(z) = \frac{B_{-r-1}}{z^{r+1}} + \dots + \frac{B_{-1}}{z} + B_0 + \dots, \quad B_{-r-1} \neq 0. \quad (7)$$

Будем считать, что $r > 0$ (если $r = 0$, то согласно теореме 1 $\text{ord}_0 \det U(z) = 0$). Оценка величины $\text{ord}_0 \det U(z)$ будет зависеть от размера системы p , ранга Пуанкаре r и ранга матрицы B_{-r-1} . В дальнейшем понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 1. *Для любой голоморфной в окрестности нуля матрицы $U(z)$ существуют верхнетреугольный матричный многочлен $P(z)$ и голоморфно обратимая в окрестности нуля матрица $V(z)$ такие, что*

$$U(z) = V(z)P(z).$$

Доказательство (А. А. Болибрух). Если $\det U(0) \neq 0$, то достаточно положить $V(z) = U(z)$ и $P(z) = I$. Если же $\det U(0) = 0$ (и $\text{ord}_0 \det U(z) = l > 0$), то существует невырожденная верхнетреугольная матрица S_1 такая, что столбец с номером i матрицы $U(0)S_1$ равен нулю (для некоторого i). Следовательно,

$$U(z)S_1 = U_1(z)z^{K_1},$$

где K_1 — матрица, у которой все элементы равны нулю, кроме элемента с индексом (i, i) , который равен единице, $U_1(z)$ — голоморфная в окрестности нуля матрица и $\text{ord}_0 \det U_1(z) = l - 1$. Поэтому

$$U(z) = U_1(z)z^{K_1}S_1^{-1} = U_1(z)P_1(z),$$

где $P_1(z) = z^{K_1}S_1^{-1}$ — верхнетреугольный многочлен. Повторяя аналогичные рассуждения для матрицы $U_1(z)$, получим разложение

$$U_1(z) = U_2(z)P_2(z),$$

где $P_2(z)$ — верхнетреугольный многочлен, $U_2(z)$ — голоморфная в окрестности нуля матрица и $\text{ord}_0 \det U_2(z) = l - 2$. Окончательно, после l шагов данной процедуры будем иметь

$$U(z) = U_l(z)P_l(z) \dots P_1(z) = V(z)P(z),$$

где $V(z) = U_l(z)$ — голоморфно обратимая в окрестности нуля матрица, $P(z) = P_l(z) \dots P_1(z)$ — верхнетреугольный многочлен. $\square$

Из леммы 1 сразу же следует, что разложение (4) упрощается:

$$Y(z) = V(z)P(z)z^A z^E$$

(матрицы $V(z)$ и $P(z)$ — такие же, как в лемме), и нам нужно оценить величину $\text{ord}_0 \det P(z)$.

Как видно из замечания 1, при голоморфно обратимом в окрестности нуля преобразовании $y = V(z)y'$ ранг Пуанкаре r не меняется, а место старшего коэффициента — матрицы B_{-r-1} — занимает матрица $V^{-1}(0)B_{-r-1}V(0)$, т.е. ранг старшего коэффициента также не меняется. Поэтому можно считать, что фундаментальная матрица $Y(z)$ системы (1) в окрестности нуля имеет вид

$$Y(z) = P(z)z^A z^E, \quad (8)$$

и тогда матрица $B(z)$ коэффициентов системы (1), рассмотренной в окрестности нуля, верхнетреугольна.

Более того, оказывается, что матрицы $B_{-r-1}, \dots, B_{-2}$ в ряде Лорана (7) для $B(z)$ нильпотентны. Действительно,

$$B(z) = \frac{dY}{dz} Y^{-1} = \frac{dP}{dz} P^{-1} + P \frac{A}{z} P^{-1} + P z^A \frac{E}{z} z^{-A} P^{-1}.$$

Обозначим через $p_{jj}(z)$ диагональные элементы верхнетреугольного многочлена $P(z)$; тогда диагональные элементы $\frac{dp_{jj}}{dz}(1/p_{jj})$ матрицы $\frac{dP}{dz} P^{-1}$ будут иметь в нуле не более чем простой полюс. Диагональные элементы φ^j/z и ρ^j/z остальных двух слагаемых матрицы $B(z)$ также имеют полюс первого порядка в нуле, а следовательно, это справедливо и для диагональных элементов самой матрицы $B(z)$. Поэтому диагональные элементы верхнетреугольных матриц $B_{-r-1}, \dots, B_{-2}$ могут быть только нулевыми, т.е. эти матрицы нильпотентны.

Рассмотрим преобразование вида $\tilde{y} = z^C y$ с целочисленной матрицей $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_p)$ такой, что $c_1 > \dots > c_p \geq 0$. Вследствие формулы (3), это преобразование переводит систему (1) в систему с матрицей коэффициентов

$$\tilde{B}(z) = z^C B(z) z^{-C} + \frac{C}{z}.$$

Элементы первого слагаемого этой суммы имеют вид $b_{ij}(z) z^{c_i - c_j}$ ($b_{ij}(z)$ — элементы матрицы $B(z)$). Поскольку матрица $B(z)$ верхнетреугольна и ее диагональные элементы имеют простой полюс в нуле, то данное преобразование понижает ранг Пуанкаре особенности.

Понизим ранг Пуанкаре до нуля с помощью специально выбранной матрицы C . Пусть $\text{rank } B_{-r-1} = p - k$, $1 \leq k < p$. Положим

$$C = \text{diag}((p-1)r, (p-2)r, \dots, r, 0) + \text{diag}(0, \dots, k-1),$$

где i -й диагональный элемент во втором слагаемом равен числу

$$i - 1 - \text{rank}(\mathbf{b}_{-r-1}^1, \dots, \mathbf{b}_{-r-1}^i), \quad i = 1, \dots, p$$

($\mathbf{b}_{-r-1}^j$ — j -й столбец матрицы B_{-r-1}). Другими словами, диагональ второго слагаемого матрицы C начинается с нуля и, далее, элемент с номером i на единицу больше предыдущего только в том случае, если присоединение столбца $\mathbf{b}_{-r-1}^i$ не увеличивает ранг системы векторов $\mathbf{b}_{-r-1}^1, \dots, \mathbf{b}_{-r-1}^{i-1}$.

Если для некоторых $i < j$ разность $c_i - c_j$ минимальна, т.е.

$$c_i - c_j = (j - i)r - (j - i) \geq r - 1,$$

то это означает, что присоединение столбцов $\mathbf{b}_{-r-1}^{i+1}, \dots, \mathbf{b}_{-r-1}^j$ не увеличивает ранг системы векторов $\mathbf{b}_{-r-1}^1, \dots, \mathbf{b}_{-r-1}^i$, т.е. элемент с индексом (i, j) матрицы B_{-r-1} равен нулю (вследствие верхнетреугольности и нильпотентности этой матрицы) и $\text{ord}_0 b_{ij}(z) \geq -r$. Поэтому функция $b_{ij}(z) z^{c_i - c_j}$ имеет не более чем простой полюс в нуле.

В остальных случаях

$$c_i - c_j \geq (j - i)r - (j - i) + 1 \geq r,$$

и соответствующие функции $b_{ij}(z) z^{c_i - c_j}$ также имеют не более чем простой полюс в нуле.

Таким образом, преобразование $\tilde{y} = z^C y$ переводит исходную систему (1), (7) в окрестности нуля в систему с фуксовой особой точкой 0 и некоторой фундаментальной матрицей $\tilde{Y}(z)$ вида (4):

$$\tilde{Y}(z) = \tilde{U}(z) z^{\tilde{A}} z^{\tilde{E}},$$

при этом матрица $\tilde{U}(z)$ голоморфно обратима в нуле (поскольку получившаяся система фуксова в нуле), $\tilde{A}$ — матрица нормирований этой системы, верхнетреугольная матрица $\tilde{E}$ сопряжена с матрицей E (следовательно, $\text{tr } \tilde{E} = \text{tr } E$) и матрица $z^{\tilde{A}} \tilde{E} z^{-\tilde{A}}$ голоморфна в нуле. Матрица $z^C Y(z)$ также является фундаментальной для получившейся системы, поэтому

$$z^C Y(z) = \tilde{Y}(z) R,$$

где R — постоянная невырожденная матрица. Тогда

$$Y(z) = z^{-C} \tilde{U}(z) z^{\tilde{A}} z^{\tilde{E}} R.$$

Сравнивая это разложение с разложением (8) для матрицы $Y(z)$ и приравнявая порядки определителей в нуле, получим соотношение

$$\operatorname{tr} A + \operatorname{ord}_0 \det P(z) = -\operatorname{tr} C + \operatorname{tr} \tilde{A}.$$

Чтобы выяснить, как связаны между собой величины $\operatorname{tr} A$ и $\operatorname{tr} \tilde{A}$, воспользуемся следующей леммой (см. [1, следствие 1.2.1]).

Лемма 2. Пусть фундаментальная матрица $Y(z)$ системы (1) с регулярной особенностью в нуле имеет вид

$$Y(z) = U(z)z^L z^E,$$

где матрица $U(z)$ голоморфна в нуле, L — диагональная целочисленная матрица, E — верхнетреугольная матрица, собственные значения которой удовлетворяют условию (5). Если матрица $z^L E z^{-L}$ голоморфна в нуле, то след матрицы L не превосходит суммы $\operatorname{tr} A$ нормирований системы (1) в нуле.

Применим эту лемму к системе с фундаментальной матрицей

$$Y'(z) = z^{(p-1)r} Y(z) R^{-1} = z^{(p-1)r-I-C} \tilde{U}(z) z^{\tilde{A}} z^{\tilde{E}}$$

и матрицей нормирований $A + (p-1)rI$. Матрицы $z^{(p-1)r-I-C} \tilde{U}(z)$ и $z^{\tilde{A}} \tilde{E} z^{-\tilde{A}}$ голоморфны в нуле, поэтому согласно лемме 2

$$\operatorname{tr} \tilde{A} \leq \operatorname{tr} A + p(p-1)r,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{ord}_0 \det P(z) = \operatorname{tr} \tilde{A} - \operatorname{tr} A - \operatorname{tr} C \leq p(p-1)r - \operatorname{tr} C.$$

Поскольку $\operatorname{tr} C \geq p(p-1)r/2 + k(k-1)/2$, то окончательно получаем следующее утверждение.

Предложение 1. Для величины $\operatorname{ord}_0 \det U(z)$ из разложения (4) фундаментальной матрицы системы (1), (7) в окрестности регулярной особой точки $z = 0$ ранга Пуанкаре $r > 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{ord}_0 \det U(z) \leq \frac{p(p-1)}{2} r - \frac{k(k-1)}{2},$$

где $k = p - \operatorname{rank} B_{-r-1} = \dim \ker B_{-r-1}$.

Для получения нижней оценки величины $\operatorname{ord}_0 \det U(z)$ воспользуемся следующей леммой из [4], обычно называемой в литературе леммой Соважа.

Лемма 3. Для любой голоморфной в окрестности нуля матрицы $U(z)$ найдется голоморфно обратимая в окрестности нуля матрица $\Gamma(z)$ такая, что

$$\Gamma(z)U(z) = z^D V(z),$$

где $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_p)$ — целочисленная матрица с условием $d_1 \geq \dots \geq d_p \geq 0$ и матрица $V(z)$ голоморфно обратима в окрестности нуля.

Ввиду замечания 1 преобразование $y' = \Gamma(z)y$ не меняет ни ранг Пуанкаре r , ни ранг старшего коэффициента — матрицы B_{-r-1} , поэтому можно считать, что фундаментальная матрица $Y(z)$ системы (1) в окрестности нуля имеет вид

$$Y(z) = z^D V(z) z^A z^E.$$

Тогда для матрицы $B(z)$ коэффициентов справедливо соотношение

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{B_{-r-1}}{z^{r+1}} + \dots = \frac{dY}{dz} Y^{-1} = \\ &= \frac{D}{z} + z^D \left(\frac{dV}{dz} V^{-1} + V \left(\frac{A}{z} + z^A \frac{E}{z} z^{-A} \right) V^{-1} \right) z^{-D} = \frac{D}{z} + z^D \frac{B_0(z)}{z} z^{-D}, \end{aligned}$$

где $B_0(z)$ — голоморфная в окрестности нуля матрица. Из этой формулы для $B(z)$ следует, что полюс порядка $r+1$ в нуле могут иметь только те ее элементы, которые расположены ниже главной

диагонали, т.е. B_{-r-1} — нижнетреугольная нильпотентная матрица. Обозначим ее элементы через b_{ij} . Если $b_{ij} \neq 0$ для некоторых $i > j$, то $d_i - d_j \leq -r$ и $d_j \geq r$. Так как существует по меньшей мере $\text{rank } B_{-r-1}$ ненулевых столбцов матрицы B_{-r-1} , то существует и $\text{rank } B_{-r-1}$ ненулевых элементов b_{ij} (при $i > j$), расположенных в разных столбцах. Следовательно, по меньшей мере для $\text{rank } B_{-r-1}$ чисел d_j справедлива оценка $d_j \geq r$. Поэтому $\text{tr } D \geq \text{rank } B_{-r-1} r$. Поскольку $\text{ord}_0 \det U(z) = \text{tr } D$ (матрицы $\Gamma(z)$ и $V(z)$ голоморфно обратимы в нуле), то получаем следующее утверждение.

Предложение 2. Для величины $\text{ord}_0 \det U(z)$ из разложения (4) фундаментальной матрицы системы (1), (7) в окрестности регулярной особой точки $z = 0$ ранга Пуанкаре $r > 0$ справедливо неравенство

$$\text{ord}_0 \det U(z) \geq \text{rank } B_{-r-1} r.$$

Замечание 2. Если ранг (нильпотентной) матрицы B_{-r-1} максимален, т.е. равен числу $p - 1$, то, как было установлено Э. Корелем [6],

$$\text{ord}_0 \det U(z) = \frac{p(p-1)}{2} r.$$

Для того чтобы доказать это утверждение, достаточно показать, что в случае максимального ранга матрицы B_{-r-1} справедливо неравенство $\text{ord}_0 \det U(z) \geq p(p-1)r/2$.

Как и при доказательстве предложения 2, считаем, что $B_{-r-1} = (b_{ij})$ — нижнетреугольная нильпотентная матрица. Так как $\text{rank } B_{-r-1} = p - 1$, то $b_{i+1,i} \neq 0$ для каждого $i = 1, \dots, p - 1$. Следовательно, элементы матрицы $B(z)$ с индексами $(i+1, i)$, $i = 1, \dots, p - 1$, имеют полюс порядка $r + 1$ в нуле, откуда следует, что $d_{i+1} - d_i \leq -r$ для каждого $i = 1, \dots, p - 1$. Значит, $\text{ord}_0 \det U(z) = \text{tr } D \geq p(p-1)r/2$.

Итак, из предложений 1, 2 и формулы (6) вытекает следующее утверждение о сумме показателей системы (1) по всем ее особым точкам.

Теорема 2. Для суммы Σ показателей системы (1), (2) с регулярными особыми точками $a_1, \dots, a_n$ рангов Пуанкаре $r_1, \dots, r_n$ соответственно справедливы неравенства

$$-\frac{p(p-1)}{2} \sum_{i=1}^n r_i + \sum_{i=1}^n \frac{k_i(k_i-1)}{2} \leq \Sigma \leq -\sum_{i=1}^n \text{rank } B_{-r_i-1}^i r_i,$$

где $k_i = p - \text{rank } B_{-r_i-1}^i = \dim \ker B_{-r_i-1}^i$, если $r_i > 0$, и $k_i = 0$, если $r_i = 0$.

Добавим, что соотношение

$$\Sigma = -\frac{p(p-1)}{2} \sum_{i=1}^n r_i$$

(минимально возможное значение величины Σ в классе систем (1) с фиксированными рангами Пуанкаре $r_1, \dots, r_n$) выполняется в том и только том случае, если во всех не фуксовых особых точках a_i ранги соответствующих старших коэффициентов $B_{-r_i-1}^i$ максимальны, т.е. равны числу $p - 1$ (см. замечание 2).

Большая помощь в получении уточненных неравенств Фукса была оказана А. А. Болибрухом. В частности, им были предложены аналитические доказательства результатов Э. Кореля, послужившие основой для дальнейшего уточнения этих результатов (сам Э. Корель использовал алгебраический подход для получения своих оценок).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болибрух А. А. 21-я проблема Гильберта для линейных Фуксовых систем// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1994. — 206.
2. Болибрух А. А. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. — М.: МЦНМО, 2000.
3. Болибрух А. А. Кратности нулей компонент решений системы с регулярными особыми точками// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2002. — 236. — С. 61–65.
4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

5. *Corel E.* Inégalités de Fuchs pour les systèmes différentiels réguliers// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. — 1999. — 328. — С. 983–986.
6. *Corel E.* Relations de Fuchs pour les systèmes différentiels réguliers// Bull. Soc. Math. France. — 2001. — 129. — С. 189–210.
7. *Fuchs L.* Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten// J. Math. — 1866. — 66. — С. 121–160.
8. *Levelt A. H. M.* Hypergeometric functions. II// Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. — 1961. — 64. — С. 373–385.

РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ШЕСТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ ВБЛИЗИ РЕГУЛЯРНОЙ ТОЧКИ

© 2005 г. **И. В. ГОРЮЧКИНА**

Аннотация. Для шестого уравнения Пенлеве с помощью методов степенной геометрии получены все асимптотические разложения решений в окрестности регулярной точки независимой переменной. Все эти разложения являются сходящимися рядами по целым степеням с постоянными комплексными коэффициентами. Найдено 5 семейств разложений.

1. Постановка задачи. Шестое уравнение Пенлеве [6] имеет вид

$$y'' = \frac{(y')^2}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) - y' \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left[a + b \frac{x}{y^2} + c \frac{x-1}{(y-1)^2} + d \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right], \quad (1)$$

где параметры a, b, c, d — комплексные числа, x — независимая комплексная переменная, $y(x)$ — неизвестная комплексная функция.

В данной работе рассматривается следующая задача. Для случая $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 1/2$ в окрестности регулярной точки $x = x_0, x_0 \neq 0, x_0 \neq 1, x_0 \neq \infty$, для решений уравнения (1) найти все степенные разложения вида

$$y = c_r(x - x_0)^r + \sum_s c_s(x - x_0)^s, \quad s \in \mathbb{K}, \quad (2)$$

где $c_r, c_s = \text{const} \in \mathbb{C}, c_r \neq 0$, показатели степени $r, s \in \mathbb{R}$ и не имеют точек накопления в $\mathbb{R}$.

Теорема. Уравнение (1) в окрестности регулярной точки может иметь решения вида:

1)

$$y = \frac{\sqrt{-2b}}{|x_0 - 1|} (x - x_0) + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

где c_k — однозначно определенные константы, коэффициент c_2 произвольный;

2)

$$y = \sum_{l=0}^{+\infty} c_l (x - x_0)^l,$$

где c_l — однозначно определенные константы, коэффициенты c_0 и c_1 произвольные;

3)

$$y = x_0 + (1 + \sqrt{1 - 2d})(x - x_0) + \sum_{m=2}^{+\infty} c_m (x - x_0)^m,$$

где c_m — однозначно определенные константы, коэффициент c_2 произвольный;

4)

$$y = 1 + \frac{\sqrt{2c}}{|x_0|} (x - x_0) + \sum_{n=2}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

где c_n — однозначно определенные константы, коэффициент c_2 произвольный;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00050).

5)

$$y = \frac{|x_0(x_0 - 1)|}{\sqrt{2a}}(x - x_0)^{-1} + \sum_{j=0}^{+\infty} c_j(x - x_0)^j,$$

где c_j — однозначно определенные константы, коэффициент c_0 произвольный.

Замечание. Все формальные степенные разложения решений уравнения (1) сходятся (см. [2, теорема 3.4]). Все разложения решений уравнения (1), полученные автором в окрестности регулярной точки при заданных условиях методами степенной геометрии [1, 2], были найдены ранее в [7] другими методами. В данной работе доказывается, что других разложений решений вида (2) при данных условиях для уравнения (1) нет. Разложения решений в окрестностях $x = 1$ и $x = \infty$ содержатся в [3, 5].

2. Основные определения. Положим $X = (x, y)$. Дифференциальным мономом $a(x, y)$ называется произведение монома $cx^{r_1}y^{r_2} \stackrel{\text{def}}{=} cX^R$, где $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$, и конечного числа производных вида $d^l y/dx^l$, $l \in \mathbb{N}$. Сумма дифференциальных мономов $f(X) = \sum a_i(X)$ называется дифференциальной суммой.

Каждому дифференциальному моному $a(X)$ ставится в соответствие векторный показатель степени $Q(a) = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ по правилу

$$Q(cx^{r_1}y^{r_2}) = (r_1, r_2), \quad Q(d^l y/dx^l) = (-l, 1).$$

При умножении дифференциальных мономов их показатели степени складываются как векторы: $Q(a_1 a_2) = Q(a_1) + Q(a_2)$. Множество $\mathbf{S}(f)$ показателей степеней $Q(a_i)$ всех дифференциальных мономов $a_i(X)$, входящих в дифференциальную сумму $f(X)$, называется носителем суммы $f(X)$. Выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется многоугольником суммы $f(X)$. Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$. Их называют обобщенными гранями $\Gamma_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний — ее номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют граничное подмножество $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{S}(f) \cap \Gamma_j^{(d)}$ множества $\mathbf{S}$ и укороченная сумма или укорочение $\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_i(X)$ по $Q(a_i) \in \mathbf{S}_j^{(d)}$.

Пусть плоскость $\mathbb{R}_*^2$ сопряжена плоскости $\mathbb{R}^2$ так, что для $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$ и $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ определено скалярное произведение $\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_1 q_1 + p_2 q_2$. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ в $\mathbb{R}_*^2$ соответствует нормальный конус

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ P : \langle P, Q \rangle = \langle P, Q' \rangle, \quad Q, Q' \in \mathbf{S}_j^{(d)}, \quad \langle P, Q \rangle > \langle P, Q'' \rangle, \quad Q'' \in \mathbf{S}(f) \setminus \mathbf{S}_j^{(d)} \right\}.$$

Нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$, соответствующий грани $\Gamma_j^{(d)}$, определяет область, в которой слагаемые укороченной суммы, соответствующие грани $\Gamma_j^{(d)}$, являются ведущими членами в уравнении (1). Это позволяет нам рассматривать не уравнение (1), а более простые укороченные уравнения $\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0$. Если в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(d)}$ имеем $p_1 < 0$, этому соответствует $x \rightarrow 0$, если $p_1 > 0$, то этому соответствуют $x \rightarrow \infty$ (см. [1, гл. II, § 2]).

Введем параметр ω следующим образом: $\omega = -1$, если $x \rightarrow 0$, и $\omega = 1$, если $x \rightarrow \infty$.

Для решения (2) также можно построить объекты степенной геометрии: носитель $\mathbf{s}$, многоугольник γ , нормальные конусы $\mathbf{u}$ его граней.

Нас будут интересовать не все решения (2) уравнения (1), а только те решения, у которых нормальный конус $\mathbf{u}$ лежит в некотором заданном конусе $\mathcal{K}$, который называется конусом задачи (см. [1, гл. I, § 6]).

3. Вычисление разложений. Согласно теоремам 5.1 главы III и 1.1 главы VI в [1] для определения первых приближений разложений решений (2) уравнения (1) требуется найти все решения уравнений $\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = 0$ вида $y = c_r x^r$ с вектором $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$.

Для нахождения второго и последующих приближений необходимо в исходном уравнении сделать замену

$$y = c_r x^r + z. \quad (3)$$

Для полученного уравнения $f_1(x, z)$ можно снова построить носитель, многоугольник, нормальные конусы и проанализировать каждую грань многоугольника. Однако часто можно избежать этих вычислений.

Пусть уравнение (1) после замены (3) имеет вид

$$f_1(x, z) = \mathcal{L}(x)z + h(x, z) = 0,$$

где $\mathcal{L}(x)$ — линейный дифференциальный оператор и носитель $\mathbf{S}(\mathcal{L}z)$ состоит из одной точки $(v, 1)$, являющейся вершиной многоугольника $\Gamma(f_1)$; у всех точек носителя $\mathbf{S}(h)$ координата $q_2 \geq 0$ и в $\mathbf{S}(h)$ не содержится точки $(v, 1)$. Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ равен первой вариации укороченной суммы $\hat{f}_j^{(d)}(x, y)$, вычисленной на первом приближении $c_r x^r$ (см. [1, теорема 1.2]). Корни $k_1, \dots, k_s$ характеристического многочлена $\nu(k) = x^{-v-k} \mathcal{L}(x)x^k$ дифференциальной суммы $\mathcal{L}(x)z$ называются *собственными значениями решения* (2). Те из вещественных собственных значений k_i , которые содержатся в конусе задачи $\mathcal{K}$, называются *критическими числами*.

Критические числа играют важную роль при нахождении множества показателей степеней следующих членов разложений (2).

4. Разложения решений уравнения (1). Для того чтобы исследовать шестое уравнение Пенлеве (1) в окрестности точки $x = x_0$, $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq 1$, $x_0 \neq \infty$, сделаем замену $x - x_0 = z$, которая переводит точку $x = x_0$ в точку $z = 0$, и представим его в виде дифференциальной суммы. Для этого домножим его на $2(z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2y(y - 1)(y - z - x_0)$, перенесем все члены в левую сторону и получим уравнение

$$\begin{aligned} f(z, y) \stackrel{\text{def}}{=} & 2y''(z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2y(y - 1)(y - z - x_0) - \\ & - (y')^2 \left[(z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2(y - 1)(y - z - x_0) + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2y(y - z - x_0) + \right. \\ & + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2y(y - 1) \left. \right] + 2y' \left[(z + x_0)(z + x_0 - 1)^2y(y - 1)(y - z - x_0) + \right. \\ & + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)y(y - 1)(y - z - x_0) + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2y(y - 1) \left. \right] - \\ & - \left[2ay^2(y - 1)^2(y - z - x_0)^2 + 2b(z + x_0)(y - 1)^2(y - z - x_0)^2 + \right. \\ & + 2c(z + x_0 - 1)y^2(y - z - x_0)^2 + 2d(z + x_0)(z + x_0 - 1)y^2(y - 1)^2 \left. \right] = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

При $a, b \neq 0$ носитель $\mathbf{S}(f)$ левой части уравнения (4), т.е. множество показателей степеней ее мономов, и его выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ изображены на рис. 1. Нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(1)}$ и $\mathbf{U}_j^{(0)}$ ребер $\Gamma_j^{(1)}$ и вершин $\Gamma_j^{(0)}$ изображены на рис. 2.

4.1. Разложения решений, соответствующих ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Для данного ребра укороченное уравнение имеет вид

$$\hat{f}_1^{(1)}(z, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2x_0^3(x_0 - 1)^2y''y - 2x_0^3(x_0 - 1)^2(y')^2 + 2bx_0^3 = 0. \quad (5)$$

Нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(-1, -1), \lambda > 0\}$, т.е. $r \stackrel{\text{def}}{=} p_2/p_1 = 1$. Решения уравнения (5) будем искать в виде $y = c_1z$, $c_1 \neq 0$. Коэффициент c_1 определим из уравнения

$$\tilde{f}(c_1) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_1^{(1)}(z, c_1z) = c_1^2x_0^3(x_0 - 1)^2 + 2bx_0^3 = 0,$$

откуда

$$c_1^2 = \frac{-2b}{(x_0 - 1)^2} \Rightarrow c_1 = \frac{\sqrt{-2b}}{|x_0 - 1|}. \quad (6)$$

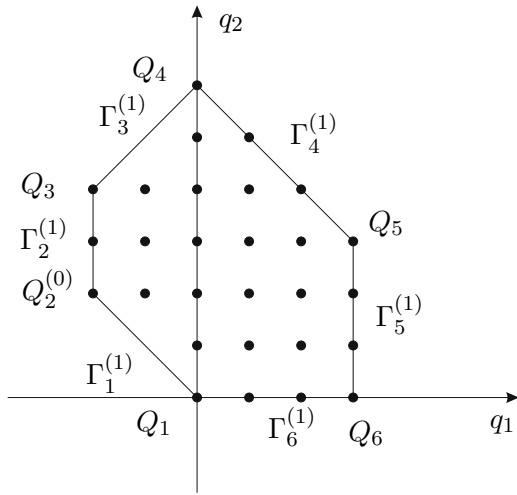


Рис. 1

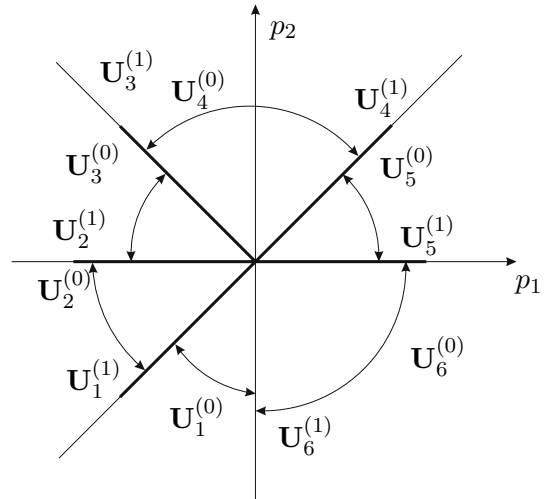


Рис. 2

Будем искать критические числа решения $y = c_1 z$. Вычислим первую вариацию для $\hat{f}_1^{(1)}$:

$$\frac{\delta \hat{f}_1^{(1)}(z, y)}{\delta y} = -2x_0^3(x_0 - 1)^2 \frac{d^2}{dz^2} y - 2x_0^3(f - 1)^2 y'' + x_0^3(x_0 - 1)2y' \frac{d}{dz}.$$

Подставим в нее $y = c_1 z$ и получим оператор

$$\mathcal{L}(z) = -2x_0^3(x_0 - 1)^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} c_1 z - c_1 \frac{d}{dz} \right).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} z^{-k+1} \mathcal{L}(z) z^k = -2x_0^3(x_0 - 1)^2 c_1 (k(k - 1) - k) = 0.$$

Отсюда получаем собственные числа $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Конус задачи имеет вид $\mathcal{K} = \{k > 1\}$. Поскольку $k_1 \notin \mathcal{K}$, $k_2 \in \mathcal{K}$, то k_2 является единственным критическим числом (см. [2, п. 1.4]). Так как $k_2 \in \mathbb{N}$, то носитель разложения решений уравнения (3) имеет вид $\mathbf{K} = \{1 + m, m \in \mathbb{N}\}$. Если условие совместности выполнено [5, § 1] для $k_2 = 2$, то разложение решений уравнения (3) будет иметь вид

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k, \quad (7)$$

где коэффициент c_2 — произвольная постоянная, остальные коэффициенты c_k постоянны и однозначно определены. Второе приближение решения уравнения (3) имеет вид $y = c_1 z + c_2 z^2$.

Второе приближение уравнения (3), соответствующее ребру $\Gamma_1^{(1)}$, есть $\hat{f}_1^{(1)}(z, y) + \hat{f}_1^{(1)}(z, y) = 0$, где $\hat{f}_1^{(1)}(z, y)$ определяется формулой (5), а

$$\begin{aligned} \hat{f}_1^{(1)}(z, y) = & 6bx_0^2 z + 4bx_0^2(-1 - x_0)y + (-6x_0^2 + 16x_0^3 - 10x_0^4)y''yz + (-2x_0^3 + 2x_0^3)y'y + \\ & + 5(x_0^4 - 8x_0^3 + 3x_0^2)y'^2 z + (2x_0^2 - 2x_0^3 + 2x_0^5 - 2x_0^4)y''y^2 + (-2x_0^2 + 2x_0^4 + 2x_0^3 - 2x_0^5)y'^2 y. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициент b_2 в формуле (1.22) из [5, § 1] — это коэффициент при z в выражении $\hat{f}_1^{(1)}(z, c_1 z)$. Подставляя $y = c_1 z$ в сумму (8), получаем, что $b_2 = 0$, т.е. условие совместности выполнено и коэффициент c_2 — произвольная постоянная.

Согласно теореме 3.4 из [2] ряд (7) сходится для достаточно малых $|z|$.

4.2. *Разложения решений, соответствующих ребру $\Gamma_2^{(1)}$. Общий случай.* Укороченное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} f_2^{(1)} &\stackrel{\text{def}}{=} x_0^{-2}(x_0 - 1)^{-2} \hat{f}_2^{(1)}(z, y) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} -2x_0 y'' y + x_0 y'^2 + 2(x_0 + 1) y'' y^2 - 2(x_0 + 1) y'^2 y - 2y'' y^3 + 3y'^2 y^2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Прделав те же операции, что и в п. 4.1, для случая $c_0 = x_0$ и $c_0 = 1$ имеем $\mathcal{L}(z) \equiv 0$. Эти случаи будут исследованы отдельно. Здесь предположим, что $c_0 \neq x_0$, $c_0 \neq 1$.

Аналогично п. 4.1 получаем разложение вида

$$y = \sum_{l=0}^{+\infty} c_l z^l, \quad (10)$$

где c_l — однозначно определенные константы, коэффициенты c_0 и c_1 произвольные.

Согласно теореме 3.4 из [2] ряд (10) сходится для достаточно малых $|z|$.

Случай $c_0 = x_0$. При $c_0 = x_0$ имеем $\mathcal{L}(z) \equiv 0$. Сделаем замену $y = u + x_0$ в уравнении (4), которая переводит точку $y = c_0 = x_0$ в точку $u = 0$. Получим уравнение

$$\begin{aligned} g(z, u) &\stackrel{\text{def}}{=} f(z, u + x_0) = 2u''(z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2(u + x_0)(u + x_0 - 1)(u - z) - \\ &\quad - (u')^2 \left[(z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2(u + x_0 - 1)(u - z) + \right. \\ &\quad \left. + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2(u + x_0)(u - z) + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2(u + x_0)(u + x_0 - 1) \right] + \\ &\quad + 2u' \left[(z + x_0)(z + x_0 - 1)^2(u + x_0)(u + x_0 - 1)(u - z) + \right. \\ &\quad \left. + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)(u + x_0)(u + x_0 - 1)(u - z) + \right. \\ &\quad \left. + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2(u + x_0)(u + x_0 - 1) \right] - \\ &\quad - \left[2a(u + x_0)^2(u + x_0 - 1)^2(u - z)^2 + 2b(z + x_0)(u + x_0 - 1)^2(u - z)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2c(z + x_0 - 1)(u + x_0)^2(u - z)^2 + 2d(z + x_0)(z + x_0 - 1)(u + x_0)^2(u + x_0 - 1)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Носитель левой части уравнения отличается от носителя, изображенного на рис. 1, только наличием единственной новой точки $(-1, 1)$.

Нормальные конусы изображены на рис. 2. Нас интересуют только те ребра и вершины, нормальные конусы которых пересекаются с третьим квадрантом плоскости (p_1, p_2) , что соответствует случаю $z \rightarrow 0$ и $u \rightarrow 0$, т.е. вершины Q_1, Q_2 и ребро $\Gamma_1^{(1)}$.

Решения, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Укороченное уравнение имеет вид

$$\hat{g}_1^{(1)}(z, u) \stackrel{\text{def}}{=} x_0^3(x_0 - 1)^3(u'^2 - 2u''u - 2u' + 2u''z + 2d) = 0. \quad (12)$$

Аналогично п. 4.1 получаем разложение вида

$$u = (1 + \sqrt{1 - 2d})z + \sum_{m=2}^{+\infty} c_m z^m, \quad (13)$$

где c_m — однозначно определенные константы, коэффициент c_2 произвольный.

Согласно теореме 3.4 из [2] ряд (13) сходится для достаточно малых $|z|$.

Случай $c_0 = 1$. При $c_0 = 1$ также имеем $\mathcal{L}(z) \equiv 0$. Сделаем замену $y = u + 1$ в уравнении (4), которая переводит точку $y = c_0 = 1$ в точку $u = 0$. Получим уравнение

$$\begin{aligned} h(z, u) \stackrel{\text{def}}{=} f(z, u + 1) = & 2u''(z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2(u + 1)u(u - z + 1 - x_0) - \\ & - (u')^2 \left[(z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2u(u - z + 1 - x_0) + \right. \\ & + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2(u + 1)(u - z + 1 - x_0) + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2(u + 1)u \left. \right] + \\ & + 2u' \left[(z + x_0)(z + x_0 - 1)^2(u + 1)u(u - z + 1 - x_0) + \right. \\ & + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)(u + 1)u(u - z + 1 - x_0) + (z + x_0)^2(z + x_0 - 1)^2(u + 1)u \left. \right] - \\ & - \left[2a(u + 1)^2u^2(u - z + 1 - x_0)^2 + 2b(z + x_0)u^2(u - z + 1 - x_0)^2 + \right. \\ & + 2c(z + x_0 - 1)(u + 1)^2(u - z + 1 - x_0)^2 + 2d(z + x_0)(z + x_0 - 1)(u + 1)^2u^2 \left. \right] = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Носитель левой части уравнения и его выпуклая оболочка изображены на рис. 1. Нормальные конусы изображены на рис. 2. Нас интересуют только те ребра и вершины, нормальные конусы которых пересекаются с третьим квадрантом плоскости (p_1, p_2) , что соответствует случаю $z \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$, т.е. вершины Q_1, Q_2 и ребро $\Gamma_1^{(1)}$.

Решения, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Укороченное уравнение имеет вид

$$\hat{h}_1^{(1)}(z, u) \stackrel{\text{def}}{=} 2x_0^2(x_0 - 1)^3u''u - x_0^2(x_0 - 1)^3u'^2 + 2c(x_0 - 1)^3 = 0. \quad (15)$$

Аналогично п. 4.1 получаем разложение вида

$$u = \frac{\sqrt{2c}}{|x_0|}z + \sum_{n=2}^{+\infty} c_n z^n, \quad (16)$$

где c_n — однозначно определенные константы, коэффициент c_2 произвольный.

Согласно теореме 3.4 из [2] ряд (16) сходится для достаточно малых $|z|$.

4.3. Разложения решений, соответствующих ребру $\Gamma_3^{(1)}$. Укороченное уравнение имеет вид

$$\hat{f}_3^{(1)}(z, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2x_0^2(x_0 - 1)^2y''y^3 + 3x_0^2(x_0 - 1)^2y'^2y^2 + 2ay^6 = 0. \quad (17)$$

Аналогично п. 4.1 получаем разложение вида

$$y = \frac{|x_0(x_0 - 1)|}{\sqrt{2a}}z^{-1} + \sum_{j=0}^{+\infty} c_j z^j, \quad (18)$$

где c_j — однозначно определенные константы, коэффициент c_0 произвольный.

Согласно теореме 3.4 из [2] ряд (18) сходится для достаточно малых $|z|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998.
2. Брюно А. Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения// Усп. мат. наук. — 2004. — 59, № 3. — С. 31–80.
3. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве// Докл. РАН. — 2004. — 395, № 6. — С. 733–737.
4. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи неособой точки/ Препринт № 4. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2005.
5. Брюно А. Д., Чухарева И. В. Степенные разложения шестого уравнения Пенлеве/ Препринт № 49. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
6. Розов Н. Х. Пенлеве уравнение// Мат. энцикл. — М.: Советская Энциклопедия, 1985. — 5. — С. 666.

7. *Gromak V. I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plane. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2002.

И. В. Горючкина

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

E-mail: chukhareva@yandex.ru

СТЕПЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ МОДИФИЦИРОВАННОГО ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ В ОКРЕСТНОСТИ НУЛЯ

© 2005 г. **А. В. ГРИДНЕВ**

Аннотация. Рассматривается модифицированное третье уравнение Пенлеве

$$\ddot{w} = \frac{\dot{w}^2}{w} - \frac{\dot{w}}{t} + \frac{aw^2 + b}{t} + cw^3 + \frac{d}{w},$$

где $\dot{w} = dw/dt$, a, b, c и d — комплексные параметры. Пусть $a, b, c, d \neq 0$. Исследуются асимптотические разложения его решений в окрестности $t = 0$ вида

$$w = \sum c_k t^k, \quad k \in \mathbf{K},$$

где c_k являются комплексными постоянными или многочленами от $\ln t$ с комплексными коэффициентами. Получены все возможные степенно-логарифмические разложения решений модифицированного третьего уравнения Пенлеве.

Рассмотрим модифицированное третье уравнение Пенлеве

$$\ddot{w} = \frac{\dot{w}^2}{w} - \frac{\dot{w}}{t} + \frac{aw^2 + b}{t} + cw^3 + \frac{d}{w}, \quad (1)$$

где $\dot{w} = dw/dt$, a, b, c и d — комплексные параметры. Пусть $a, b, c, d \neq 0$. Будем исследовать асимптотические разложения решений уравнения (1) в окрестности $t = 0$ вида

$$w = \sum c_k t^k, \quad k \in \mathbf{K},$$

где c_k — комплексные постоянные или многочлены от $\ln t$ с комплексными коэффициентами.

Для удобства умножим обе части уравнения (1) на tw и перенесем все слагаемые в правую часть. Получим уравнение

$$f(t, w) \stackrel{\text{def}}{=} -tw\ddot{w} - w\dot{w} + t\dot{w}^2 + w(aw^2 + b) + t(cw^4 + d) = 0. \quad (2)$$

1. Основные результаты.

Теорема 1. Для решений уравнения (2) имеется семейство разложений вида

$$w = c_r t^r + \sum c_s t^s \quad \text{для любого } r \in (-1, 1), \quad (3)$$

где $s \in \{k = r + l(1+r) + m(1-r), \quad l, m \geq 0, \quad l+m > 0\}$, $c_r \neq 0$ — произвольное, а остальные $c_s \in \mathbb{C}$ однозначно определены.

Теорема 2. Пусть $\xi = b/\sqrt{-d}$.

1) Если $\text{Im}(\xi) \neq 0$, то для решений уравнения (2) имеется разложение

$$w = -\frac{d}{b}t + \frac{ad^3}{b^2(4d+b^2)}t^3 + \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k+1}t^{2k+1}, \quad (4)$$

где постоянные коэффициенты c_{2k+1} однозначно определены.

- 2) Если $\text{Im}(\xi) = 0$ и ξ не является четным числом (при этом оно может быть и нецелым), то для решений уравнения (2) имеется семейство разложений вида

$$w = -\frac{d}{b}t + \sum_s c_s t^s, \quad (5)$$

где $s \in \mathbf{K} = \{1 + 2m + n|\xi|, m, n \geq 0, m + n > 0\}$, $c_s \in \mathbb{C}$, коэффициент $c_{1+|\xi|}$ произволен, остальные c_s однозначно определены.

- 3) Если $\text{Im}(\xi) = 0$ и ξ является четным числом (может быть и отрицательным), то для решений уравнения (2) имеется семейство разложений

$$w = -\frac{d}{b}t + \sum_{k=1}^{-1+|\xi|/2} c_{2k+1} t^{2k+1} + \sum_{k=|\xi|/2}^{\infty} \beta_{2k+1} t^{2k+1}, \quad (6)$$

где c_{2k+1} — однозначно определенные числа, β_{2k+1} — многочлены от $\ln t$, $\beta_{1+|\xi|}$ — многочлен первой степени от $\ln t$ с произвольным свободным членом.

Теорема 3. Пусть $\eta = a/\sqrt{c}$.

- 1) Если $\text{Im}(\eta) \neq 0$, то для решений уравнения (2) имеется разложение

$$w = -\frac{a}{c}t^{-1} + \frac{bc}{4c - a^2}t + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1} t^{2k+1}, \quad (7)$$

где постоянные коэффициенты c_{2k+1} однозначно определены.

- 2) Если $\text{Im}(\eta) = 0$ и η не является четным числом, то для решений уравнения (2) имеется семейство разложений

$$w = -\frac{a}{c}t^{-1} + \sum_s c_s t^s, \quad (8)$$

где $s \in \mathbf{K} = \{-1 + 2m + n|\eta|, m, n \geq 0, m + n > 0\}$, $c_s \in \mathbb{C}$, коэффициент $c_{-1+|\eta|}$ произволен, остальные c_s однозначно определены.

- 3) Если $\text{Im}(\eta) = 0$ и η является четным числом, то для решений уравнения (2) имеется семейство разложений

$$w = -\frac{a}{c}t^{-1} + \sum_{k=1}^{-1+|\eta|/2} c_{2k-1} t^{2k-1} + \sum_{k=|\eta|/2}^{\infty} \beta_{2k-1} t^{2k-1}, \quad (9)$$

где c_{2k-1} — однозначно определенные числа, β_{2k-1} — многочлены от $\ln t$, $\beta_{-1+|\eta|}$ — многочлен первой степени от $\ln t$ с произвольным свободным членом.

Замечание 1. Разложения (3)–(5) и (7)–(8) сходятся для малых $|t|$. Для разложений (6) и (9) сходимости пока не установлена, поэтому мы считаем их формальными. Разложения (3), (5), (8) представлены в [3, 4], разложения (4) и (7) получены в [3], разложения (6) и (9) найдены впервые в настоящей работе (в [8] этих разложений нет).

Ниже будет показано, как получить разложения (6) и (9) методами степенной геометрии [1, 2]. Будет также приведен явный вид этих разложений при $|\xi| = 2$ и $|\eta| = 2$.

Итак, для уравнения (2) найдем все разложения решений вида

$$w = c_r t^r + \sum \beta_k t^k, \quad k \in \mathbf{K}, \quad (10)$$

где c_r постоянно, β_k — многочлены от $\ln t$.

Данная задача была решена в несколько этапов, описанных ниже.

2. Сведение исходной задачи к нескольким более простым задачам [2, § 1]. Пусть t — независимая, w — зависимая переменные, $t, w \in \mathbb{C}$. Положим $X = (t, w)$. Дифференциальным мономом $a(t, w)$ называется произведение обычного монома

$$ct^{r_1}w^{r_2} \stackrel{\text{def}}{=} cX^R, \quad (11)$$

где $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$, и конечного числа производных вида

$$d^l w / dt^l, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Сумма дифференциальных мономов

$$f(X) = \sum a_i(X) \quad (13)$$

называется *дифференциальной суммой*. Каждому дифференциальному моному $a(X)$ ставится в соответствие его (векторный) *показатель степени* $Q(a) = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ по следующим правилам: для монома (11) $Q(a) = (r_1, r_2)$; для производной (12) $Q(a) = (-l, 1)$. При умножении дифференциальных мономов их показатели степени складываются как векторы $Q(a_1 a_2) = Q(a_1) + Q(a_2)$. Множество $\mathbf{S}(f)$ показателей степеней $Q(a_i)$ всех дифференциальных мономов $a_i(X)$, входящих в дифференциальную сумму (13), называется *носителем суммы* $f(X)$. Очевидно, $\mathbf{S}(f) \in \mathbb{R}^2$. Выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется *многоугольником суммы* $f(X)$. Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$. Их называют (обобщенными) *гранями* $\Gamma_j^{(d)}$. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют *границное подмножество* $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{S}(f) \cap \Gamma_j^{(d)}$ множества $\mathbf{S}$ и *укороченная сумма*

$$\hat{f}_j^{(d)} = \sum_{Q(a_i) \in \mathbf{S}_j^{(d)}} a_i(X) \quad \text{по } Q(a_i) \in \mathbf{S}_j^{(d)}. \quad (14)$$

Для разложения решения (10), которое мы запишем в виде $w - \varphi(t) = 0$, имеются аналогичные объекты, которые обозначаются малыми буквами: носитель $\mathbf{s}(w - \varphi)$, многоугольник $\gamma(w - \varphi)$. Из граней многоугольника $\gamma(w - \varphi)$ нас интересует только ребро $\gamma_1^{(1)}$, которое натянуто на точки $Q_1 = (0, 1)$ и $Q_2 = (r, 0)$. Ему соответствует укороченная сумма $w - c_r t^r$.

Левая часть уравнения (2) является дифференциальной суммой. Носитель $\mathbf{S}(f)$ состоит из пяти точек $Q_1 = (1, 0)$, $Q_2 = (-1, 2)$, $Q_3 = (1, 4)$, $Q_4 = (0, 1)$, $Q_5 = (0, 3)$. Многоугольник $\Gamma(f)$ представляет собой треугольник с вершинами в точках Q_1, Q_2 и Q_3 (см. рис. 1(a)).

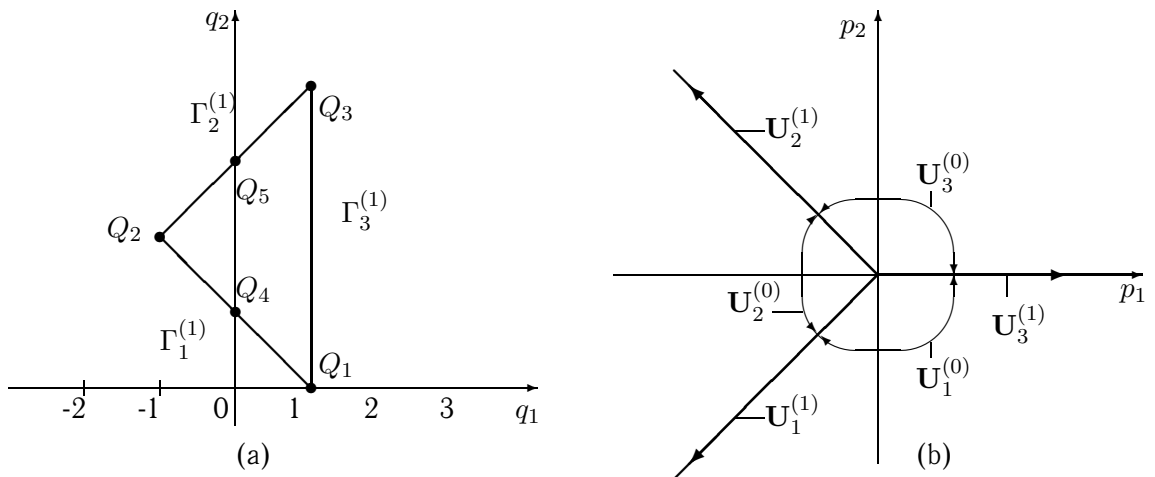


Рис. 1. (a) Носитель и многоугольник уравнения (2). (b) Нормальные конусы его граней.

Гранями многоугольника $\Gamma(f)$ являются три вершины $\Gamma_j^{(0)} = Q_j$, $j = 1, 2, 3$, и три ребра $\Gamma_j^{(1)}$ с граничными подмножествами $\mathbf{S}_1^{(1)} = \{Q_1, Q_2, Q_4\}$, $\mathbf{S}_2^{(1)} = \{Q_2, Q_3, Q_5\}$ и $\mathbf{S}_3^{(1)} = \{Q_3, Q_1\}$. В [3] было показано, что для граней $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_3^{(0)}$ разложения решений уравнения (2) вида (10) отсутствуют, а для граней $\Gamma_2^{(0)}$ и $\Gamma_3^{(1)}$ все разложения (10) имеют постоянные коэффициенты β_k . Поэтому будем рассматривать только ребра $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(2)}$. Соответствующие укороченные уравнения имеют вид:

$$\hat{f}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -tw\ddot{w} - w\dot{w} + t\dot{w}^2 + bw + dt = 0, \quad (15)$$

$$\hat{f}_2^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -tw\ddot{w} - w\dot{w} + t\dot{w}^2 + aw^3 + ctw^4 = 0. \quad (16)$$

3. Определение первого члена разложения (10). Пусть плоскость $\mathbb{R}_*^2$ сопряжена плоскости $\mathbb{R}^2$ так, что для $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$ и $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ определено скалярное произведение $\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_1q_1 + p_2q_2$. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ в $\mathbb{R}_*^2$ соответствует *нормальный конус*

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ P : \langle P, Q \rangle = \langle P, Q' \rangle, \ Q, Q' \in \mathbf{S}_j^{(d)}, \ \langle P, Q \rangle > \langle P, Q'' \rangle, \ Q'' \in \mathbf{S}(f) \setminus \mathbf{S}_j^{(d)} \right\}.$$

Для ребра $\Gamma_j^{(1)}$ нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(1)}$ — это луч, выходящий из начала координат, ортогональный ребру $\Gamma_j^{(1)}$ и направленный от ребра $\Gamma_j^{(1)}$ во внешнюю область многоугольника $\Gamma(f)$. Для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(0)}$ является открытым сектором (углом) на плоскости $\mathbb{R}_*^2$ с вершиной в нуле $P = 0$ и ограниченными лучами, являющимися нормальными конусами ребер, примыкающих к вершине $\Gamma_j^{(0)}$.

Через $\mathbf{u}(w - \varphi)$ обозначается нормальный конус ребра $\gamma_1^{(1)}$ многоугольника, соответствующего разложению (10). Очевидно, $\mathbf{u}$ — это луч

$$\mathbf{u} = \{P = \omega\lambda(1, r), \ \lambda > 0\}, \quad (17)$$

направленный во внешнюю область многоугольника $\gamma(w - \varphi)$ и ортогональный ребру $\gamma_1^{(1)}$. Здесь $\omega = \pm 1$. Если $t \rightarrow 0$, то $\omega = -1$, если $t \rightarrow \infty$, то $\omega = 1$.

Теорема 4 (см. [1, гл. VI, теорема 1.1], [6, гл. I, § 1, теорема 1.2]). *Если разложение (10) удовлетворяет уравнению $f(X) = 0$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то первое приближение $w = c_r t^r$ разложения (10) является решением укороченного уравнения (14).*

В случае ребра $\Gamma_j^{(1)}$ степень r первого члена разложения (10) определяется непосредственно из определения нормального конуса грани и условия $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_j^{(d)}$. Продемонстрируем это на примере нашей задачи.

Рассмотрим ребра $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$ многоугольника, соответствующего уравнению (2). Нормальные конусы этих граней — лучи $\mathbf{U}_1^{(1)} = -\lambda(1, 1)$, $\mathbf{U}_2^{(1)} = -\lambda(1, -1)$ (см. рис. 1(b)). Здесь в обоих случаях $\omega = -1$, так как $t \rightarrow 0$ (см. [2, § 1]). В силу (17) мы получаем $r = 1$ для $\Gamma_1^{(1)}$ и $r = -1$ для $\Gamma_2^{(1)}$. Коэффициент c_r в первом члене разложения (10) определяется подстановкой $w = c_r t^r$ в соответствующие укороченные уравнения (15) и (16). Для $\Gamma_1^{(1)}$ коэффициент $c_r = c_1 = -d/b$, а для $\Gamma_2^{(1)}$ получаем $c_r = c_{-1} = -a/c$.

Если нас интересуют не все решения (10) исходного уравнения $f(X) = 0$, а только те решения, у которых нормальный конус $\mathbf{u}$ лежит в некотором заданном конусе $\mathcal{K}$, то $\mathcal{K}$ называется *конусом задачи* (см. [1, гл. I, § 6]).

4. Определение множества показателей степеней разложения (10). Если найден первый член разложения (10), то замена $w = c_r t^r + z$ приводит исходное уравнение $f(X) = 0$ к виду

$$f(t, ct^r + z) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(t, z) = 0, \quad (18)$$

где $\tilde{f}(t, z)$ — дифференциальная сумма, все точки $Q = (q_1, q_2)$ ее носителя $\mathbf{S}(\tilde{f})$ имеют целую неотрицательную координату q_2 . К уравнению (18) можно применить описанный выше прием (т.е. вычисление носителя, многоугольника, укорочений и т. д.) и получить следующий член разложения (10) $c_{s_0} t^{s_0}$, у которого $s_0 > r$, если $t \rightarrow 0$, и $t_0 < r$, если $t \rightarrow \infty$. Однако во многих случаях дифференциальная сумма $\tilde{f}(x, z)$ имеет специальный вид, что позволяет существенно сократить вычисления разложений (10). Предположим, что уравнение (18) имеет вид

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x, z) = 0, \quad (19)$$

где $\mathcal{L}(x)$ — линейный дифференциальный оператор и носитель $\mathbf{S}(\mathcal{L}z)$ состоит из одной точки $(v, 1)$, являющейся вершиной $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$, у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ носителя $\mathbf{S}(h)$ координата $q_2 \geq 0$, и нет точки $(v, 1)$, нормальный конус вершины $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ содержит вектор $P = (p_1, p_2)$ с $p_1 \omega > 0$.

Дифференциальная сумма $f(t, w)$ имеет *первую вариацию* $\delta f(t, w)/\delta w$ (см. [7]), которая обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \delta(ct^{q_1}w^{q_2})/\delta w &= cq_2 t^{q_1} w^{q_2-1}, \quad \delta(d^l w/dt^l)/\delta w = d^l/dt^l, \\ \delta(f+g)/\delta w &= \delta f/\delta w + \delta g/\delta w, \quad \delta(fg)/\delta w = (\delta f/\delta w)g + f(\delta g/\delta w). \end{aligned}$$

Теорема 5 (см. [2]). Пусть $w = c_r t^r$ — решение укороченного уравнения (14) с $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_j^{(d)}$. Тогда в уравнении (19) оператор $\mathcal{L}(t)$ имеет вид

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\delta \hat{f}_j^{(d)}(t, w)}{\delta w} \quad \text{на } w = c_r t^r, \quad (20)$$

т.е. равен первой вариации, вычисленной на кривой $w = c_r t^r$.

Следовательно, после подстановки $w = c_r t^r + z$ исходное уравнение $f(X) = 0$ принимает вид (19), если $\mathcal{L}(t) \not\equiv 0$. Пусть $\nu(k)$ — характеристический многочлен дифференциальной суммы $\mathcal{L}(t)z$, т.е.

$$\nu(k) = t^{-v-k} \mathcal{L}(t)t^k. \quad (21)$$

Корни $k_1, \dots, k_s$ многочлена $\nu(k)$ называются *собственными значениями решения* $w = c_r t^r$. Те из вещественных собственных чисел k_i , которые лежат в конусе задачи, т.е. удовлетворяют неравенству $-\omega k > -\omega r$, называются *критическими числами*. Они играют важную роль при нахождении разложения (10).

В нашем случае сумма $\tilde{f}(t, z)$ имеет вид (19). Для ребра $\Gamma_1^{(1)}$ оператор $\mathcal{L}(t)$ равен

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\delta \hat{f}_1^{(1)}}{\delta w} = -c_1 t^2 \frac{d^2}{dt^2} + c_1 t \frac{d}{dt} + b - c_1 \neq 0,$$

функция $\nu(k) = -c_1(k^2 - 2k + 1) + b$, уравнение $\nu(k) = 0$ имеет два корня $k_{1,2} = 1 \pm \xi$, где $\xi \stackrel{\text{def}}{=} b/\sqrt{-d}$; для ребра $\Gamma_2^{(1)}$ имеем

$$\mathcal{L}(t) = -c_{-1} \frac{d^2}{dt^2} - 3c_{-1} t^{-1} \frac{d}{dt} - c_{-1} t^{-2} + 3ac_{-1}^2 t^{-2} + 4cc_{-1}^3 t^{-2} \neq 0,$$

функция $\nu(k) = -c_{-1}(1 + k(k - 1) + 3k - 3ac_{-1} - 4cc_{-1}^2)$, уравнение $\nu(k) = 0$ имеет два корня $k_{1,2} = 1 \pm \eta$, где $\eta \stackrel{\text{def}}{=} a/\sqrt{c}$.

Случаи, когда $\text{Im}(\xi) \neq 0$ или $\text{Im}(\xi) = 0$ и ξ не является четным числом для ребра $\Gamma_1^{(1)}$ и $\text{Im}(\eta) \neq 0$ или $\text{Im}(\eta) = 0$ и η не является четным числом для ребра $\Gamma_2^{(1)}$ соответственно, рассматривались в [3]. Им соответствуют степенные разложения решений уравнения (2) с постоянными коэффициентами (4)–(5) и (7)–(8). Поэтому далее будем предполагать, что ξ и η — четные числа.

В этих случаях числа $1 + |\xi|$ и $1 + |\eta|$ являются единственными критическими числами, и носители $\mathbf{K}$ в разложении (10) имеют вид (см. [3]):

$$\text{для ребра } \Gamma_1^{(1)}: \quad \mathbf{K} = \{k = 1 + 2n, \text{ целое } n > 0\}, \quad (22)$$

$$\text{для ребра } \Gamma_2^{(1)}: \quad \mathbf{K} = \{k = -1 + 2n, \text{ целое } n > 0\}. \quad (23)$$

5. Вычисление коэффициентов разложения (10). Положим $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \ln t$. Согласно [2, § 3], коэффициент $\beta_k(\psi)$ можно найти из линейного дифференциального уравнения

$$\sum \frac{1}{m!} \nu^{(m)}(k) \beta_k^{(m)}(\psi) + \theta_k(\psi) = 0, \quad (24)$$

где

$$\nu^{(m)}(k) = \left. \frac{d^m \nu(q)}{dq^m} \right|_{q=k}, \quad \beta_k^{(m)} = \frac{d^m \beta_k(\psi)}{d\psi^m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

θ_k — коэффициент при t^{k+v} в сумме

$$f \left(t, c_r t^r + \sum_{-\omega r < -\omega j < -\omega k} \beta_j t^j \right),$$

полученной для исходного уравнения $f(X) = 0$. Для критического числа k выполнено *условие совместности* [2, § 3], если в уравнении (24) $\theta_k \equiv 0$. Согласно [2, замечание 3.3], если критическое число k попадает в множество $\mathbf{K}$ и для него условие совместности не выполнено, то разложение (10) решений уравнения (2) содержит $\ln t$.

Рассмотрим ребро $\Gamma_1^{(1)}$. Пусть для определенности $|\xi| = 2$. Тогда критическое число $k = 1 + |\xi|$ попадает в множество (22). Для коэффициента $\beta_3(\psi)$ при t^3 обыкновенное дифференциальное уравнение (24) имеет вид

$$\nu(3)\beta_3(\psi) + \nu'(3)\beta_3'(\psi) + \frac{1}{2}\nu''(3)\beta_3''(\psi) + \theta_3 = 0.$$

В нашем случае $\nu(3) = 0$, $\nu'(3) = -4c_1$, $\nu'' = -2c_1$, $\theta_3 = ac_1^3$. Так как мы предполагаем, что все параметры a, b, c, d отличны от нуля, то $\theta_3 \neq 0$ и поэтому условие совместности не выполнено. После подстановки значений получим уравнение

$$-4c_1\beta_3'(\psi) - c_1\beta_3''(\psi) + ac_1^3 = 0, \quad \text{где } \beta_3'(t) = \frac{d\beta}{d\psi}.$$

Оно имеет решения $\beta_3(\psi) = \frac{ac_1^2}{4}\psi + c_{32}$, где c_{32} — произвольная постоянная. Аналогично можно вычислить коэффициент $\beta_5(\psi)$. Он равен

$$\beta_5(\psi) = \frac{a^2c_1^3}{16}\psi - \frac{7a^2c_1^3}{192} + \frac{ac_1c_{32}}{4} + \frac{cc_1^3}{12}.$$

Окончательно, для ребра $\Gamma_1^{(1)}$ при $|\xi| = 2$ получаем семейство разложений

$$w = -\frac{d}{b}t + \left(\frac{ad^2}{4b^2} \ln t + c_{32} \right) t^3 + \left(-\frac{a^2d^3}{16b^3} \ln t + \frac{7a^2d^3}{192b^3} - \frac{adc_{32}}{4b} - \frac{cd^3}{12b^3} \right) t^5 + \dots, \quad (25)$$

где c_{32} — произвольная постоянная и учтено, что $c_1 = -d/b$.

Аналогичным образом можно искать разложения решений уравнения (2), соответствующие ребру $\Gamma_2^{(1)}$. В частности, при $|\eta| = 2$ получаем семейство разложений

$$w = -\frac{a}{c}t^{-1} + \left(\frac{b}{4} \ln t + c_{12} \right) t + \left(-\frac{b^2c}{16a} \ln^2 t + \left\{ \frac{b^2c}{16a} - \frac{abc_{12}}{8} \right\} \ln t - \frac{7b^2c}{192a} + \frac{abc_{12}}{12} - \frac{cd}{12a} - \frac{ac_{12}^2}{4} \right) t^3 + \dots, \quad (26)$$

где c_{12} — произвольная постоянная.

Отметим (см. [3, 8]), что уравнение (2) обладает симметрией

$$(t, w, a, b, c, d) = (t, 1/\tilde{w}, -\tilde{b}, -\tilde{a}, -\tilde{d}, -\tilde{c}). \quad (27)$$

Основываясь на этом, приведем еще один способ нахождения разложений (10).

Симметрия (27) переводит уравнение (2) в себя. При этом ребро $\Gamma_1^{(1)}$ многоугольника уравнения (2) переходит в ребро $\Gamma_2^{(1)}$, число ξ переходит в число $-\eta$. Поэтому для нахождения разложения, соответствующего ребру $\Gamma_2^{(1)}$, можно воспользоваться симметрией (27). Представим разложение (25) в виде $w = -\frac{d}{b}t(1+v)$, где

$$v = \left(-\frac{ad}{4b} \ln t - \frac{bc_{32}}{d}\right)t^2 + \left(\frac{a^2d^2}{16b^2} \ln t - \frac{7a^2d^2}{192b^2} + \frac{ac_{32}}{4} + \frac{cd^2}{12b^2}\right)t^4 - \dots$$

Применим симметрию (27) к этому семейству разложений. Получим

$$\tilde{w} = -\frac{\tilde{a}}{\tilde{c}t} \left(\frac{1}{1+\tilde{v}}\right), \quad (28)$$

где

$$\tilde{v} = \left(\frac{\tilde{b}\tilde{c}}{4\tilde{a}} \ln t - \frac{\tilde{a}c_{32}}{\tilde{c}}\right)t^2 + \left(\frac{\tilde{b}^2\tilde{c}^2}{16\tilde{a}^2} \ln t - \frac{7\tilde{b}^2\tilde{c}^2}{192\tilde{a}^2} - \frac{\tilde{b}c_{32}}{4} - \frac{\tilde{d}\tilde{c}^2}{12\tilde{a}^2}\right)t^4 + \dots$$

Заметим, что

$$\frac{1}{1+\tilde{v}} = 1 - \tilde{v} + \tilde{v}^2 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tilde{v}^k.$$

Учитывая эту формулу, соотношение (28) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{w} = -\frac{\tilde{a}}{\tilde{c}t} \left[1 - \left(\frac{\tilde{b}\tilde{c}}{4\tilde{a}} \ln t - \frac{\tilde{a}c_{32}}{\tilde{c}}\right)t^2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{\tilde{b}^2\tilde{c}^2}{16\tilde{a}^2} \ln^2 t + \left\{-\frac{\tilde{b}^2\tilde{c}^2}{16\tilde{a}^2} - \frac{\tilde{b}c_{32}}{2}\right\} \ln t + \frac{7\tilde{b}^2\tilde{c}^2}{192\tilde{a}^2} + \frac{\tilde{b}c_{32}}{4} + \frac{\tilde{d}\tilde{c}^2}{12\tilde{a}^2} + \frac{\tilde{a}^2c_{32}^2}{\tilde{c}^2}\right)t^4 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Опуская тильды, для ребра $\Gamma_2^{(1)}$ при $|\eta| = 2$ мы получаем семейство разложений

$$\begin{aligned} w = -\frac{a}{c}t^{-1} + \left(\frac{b}{4} - \frac{a^2c_{32}}{c^2}\right)t + \\ + \left(-\frac{b^2c}{16a} \ln^2 t + \left\{\frac{b^2c}{16a} + \frac{abc_{32}}{2c}\right\} \ln t - \frac{7b^2c}{192a} - \frac{abc_{32}}{4c} - \frac{cd}{12a} - \frac{a^3c_{32}^2}{c^3}\right)t^3 + \dots, \end{aligned}$$

которое совпадает с (26), т.к. $c_{12} = -a^2c_{32}/c^2$.

Итак, при $|\xi| = 2$ разложение (6) имеет вид (25), при $|\eta| = 2$ разложение (9) имеет вид (26). О степенных разложениях решений уравнения (1) в окрестности бесконечности и произвольной точки $t = t_0 \neq 0, \infty$ см. [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998.
2. Брюно А. Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения// Усп. мат. наук. — 2004. — 59, № 3. — С. 31–80.
3. Брюно А. Д., Гриднев А. В. Степенные и экспоненциальные разложения решений третьего уравнения Пенлеве/ Препринт № 51. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
4. Гриднев А. В. Степенные и экспоненциальные асимптотики решений третьего уравнения Пенлеве// Дифференц. уравнения. — 2004. — 40, № 6. — С. 855.

5. *Гриднев А. В.* О степенных и экспоненциальных асимптотических разложениях третьего уравнения Пенлеве// Воронежская весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения—XV», 2004. — С. 64–65.
6. *Козлов В. В., Фурта С. Д.* Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнения. — М.: МГУ, 1996.
7. *Тихомиров В. М.* Фреше производная// Мат. энциклопедия. — М.: Советская Энциклопедия, 1985. — 5. — С. 666.
8. *Gromak V. I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plane. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2002.

А. В. Гриднев

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики

E-mail: gridnev_a@mail.ru

О СРЕДНИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ—РИМАНА

© 2005 г. **В. И. ДАНЧЕНКО, Е. П. ДОЛЖЕНКО**

Аннотация. В работе получены формулы типа Коши и типа Пуассона для полианалитических функций. На основе этих формул получена теорема о среднем и обобщенный принцип максимума для полианалитических функций. Даны оценки средних значений ассоциированной функции двух комплексных переменных на окружностях через средние значения самой полианалитической функции. Отсюда, в частности, следуют оценки интегральных норм аналитических компонент полианалитической функции.

1. Формулы типа Коши и типа Пуассона для полианалитических функций. Теорема о среднем и обобщенный принцип максимума. Полианалитическими функциями порядка n (или n -аналитическими функциями) в некоторой области G комплексной плоскости C называются все определенные в этой области однозначные решения f обобщенного уравнения Коши—Римана $\partial^n f / \partial \bar{z}^n = 0$, где n — натуральное число. Каждая n -аналитическая в G функция может быть записана в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z),$$

где функции $\varphi_k(z)$ голоморфны в G (их называют *голоморфными компонентами* полианалитической функции f).

Вместе с каждой n -аналитической в области G функцией $f(z)$ определяется так называемая ассоциированная с ней однозначная аналитическая функция $F(v, z)$ двух комплексных переменных $v \in \mathbb{C}$, $z \in G$:

$$F(v, z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \varphi_k(z). \quad (1)$$

Пусть $\rho > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $n \geq 1$ — натуральное, f — n -аналитическая функция в круге

$$D(v, \rho \cdot (1 + \varepsilon)) := \{z : |z - v| < \rho \cdot (1 + \varepsilon)\}.$$

В [1, п. 4.3, формула (15)] получена интегральная формула

$$F(\bar{v}, z) = -\rho \cdot (1 - \varepsilon^2) \frac{\varepsilon^{1-n}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta} d\vartheta \int_0^\pi \frac{f(v + \rho\sigma e^{i\vartheta})}{\sigma} \times \\ \times \left(\frac{e^{-i(n-1)\delta}}{(z - v) + a e^{i\vartheta} (\varepsilon e^{i\delta} - 1)/\sigma} + \frac{e^{i(n-1)\delta}}{(z - v) + a e^{i\vartheta} (\varepsilon e^{-i\delta} - 1)/\sigma} \right) d\delta,$$

где

$$z \in D(v, (1 - \varepsilon)\rho), \quad a = \rho \cdot (1 - \varepsilon^2), \quad \sigma = \sigma(\varepsilon, \delta) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \delta}.$$

Преобразуем эту формулу. Поскольку $|e^{i\vartheta}(\varepsilon e^{i\delta} - 1)/\sigma| = 1$ при всех вещественных ϑ и δ , мы можем положить $e^{i\psi} = (\varepsilon e^{i\delta} - 1)/\sigma$ с некоторым действительным $\psi = \psi(\varepsilon, \delta)$. Кроме того, в предыдущем интеграле сделаем замену $t = -\delta$ во втором ядре. Тогда с учетом четности функции

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 02-01-00913 и 04-01-00717) и фонда Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1892.2003.1).

$f(v + \rho\sigma e^{i\vartheta})/\sigma$ относительно переменной δ интеграл примет вид некоторого обобщения формулы Коши:

$$F(\bar{v}, z) = -\rho(1 - \varepsilon^2) \frac{\varepsilon^{1-n}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(v + \rho\sigma e^{i\vartheta})}{\sigma} \frac{e^{i\vartheta} e^{-i(n-1)\delta}}{z - v + a e^{i(\psi+\vartheta)}} d\delta d\vartheta. \quad (2)$$

Далее, легко проверить, что

$$\frac{1}{z - v + a e^{i(\psi+\vartheta)}} - \frac{1}{a^2/\bar{z} - \bar{v} + a e^{i(\psi+\vartheta)}} = \frac{e^{-i(\psi+\vartheta)}}{a} \frac{a^2 - |z - v|^2}{|z - v + a e^{i(\psi+\vartheta)}|^2}.$$

Несложно показать, что если заменить в интеграле (2) ядро $(z - v + a e^{i(\psi+\vartheta)})^{-1}$ ядром $J = (a^2/\bar{z} - \bar{v} + a e^{i(\psi+\vartheta)})^{-1}$, то получим нулевой интеграл при всех $z \in D(v, (1 - \varepsilon)\rho)$ (см. [2]). Отсюда, вычтя из (2) этот нулевой интеграл и вновь учитывая равенство $e^{i\psi} = (\varepsilon e^{i\delta} - 1)/\sigma$, получим равенство

$$F(\bar{v}, z) = \frac{\varepsilon^{1-n}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(v + \rho\sigma e^{i\vartheta})}{\sigma^2} (e^{-i(n-1)\delta} - \varepsilon e^{-in\delta}) \frac{(a^2 - |z - v|^2) d\delta d\vartheta}{|z - v + a e^{i(\vartheta+\psi)}|^2}.$$

Для дальнейшего упрощения заменим в полученной формуле значение n на $n + k$ и домножим обе ее части на ε^k , $k = 0, 1, \dots$. Просуммировав полученные равенства по всем $k = 0, 1, \dots$, получим окончательное интегральное представление: формулу Пуассона для функций, n -аналитических в круге $D(v, \rho(1 + \varepsilon))$:

$$F(\bar{v}, z) = \varepsilon^{1-n} \frac{1 - \varepsilon^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(v + \rho\sigma e^{i\vartheta}) e^{-i(n-1)\delta}}{\sigma^2} \frac{(a^2 - |z - v|^2) d\delta d\vartheta}{|z - v + a e^{i(\vartheta+\psi)}|^2}, \quad (3)$$

где при фиксированных параметрах $\rho > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $a = \rho(1 - \varepsilon^2)$ приняты обозначения:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \delta) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \delta}, \quad e^{i\psi} = (\varepsilon e^{i\delta} - 1)/\sigma.$$

Отметим, что мы получили (3), предполагая, что $z \in D(v, (1 - \varepsilon)\rho)$. На самом деле равенство (3) имеет место во всем более широком круге $D(v, (1 - \varepsilon^2)\rho)$, поскольку интеграл в (3) является гармонической функцией переменной z в $D(v, (1 - \varepsilon^2)\rho)$.

Из (3) при $z = v$ с учетом четности функции $f(v + \rho\sigma e^{i\vartheta})/\sigma$ относительно переменной δ — получается формула среднего значения для функций $f(z)$, n -аналитических в круге $D(v, \rho(1 + \varepsilon))$:

$$f(v) = \varepsilon^{1-n} \frac{1 - \varepsilon^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n-1)\delta}{\sigma^2(\varepsilon, \delta)} d\delta \int_0^{2\pi} f(v + \rho\sigma(\varepsilon, \delta)) e^{i\vartheta} d\vartheta. \quad (4)$$

Отсюда, очевидным образом оценивая последний интеграл, получаем обобщенный принцип максимума для n -аналитических функций:

$$|f(v)| \leq \varepsilon^{1-n} \|f\|_{K(v, \rho, \varepsilon)}, \quad (5)$$

где в правой части записана $\sup$ -норма функции $f(z)$ по кольцу

$$K(v, \rho, \varepsilon) = \{z : \rho(1 - \varepsilon) < |z - v| < \rho(1 + \varepsilon)\}.$$

Оценка (5) точна в том смысле, что при любых $n \geq 1$, $v \in C$, $\rho > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется такая n -аналитическая на C функция $f_{v, \rho, \varepsilon}(z)$, что

$$|f_{v, \rho, \varepsilon}(v)| \geq \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{2}\right)^{n-1} \varepsilon^{1-n} \|f\|_{K(v, \rho, \varepsilon)}.$$

Примером может служить функция $(\rho^2(1 + \varepsilon^2) - (z - v)(\bar{z} - \bar{v}))^{n-1}$.

Неравенство (5) уточняет соответствующее неравенство (11) из [1].

2. Оценка средних значений на окружностях.

Теорема 1. Пусть фиксированы $n \geq 1$, $v \in C$, а функция $f(z)$ n -аналитична в круге $|z-v| < 1$. При $r \in (0, 1)$ и $p > 1$ положим

$$M_p(r) = \sup_{\rho \in (r, 1)} \left(\int_{|t-v|=\rho} |f(t)|^p |dt| \right)^{1/p}.$$

Тогда

$$\left(\int_{|z-v|=r} |F(\bar{v}, z)|^p |dz| \right)^{1/p} \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^{n-1} M_p(r). \quad (6)$$

Доказательство. Действительно, положим

$$P = P_a(|z-v|, \vartheta + \psi) := \frac{a^2 - |z-v|^2}{|z-v + a e^{i(\vartheta+\psi)}|^2}$$

— ядро Пуассона

$$P_R(s, \varphi) = \frac{R^2 - s^2}{R^2 + s^2 - 2Rs \cos \varphi}$$

с $R = a$, $s = |z-v|$, $\varphi = \vartheta + \psi$. Напомним, что $a = \rho \cdot (1 - \varepsilon^2)$ (где $\rho \in (r, 1)$ и $0 < \varepsilon < 1$), $e^{i\psi} = (\varepsilon e^{i\delta} - 1)/\sigma$, $\sigma = \sigma(\varepsilon, \delta) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \delta}$. Выберем ρ и ε из условий $\rho(1 + \varepsilon) = 1$, $\rho(1 - \varepsilon) = r$. Тогда, применяя к (3) неравенство Гельдера, получаем:

$$\begin{aligned} |F(\bar{v}, z)| &\leq \frac{\varepsilon^{1-n}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \varepsilon^2}{\sigma^2} \left(\int_0^{2\pi} |f(v + \rho \sigma e^{i\vartheta})|^p P d\vartheta \right)^{1/p} \left(\int_0^{2\pi} P d\vartheta \right)^{1/q} d\delta = \\ &= (2\pi)^{1/q} \frac{\varepsilon^{1-n}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \varepsilon^2}{\sigma^2} \left(\int_0^{2\pi} |f(v + \rho \sigma e^{i\vartheta})|^p P d\vartheta \right)^{1/p} d\delta. \end{aligned}$$

Далее используем обобщенное неравенство Минковского

$$\begin{aligned} &\left(\int_{|z-v|=r} |F(\bar{v}, z)|^p |dz| \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^{1-n}}{(2\pi)^{2-1/q}} \left(\int_{|z-v|=r} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 - \varepsilon^2}{\sigma^2} \left(\int_0^{2\pi} |f(v + \rho \sigma e^{i\vartheta})|^p P d\vartheta \right)^{1/p} d\delta \right)^p |dz| \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^{1-n}}{(2\pi)^{2-1/q}} \int_0^{2\pi} \left(\int_{|z-v|=r} \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{\sigma^2} \right)^p \int_0^{2\pi} |f(v + \rho \sigma e^{i\vartheta})|^p P d\vartheta |dz| \right)^{1/p} d\delta \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^{1-n}}{(2\pi)^{2-1/q}} \int_0^{2\pi} \left(2\pi \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{\sigma^2} \right)^p \int_0^{2\pi} |f(v + \rho \sigma e^{i\vartheta})|^p d\vartheta \right)^{1/p} d\delta \leq \\ &\leq M_p(r) \frac{\varepsilon^{1-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \varepsilon^2}{\sigma^2} d\delta = M_p(r) \varepsilon^{1-n}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathcal{N}$, функция f n -аналитична в некотором круге $D(v, r)$ и удовлетворяет следующему условию:

$$\int_{|z-v|=d} |f(z)|(r^2 - d^2)^m |dz| \leq A < \infty \quad (7)$$

при всех $d \in (r_1, r)$, где $0 < r_1 < r$. Тогда

$$|f(v)| \leq Ar^{-2m} \left(\frac{r + r_1}{r - r_1} \right)^{n+m-1} \quad (8)$$

с той же, что и в условии (7), постоянной A .

Доказательство. Действительно, положим $F(z) = f(z)(r^2 - |z - v|^2)^m$. Тогда F является $(n + m)$ -аналитической функцией, и из равенства (4) при $\varepsilon = (r - r_1)/(r + r_1)$, $\rho = (r + r_1)/2$ получаем

$$|f(v)r^{2m}| \leq \left(\frac{r - r_1}{r + r_1} \right)^{1-n-m} \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \varepsilon^2}{\sigma^2(\varepsilon, \delta)} d\delta = A \left(\frac{r - r_1}{r + r_1} \right)^{1-n-m}.$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долженко Е. П., Данченко В. И. О граничных свойствах решений обобщенного уравнения Коши—Римана // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2002. — 236. — С. 142–152.
2. Долженко Е. П., Данченко В. И. О граничном поведении решений обобщенного уравнения Коши—Римана // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1998. 3. — С. 16–25.

В. И. Данченко

Владимирский государственный университет

E-mail: danch@vpti.vladimir.ru

Е. П. Долженко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

© 2005 г. Д. Я. ДАНЧЕНКО

Аннотация. Изучаются некоторые граничные свойства решения u краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в круге. В частности, даны различные оценки интегральных норм решения через гринову емкость конденсатора, образованного носителем функции f и границей круга, и через скорость роста функции f . Доказательства основаны на теореме о покрытиях носителей борелевских мер, вне которых гриновы потенциалы этих мер ограничены единицей.

Пусть E — множество, лежащее в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и замкнутое относительно D . Гриновой емкостью $C_0(E) = C_0[E, \partial D]$ конденсатора $[E, \partial D]$ называется $\sup \|\mu\|$, где $\sup$ берется по всем неотрицательным борелевским мерам μ , носители S_μ которых лежат на E , и потенциалы Грина которых

$$U(z) = \int_D \ln \frac{1}{|\varphi(z; \zeta)|} d\mu(\zeta), \quad \varphi(z; \zeta) = \frac{z - \zeta}{1 - \bar{z}\zeta}, \quad z, \zeta \in D,$$

ограничены единицей при всех $z \in D$.

В гиперболической метрике в D , определяемой линейным элементом $ds(z) = (1 - |z|^2)^{-1}|dz|$, расстояние $\rho_h(z; \zeta)$ между точками z и ζ определяется равенством $\operatorname{th} \rho_h(z; \zeta) = |\varphi(z; \zeta)|$. Положим

$$g = g(z_0; \rho) = \{z : \rho_h(z; z_0) < \rho\}, \quad \rho > 0, \quad z_0 \in D.$$

Круг g имеет гиперболический радиус (h -радиус) ρ и гиперболический центр (h -центр) z_0 , и для его гиперболической плоской меры (h -площади) имеем равенство (см., например, [2])

$$S_h(g) = \int_g \frac{d\sigma(z)}{(1 - |z|^2)^2} = \pi \operatorname{sh}^2 \rho; \quad (1)$$

здесь и в дальнейшем через $d\sigma(z)$ обозначен элемент евклидовой площади круга D , т.е. $\sigma(e) = \operatorname{mes}_2(e \cap D)$ для любого борелевского подмножества e комплексной плоскости.

Нам понадобится следующий результат.

Теорема 1 (см. [3]). Пусть μ — неотрицательная конечная борелевская мера в единичном круге D . Пусть $\eta > 0$, $\beta > 0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует конечный или счетный набор (зависящий от η , β , ε) кругов g_k с h -радиусами ρ_k , объединение W которых обладает следующими свойствами.

1) При любом $\delta \in (0, 1)$ имеем

$$\sum_{\rho_k \leq 1} \rho_k^\beta + \sum_{\rho_k > 1} e^{2\delta\rho_k} \leq A\|\mu\|\eta; \quad (2)$$

кроме того, при $\delta = 1$ справедлива оценка

$$\sum_{\rho_k \leq 1} \rho_k^\beta + \sum_{\rho_k > 1} e^{2\rho_k} \leq A\eta\|\mu\| \ln^{1+\varepsilon}(e + \|\mu\|\eta), \quad (3)$$

где $A = A(\beta, \varepsilon, \delta)$.

2) При любых $z \in D \setminus W$ имеем

$$U(\zeta) \leq 1/\eta. \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 02-01-00913 и 04-01-00717) и фонда Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1892.2003.1).

В теореме 1 и ниже через $A(\cdot)$, $A_j(\cdot)$ обозначаются конечные положительные величины, зависящие лишь от указанных аргументов.

Замечание. В теореме 1, вообще говоря, не обязательно имеет место полное покрытие множества $S_\mu \cap D$.

Если μ — равновесное распределение массы на E , $C_0(E) = \mu(E)$, то при $\eta > 1$ множество W покрывает множество E , за возможным исключением некоторого подмножества $E_\eta \subset E$ такого, что $C_0(E_\eta) = 0$ (см. (4) и [5, 6]). В частности, множество E_η при любом фиксированном $\beta > 0$ имеет нулевую β -меру Хаусдорфа (см. [6]) и, следовательно, может быть покрыто конечным или счетным набором кругов со сколь угодно малой суммой h -радиусов в степени β . Таким образом, при $\eta > 1$ можно получить полное покрытие множества E со свойствами (2)–(4).

Отметим еще (см. [3, теорема 6.1]), что если E — компакт, лежащий в D , μ — равновесное распределение на E , то для любого $\eta > 1$ существует *конечное* покрытие E , обладающее теми же свойствами (2)–(4) (с другими величинами A).

Рассмотрим в $\bar{D}$ краевую задачу для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = f(z), \quad u(\zeta)|_{\partial D} = 0, \quad (5)$$

где $f \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$. При действительном a введем характеристику

$$H(f, a) = \max_{z \in D} |f(z)|(1 - |z|)^a. \quad (6)$$

Теорема 2. Пусть $S_f = \text{supp } f$ и $C_0 = C_0(S_f) < \infty$, $\varepsilon > 0$. Тогда при любом $p \geq 1$ справедлива оценка

$$\Pi(u, p) := \left(\int_{\partial D} \left| \frac{\partial u(z)}{\partial n(z)} \right|^p |dz| \right)^{1/p} \leq AH \left(f, 1 + \frac{1}{p} \right) C_0 \ln^{1+\varepsilon}(e + C_0), \quad (7)$$

где $A = A(p, \varepsilon)$ — положительная конечная величина, зависящая только от указанных аргументов (не зависящая от f).

Доказательство. Потенциал

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_D \ln \frac{1}{|\varphi(z; \zeta)|} f(\zeta) d\sigma(\zeta) \quad (8)$$

дает решение уравнения (5) с нулевыми граничными условиями (см. [1]). Нормальная производная функции $-\ln |\varphi(z; \zeta)|$ равна $\frac{1 - |\zeta|^2}{|z - \zeta|^2}$, откуда, используя обобщенное неравенство Минковского, находим

$$\begin{aligned} \Pi(u, p) &\leq \left(\int_{\partial D} \left(\int_D \frac{1 - |\zeta|^2}{|z - \zeta|^2} |f(\zeta)| d\sigma(\zeta) \right)^p |dz| \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \int_D \left(\int_{\partial D} \frac{|dz|}{|z - \zeta|^{2p}} \right)^{1/p} (1 - |\zeta|^2) |f(\zeta)| d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Внутренний интеграл оценивается сверху величиной $A_1(p)(1 - |\zeta|^2)^{-2p+1}$. Отсюда, из (6) и (1) получаем

$$\begin{aligned} \Pi(u, p) &\leq A_1(p) \int_{S_f} (1 - |\zeta|^2)^{-1+1/p} |f(\zeta)| d\sigma(\zeta) \leq \\ &\leq A_1(p) H \left(f, 1 + \frac{1}{p} \right) \int_{S_f} (1 - |\zeta|^2)^{-2} d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Пусть μ — равновесное распределение на S_f . Применим к μ теорему 1 при $\varepsilon > 0$, $\beta = 2$, $\eta > 1$ и получим покрытие множества S_f кругами g_k , удовлетворяющее соотношениям (2)–(4). Из последнего неравенства и из (1) получаем, что $\Pi(u, p)$ оценивается сверху величиной

$$A_1(p)H\left(f, 1 + \frac{1}{p}\right) \sum_k \int_{g_k} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1 - |\zeta|^2)^2} = A_1(p)H\left(f, 1 + \frac{1}{p}\right) \sum_k \text{sh}^2 \rho_k.$$

Это с учетом (3) доказывает оценку (7). Теорема 2 доказана. $\square$

Замечание. В [3] показано, что в условиях теоремы 2 выполнено неравенство $|u(z)| < 1$ всюду в круге D , за возможным исключением некоторого его подмножества, гиперболическая плоская мера которого не превосходит величины $A(\varepsilon)C \ln^{1+\varepsilon}(e + C)$, где $C = \|f\|_{L^1(\sigma)}$.

Это утверждение также получается с помощью теоремы 1. В этом случае достаточно ее применить с параметрами $\varepsilon > 0$, $\beta = 2$, $\eta > (2\pi)^{-1}$ к мере $\mu_f(\zeta) = |f(\zeta)|d\sigma(\zeta)$. Тогда получим покрытие W_f множества $\text{supp } \mu_f$, удовлетворяющее соотношениям (2)–(4), где $\|\mu_f\| = \|f\|_{L^1(\sigma)}$. Гиперболическая площадь покрытия W_f оценивается с учетом (1) и (3).

Теорема 3 (см. [4]). Пусть $C_0 = C_0(S_f) < \infty$. Тогда при любом выборе величин $\varepsilon > 0$, $p > 1$ и $\alpha \in (-1 + 2/p, 1 + 1/p)$ справедливы оценки

$$\|u\rho^{-\alpha}\|_{L^p(\sigma)} \leq A(p, \alpha) H\left(f, 2 - \alpha + \frac{2}{p}\right) C_0 \ln^{1+\varepsilon}(e + o), \quad (9)$$

где $\rho = \rho(z) = 1 - |z|^2$ и, кроме того,

$$\|u\rho^{-\alpha}\|_{L^p(\sigma)} \leq A(p, \alpha) C_0 \|f\rho^{2-\alpha}\|_{L^p(\sigma)}. \quad (10)$$

Доказательство. Из (8) с помощью обобщенного неравенства Минковского находим

$$\|u\rho^{-\alpha}\|_{L^p(\sigma)} \leq \int_D |f(\zeta)| I^{1/p}(\zeta) d\sigma(\zeta),$$

где

$$I(\zeta) = \int_D \ln^p \frac{|1 - z\bar{\zeta}|}{|\zeta - z|} \frac{1}{\rho^{\alpha p}(z)} d\sigma(z).$$

Для оценки $I(\zeta)$ перейдем к новой переменной $v(z) = (\zeta - z)/(1 - z\bar{\zeta})$. Тогда, пользуясь тем, что

$$\rho(z) = \frac{\rho(\zeta)\rho(v)}{|1 + v\bar{\zeta}|^2}, \quad d\sigma(z) = \frac{\rho^2(\zeta)}{|1 + v\bar{\zeta}|^4} d\sigma(v),$$

получим

$$I(\zeta) = \rho^{2-\alpha p}(\zeta) \int_D \ln^p \frac{1}{|v|} \frac{1}{\rho^{\alpha p}(v)} \frac{d\sigma(v)}{|1 + v\bar{\zeta}|^{4-2\alpha p}}.$$

Перейдя к полярным координатам $(|v|, \varphi)$, $v = |v|e^{i\varphi}$, несложно показать, что полученный интеграл сходится при любом $\alpha \in (-1 + 2/p, 1 + 1/p)$ и оценивается сверху величиной, зависящей только от p и α (и не зависящей от ζ). Действительно, такую оценку достаточно получить лишь для аналогичного интеграла по кольцу $K : |v| \in (1/2, 1)$ (в круге $|v| \leq 1/2$ сходимость и оценка интеграла очевидны). При этом можно считать, что ζ вещественно положительно и $\zeta \in (1/2, 1)$ (при $\zeta \in [0, 1/2]$ оценка также очевидна). При указанных предположениях подынтегральная функция оценивается сверху величиной (с некоторым множителем, зависящем только от p и α)

$$\frac{1}{\rho^{(\alpha-1)p}(v)} \frac{1}{(\rho(v) + |\varphi|)^{4-2\alpha p}}, \quad v = |v|e^{i\varphi}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi).$$

Здесь по условию теоремы $(\alpha - 1)p < 1$, так что при $4 - 2\alpha p \leq 1$ нужная оценка интеграла по кольцу K становится очевидной после интегрирования по $\varphi \in (-\pi, \pi)$. При $4 - 2\alpha p > 1$

после интегрирования по $\varphi \in (-\pi, \pi)$ подынтегральная функция оценивается сверху величиной (с некоторым множителем, зависящем только от p и α)

$$\frac{1}{\rho^{(\alpha-1)p}(v)} \frac{1}{\rho^{3-2\alpha p}(v)} = \frac{1}{\rho^{3-\alpha p-p}(v)}, \quad 3 - \alpha p - p < 1,$$

где последнее неравенство дано условием теоремы. Итак, $I(\zeta) \leq A(p, \alpha) \rho^{2-p\alpha}(\zeta)$ и, следовательно,

$$\|u\rho^{-\alpha}\|_{L^p(\sigma)} \leq A(p, \alpha) \int_D \rho^{-\alpha+2/p}(\zeta) |f(\zeta)| d\sigma(\zeta). \quad (11)$$

Пусть μ — равновесное распределение на S_f . Для доказательства оценки (9) применим к μ теорему 1 с указанными в формулировке $\varepsilon > 0$, $\beta = 2$, $\eta > 1$; получим покрытие множества S_f (за возможным исключением подмножества нулевой емкости) конечным или счетным набором кругов g_k со свойством (3). Оцениваем интеграл в (11) с учетом определения величины $H = H(f, 2 - \alpha + 2/p)$:

$$\begin{aligned} \|u\rho^{-\alpha}\|_{L^p(\sigma)} &\leq A(p, \alpha) \sum_k \int_{g_k} \rho^{-\alpha+2/p}(\zeta) |f(\zeta)| d\sigma(\zeta) \leq \\ &\leq A(p, \alpha) H \sum_k \int_{g_k} \rho^{-2}(\zeta) d\sigma(\zeta) \leq A_1(p, \alpha) H \sum_k \text{sh}^2 \rho_k. \end{aligned}$$

Из этой оценки и из (1), (3) получается (9).

Для доказательства оценки (10) применим к μ теорему 1 с $\beta = 2/q$, $\delta = 1/q$, $(1/p + 1/q = 1)$, $\eta > 1$, получим покрытие множества S_f (за возможным исключением подмножества нулевой емкости) конечным или счетным набором кругов g_k со свойством (2). Оцениваем интеграл в (11), используя (1) и неравенство Гельдера:

$$\begin{aligned} \|u\rho^{-\alpha}\|_{L^p(\sigma)} &\leq A(p, \alpha) \sum_k \int_{g_k} \rho^{-\alpha+2/p}(\zeta) |f(\zeta)| d\sigma(\zeta) \leq \\ &\leq A(p, \alpha) \sum_k \left[\left(\int_{g_k} \rho^{-2}(\zeta) d\sigma(\zeta) \right)^{1/q} \left(\int_{g_k} \rho^{p(2-\alpha)}(\zeta) |f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{1/p} \right] \leq \\ &\leq A_2(p, \alpha) \|f\rho^{2-\alpha}\|_{L^p(\sigma)} \sum_k \text{sh}^{2/q} \rho_k. \end{aligned}$$

Из этой оценки и из (2) получается (10). Теорема 3 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966.
3. Данченко В. И. Оценки потенциалов Грина. Приложения// Мат. сб. — 2003. — 194, № 1. — С. 61–86
4. Данченко Д. Я. Некоторые вопросы аппроксимации и интерполяции рациональными функциями. Приложение к уравнениям эллиптического типа/ Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. — Владимирский гос. пед. ун-т, 2001.
5. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. — М.: Мир, 1971.
6. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.

Д. Я. Данченко
Владимирский государственный университет
E-mail: danch@vpti.vladimir.ru

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2005 г. И. Н. ДОЛГИХ

Аннотация. В данной работе исследуются задачи о поведении решений одного класса дифференциальных уравнений вида $l_n y = \lambda y$ при $x \rightarrow +0$, где l_n — скалярное формально самосопряженное квазидифференциальное выражение произвольного порядка с комплекснозначными коэффициентами. Полученные результаты позволяют определить индекс дефекта оператора, порожденного выражением l_n .

1. Пусть комплекснозначные функции f_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, $n > 1$, — элементы матрицы-функции $F := (f_{ij})$ — удовлетворяют следующим условиям:

- (i) измеримы на $I := (a, b)$, где $-\infty < a < b \leq +\infty$, и суммируемы на каждом замкнутом подынтервале I , т.е. $f_{ij} \in L^1_{\text{loc}}(I)$;
- (ii) $f_{ij} = 0$ почти всюду на I при $2 \leq i + 1 < j < n$ и $f_{k,k+1} \neq 0$ на I при $1 \leq k \leq n - 1$;
- (iii) матрица F удовлетворяет равенству $F = -J^{-1}F^*J$, где F^* — сопряженная матрица к матрице F и $J := ((-1)^i \delta_{i,n+1-j})$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Перечисленные условия позволяют определить квазипроизводные заданной функции y посредством матрицы F :

$$\begin{aligned} y^{[0]} &:= y, \\ y^{[k]} &:= (f_{k,k+1})^{-1} \left[(y^{[k-1]})' - \sum_{j=1}^k f_{kj} y^{[j-1]} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ y^{[n]} &:= (y^{[n-1]})' - \sum_{j=1}^n f_{nj} y^{[j-1]}, \end{aligned}$$

и скалярное формально самосопряженное квазидифференциальное выражение l_n :

$$l_n y := i^n y^{[n]}.$$

Выражение l_n определяет минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(I)$. Известно, что при любом не вещественном λ уравнение

$$l_n y = \lambda y \tag{1}$$

имеет решения из $\mathcal{L}_2(I)$, причем максимальное число n_+ (n_-) линейно независимых решений из $\mathcal{L}_2(I)$ при $\text{Im } \lambda > 0$ ($\text{Im } \lambda < 0$) не зависит от λ и называется дефектным числом, а пара чисел n_+ , n_- — индексом дефекта оператора L_0 .

Уравнение (1), очевидно, равносильно системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\hat{y}' = (F + \Lambda) \hat{y}, \tag{2}$$

где $\hat{y} := \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, \dots, y^{[n-1]})$, а элементы числовой матрицы $\Lambda := (\lambda_{ij})$ определяются равенствами $\lambda_{n1} := i^{-n} \lambda$ и $\lambda_{ij} := 0$ для остальных значений i и j (более подробно см. [6] и [3, гл. V]).

Рассмотрим один частный случай. Пусть $I := [0, +\infty)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

Работа выполнена при поддержке гранта в рамках ведомственной научной программы Министерства образования РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» по проекту «Спектральный анализ дифференциальных и разностных операторов» (код 8351).

(I) функции $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$ измеримы, принимают вещественные значения при $x \in I$, и при любом $0 < b < +\infty$ справедливы неравенства

$$\int_0^b |p_0|^{-1} dx < +\infty, \quad \int_0^b |p_k| dx < +\infty, \quad k = 0, 1, \dots, m;$$

(II) $p_0(z), p_1(z), \dots, p_m(z)$ — аналитические функции при $|z| \geq x_0 > 0$ и

$$p_{m-k}(z) := z^{2k+\nu} \left[a_{m-k} + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{(m-k)} z^{-j} \right], \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad |z| \geq x_0 > 0,$$

где $a_0 \neq 0$, а $\nu \geq 0$ — целое число.

Условие (I) позволяет определить выражение l_n порядка $n = 2m$ формулой

$$l_{2m}y := p_m(x)y - \frac{d}{dx} \left\{ p_{m-1}(x)y' - \frac{d}{dx} \left[p_{m-2}(x)y'' - \dots - \frac{d}{dx} \left(p_1(x)y^{(m-1)} - \frac{d}{dx} (p_0(x)y^{(m)}) \right) \dots \right] \right\},$$

а из условия (II) следует, что выражение l_{2m} при $x > x_0$ имеет вид

$$l_{2m}y = \sum_{k=0}^m (-1)^k (p_{m-k}(x)y^{(k)})^{(k)}.$$

Сформулируем теорему, принадлежащую С. А. Орлову (см. [5]).

Теорема 1. Если функции $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$ удовлетворяют условиям (I) и (II), то максимальное число линейно независимых решений уравнения $l_{2m}y = \lambda y$, принадлежащих $\mathcal{L}_2(I)$, равно:

1) при $\nu > 0$ числу корней полинома

$$\mathfrak{F}_{2m}(z, \nu) := \sum_{k=1}^m (-1)^k a_{m-k} \prod_{j=0}^{k-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] + a_m,$$

лежащих в области $\operatorname{Re} z < 0$, и не зависит от λ ;

2) при $\nu = 0$ числу корней полинома $\mathfrak{F}_{2m}(z, 0) - \lambda$, лежащих в области $\operatorname{Re} z < 0$, и при не вещественном λ равно m .

При этом в случае $\nu > 0$ спектр любого самосопряженного расширения оператора L_0 дискретен.

В настоящей работе исследуются задачи о поведении решений уравнения (1) произвольного порядка (четного или нечетного) с комплекснозначными коэффициентами в случае, когда $I = (0, a]$ ($a < +\infty$) при $x \rightarrow +0$. Полученные результаты позволяют определить индекс дефекта оператора L_0 , порожденного квазидифференциальным выражением l_n ; при этом условия, налагаемые на коэффициенты выражения l_n , того же характера, что и (I), (II). Основной результат работы сформулирован в теореме 4.

Отметим, что в работе [7] заново открыта теорема 1 для частного случая $p_{m-k}(x) = a_{m-k}x^{2k+\nu}$, $k = 0, 1, \dots, m$, и подробно изучен полином $\mathfrak{F}_{2m}(z, \nu)$. В [2, 4] обобщена теорема Орлова на уравнения с коэффициентами, не являющимися аналитическими функциями при $x \rightarrow +\infty$.

2. Рассмотрим случай $n = 2m$. Известно, что при $m = 1$ квазидифференциальное выражение l_2 порождается матрицей

$$\begin{pmatrix} -iq_0p_1^{-1} & -p_1^{-1} \\ p_0 + q_0^2p_1^{-1} & -iq_0p_1^{-1} \end{pmatrix},$$

где p_0, q_0, p_1 — вещественные функции на I , функции $p_1^{-1}, q_0 p_1^{-1}, p_0 + q_0^2 p_1^{-1}$ принадлежат классу $L_{\text{loc}}^1(I)$, и имеет вид

$$l_2 = (p_1 y' + i q_0 y)' + p_0 y + i q_0 y'.$$

Пусть выполнено следующее условие:

(A) $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x), q_0(x), q_1(x), \dots, q_{m-1}(x), m = 2, 3, \dots$ — вещественные функции на $I = (0, a]$ ($a < +\infty$) и все функции

$$\alpha_m := (-1)^{m-1} p_m^{-1}, \quad \alpha_{m-1} := (-1)^{m+1} (p_{m-1} + q_{m-1}^2 p_m^{-1}), \quad \alpha_k := (-1)^{m+1} p_k, \\ \beta_{m-1} := -q_{m-1} p_m^{-1}, \quad \beta_k := (-1)^{m+1} q_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-2,$$

принадлежат классу $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(I)$.

Определим матрицу $F_{2m} := F$, положив

$$\begin{aligned} f_{2m-k, k+1} &= \alpha_k, & k &= 0, 1, \dots, m; \\ f_{2m-k, k} &= f_{2m+1-k, k+1} = i \beta_{k-1}, & k &= 1, 2, \dots, m; \\ f_{k, k+1} &= 1, & k &= 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, 2m-1; \\ f_{ij} &= 0 & \text{при всех остальных значениях } i \text{ и } j. \end{aligned}$$

Квазидифференциальное выражение $l_{2m}, m \geq 1$, порожденное матрицей F_{2m} , обладает тем свойством, что если $p_k \in C^{(k)}(I), k = 0, 1, \dots, m, q_k \in C^{(k+1)}(I), k = 0, 1, \dots, m-1$, и $p_m(x) \neq 0$ для всех $x \in I$, то оно совпадает с классическим дифференциальным выражением

$$l_{2m} y = \sum_{k=0}^m (p_k y^{(k)})^{(k)} + i \sum_{k=0}^{m-1} \left[(q_k y^{(k+1)})^{(k)} + (q_k y^{(k)})^{(k+1)} \right]$$

(см. [6, добавление A]).

Предположим также, что выполнено следующее условие:

(B) пусть при всех $0 < x \leq x_0 < a$

$$\begin{aligned} p_k(x) &:= x^{2k+\nu} (a_k + r_k(x)), & p_m(x) &:= \frac{x^{2m+\nu}}{\frac{1}{a_m} + r_m(x)}, \\ q_k(x) &:= x^{2k+\nu+1} (b_k + s_k(x)), & k &= 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

и функции $r_k(x)$ и $s_k(x)$ представляются в виде сходящихся степенных рядов

$$\begin{aligned} r_k(x) &:= \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{(k)} x^j, & k &= 0, 1, \dots, m, \\ q_k(x) &:= \sum_{j=1}^{+\infty} b_j^{(k)} x^j, & k &= 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

где $a_m \neq 0, \nu \leq 0$ — целое число.

Обозначим через $D := (d_i \delta_{ij})_{i,j=1}^{2m}$ диагональную матрицу с элементами

$$d_k(x) := x^{-k+1/2}, \quad d_{k+m}(x) := x^{m+\nu-k+1/2}, \quad k = 1, \dots, m.$$

В системе (2) с $F = F_{2m}$ сделаем замену $\hat{y} = D\mathbf{Y}$, где $\mathbf{Y} := \text{colon}(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1})$. Тогда система (2) преобразуется к виду

$$\mathbf{Y}' = (D^{-1} F_{2m} D + D^{-1} \Lambda D - D^{-1} D') \mathbf{Y}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} D^{-1} D' &= x^{-1} \text{diag} \left(\left(-\frac{1}{2} \right), \left(-\frac{3}{2} \right), \dots, \left(-m + \frac{1}{2} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(m + \nu - 1 + \frac{1}{2} \right), \left(m + \nu - 2 + \frac{1}{2} \right), \dots, \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right); \end{aligned}$$

все элементы матрицы $\tilde{\Lambda} := D^{-1}\Lambda D$ равны нулю, кроме

$$\tilde{\lambda}_{2m,1}(x) = x^{-1} \frac{(-1)^m \lambda}{x^\nu};$$

например, элементы вида $\tilde{f}_{2m-k,k+1}(x)$ матрицы $\tilde{F} := D^{-1}F_{2m}D$ определяются следующим образом:

$$\tilde{f}_{2m-k,k+1} = d_{2m-k}^{-1} f_{2m-k,k+1} d_{k+1} = d_{2m-k}^{-1} \alpha_k d_{k+1} = (-1)^{m+1} x^{-2k-\nu-1} p_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-2.$$

Таким же образом вычисляя другие элементы матрицы $\tilde{F}$ с учетом условий (А) и (В), находим, что неизвестная вектор-функция $\mathbf{Y}$ удовлетворяет системе уравнений

$$x \frac{d\mathbf{Y}}{dx} = (A + B(x))\mathbf{Y}, \quad (3)$$

где элементы a_{ij} числовой матрицы A определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} a_{k,k+1} &= 1, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, 2m-1, \quad a_{m,m+1} = \frac{(-1)^m}{a_m}, \\ a_{2m,1} &= \begin{cases} (-1)^m(\lambda - a_0), & \nu = 0, \\ (-1)^{m+1}a_0, & \nu < 0, \end{cases} \\ a_{2m-k,k+1} &= (-1)^{m+1}a_k, \quad k = 1, 2, \dots, m-2, \\ a_{m+1,m} &= (-1)^{m+1} \left(a_{m-1} + \frac{b_{m-1}^2}{a_m} \right), \quad a_{k,k} = k - \frac{1}{2}, \\ a_{k+1+m,k+1+m} &= k + \frac{1}{2} - m - \nu, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\ a_{m,m} &= m - \frac{1}{2} - \frac{ib_{m-1}}{a_m}, \quad a_{m+1,m+1} = \frac{1}{2} - m - \nu - \frac{ib_{m-1}}{a_m}, \\ a_{2m-k,k} &= a_{2m+1-k,k+1} = (-1)^{m+1}ib_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1; \end{aligned}$$

все неуказанные элементы в матрице A равны нулю, и нетрудно заметить, что матрица $B(x)$ представляется сходящимся степенным рядом

$$B(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x^j B_j, \quad |x| \leq x_0 < a,$$

где B_j — постоянные матрицы.

Пусть теперь $n = 2m + 1$, $m = 1, 2, \dots$. Предположим, что выполнено следующее условие:

(А) $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x); q_0(x), q_1(x), \dots, q_m(x)$ — вещественные функции на I , $(-1)^m q_m(x) > 0$ при $x \in I$ и все функции

$$\begin{aligned} \alpha_m &:= p_m(2q_m)^{-1}, \quad \alpha_k := (-1)^m p_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \\ \beta_m &:= [(-1)^m 2q_m]^{-1/2} > 0, \quad \beta_{m-1} := (-1)^{m+1} q_{m-1} \beta_m, \\ \beta_k &:= (-1)^{m+1} q_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-2, \end{aligned}$$

принадлежат классу $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(I)$.

Определим матрицу $F_{2m+1} := F$, положив

$$\begin{aligned} f_{2m+1-k,k+1} &= i\alpha_k, & k &= 0, 1, \dots, m, \\ f_{2m+1-k,k} &= f_{2m+2-k,k+1} = \beta_{k-1}, & k &= 1, 2, \dots, m+1, \\ f_{k,k+1} &= 1, & k &= 1, 2, \dots, m-1, m+2, \dots, 2m, \\ f_{ij} &= 0 & \text{при всех остальных значениях } i \text{ и } j. \end{aligned}$$

Выражение $l_{2m+1}y$, $m \geq 1$, представляется обыкновенным дифференциальным выражением

$$l_{2m+1}y = \sum_{k=0}^m (p_k y^{(k)})^{(k)} + i \sum_{k=0}^m \left[(q_k y^{(k+1)})^{(k)} + (q_k y^{(k)})^{(k+1)} \right],$$

если $p_k \in C^{(k)}(I)$ при $k = 0, 1, \dots, m$, $q_k \in C^{(k+1)}(I)$ при $k = 0, 1, \dots, m$ (см. [6]). В этом случае условие (В) имеет следующий вид:

(В) $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{m-1}(x); q_0(x), q_1(x), \dots, q_{m-1}(x)$ такие же, как в случае $n = 2m$, а $p_m(x), q_m(x)$ представляются в виде

$$p_m(x) := x^{2m+\nu}(a_m + r_m(x)), \quad q_m(x) := \frac{x^{2m+\nu+1}}{\frac{1}{b_m} + s_m(x)},$$

где

$$r_m(x) := \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{(m)} x^j, \quad s_m(x) := \sum_{j=1}^{+\infty} b_j^{(m)} x^j$$

— сходящиеся степенные ряды при $0 < |x| \leq x_0 < a$ и $(-1)^m b_m > 0$.

Определим диагональные элементы d_k матрицы D в замене $\hat{y} = D\mathbf{Y}$ следующими равенствами:

$$d_k := x^{-k+1/2}, \quad d_{m+1+k} := x^{\nu+m-k+1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad d_{m+1} := x^{\nu/2}.$$

С помощью такой замены система (2) опять преобразуется к системе вида (3) для вектор-функции $\mathbf{Y}$, где ненулевые элементы числовой матрицы A определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} a_{k,k+1} &= 1, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, m+2, \dots, 2m, \\ a_{m,m+1} &= a_{m+1,m+2} = \left[\frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{b_m} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ a_{2m+1,1} &= \begin{cases} (-1)^m i(a_0 - \lambda), & \nu = 0, \\ (-1)^m i a_0, & \nu < 0, \end{cases} \\ a_{2m+1-k,k+1} &= (-1)^m i a_k, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\ a_{k,k} &= k - \frac{1}{2}, \quad a_{m+1+k,m+1+k} = k - \nu - m - \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ a_{m+1,m+1} &= \frac{i a_m}{2 b_m} - \frac{\nu}{2}, \quad a_{m+1,m} = a_{m+2,m+1} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} \left[\frac{(-1)^m}{b_m} \right]^{\frac{1}{2}} b_{m-1}, \\ a_{2m+1-k,k} &= a_{2m+2-k,k+1} = (-1)^{m+1} b_{k-1}, \quad k = 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

а матрица $B(x)$, как и в случае $n = 2m$, представляется сходящимся степенным рядом

$$B(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x^j B_j, \quad |x| \leq x_0 < a,$$

где B_j — постоянные матрицы.

3. Из аналитической теории дифференциальных уравнений известна следующая теорема для систем вида

$$zw' = \left(R + \sum_{m=1}^{\infty} z^m A_m \right) w, \quad (4)$$

где $R \neq 0$, A_m — постоянные матрицы и степенной ряд $\sum_{m=0}^{\infty} z^m A_m$ сходится для $|z| < a$, $a > 0$.

Теорема 2. Если среди разностей характеристических корней матрицы R в системе (4) нет целых положительных чисел, то (4) имеет фундаментальную матрицу вида

$$\Phi = Pz^R, \quad 0 < |z| < c, \quad c > 0,$$

где P — степенной ряд

$$P(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m, \quad P_0 = E.$$

Общий случай, когда матрица R имеет характеристические корни, отличающиеся на целые числа, можно свести к случаю, рассматриваемому в теореме 2, приводя с помощью определенных преобразований матрицу R к матрице $\hat{R}$, характеристические корни которой не отличаются на целые положительные числа; при этом вид системы (4) сохраняется, и справедлива теорема 3.

Теорема 3. Система (4) имеет фундаментальную матрицу Φ вида

$$\Phi = Pz^{\hat{R}}, \quad 0 < |z| < c, \quad c > 0,$$

где P — степенной ряд

$$P(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m,$$

$P_0 = E$ и $\hat{R}$ — постоянная матрица, характеристические корни которой не отличаются один от другого на целые положительные числа.

Подробности см. в [1, гл. IV].

Система дифференциальных уравнений (3) является системой вида (4), поэтому применяя к ней теоремы 2 и 3, получаем, что фундаментальная матрица решений системы (3) имеет вид

$$\Phi(x) = Px^J,$$

где

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} x^m P_m,$$

матрица P_0 не обязательно единичная матрица, J — жорданова каноническая матрица.

Из первой строки матрицы Φ , учитывая, что $y = x^{-1/2}Y_0$, получаем фундаментальную систему решений уравнения $l_n y = \lambda y$. Следовательно, все решения этого уравнения либо имеют вид

$$y(x) = x^{z-1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p_m^{(i,j)} x^m \right) (\ln x)^s, \quad (5)$$

где z — характеристическое число матрицы A и s — целое неотрицательное число, либо являются комбинациями таких функций.

Найдем явный вид характеристического многочлена матрицы A для $n = 2m$ и $n = 2m + 1$.

Пусть

$$\det(A - zE) = \begin{cases} \mathfrak{F}_n(z, \nu), & \text{если } \nu \neq 0, \\ \mathfrak{F}_n(z, 0) - \lambda, & \text{если } \nu = 0. \end{cases}$$

Вычисления показывают, что при $m = 1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_2(z, \nu) &= \frac{1}{a_1} \left(a_0 + a_1 \left[\left(z + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^2 \right] + 2ib_0 \left(z + \frac{\nu}{2} \right) \right); \\ \mathfrak{F}_3(z, \nu) &= \frac{i}{2b_1} \left(a_0 + a_1 \left[\left(z + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + 2i \left(z + \frac{\nu}{2} \right) \left(b_0 + b_1 \left[\left(z + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^2 \right] \right) \right). \end{aligned}$$

Используя далее метод математической индукции, несложно показать, что при $m = 1, 2, \dots$ полиномы $\mathfrak{F}_n(z, \nu)$, определяются равенствами

$$\mathfrak{F}_{2m}(z, \nu) = \frac{1}{a_m} \left(a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \prod_{j=0}^{k-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + 2i \left(z + \frac{\nu}{2} \right) \left(b_0 + \sum_{k=1}^{m-1} b_k \prod_{j=0}^{k-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] \right) \right),$$

если $n = 2m$, и

$$\mathfrak{F}_{2m+1}(z, \nu) = \frac{i}{2b_m} \left(a_m \mathfrak{F}_{2m}(z, \nu) + 2i \left(z + \frac{\nu}{2} \right) b_m \prod_{j=0}^{m-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] \right),$$

если $n = 2m + 1$.

Функции вида (5) принадлежат пространству $\mathcal{L}_2(0; a]$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} z > 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть элементы матрицы F_n удовлетворяют условиям (А) и (В) и пусть l_n — квазидифференциальное выражение, порожденное матрицей F_n . Тогда максимальное число линейно независимых решений уравнений (1), принадлежащих пространству $\mathcal{L}_2(I)$ равно:

- 1) при $\nu < 0$ числу корней полинома $\mathfrak{F}_n(z, \nu)$, лежащих в области $\operatorname{Re} z > 0$, и не зависит от λ ;
- 2) при $\nu = 0$ числу корней полинома $\mathfrak{F}_n(z, 0) - \lambda$, лежащих в области $\operatorname{Re} z > 0$, и если $n = 2m$, то $n_+ = n_- = m$; если $n = 2m + 1$, то $n_+ = m, n_- = m + 1$, когда m — четное, и $n_+ = m + 1, n_- = m$, когда m — нечетное число.

Несколько уточняя зависимости числовых коэффициентов $p_m^{(i,j)}$ от параметра λ в формуле (5) можно также доказать, что утверждение относительно спектра самосопряженных расширений оператора L_0 из теоремы Орлова и в данной ситуации оказывается справедливым. В настоящей работе мы не будем останавливаться на этом.

Выражаю благодарность моему научному руководителю К. А. Мирзоеву за проявленный интерес к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
2. Мирзоев К. А. Теорема Орлова об индексе дефекта дифференциальных операторов// Докл. РАН. — 2001. — 380, № 5. — С. 591–595.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
4. Наймарк Ф. А. Об индексе дефекта одного линейного дифференциального оператора// Усп. мат. наук. — 1962. — 17, № 4. — С. 157–163.
5. Орлов С. А. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов// Докл. АН СССР. — 1953. — 92, № 3. — С. 483–486.
6. Everitt W. N., Marcus L. Boudary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Diffrential and Quasi-Differential Operators. — Providence, RI: Amer.Math.Soc., 1999.
7. Paris R. B., Wood A. D. On the L^2 nature of solutions of n th order symmetric differential equations and McLeod's conjecture// Proc. Roy. Soc. Edinb., Sec. A. — 1981. — 90. — С. 209–236.

И. Н. Долгих

Поморский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: dolgih.irina@pomorsu.ru; irinad@atnet.ru

ОБ ОЦЕНКАХ МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2005 г. С. С. ЕЖАК

Аннотация. Исследуется зависимость минимального собственного значения задачи Штурма—Лиувилля от потенциала при различных значениях параметра, входящего в интегральное условие на потенциал.

В работе рассматривается следующая задача Штурма—Лиувилля:

$$y''(x) - Q(x)y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где $Q(x)$ — неотрицательная ограниченная на $[0, 1]$ функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 Q^\alpha(x) dx = 1, \quad \alpha \neq 0. \quad (3)$$

Под решением задачи (1)–(2) будем понимать функцию $y(x)$, определенную на $[0, 1]$, удовлетворяющую условию (2), такую, что $y'(x)$ абсолютно непрерывна и уравнение (1) выполняется почти всюду на $(0, 1)$.

Исследуется зависимость минимального собственного значения λ_1 этой задачи от потенциала $Q(x)$ при различных значениях α .

Подобные задачи возникали в работах Дж. Келлера и И. Таджбаха [11, 12], Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева [2, 10]. В основе таких задач лежит известная задача Лагранжа или задача о наиболее прочной колонне заданного объема. Подробное описание физической постановки задачи Лагранжа и истории вопроса можно найти в работах Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева [2, 10] и обзоре А. П. Сейраняна [9].

Задача

$$y''(x) + \lambda Q(x)y(x) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

связанная с этой постановкой, где $Q(x)$ — положительная функция на $[0, 1]$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 Q^\alpha(x) dx = 1, \quad \alpha \neq 0,$$

рассматривалась в [2, 10]. Были получены оценки минимального собственного значения λ_1 этой задачи в зависимости от потенциала $Q(x)$ при различных значениях α .

Для исследования первого собственного значения задачи (1), (2), (3) рассмотрим функционал

$$R[Q, y] = \frac{\int_0^1 y^2(x) dx + \int_0^1 Q(x)y^2(x) dx}{\int_0^1 y^2(x) dx}. \quad (4)$$

Согласно вариационному принципу

$$\lambda_1 = \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} R[Q, y],$$

где $H_0^1(0, 1)$ — пространство функций, определенных на $(0, 1)$, удовлетворяющих условию (2) и имеющих обобщенную производную первого порядка.

Пусть

$$m_\alpha = \inf_{Q(x) \in A_\alpha} \lambda_1, \quad M_\alpha = \sup_{Q(x) \in A_\alpha} \lambda_1,$$

где A_α — множество неотрицательных ограниченных на $[0, 1]$ функций таких, что

$$\int_0^1 Q^\alpha(x) dx = 1.$$

Теорема 1. 1) Если $\alpha > 1$, то $m_\alpha = \pi^2$, $M_\alpha < \infty$, причем существуют такие функции $u(x) \in H_0^1(0, 1)$ и $Q(x) \in A_\alpha$, что

$$\inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} R[Q, y] = R[Q, u] = M_\alpha.$$

2) Если $\alpha = 1$, то $m_1 = \pi^2$, $M_1 = \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2 + 4}$, причем существуют такие функции $u(x) \in H_0^1(0, 1)$ и $Q(x) \in A_\alpha$, что

$$\inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} R[Q, y] = R[Q, u] = M_1.$$

3) Если $0 < \alpha < 1$, то $m_\alpha = \pi^2$, $M_\alpha = \infty$.

4) Если $\alpha < 0$, то $m_\alpha > \pi^2$, $M_\alpha = \infty$, причем существуют такие функции $u(x) \in H_0^1(0, 1)$ и $Q(x) \in A_\alpha$, что

$$\inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} R[Q, y] = R[Q, u] = m_\alpha.$$

Доказательство. 1. Отметим, что $m_\alpha \geq \pi^2$ при любом значении α , $\alpha \neq 0$.

2. Пусть $\alpha > 0$. Для доказательства равенства $m_\alpha = \pi^2$ рассмотрим функции

$$y_\theta(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \theta < x < 1, \end{cases} \quad Q_\theta(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \theta, \\ (1 - \theta)^{-1/\alpha}, & \theta < x < 1, \end{cases}$$

где $\theta \rightarrow 1 - 0$.

Подставив данные функции в функционал $R[Q, y]$, получим

$$\lim_{\theta \rightarrow 1-0} R[Q_\theta(x), y_\theta] = \pi^2,$$

откуда $m_\alpha = \pi^2$.

3. Пусть $\alpha < 1$. Докажем, что $M_\alpha = \infty$.

а) Сначала проведем доказательство для случая $\alpha < 0$. Пусть

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/\alpha}(1 - \varepsilon)^{1/\alpha}, & 0 < x < \varepsilon, \\ \varepsilon^{1/\alpha}(1 - \varepsilon)^{-1/\alpha}, & \varepsilon < x < 1. \end{cases}$$

Тогда, используя неравенство Гельдера и соотношение

$$y(x) = \int_0^x y'(x) dx,$$

получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^2(x) dx &= \int_0^\varepsilon y^2(x) dx + \int_\varepsilon^1 y^2(x) dx \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^\varepsilon y'^2(x) dx + \varepsilon^{-1/\alpha} (1-\varepsilon)^{1/\alpha} \int_\varepsilon^1 Q_\varepsilon(x) y^2(x) dx \leq \\ &\leq a(\varepsilon) \left(\int_0^1 y'^2(x) dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x) y^2(x) dx \right), \end{aligned}$$

где

$$a(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon^{-1/\alpha} (1-\varepsilon)^{1/\alpha}.$$

Подставляя полученное неравенство в (4), имеем

$$R[Q_\varepsilon, y] = \frac{\int_0^1 y'^2(x) dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x) y^2(x) dx}{\int_0^1 y^2(x) dx} \geq \frac{1}{a(\varepsilon)}.$$

Так как $a(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то получим

$$M_\alpha \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R[Q_\varepsilon(x), y] = \infty.$$

б) Пусть $0 < \alpha < 1$. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных частей точками $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_n = 1$ и положим $\varepsilon = 1/n$.

Построим периодическую с периодом ε на всем отрезке $[0, 1]$ функцию

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-\gamma}, & 0 < x < \varepsilon^\rho, \\ 0, & \varepsilon^\rho < x < \varepsilon, \end{cases}$$

где

$$\rho = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \quad \gamma = \frac{2}{1-\alpha}.$$

Данная функция $Q_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию (3):

$$\int_0^1 Q_\varepsilon^\alpha(x) dx = n \int_0^\varepsilon Q_\varepsilon^\alpha(x) dx = \varepsilon^{\rho-\alpha\gamma-1} = 1.$$

С другой стороны, можно найти такое действительное число $\theta \in [0, \varepsilon^\rho]$, что

$$\int_0^\varepsilon Q_\varepsilon(x) y^2(x) dx = \varepsilon^{-\gamma} \varepsilon^\rho y^2(\theta) = \varepsilon^{-1} y^2(\theta).$$

Используя равенство

$$y(x) = y(\theta) + \int_\theta^x y'(x) dx,$$

получим

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon y^2(x)dx &\leq 2\varepsilon y^2(\theta) + 2\varepsilon^2 \int_0^\varepsilon y'^2(x)dx = 2\varepsilon^2 \left(\int_0^\varepsilon y'^2(x)dx + \varepsilon^{-1}y^2(\theta) \right) \leq \\ &\leq 2\varepsilon^2 \left(\int_0^\varepsilon y'^2(x)dx + \int_0^\varepsilon Q_\varepsilon(x)y^2(x)dx \right). \end{aligned}$$

Проделав такие преобразования для каждого отрезка $[\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, на $[0, 1]$, получим

$$\int_0^1 y^2(x)dx \leq 2\varepsilon^2 \left(\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2(x)dx \right)$$

для любого $y(x) \in H_0^1(0, 1)$.

Подставляя полученное неравенство в (4), имеем

$$R[Q_\varepsilon, y] = \frac{\int_0^1 y'^2(x)dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2(x)dx}{\int_0^1 y^2(x)dx} \geq \frac{1}{2\varepsilon^2}.$$

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим $M_\alpha = \infty$.

4. Пусть $\alpha > 1$. Рассмотрим функционал

$$G[y] = \frac{\int_0^1 y'^2(x)dx + \left(\int_0^1 |y(x)|^p dx \right)^{2/p}}{\int_0^1 y^2(x)dx}, \quad (5)$$

где $p = 2\alpha/(\alpha - 1)$. Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\int_0^1 Q(x)y^2(x)dx \leq \left(\int_0^1 Q^\alpha(x)dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_0^1 y(x)^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} dx \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

откуда, учитывая (3), получим

$$\inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} R[Q, y] \leq \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} G[y]. \quad (6)$$

Введем обозначение

$$m = \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} G[y].$$

Из (6) следует $M_\alpha \leq m$. Для доказательства равенства $M_\alpha = m$ используется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $\alpha > 1$, $p = 2\alpha/(\alpha - 1) > 2$, и $m = \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} G[y]$. Тогда существует функция $u(x) \in H_0^1(0, 1)$, положительная на $(0, 1)$, удовлетворяющая уравнению

$$u''(x) - u^{p-1}(x) + mu(x) = 0, \quad (7)$$

условиям

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (8)$$

$$\int_0^1 u^p(x) dx = 1 \quad (9)$$

и такая, что $m = G[u]$.

Доказательство. В доказательстве леммы используется вариационный принцип для функционала $G[y]$.

1. Заметим, что $G[y] \geq 0$ для любого $y(x) \in H_0^1(0, 1)$. Область значений функционала ограничена снизу, поэтому существует его точная нижняя грань $m = \inf_{y(x) \in H_0^1(0, 1)} G[y]$.

Пусть

$$\Gamma = \left\{ y(x) : y(x) \in H_0^1(0, 1), \int_0^1 |y(x)|^p dx = 1 \right\}, \quad m = \inf_{y(x) \in H_0^1(0, 1)} G[y].$$

Докажем, что существует такая функция $u(x) \in \Gamma$, что $G[u] = m$.

а) Заметим, что для любого $y(x) \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$G[y] \geq C \|y(x)\|_{H_0^1(0, 1)}^2, \quad (10)$$

где C — положительная константа.

Положив в неравенстве (10) $C = 1$, можно заметить, что функционал $G[y]$ ограничен снизу константой $\|y\|_{H_0^1(0, 1)}^2$.

б) Минимизирующей последовательностью функционала $G[y]$ в некотором классе функций называется такая последовательность $\{y_k\}$, что $G[y_k] \rightarrow m$ при $k \rightarrow \infty$. Можно доказать, что минимизирующая последовательность $\{y_k\}$ функционала $G[y]$ существует в Γ .

Тогда для всех достаточно больших значений k имеем $G[y_k] \leq m + 1$ и

$$\|y_k(x)\|_{H_0^1(0, 1)}^2 \leq \frac{1}{C} G[y_k] \leq \frac{1}{C} (m + 1).$$

с) Перейдем к доказательству существования такой функции $u(x) \in \Gamma$, что $G[u] = m$.

Так как $\{y_k\}$ — ограниченная последовательность в сепарабельном гильбертовом пространстве $H_0^1(0, 1)$, то она содержит подпоследовательность $\{z_k\}$, слабо сходящуюся в $H_0^1(0, 1)$ к некоторой функции $u(x)$ (см., например, [10, гл. 1, теорема 20]), причем

$$\|u(x)\|_{H_0^1(0, 1)}^2 \leq \frac{1}{C} (m + 1).$$

Так как пространство $H_0^1(0, 1)$ компактно вкладывается в пространство $C(0, 1)$, а оно, в свою очередь, вкладывается в $L_p(0, 1)$, где $p \geq 1$, то существует подпоследовательность $\{u_k\}$ последовательности $\{z_k\}$, сильно сходящаяся в $C(0, 1)$. Тогда подпоследовательность $\{u_k\}$ сильно сходится в $L_p(0, 1)$ к функции $u(x)$. Следовательно, для функционала

$$G[u_k] = \frac{\int_0^1 (u'_k(x))^2 dx + \left(\int_0^1 |u_k(x)|^p dx \right)^{2/p}}{\int_0^1 u_k^2(x) dx}$$

имеем

$$\left(\int_0^1 |u_k(x)|^p dx \right)^{2/p} \rightarrow \left(\int_0^1 |u(x)|^p dx \right)^{2/p}, \quad \int_0^1 u_k^2(x) dx \rightarrow \int_0^1 u^2(x) dx, \quad k \rightarrow \infty.$$

Докажем, что $\|u(x)\|_{L_2(0,1)} \neq 0$. Доказательство проведем от противного.

Пусть

$$\int_0^1 |u_k(x)|^p dx = 1, \quad \int_0^1 u_k^2(x) dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

По теореме Лебега (см., например, [8, гл. 2, § 1]) имеем

$$\int_0^1 |u_k(x)|^p dx \rightarrow \int_0^1 |u(x)|^p dx, \quad k \rightarrow \infty, \quad \int_0^1 |u(x)|^p dx = 1,$$

так как $u(x) \in \Gamma \subset H_0^1(0,1)$. Таким образом, при

$$\int_0^1 u^2(x) dx = 0$$

имеем $u(x) = 0$ (почти всюду), так что

$$\int_0^1 |u(x)|^p dx = 0,$$

противоречие. Следовательно,

$$\int_0^1 u^2(x) dx \neq 0.$$

Из последовательности $\{u_k(x)\}$ выберем подпоследовательность $\{w_k(x)\}$ такую, что $w'_k(x)$ слабо сходится к $u'(x)$ в $L_2(0,1)$. Такая последовательность $\{w_k(x)\}$ существует, так как $u'_k(x)$ ограничена в $L_2(0,1)$, что вытекает из ограниченности последовательности $\{u_k(x)\}$ в $H_0^1(0,1)$ и определения нормы $\|u_k(x)\|_{H_0^1(0,1)}$.

Рассмотрим последовательность

$$\int_0^1 (w'_k(x))^2 dx.$$

Эта последовательность имеет конечный нижний предел, так как $(w'_k(x))^2 \geq 0$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{v_k(x)\}$ последовательности $\{w_k(x)\}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 (v'_k(x))^2 dx = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 (w'_k(x))^2 dx.$$

Таким образом, получили последовательность $\{v_k(x)\}$ такую, что существует $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v'_k(x)\|_{L_2(0,1)}$.

Так как $v'_k(x)$ слабо сходится к $u'(x)$ в $L_2(0,1)$, то из [7, гл. IV, теорема 7] следует

$$\|u'(x)\|_{L_2(0,1)} \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|v'_k(x)\|_{L_2(0,1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|v'_k(x)\|_{L_2(0,1)}.$$

Так как $G[y]$ — непрерывный функционал в $H_0^1(0, 1)$, имеем

$$\begin{aligned} G[u] &= \frac{\int_0^1 (u'(x))^2 dx + \left(\int_0^1 |u(x)|^p dx \right)^{2/p}}{\int_0^1 u^2(x) dx} = \frac{\int_0^1 (u'(x))^2 dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 |v_k(x)|^p dx \right)^{2/p}}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 v_k^2(x) dx \right)} \leq \\ &\leq \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 (v'_k(x))^2 dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 |v_k(x)|^p dx \right)^{2/p}}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 v_k^2(x) dx \right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} G[v_k] = m. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем $G[u] \leq m$. Но, поскольку $m = \inf_{y(x) \in H_0^1(0, 1)} G[y]$, имеем $G[u] = m$.

2. Пусть $u(x) \in \Gamma$ и $G[u] = m$. Докажем, что $u(x)$ — положительная функция на $(0, 1)$, удовлетворяющая уравнению (7) и условиям (8)–(9).

Пусть $z(x) \in H_0^1(0, 1)$. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \frac{\int_0^1 (u'(x) + tz(x))^2 dx + \left(\int_0^1 |u(x) + tz(x)|^p dx \right)^{2/p}}{\int_0^1 (u(x) + tz(x))^2 dx},$$

где $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $g(0) = G[u] = \inf_{y(x) \in H_0^1(0, 1)} G[y]$, то $g'(0) = 0$.

Таким образом, дифференцируя функцию $g(t)$ и подставляя $t = 0$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\int_0^1 u'(x)z'(x)dx + \left(\int_0^1 |u(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}-1} \int_0^1 |u(x)|^{p-1} z(x) \operatorname{sign} u(x) dx}{\int_0^1 u^2(x) dx} = \\ &= \frac{\left(\int_0^1 (u'(x))^2 dx + \left(\int_0^1 |u(x)|^p dx \right)^{2/p} \right) \int_0^1 u(x)z(x) dx}{\left(\int_0^1 u^2(x) dx \right)^2}. \end{aligned}$$

Тогда, поскольку $u(x) \in \Gamma$ и $G[u] = m$, имеем

$$\int_0^1 u'(x)z'(x)dx + \int_0^1 |u(x)|^{p-1} z(x) \operatorname{sign} u(x) dx = m \int_0^1 u(x)z(x) dx. \quad (11)$$

Последнее равенство выполняется для любой функции $z(x) \in H_0^1(0, 1)$. Если $z(x) \in C_0^\infty$, то равенство (11) означает, что функция $u'(x)$ имеет обобщенную производную

$$u''(x) = |u(x)|^{p-1} \operatorname{sign} u(x) - mu(x) = |u(x)|^{p-2} u(x) - mu(x).$$

Так как $u(x)$ непрерывна на $(0, 1)$, функция $u''(x)$ также непрерывна на $(0, 1)$, так что это равенство выполняется в классическом смысле. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(x) z'(x) dx &= u'(x) z(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 u''(x) z(x) dx, \\ u'(1) z(1) - u'(0) z(0) - \int_0^1 u''(x) z(x) dx &= \int_0^1 |u(x)|^{p-1} z(x) \operatorname{sign} u(x) dx - m \int_0^1 u(x) z(x) dx, \\ \int_0^1 (u''(x) - |u(x)|^{p-1} \operatorname{sign} u(x) + mu(x)) z(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Так как последнее равенство верно для любой функции $z(x) \in H_0^1(0, 1)$, то

$$u''(x) - |u(x)|^{p-1} \operatorname{sign} u(x) + mu(x) = 0. \quad (12)$$

Поскольку $G[u] = G[|u|]$, можно считать, что последовательность $\{u_k(x)\}$ неотрицательна, так что $u(x) \geq 0$. Кроме того, так как $u(x) \in \Gamma$, доказано существование функции $u(x) \in H_0^1(0, 1)$, удовлетворяющей уравнению (7) и условию (9). Можно показать, что функция $u(x)$ положительна на $(0, 1)$ и удовлетворяет условию (8).

Докажем существование и единственность такого числа m , при котором существует решение задачи (7)–(9), и получим оценку для m . Умножая уравнение (7) на $2u'(x)$ и интегрируя на $[0, x]$, получим

$$u'^2(x) - \frac{2}{p} u^p(x) + mu^2(x) = C. \quad (13)$$

Отсюда

$$u'(x) = \pm \sqrt{C - mu^2 + \frac{2}{p} u^p}. \quad (14)$$

Пусть x_0 — точка максимума функции $u(x)$ и $u(x_0) = H$; тогда $u'(x_0) = 0$.

Из (13) имеем

$$C - mH^2 + \frac{2}{p} H^p = 0.$$

Из этого уравнения, задавая C , можно определить H , а по H — значение x_0 ; тогда из (14) получим

$$x_0 = \int_0^H \frac{du}{\sqrt{C - mu^2 + \frac{2}{p} u^p}}.$$

Докажем, что для любого $x^* > x > 0$ существует единственное C^* такое, что $u(0) = u(x^*) = 0$, $u(x) > 0$ при $x \in (0, x^*)$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} u''(x) - u^{p-1}(x) + mu(x) &= 0, \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = \sqrt{C}. \end{aligned} \quad (15)$$

По теореме о непрерывной зависимости решений уравнения от начальных условий имеем: для любого x^* существует $\delta > 0$ такое, что если $0 < C < \delta$, то $|u(x)| < \varepsilon$ на $(0, x^*)$. Следовательно, так как $m > \pi^2$, по теореме сравнения $x^* < 1$.

Одно из решений уравнения (7) есть $u_0 = A = \text{const}$, т.е. $-A^{p-1} + mA = 0$, откуда $A = m^{1/(p-2)}$.

Если непрерывно увеличивать C , то график функции $u(x)$ непрерывно меняется, но кривая $u(x)$ не выйдет за прямую $u = m^{1/(p-2)}$ (так как по теореме существования и единственности кривая $u(x)$ не может касаться прямой $u = m^{1/(p-2)}$). Следовательно, $H < m^{1/(p-2)}$.

Если $H \rightarrow m^{1/(p-2)}$, то $x_0 \rightarrow \infty$ (так как прямая $u = m^{1/(p-2)}$ параллельна оси X и является решением уравнения (7)). Имеем

$$C(H) = -\frac{2}{p}m^{p/(p-2)} + mm^{2/(p-2)} = m^{p/(p-2)} \left(1 - \frac{2}{p}\right);$$

иными словами,

$$0 < C < m^{p/(p-2)} \left(1 - \frac{2}{p}\right).$$

Докажем, что x_0 монотонно зависит от C . Рассмотрим задачу Коши (7), (15).

Из (13) имеем в точке $x = 0$: $C = u'^2(0)$. Из условия, что x_0 — точка максимума, имеем

$$C = mH^2 - \frac{2}{p}H^p,$$

$$x_0 = \int_0^{x_0} dx = \int_0^H \frac{du}{u'} = \int_0^H \frac{du}{\sqrt{C + \frac{2}{p}u^p - mu^2}} = \int_0^H \frac{du}{\sqrt{mH^2 - \frac{2}{p}H^p + \frac{2}{p}u^p - mu^2}}.$$

Заменим $u = H\theta$, где $0 \leq \theta \leq 1$. Тогда $du = H d\theta$. Получаем

$$\int_0^1 \frac{H d\theta}{\sqrt{mH^2 - \frac{2}{p}H^p + \frac{2}{p}H^p\theta^p - mH^2\theta^2}} = \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{m - \frac{2}{p}H^{p-2} + \frac{2}{p}H^{p-2}\theta^p - m\theta^2}}.$$

Знаменатель дроби монотонно убывает по H , следовательно, x_0 монотонно возрастает по H .

Так как $C = mH^2 - \frac{2}{p}H^p$, имеем

$$C'_H = 2mH - 2H^{p-1} = 2H(m - H^{p-2}) > 0$$

(так как $H < m^{1/(p-2)}$). Следовательно, C монотонно возрастает по H и H монотонно возрастает по C как обратная функция, т.е. x_0 монотонно зависит от C . Таким образом, непрерывно меняя C от 0 до $m^{p/(p-2)}(1 - 2/p)$, получим, что x_0 непрерывно и монотонно меняется от 0 до ∞ .

Таким образом, для любого $x^* > x_0 > 0$ существует единственное C^* такое, что решение задачи (7), (15) при $C = C^*$ удовлетворяет условиям $u(x^*) = 0$, $u(x) > 0$ при $x \in (0, x^*)$.

Заметим, что функция $u(x)$ симметрична относительно x_0 , т.е. $x^* = 2x_0$.

Рассмотрим задачу

$$u''(x) - u^{p-1}(x) + mu(x) = 0, \quad u(0) = u(2x_0) = 0.$$

Докажем, что существует единственное число m такое, что $2x_0 = 1$ и

$$\int_0^{2x_0} u^p dx = 1, \quad u(x) > 0, \quad x \in (0, 2x_0).$$

Пусть $u'(0) = \sqrt{C}$, $u'(x_0) = 0$, $u(x_0) = H$. Если $mH - H^{p-1} = 0$, то $m = H^{p-2}$. Если $m = H^{p-2}$, то $u'' = 0$, а так как $u' = 0$ по условию в точке максимума, имеем $u = \text{const} = H$. Если $m < H^{p-2}$, то $u'' > 0$ (функция выпукла вверх), следовательно, решение уйдет в бесконечность достаточно быстро. Таким образом, $m \geq H^{p-2}$. Следовательно, существует критическое значение H_* : $m = H_*^{p-2}$ или $H_* = \sqrt[p-2]{m}$.

Из (13) имеем в точке максимума $C = mH^2 - \frac{2}{p}H^p$. На интервале $(0, 2x_0)$ выразим u' :

$$u' = \sqrt{mH^2 - \frac{2}{p}H^p - mu^2 + \frac{2}{p}u^p}.$$

Так как $2x_0 = 1$, имеем

$$1 = 2 \int_0^{x_0} dx = 2 \int_0^H \frac{du}{u'} = 2 \int_0^H \frac{du}{\sqrt{mH^2 - \frac{2}{p}H^p + \frac{2}{p}u^p - mu^2}}.$$

Введем обозначение

$$\tilde{I}_1 = \int_0^H \frac{du}{\sqrt{mH^2 - \frac{2}{p}H^p + \frac{2}{p}u^p - mu^2}}. \quad (16)$$

С другой стороны,

$$1 = 2 \int_0^{x_0} u^p dx = 2 \int_0^H \frac{u^p du}{u'} = 2 \int_0^H \frac{u^p du}{\sqrt{mH^2 - \frac{2}{p}H^p + \frac{2}{p}u^p - mu^2}}.$$

Положим

$$\tilde{I}_2 = \int_0^H \frac{u^p du}{\sqrt{mH^2 - \frac{2}{p}H^p + \frac{2}{p}u^p - mu^2}}. \quad (17)$$

Заметим, что $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = 1/2$.

Заменим $u = Hy$, тогда $du = Hdy$. Получаем

$$\tilde{I}_1 = \int_0^1 \frac{Hdy}{\sqrt{mH^2 - \frac{2}{p}H^p + \frac{2}{p}H^p y^p - mH^2 y^2}} = \int_0^1 \frac{Hdy}{\sqrt{mH^2(1 - y^2) - \frac{2}{p}H^p(1 - y^p)}}.$$

Подставляя $m = H_*^{p-2}$, находим

$$\tilde{I}_1 = \int_0^1 \frac{Hdy}{\sqrt{H_*^{p-2}H^2(1 - y^2) - \frac{2}{p}H^p(1 - y^p)}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{H_*^{p-2}(1 - y^2) - \frac{2}{p}H^{p-2}(1 - y^p)}}.$$

Заменим $H = H_*\theta$, где $0 \leq \theta \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{H_*^{p-2}(1 - y^2) - \frac{2}{p}H_*^{p-2}\theta^{p-2}(1 - y^p)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{H_*^{p-2}}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2) - \frac{2}{p}\theta^{p-2}(1 - y^p)}} = \frac{1}{\sqrt{H_*^{p-2}}} I_1(\theta). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$H_*^{-(p-2)/2} I_1(\theta) = \frac{1}{2},$$

откуда

$$I_1(\theta) = \frac{1}{2} H_*^{(p-2)/2}.$$

Проведем аналогичные преобразования для выражения $\tilde{I}_2$. Тогда

$$\tilde{I}_2 = \frac{H_*^p}{\sqrt{H_*^{p-2}}} \int_0^1 \frac{\theta^p y^p dy}{\sqrt{(1 - y^2) - \frac{2}{p}\theta^{p-2}(1 - y^p)}} = \frac{H_*^p}{\sqrt{H_*^{p-2}}} I_2(\theta).$$

Следовательно,

$$H_*^{p-(p-2)/2} I_2(\theta) = \frac{1}{2},$$

откуда

$$I_2(\theta) = \frac{1}{2} H_*^{-(p+2)/2}.$$

Выразим H_* через $I_1(\theta)$ и $I_2(\theta)$, приравняем эти выражения и получим

$$(2I_1(\theta))^{2/(p-2)} = (2I_2(\theta))^{-2/(p+2)}. \quad (18)$$

Исследуем это уравнение на интервале $[0, 1]$.

Так как $I_1(\theta)$ монотонно возрастает по θ , то левая часть уравнения возрастает. Так как $I_2(\theta)$ монотонно возрастает по θ , то правая часть уравнения убывает. Рассмотрим поведение обеих частей уравнения в точке $x = 0$:

$$I_1(0) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y \Big|_0^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \quad I_2(0) = \int_0^1 0 dy = 0.$$

Следовательно, в точке $x = 0$ имеем

$$(2I_1(0))^{2/(p-2)} = \pi^{2/(p-2)}, \quad (2I_2(0))^{-2/(p+2)} = 0^{-2/(p+2)} = \infty.$$

Докажем, что для любого положительного θ правая часть уравнения станет меньше, чем $\pi^{2/(p-2)}$, начиная с некоторого момента.

Рассмотрим поведение обеих частей уравнения в точке $x = 1$.

$$I_1(1) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2) - \frac{2}{p}(1-y^p)}}, \quad I_2(1) = \int_0^1 \frac{y^p dy}{\sqrt{(1-y^2) - \frac{2}{p}(1-y^p)}}.$$

Для $I_1(1)$ и $I_2(1)$ точка $y = 1$ является критической. Подкоренное выражение в $I_1(1)$ и $I_2(1)$ имеет нуль первого порядка. Тогда выражение $I_1(1)$ эквивалентно

$$\int_0^1 \frac{dy}{|1-y|} = \infty,$$

и выражение $I_2(1)$ эквивалентно

$$\int_0^1 \frac{dy}{|1-y|} = \infty.$$

Следовательно, вблизи точки $x = 1$ левая часть уравнения стремится к ∞ , а правая часть стремится к 0. Таким образом, существует точка пересечения графиков функций, т.е. существует решение уравнения (18).

Тем самым, мы доказали, что существует единственное значение m такое, что

$$2x_0 = 1, \quad u(0) = u(2x_0) = 0, \quad \int_0^{2x_0} u^p dx = 1, \quad u(x) > 0, \quad x \in (0, 2x_0)$$

где m — решение уравнения

$$\int_0^H \frac{du}{\sqrt{mH^2 - mu^2 - \frac{2}{p}H^p + \frac{2}{p}u^p}} = \int_0^H \frac{u^p(x) du}{\sqrt{mH^2 - mu^2 - \frac{2}{p}H^p + \frac{2}{p}u^p}} = \frac{1}{2},$$

и $H = \max_{x \in [0,1]} u(x)$. Лемма 1 доказана. □

Продолжим доказательство теоремы. Докажем, что $M_\alpha = m$. Имеем

$$m = G[u] = \frac{\int_0^1 u'^2(x) dx + \left(\int_0^1 |u(x)|^p dx \right)^{2/p}}{\int_0^1 u^2(x) dx},$$

где $u(x)$ удовлетворяет уравнению (7) и условиям (8)–(9).

С другой стороны,

$$M_\alpha = \sup_{Q(x) \in A_\alpha} \lambda_1 = \sup_{Q(x) \in A_\alpha} \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} R[Q, y] \leq m.$$

Так как $u(x) \in H_0^1(0,1)$ и $u^{2/(\alpha-1)}(x) \in A_\alpha$, то, подставив эти значения вместо $y(x)$ и $Q(x)$ в функционал $R[Q, y]$, получим

$$R[u^{2/(\alpha-1)}, u] = \frac{\int_0^1 u'^2(x) dx + \int_0^1 u^{2/(\alpha-1)}(x) u^2(x) dx}{\int_0^1 u^2(x) dx} = \frac{\int_0^1 u'^2(x) dx + \left(\int_0^1 u^p(x) dx \right)^{2/p}}{\int_0^1 u^2(x) dx} = G[u] = m.$$

Таким образом, указана пара функций $Q(x)$ и $y(x)$, на которых функционал $R[Q, y]$ принимает значение m . Следовательно, $M_\alpha = m$.

5. Пусть $\alpha = 1$. Рассмотрим функционал

$$L[y] = \frac{\int_0^1 y'^2(x) dx + \max_{x \in [0,1]} y^2(x)}{\int_0^1 y^2(x) dx}. \quad (19)$$

Имеем

$$\inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} R[Q, y] \leq \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} L[y]. \quad (20)$$

Для доказательства соотношения $M_1 = \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\pi^2 + 4}$ рассмотрим функции

$$Q^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \tau, \\ \gamma, & \tau < x < 1 - \tau, \\ 0, & 1 - \tau < x < 1, \end{cases} \quad y^*(x) = \begin{cases} \sin \sqrt{\gamma} x, & 0 < x < \tau, \\ \sin \sqrt{\gamma} \tau, & \tau < x < 1 - \tau, \\ \sin \sqrt{\gamma} (1 - x), & 1 - \tau < x < 1, \end{cases}$$

где

$$\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{\gamma}}, \quad \gamma = \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\pi^2 + 4}.$$

Отметим, что функции $y^*(x)$, $(y^*(x))'$ непрерывны на $[0, 1]$, $y^*(0) = y^*(1) = 0$, а функция $Q^*(x)$ удовлетворяет условию (3). Таким образом, $y^*(x)$ является первой собственной функцией задачи (1)–(3) с потенциалом $Q(x) = Q^*(x)$, а γ — первым собственным значением. Тогда $\gamma \leq M_1 = \sup_{Q(x) \in A_\alpha} \lambda_1$. Отметим также, что $L[y^*] = \gamma$, откуда $\inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} L[y] \leq \gamma$.

Таким образом, имеем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}\gamma &\leq M_1 = \sup_{Q(x) \in A_\alpha} \lambda_1 = \sup_{Q(x) \in A_\alpha} \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} R[Q, y] \leq \\ &\leq \sup_{Q(x) \in A_\alpha} \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} L[y] = \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} L[y] \leq \gamma.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$M_1 = \gamma = \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\pi^2 + 4},$$

причем M_1 достигается на функции $Q^*(x)$.

6. Пусть $\alpha < 0$. Используя неравенство Гельдера и условие (3), имеем

$$\begin{aligned}\int_0^1 |y(x)|^{2\alpha/(\alpha-1)} dx &= \int_0^1 |y(x)|^{2\alpha/(\alpha-1)} Q^{\alpha/(\alpha-1)}(x) Q^{-\alpha/(\alpha-1)}(x) dx \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 Q(x) y^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\int_0^1 Q^\alpha(x) dx \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\end{aligned}$$

следовательно,

$$\int_0^1 Q(x) y^2 dx \geq \left(\int_0^1 |y(x)|^{2\alpha/(\alpha-1)} dx \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Таким образом, рассматривая функционалы (4) и (5), имеем

$$\inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} R[Q, y] \geq \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} G[y]. \quad (21)$$

Положим

$$m = \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} G[y].$$

Из (21) следует $m_\alpha \geq m$. Для доказательства равенства $m_\alpha = m$ используется следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $\alpha < 0$, $p = 2\alpha/(\alpha - 1) > 0$ и

$$m = \inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} G[y].$$

Тогда существует функция $u(x) \in H_0^1(0, 1)$, положительная на $(0, 1)$, удовлетворяющая уравнению

$$u''(x) - u^{p-1}(x) + mu(x) = 0, \quad (22)$$

условиям

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (23)$$

$$\int_0^1 u^p(x) dx = 1 \quad (24)$$

и такая что $m = G[u]$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Отметим, что задачу (1)–(3) можно рассматривать на произвольном отрезке $[a, b]$, и, делая замену $t = \frac{x-a}{b-a}$, перейти от $x \in [a, b]$ к $t \in [0, 1]$.

Замечание 2. При $\alpha > 1$ результат $M_\alpha < \infty$ и оценка M_1 при $\alpha = 1$ приводятся в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винокуров В. А., Садовничий В. А. О границах изменения собственного значения при изменении потенциала// Докл. РАН. — 2003. — 392, № 5.
2. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма—Лиувилля// Усп. мат. наук. — 1996. — 51, № 3. — С. 73–144.
3. Ежак С. С. Экстремальные оценки минимального собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с интегральным условием на потенциал// Дифференц. уравн. — 2004. — 40, № 6. — С. 856.
4. Ежак С. С. Оценки минимального собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с ограничением на потенциал// Воронеж. весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения—XV»/ Тез. докл. — Воронеж, 2004. — С. 80.
5. Ежак С. С. Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с интегральным условием// Междунар. конф. по дифференц. уравн. и динам. сист./ Тез. докл. — Суздаль, 2004. — С. 85–86.
6. Ежак С. С. Оценки минимального собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с интегральным условием на потенциал/ Деп. в ВИНТИ 06.12.2004, № 1920-B20004. — М.: МЭСИ, 2004.
7. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
8. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983.
9. Сейранян А. П. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны/ Препринт № 60-2000. — Ин-т мех. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2000.
10. Egorov Yu., Kondratiev V. On spectral theory of elliptic operators// Operator Theory Adv. Appl. — Birkhäuser, 1996. — 89.
11. Keller J. B. The shape of the strongest column// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1960. — 5. — С. 275–285.
12. Tadjibakhsh I., Keller J. B. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues// J. Appl. Mech. — 1962. — 29. — С. 159–164.

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ЦЕНТРАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ КОСОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ ИНТЕРВАЛА

© 2005 г. **Л. С. ЕФРЕМОВА**

Аннотация. В статье исследована структура центра C^1 -гладкого косоугольного произведения отображений интервала $F(x, y) = (f(x), g_x(y))$, $(x, y) \in I_1 \times I_2$, где I_1, I_2 — отрезки прямой, с Ω -устойчивым факторотображением.

Понятие устойчивой по Пуассону траектории принадлежит А. Пуанкаре [14]. Дж. Биркгоф ввел понятие центра (множества центральных движений) динамической системы [3, гл. 7, пп. 3, 4] — множества, в котором всюду плотны траектории, устойчивые по Пуассону [13]. Исследованию центра динамической системы с трехмерным фазовым пространством посвящены работы А. Г. Майера [9–12], к этому же кругу вопросов примыкает работа Л. П. Шильникова [17], в которой решена проблема Пуанкаре—Биркгофа о структуре окрестности гомоклинической кривой автономной $(m + n + 1)$ -мерной ($m, n \geq 1$) системы уравнений.

Рассмотрения, связанные с центром динамической системы, содержатся в обзорах [1, гл. 3, п. 4.1], [2, гл. 1, пп. 3.2, 4.1]. Так, в [2], в частности, отмечено, что если центр динамической системы — гиперболическое множество, то в нем всюду плотны периодические траектории.

Данная статья является продолжением работ [5, 6, 19]. В ней исследована структура центра C^1 -гладкого косоугольного произведения отображений интервала

$$F(x, y) = (f(x), g_x(y)), \quad (x, y) \in I, \quad I = I_1 \times I_2 \quad (I_1, I_2 \text{ — отрезки прямой}), \quad (1)$$

с Ω -устойчивым факторотображением. Рассмотрения основаны на использовании оригинальных многозначных функций из [6, 19].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Обозначим через $T^0(I)$ ($T^1(I)$) пространство всех непрерывных (C^1 -гладких) отображений вида (1) с C^0 -нормой (C^1 -нормой), а через $T_*^1(I)$ — подпространство пространства $T^1(I)$, состоящее из отображений вида (1) с Ω -устойчивым факторотображением. Из (1) следует, что для каждого натурального n и произвольной точки (x, y) справедливо соотношение

$$F^n(x, y) = (f^n(x), g_{x,n}(y)), \quad g_{x,n} = g_{f^{n-1}(x)} \circ \dots \circ g_{f(x)} \circ g_x. \quad (2)$$

Обозначим через $\tilde{g}_x$ отображение $g_{x,n}$, если x — периодическая точка f ($x \in \text{Per}(f)$), через n — (наименьший) период x .

Приведем определения Ω - и C -функций косоугольного произведения отображений интервала. Пусть 2^{I_2} — пространство всех замкнутых подмножеств отрезка I_2 с экспоненциальной топологией.

Определение 1 (см. [6]). Ω -Функцией отображения $F \in T^0(I)$ называется функция

$$\zeta : \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$$

такая, что при любом $x \in \Omega(f)$ выполнено равенство $\zeta(x) = \Omega(F)(x)$, где $\Omega(\cdot)$ — неблуждающее множество, а $\Omega(F)(x) = \{y \in I_2 : (x, y) \in \Omega(F)\}$ — срез неблуждающего множества $\Omega(F)$ по x .

Определение 2 (см. [19]). C -Функцией отображения $F \in T^0(I)$ называется функция

$$\zeta^c : C(f) \rightarrow 2^{I_2}$$

такая, что при любом $x \in C(f)$ справедливо $\zeta^c(x) = C(F)(x)$, где $C(\cdot)$ — центр отображения, а $C(F)(x) = \{y \in I_2 : (x, y) \in C(F)\}$ — срез центра $C(F)$ по x .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00457).

В [5] доказано, что для отображения $F \in T^0(I)$ справедливы равенства

$$\text{pr}(\Omega(F)) = \Omega(f), \quad \text{pr}(C(F)) = C(f),$$

где $\text{pr} : I \rightarrow I_1$ — естественная проекция. Поэтому неблуждающее множество $\Omega(F)$ и множество центральных движений $C(F)$ отображения $F \in T^0(I)$ являются графиками Ω - и C -функций соответственно в фазовом пространстве динамической системы (1).

Нам потребуются также следующие многозначные функции, связанные с отображением (1):

$$\eta_n : \Omega(f^n) \rightarrow 2^{I_2}, \quad \eta_n^c : C(f^n) = C(f) \rightarrow 2^{I_2},$$

где $\eta_n(x) = \Omega(g_{x,n})$, каково бы ни было $x \in \Omega(f^n)$, и $\eta_n^c(x) = C(g_{x,n})$, каково бы ни было $x \in C(f)$; здесь $n \geq 1$ (см. [6, 19]).

Примеры, приведенные в [6, 19, 20], показывают, что последовательность функций $\{\eta_n^c\}_{n \geq 1}$ на множестве $C(f)$ (так же, как и последовательность функций $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ на множестве $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega(f^n)$ (в том случае, если f — эндоморфизм, при некоторых n возможно $\Omega(f) \neq \Omega(f^n)$)) может демонстрировать различные типы функционального поведения: равномерную сходимость, поточечную, но не равномерную сходимость, отсутствие поточечной сходимости. Тем не менее, как показано в данной работе, существует теоретико-множественная зависимость между графиками функций η_n^c и C -функции.

Рассмотрим отображения из подпространства $T_*^1(I)$. Укажем, что в силу [18] подпространство $T_*^1(I)$ открыто и всюду плотно в $T^1(I)$. Будем использовать информацию о свойствах факторотображения косого произведения $F \in T_*^1(I)$, вытекающую из результатов [18].

Предложение 3. Если f — C^1 -гладкое Ω -устойчивое отображение отрезка I_1 в себя, то

- (а) либо f есть отображение типа $\prec 2^\infty$ (т.е. множество периодов периодических точек f совпадает с $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^\nu\}$ при некотором $0 \leq \nu < +\infty$), при этом неблуждающее множество $\Omega(f)$ конечно и состоит из гиперболических периодических точек;
- (б) либо f есть отображение типа $\succ 2^\infty$ (т.е. существует точка $x \in \text{Per}(f)$ периода $n(x) \notin \{2^i\}_{i \geq 0}$), при этом неблуждающее множество $\Omega(f)$ есть объединение конечного числа гиперболических периодических точек и конечного числа гиперболических локально максимальных квазимиимальных множеств.

Отметим, что если отображение $F \in T_*^1(I)$ имеет факторотображение типа $\prec 2^\infty$, то F относится к рассмотренному в [5] классу косых произведений отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе.

При рассмотрении косых произведений из множества $T_*^1(I)$ с факторотображениями типа $\succ 2^\infty$ потребуются информация о динамике факторотображения на произвольном квазимиимальном множестве. Приведем утверждения, вытекающие из результатов работ [4, 15, 18].

Предложение 4. Пусть f — C^1 -гладкое Ω -устойчивое отображение отрезка I_1 в себя типа $\succ 2^\infty$, $K(f)$ — квазимиимальное множество f , $a = \inf K(f)$, $b = \sup K(f)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (а) существуют $s \geq 2$ попарно непересекающихся отрезков $\Delta_{i_1} \subset [a, b]$, $0 \leq i_1 \leq s-1$, и натуральных чисел n_{i_1} таких, что $f^{n_{i_1}}(\Delta_{i_1}) = [a, b]$;
- (б) для каждого $\delta > 0$ существует $r_0 \geq 1$ такое, что $l(\Delta_{i_1 \dots i_r}) < \delta$, где $l(\Delta_{i_1 \dots i_r})$ — длина произвольного отрезка ранга r , $r \geq r_0$;
- (в) $\Delta_{i_1 \dots i_{r-1} i_r} \subset \Delta_{i_1 \dots i_{r-1}}$ для всех $r \geq 2$, $0 \leq i_1, \dots, i_r \leq s-1$;
- (г) $f^{n'}(\Delta_{i_1 i_2 \dots i_r}) = \Delta_{i_2 \dots i_r}$ при некотором $n' = n'(\Delta_{i_1 \dots i_r})$;
- (е) $K(f) = \bigcap_{r=1}^{+\infty} \bigcup_{0 \leq i_1 \dots i_r \leq s-1} \Delta_{i_1 \dots i_r}$;
- (ф) существуют $m_0 \geq 1$ и $j_0 \geq 1$ такие, что множество $T(f|_{K(f)})$ периодов периодических точек сужения $f|_{K(f)}$ представимо в виде $T(f|_{K(f)}) = \{m_0 j\}_{j \geq j_0} \cup N^*$, где N^* — некоторое конечное подмножество множества натуральных чисел;

- (g) для любых $\delta > 0$ и $r \geq 1$ таких, что $l(\Delta_{i_1 \dots i_r}) < \delta$, $0 \leq i_1 \dots i_r \leq s-1$, существует периодическая орбита, обладающая следующим свойством: произвольный отрезок $\Delta_{i_1 \dots i_r}$ ранга r содержит по крайней мере одну ее точку;
- (h) при любом натуральном $q > 1$ периодические точки сужения $f|_{K(f)}$ с периодами $m_0 j$, где j/q — целое число (j/q не является целым числом), всюду плотны в $K(f)$;
- (i) существует массивное в $K(f)$ (т.е. представимое в виде счетного пересечения открытых всюду плотных в $K(f)$ множеств) множество точек, порождающих всюду плотные в $K(f)$ траектории (устойчивые по Пуассону);
- (j) существуют $\alpha = \alpha(f) > 0$ и $c = c(f) > 1$ такие, что при любом $x \in K(f)$ справедливо неравенство

$$|(f^n(x))'| > \alpha c^n.$$

Таким образом, отображение f , удовлетворяющее условиям предложения 4, обладает на квазимиимальном множестве сильными хаотическими свойствами. Это обстоятельство существенно усложняет изучение свойств динамической системы $F \in T_*^1(I)$ с факторотображением типа $\succ 2^\infty$.

В данной статье, кроме общего утверждения, устанавливающего взаимосвязь между множеством $P(F)$ устойчивых по Пуассону точек отображения $F \in T_*^1(I)$ и графиками функций η_n^c (теорема А), приведено утверждение о структуре центра отображения $F \in T_*^1(I)$, удовлетворяющего гипотезе $(H1^*)$ (теорема С).

Заметим, что для факторотображения f отображения $F \in T_*^1(I)$ справедливы равенства $\Omega(f^n) = \Omega(f) = C(f)$, $n \geq 1$. Кроме того, если f имеет тип $\succ 2^\infty$, то $C(f) = C_r(f) \cup C_p(f)$, где $C_r(f)$ — непустая разреженная, а $C_p(f)$ — непустая совершенная часть множества $C(f)$ (см. предложение 3).

Следуя [6, 19], поставим в соответствие n -й итерации ($n \geq 1$) отображения $F \in T_*^1(I)$ C^1 -представление $\rho_n : \Omega(f) \rightarrow C^1(I_2)$ такое, что $\rho_n(x) = g_{x,n}$ для всех $x \in \Omega(f)$ (здесь $C^1(I_2)$ — пространство C^1 -гладких отображений отрезка I_2 в себя с C^1 -нормой). Отметим непрерывность C^1 -представления ρ_n [8, гл. 2, п. 20.VII]. Обозначим через $\varsigma_n : \{g_{x,n}\}_{x \in \Omega(f)} \rightarrow 2^{I_2}$ многозначное отображение такое, что $\varsigma_n(g_{x,n}) = \Omega(g_{x,n})$. В отличие от ρ_n , отображение ς_n может быть как непрерывным, так и разрывным.

Определение 5 (см. [19]). Скажем, что отображение $F \in T_*^1(I)$ удовлетворяет гипотезе $(H1^*)$, если существует натуральное число $n_0 \geq 1$ такое, что многозначные отображения ς_n непрерывны для всех $n = n_0 j$, $j = 1, 2, \dots$

Из определения функций η_n следует, что $\eta_n = \varsigma_n \circ \rho_n$. Таким образом, если $F \in T_*^1(I)$ удовлетворяет гипотезе $(H1^*)$, то функции η_n непрерывны при всех $n = n_0 j$, $j \geq 1$.

Сохраним обозначения предложения 4 и положим

$$n' = \text{НОК} \left\{ \{n\}_{n \in T(f|_{C_r(f)})} \{m_0(K(f)), j_0(K(f)), \{n\}_{n \in N^*(K(f))}\}_{K(f) \subset I_1} \right\},$$

где $T(f|_{C_r(f)})$ — множество периодов периодических точек из $C_r(f)$, а $\text{НОК}\{\cdot\}$ — наименьшее общее кратное чисел из некоторого конечного подмножества множества натуральных чисел. Будем использовать последовательность натуральных чисел $l_n = n'((2n+1)!)$ при $n \geq 2$ и множество $\text{Per}(f, l_n)$ периодических точек факторотображения f , периоды которых делят l_n .

Приведем необходимое утверждение о теоретико-множественном пределе последовательности графиков сужений $\eta_{l_n}^c|_{\text{Per}(f, l_n)}$.

Лемма 6. Если $F \in T_*^1(I)$, то существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{l_n}^c|_{\text{Per}(f, l_n)}$ и справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{l_n}^c|_{\text{Per}(f, l_n)} = \overline{\bigcup_{x \in \text{Per}(f)} \{x\} \times C(\tilde{g}_x)} = \overline{\text{Per}(F)},$$

где $\eta_{l_n}^c|_{\text{Per}(f, l_n)}$ — графики соответствующих функций в I .

Доказательство. При любом $n \geq 2$ имеем $C(\tilde{g}_x) = C(\tilde{g}_x^n)$. Тогда в силу выбора числовой последовательности $\{l_n\}_{n \geq 2}$ верно строгое включение

$$\eta_n^c|_{\text{Per}(f, l_n)} \subset \eta_{n+1}^c|_{\text{Per}(f, l_{n+1})}, \quad n \geq 2. \quad (3)$$

Справедливость леммы 6 следует из включений (3) (см. [8, гл. 2. п. 29, VI]), определения функций η_n^c и равенства $C(\tilde{g}_x) = \overline{\text{Per}(\tilde{g}_x)}$ [16]. Лемма 6 доказана. $\square$

Сформулируем основные результаты статьи.

Теорема А. Пусть $F \in T_*^1(I)$. Тогда

$$P(F) \subset \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \eta_n^c,$$

где $\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \eta_n^c$ — верхний предел последовательности графиков функций η_n^c .

Если, кроме того, для некоторой точки $(x^0, y^0) \in P(F)$ имеем

$$(x^0, y^0) \notin \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c|_{\text{Per}(f, l_n)},$$

где $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c|_{\text{Per}(f, l_n)}$ — предел последовательности графиков функций $\eta_n^c|_{\text{Per}(f, l_n)}$, то найдется счетное семейство функций $\{\eta_{l_n}^c\}_{m \geq 1}$, каждая из которых имеет точки разрыва.

Следствие В. Пусть $F \in T_*^1(I)$. Тогда

$$\zeta^c \subset \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \eta_n^c,$$

где ζ^c — график C -функции. Если, кроме того, функции η_n^c непрерывны при любом $n \geq n''$ для некоторого $n'' \geq 2$, то существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c$ и верны равенства

$$\zeta^c = C(F) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c|_{\text{Per}(f, l_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c = \overline{\text{Per}(F)}. \quad (4)$$

Следующая теорема дает другие достаточные условия выполнения равенства $C(F) = \overline{\text{Per}(F)}$.

Теорема С. Если отображение $F \in T_*^1(I)$ удовлетворяет гипотезе $(H1^*)$, то в множестве $C(F)$ центральных движений отображения F всюду плотны периодические траектории, т.е. $C(F) = \overline{\text{Per}(F)}$.

Обратим внимание на то, что если факторотображение f отображения $F \in T_*^1(I)$ имеет тип $<2^\infty$, то $\eta_n^c|_{\text{Per}(f, l_n)} = \eta_n^c$ и справедливы равенства (4) (см. [5]). Поэтому все доказательства проведем в предположении, что f есть отображение типа $>2^\infty$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ А И С

Разобьем доказательство теоремы А на ряд шагов, проделанных в леммах 7, 9, 10.

Лемма 7. Пусть $F \in T_*^1(I)$, а функции η_n^c непрерывны при любом $n \geq n''$ для некоторого $n'' \geq 2$. Тогда существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c$ и верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c|_{\text{Per}(f, l_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c,$$

где $\eta_n^c|_{\text{Per}(f, l_n)}$ и η_n^c — графики соответствующих функций в I .

Доказательство. Возьмем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Используя лемму 6, укажем натуральное число $n_1 = n_1(\varepsilon) \geq n''$ так, чтобы при любых $n \geq n_1$ выполнялось неравенство

$$\text{dist}_I \left(\eta_n^c|_{\text{Per}(f, l_n)}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c|_{\text{Per}(f, l_n)} \right) < \varepsilon, \quad (5)$$

где dist_I — метрика Хаусдорфа в замкнутом прямоугольнике I .

Возьмем произвольно и зафиксируем локально максимальное квазимиимальное множество $K(f)$ факторотображения f . Используя непрерывность функций $\eta_{l_n}^c$ при $n \geq n''$ и утверждения (а), (b), (g) предложения 4, укажем натуральное число $n_2(K(f)) \geq n_1$ так, чтобы при любом $n \geq n_2(K(f))$ каждый отрезок $\Delta_{i_1 \dots i_{r(l_n)}}$ ранга $r(l_n)$ обладал следующими свойствами:

- (i) содержал неподвижную точку отображения $f|_{K(f)}^{l_n}$;
- (ii) для любых точек $x, x' \in \Delta_{i_1 \dots i_{r(l_n)}} \cap K(f)$ выполнялось неравенство

$$\text{dist}(\eta_{l_n}^c(x), \eta_{l_n}^c(x')) < \varepsilon. \quad (6)$$

Тогда из (5) и (6) получаем, что при любых $n \geq n_2(K(f))$ справедливо неравенство

$$\text{dist}_I \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{l_n}^c|_{\text{Per}(f|_{K(f)}, l_n)}, \eta_{l_n}^c|_{K(f)} \right) < 2\varepsilon.$$

Полагая $n_2 = \max_{K(f) \subset I_1} \{n_2(K(f))\}$, при любом $n \geq n_2$ получаем неравенство

$$\text{dist}_I \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{l_n}^c|_{\text{Per}(f, l_n)}, \eta_{l_n}^c \right) < 2\varepsilon.$$

Лемма 7 доказана. $\square$

Покажем, что условие «функции $\eta_{l_n}^c$ непрерывны при любом $n \geq n''$ для некоторого $n'' \geq 2$ » в формулировке леммы 7 опустить нельзя.

Пример 8. Пусть $F \in T_*^1(I)$, где $I = [-1/20, 1] \times [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 80x^4 - x^2, & \text{если } x \in \left[-\frac{1}{20}, \frac{1}{4}\right], \\ 9\left(\frac{1}{4} - x\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \\ 80(1-x)^4 - (1-x)^2, & \text{если } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right], \end{cases}$$

$$g_x(y) = \begin{cases} 8y^2 - 4y + \frac{1}{2}, & \text{если } (x, y) \in \left[-\frac{1}{20}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ q(y), & \text{если } (x, y) \in \left[-\frac{1}{20}, 1\right] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ y - \lambda(x)\left(y - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{если } (x, y) \in \left[-\frac{1}{20}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]; \end{cases}$$

здесь $q(y) = -48y^3 + 56y^2 - 19y + 2$, $\lambda(x) - C^1$ -гладкая на отрезке $[-1/20, 1]$ «шапочка» Урысона такая, что

$$\lambda(x) = 0, \text{ если } x \in M(f); \quad 0 < \lambda(x) < \frac{1}{4}, \text{ если } x \notin M(f),$$

где $M(f)$ — произвольное бесконечное минимальное множество из единственного локально максимального квазимиимального множества факторотображения f . Тогда множество точек разрыва функции η_n^c совпадает с $M(f)$ при любом $n \geq 1$,

$$C(F) = \overline{\text{Per}(F)} \cup (M(f) \times I_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{l_n}^c|_{\text{Per}(f, l_n)} = \overline{\text{Per}(F)}.$$

Лемма 9. Пусть $F \in T_*^1(I)$. Тогда

$$P(F) \subset \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c}.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда для некоторой точки (x^0, y^0) имеем

$$(x^0, y^0) \in P(f) \setminus \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c}. \quad (7)$$

Обратим внимание на то, что при этом $x^0 \notin \text{Per}(f)$. Действительно, в противном случае $y^0 \in C(\tilde{g}_{x^0})$, и $(x^0, y^0) \in \eta_{l_n}^c$ при всех l_n , кратных периоду точки x^0 . Следовательно, $(x^0, y^0) \in \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c}$.

Противоречие с (7) доказывает, что $x^0 \notin \text{Per}(f)$. Тогда в силу предложения 3 найдется локально максимальное квазиминимальное множество $K(f)$, содержащее точку x^0 . Будем рассматривать далее сужения $\eta_{l_n}^c|_{K(f)}$. Имеем

$$(x^0, y^0) \in P(f) \setminus \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \eta_{l_n}^c|_{K(f)}.$$

Тогда в I существуют окрестности $U_d((x^0, y^0))$ точки (x^0, y^0) и $U_d\left(\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \eta_{l_n}^c|_{K(f)}\right)$ множества $\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \eta_{l_n}^c|_{K(f)}$ с непересекающимися замыканиями.

Возьмем произвольно и зафиксируем положительное число $\varepsilon < d$ столь малое, чтобы замыкание окрестности $U_\varepsilon((x^0, y^0)) = U_{1,\varepsilon}(x^0) \times U_{2,\varepsilon}(y^0)$ не содержало точек множеств $\eta_{l_n}|_{K(f)}$ при всех $n \geq 1$. При любом $x \in \overline{U_{1,\varepsilon}(x^0)} \cap K(f)$ обозначим через $J_{x,l_n}^c = (a_{x,l_n}^c, b_{x,l_n}^c)$ смежный интервал множества $C(g_{x,l_n}) = \eta_{l_n}^c(x)$, $n \geq 1$. Укажем, что интервал J_{x,l_n}^c может содержать точки множества $\Omega(g_{x,l_n})$, блуждающие относительно $\Omega(g_{x,l_n})$. Тем не менее, при любых $x \in \overline{U_{1,\varepsilon}(x^0)} \cap K(f)$, $y \in J_{x,l_n}^c$ и $n \geq 1$ выполнено одно из следующих двух неравенств:

$$y < g_{x,l_n}(y), \quad g_{x,l_n}(y) < y. \quad (8)$$

Из (8) следует, что хотя бы одна из граничных точек a_{x,l_n}^c или b_{x,l_n}^c интервала J_{x,l_n}^c является неподвижной для отображения g_{x,l_n} , и выполнено хотя бы одно из следующих двух включений:

$$\begin{aligned} \omega_F((x^0, y^0)) \cap \overline{\left(\bigcup_{x \in U_{1,\varepsilon}(x^0) \cap K(f)} J_{x,l_n}^c \right)} &\subset \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \bigcup_{x \in U_{1,\varepsilon}(x^0) \cap K(f)} \{a_{x,l_n}^c, b_{x,l_n}^c\}, \\ \alpha_F((x^0, y^0)) \cap \overline{\left(\bigcup_{x \in U_{1,\varepsilon}(x^0) \cap K(f)} J_{x,l_n}^c \right)} &\subset \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \bigcup_{x \in U_{1,\varepsilon}(x^0) \cap K(f)} \{a_{x,l_n}^c, b_{x,l_n}^c\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\omega_F((x^0, y^0))$ ($\alpha_F((x^0, y^0))$) — ω -предельное (α -предельное) множество F -траектории точки (x^0, y^0) , причем первое из включений (9) выполнено, если граница интервала J_{x,l_n}^c содержит притягивающую неподвижную точку сужения $g_{x,l_n}|_{J_{x,l_n}^c}$, второе из включений (9) выполнено, если одна из граничных точек интервала J_{x,l_n}^c является отталкивающей для $g_{x,l_n}|_{J_{x,l_n}^c}$.

Так как

$$\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \bigcup_{x \in U_{1,\varepsilon}(x^0) \cap K(f)} \{a_{x,l_n}^c, b_{x,l_n}^c\} \subset \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \eta_{l_n}^c|_{K(f)},$$

то из (9) получаем, что $(x^0, y^0) \notin \omega_F((x^0, y^0))$ (соответственно, $(x^0, y^0) \notin \alpha_F((x^0, y^0))$). Следовательно, сделанное предположение неверно, и

$$(x^0, y^0) \in \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \eta_{l_n}^c|_{K(f)}.$$

Лемма 9 доказана. $\square$

Лемма 10. Пусть $F \in T_*^1(I)$ и для некоторой точки $(x^0, y^0) \in P(F)$ имеем

$$(x^0, y^0) \notin \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{l_n}^c|_{\text{Per}(f,l_n)}.$$

Тогда найдется счетное семейство функций $\{\eta_{l_{n_m}}^c\}_{m \geq 1}$, каждая из которых имеет точки разрыва.

Доказательство. Пусть $(x^0, y^0) \in P(F) \setminus \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{l_n}^c|_{\text{Per}(f,l_n)}$. Тогда в I найдутся окрестности $U_\varepsilon((x^0, y^0))$ точки (x^0, y^0) и $U_\varepsilon\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{l_n}^c|_{\text{Per}(f,l_n)}\right)$ множества $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{l_n}^c|_{\text{Per}(f,l_n)}$, замыкания которых не пересекаются. Предположим, что не более чем конечное число функций $\eta_{l_n}^c$ могут иметь

точки разрыва. Тогда из леммы 7 вытекает существование натурального числа n_3 такого, что при любом $n \geq n_3$ функции η_n^c непрерывны, а для их графиков в I справедливо включение

$$\eta_n^c \subset U_\varepsilon \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n^c|_{\text{Per}(f, I_n)} \right).$$

Поэтому окрестность $U_{\varepsilon'}((x^0, y^0))$ точки (x^0, y^0) при любом $\varepsilon' < \varepsilon$ может пересекаться не более чем с конечным числом множеств η_n^c . Последнее противоречит лемме 9. Лемма 10 доказана. $\square$

Справедливость теоремы А и следствия В вытекает из лемм 7, 9, 10. Теорема С является следствием гипотезы $(H1^*)$, результатов [19] и теоремы А.

3. ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ГИПОТЕЗЕ $(H1)$

Определение 11 (см. [6]). Скажем, что отображение $F \in T_*^1(I)$ удовлетворяет гипотезе $(H1)$, если существует натуральное число $n_0 \geq 1$ такое, что

- (i) отображения $\varsigma_n : \{g_{x,n}\}_{x \in \Omega(f)} \rightarrow 2^{I_2}$ непрерывны для всех $n = n_0 j$, $j = 1, 2, \dots$;
- (ii) последовательность отображений $\{\eta_{n_0 j}\}_{j \geq 1}$ равностепенно непрерывна.

Отображения, удовлетворяющие гипотезе $(H1)$, являются наиболее простыми в множестве динамических систем, удовлетворяющих гипотезе $(H1^*)$. Отметим, что множество косых произведений отображений интервала, удовлетворяющих гипотезе $(H1)$, содержит как правильную часть множество прямых произведений отображений интервала.

Приведем некоторые достаточные условия, при выполнении которых косое произведение принадлежит множеству отображений, удовлетворяющих гипотезе $(H1)$.

Теорема 12. Пусть для отображения $F \in T_*^1(I)$ выполнено одно из следующих двух условий: существует натуральное число n_0 такое, что

- (а) $\eta_{n_0 j}(x') = \eta_{n_0 j}(x'')$, каковы бы ни были натуральное число $j \geq 1$ и точки $x', x'' \in \Omega(f)$;
- (б) $\eta_{n_0 j} = \eta_{n_0(j+1)}$ при всех $j \geq j_0$ для некоторого $j_0 \geq 1$, где $\eta_{n_0 j_0} : \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$ — непрерывное отображение.

Тогда F удовлетворяет гипотезе $(H1)$.

Доказательство. В самом деле, выполнение каждого из условий (а) или (б) теоремы 12 влечет за собой предкомпактность семейства непрерывных отображений $\eta_{n_0 j} : \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$. Тогда условие (ii) гипотезы $(H1)$ выполнено в силу обобщенной теоремы Арцела [7, гл. 2, п. 7]. Покажем, что выполнено и условие (i).

Действительно, при любом $n \geq 1$ имеем $\eta_n = \varsigma_n \circ \rho_n|_{\Omega(f)}$. Так как $\Omega(f)$ — компакт в I_1 , а C^1 -представление ρ_n непрерывно, то $\rho_n(\Omega(f))$ — компакт в $C^1(I_2)$. Следовательно, $\rho_n|_{\Omega(f)}$ — замкнутое отображение множества $\Omega(f)$ на множество $\rho_n(\Omega(f))$. Тогда отображение $\rho_n|_{\Omega(f)}$ взаимно непрерывно [8, т. 1, гл. 1, п. 13].

Используя равенство $\eta_n = \varsigma_n \circ \rho_n|_{\Omega(f)}$, получаем отсюда, что отображения $\varsigma_{n_0 j}$ непрерывны при всех $j \geq 1$, если выполнено условие (а), и при всех $j \geq j_0$, если выполнено условие (б) (см. [8, гл. 1, п. 13]). Заменяя во втором случае n_0 на $n_0 j_0$, убеждаемся в том, что удовлетворяется условие (i) гипотезы $(H1)$. Теорема 12 доказана. $\square$

Завершая работу, приведем пример косого произведения отображений интервала, удовлетворяющего гипотезе $(H1)$.

Пример 13. Пусть $F \in T_*^1(I)$, где $I = [-1/20, 1] \times [0, 1]$, факторотображение f определено в примере 8, $g_x(y) = \lambda(x)y^\alpha$, где $\alpha > 1$, $\lambda(x)$ — C^1 -гладкая на отрезке $[-1/20, 1]$ «шапочка» Урысона такая, что

$$\lambda(x) = 1, \quad \text{если } x \in \Omega(f), \quad 0 < \lambda(x) < 1, \quad \text{если } x \notin \Omega(f).$$

Здесь F удовлетворяет гипотезе $(H1)$, так как функции η_n при любом $n \geq 1$ не зависят от $x \in \Omega(f)$: $\eta_n(x) = \Omega(g_{x,n}) = \{0; 1\}$ (см. теорему 12). При этом

$$\Omega(F) = C(F) = \bigcup_{x \in \Omega(f)} \{x\} \times \{0; 1\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З. Гладкие динамические системы// Динамические системы-1/ Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундаментальные направления. — М.: ВИНТИ, 1985. — 1. — С. 151–242.
2. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Гринес В. З., Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Сафонов А. В., Солодов В. В., Старков А. Н., Степин А. М., Шлячков С. В. Динамические системы с гиперболическим поведением// Динамические системы-9/ Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундаментальные направления. — М.: ВИНТИ, 1991. — 66. — С. 151–242.
3. Биркгоф Дж. Динамические системы. — М.: Гостехиздат, 1941.
4. Ефремова Л. С. Периодические движения дискретных полудинамических систем/ Дисс. канд. физ.-мат. наук. — Горький, 1981.
5. Ефремова Л. С. О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе// Динам. сист. и нелин. явления. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1990. — С. 15–25.
6. Ефремова Л. С. О понятии Ω -функции косоого произведения отображений интервала// Тр. междунар. конф., посв. 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Т. 6. Динамические системы/ Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНТИ. 1999. — 67. — С. 129–160.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
8. Куратовский К. Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966.
9. Майер А. Г. Об одной задаче Биркгофа// Докл. АН СССР. — 1947. — 55, № 6. — С. 477–479.
10. Майер А. Г. О траекториях в трехмерном пространстве// Докл. АН СССР. — 1947. — 55, № 7. — С. 583–585.
11. Майер А. Г. О порядковом числе центральных траекторий// Докл. АН СССР. — 1948. — 59, № 8. — С. 1393–1396.
12. Майер А. Г. О центральных траекториях и проблеме Биркгофа// Мат. сб. — 1949. — 25.
13. Немыцкий В. В. Топологические вопросы теории динамических систем// Усп. мат. наук. — 1949. — 4, № 6. — С. 91–153.
14. Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. Новые методы небесной механики. III. Интегральные инварианты. Периодические решения второго рода. Двоякоасимптотические решения. — М.: Изд-во АН СССР, 1972.
15. Шарковский А. Н. О циклах и структуре непрерывного отображения// Укр. мат. ж. — 1965. — 17, № 3. — С. 104–111.
16. Шарковский О. М. Про одну теорему Дж. Биркгофа// Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1967. — 5. — С. 429–432.
17. Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре—Биркгофа// Мат. сб. — 1967. — 74, № 3. — С. 378–397.
18. Якобсон М. В. О гладких отображениях окружности в себя// Мат. сб. — 1971. — 85, № 2. — С. 163–188.
19. Efremova L. S. New set-valued functions in the theory of skew products of interval maps// Nonlin. Anal. — 2001. — 47. — С. 5297–5308.
20. Efremova L. S. Set-valued functions and dynamics of skew products of interval maps// Proc. Int. Conf. Dedicated to the 100th anniversary of A. A. Andronov. Nizhny Novgorod, July 2–6, 2001/ Progr. Nonlin. Science. Math. Problems of Nonlinear Dynamics. — 2002. — 1. — С. 219–224.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ КОШИ $F(t, x, x') = 0, x(0) = 0$ © 2005 г. **А. Е. ЗЕРНОВ, Ю. В. КУЗИНА**

Аннотация. Сделана попытка найти у дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной, непрерывно дифференцируемые решения с требуемыми асимптотическими свойствами. Используются методы качественной теории дифференциальных уравнений. При определенных условиях выясняется вопрос о количестве решений указанного вида.

Вопросы о существовании и числе решений задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка подробно исследовались как для дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных [1, 2, 4, 9, 10, 19, 20, 25], так и для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных [2–5, 7, 10, 21–23, 27, 28]; во втором случае строились и последовательности приближений, сходящиеся к решению поставленной задачи [6, 24, 26, 29, 30]. Вместе с тем относительно мало изучено асимптотическое поведение вблизи начальной точки решений задачи Коши для неявных дифференциальных уравнений. Однако, по мнению авторов, именно исследование асимптотического поведения решений представляет наибольший интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. В этой работе авторы предприняли попытку найти у дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной, непрерывно дифференцируемые решения с требуемыми асимптотическими свойствами. Используются методы качественной теории дифференциальных уравнений (см. [8, 9, 11–14]). При определенных условиях выясняется и вопрос о количестве решений указанного вида. Задачи аналогичного вида были рассмотрены также в [11–18] и других работах авторов.

Рассматривается задача Коши

$$\sum_{0 \leq i, j, k \leq m} a_{ijk} t^i x^j (x')^k + f(t, x, x') = 0, \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad (2)$$

где $t \in (0, \tau)$ — действительная переменная, $x : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ — действительная неизвестная функция переменной t , a_{ijk} — постоянные (все i, j, k — целые неотрицательные), $a_{000} = 0$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция,

$$\mathcal{D} = \{(t, x, y) : t \in (0, \tau), |x| < r_1 t, |y| < r_2\},$$

$$|f(t, x, y)| \leq K(t^{m+1} + |x|^{m+1} + |y|^{m+1}) \quad \text{при } (t, x, y) \in \mathcal{D}.$$

Введем обозначение

$$\omega = \{(i, j, 0) : a_{ij0} \neq 0\}, \quad \Omega = \{(i, j, k) : a_{ijk} \neq 0, k \geq 1\}.$$

Будем считать, что ω, Ω — непустые множества. Пусть

$$\nu_- = \min_{(i, j, 0) \in \omega} (i + j), \quad \nu_+ = \min_{(i, j, k) \in \Omega} (i + j)$$

и $\nu_- = \nu_+ = \nu_0$; очевидно, ν_0 — целое неотрицательное число. Положим

$$\Omega_0 = \{(i, j, k) : i + j = \nu_0\}.$$

Если $(i, j, k) \in \Omega_0$, то $a_{ijk} \neq 0$ и при этом $i + j = \nu_0$. Если же $(i, j, k) \notin \Omega_0$, то либо $a_{ijk} = 0$, либо $a_{ijk} \neq 0$ и при этом $i + j \geq \nu_0 + 1$. Пусть

$$P(c) = \sum_{(i, j, k) \in \Omega_0} a_{ijk} c^{j+k} \quad (3)$$

и c — действительный корень уравнения (3), удовлетворяющий условию

$$|c| < \min\{r_1, r_2\}.$$

Введем обозначения

$$\xi(c) = \sum_{\substack{(i,j,k) \in \Omega_0 \\ k \geq 1}} ka_{ijk}c^{j+k-1}, \quad \eta(c) = \sum_{\substack{(i,j,k) \in \Omega_0 \\ j \geq 1}} ja_{ijk}c^{j+k-1}.$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

- (1) $|f(t, ct, c)| \leq K_1 t^{\nu_0 + \lambda}$, $t \in (0, \tau)$, где $0 < \lambda \leq 1$;
- (2) $\xi(c) \neq 0$, $P'(c) + \lambda \xi(c) \neq 0$;
- (3) $|f(t_1, x, y) - f(t_2, x, y)| \leq l_t(\mu)|t_1 - t_2|$, $0 < \mu \leq t_1, t_2 < \tau$, $(t_i, x, y) \in \mathcal{D}$,
 $|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)| \leq L_x t^{\nu_0 - 1}|x_1 - x_2|$, $(t, x_i, y) \in \mathcal{D}$,
 $|f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)| \leq L_y t^{\nu_0}|y_1 - y_2|$, $(t, x, y_i) \in \mathcal{D}$, $i \in \{1, 2\}$,
 где $l_t : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $0 < t_1 < t_2 < \tau \Rightarrow l_t(t_1) \geq l_t(t_2)$;
- (4) $L_x + \frac{|P'(c) + \lambda \xi(c)| + |\eta(c)|}{|\xi(c)|} L_y < |P'(c) + \lambda \xi(c)|$.

Определение 1. Для каждого $\rho \in (0, \tau)$ непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ называется ρ -решением задачи (1), (2), если

- (1) $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D}$, $t \in (0, \rho]$;
- (2) x тождественно удовлетворяет уравнению (1) при $t \in (0, \rho]$;
- (3) $\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = 0$.

Обозначим через $\mathcal{U}(\rho, M, q)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$|u(t) - ct| \leq Mt^{1+\lambda}, \quad |u'(t) - c| \leq qMt^\lambda, \quad t \in (0, \rho]; \quad (4)$$

здесь ρ , M , q — постоянные, $\rho \in (0, \tau)$.

Теорема 1. Существуют ρ , M , q такие, что

- (a) если $\frac{P'(c)}{\xi(c)} + \lambda < 0$, то у задачи (1), (2) существует бесконечное множество ρ -решений, принадлежащих множеству $\mathcal{U}(\rho, M, q)$. Если при этом постоянная α удовлетворяет условию $|\alpha - c\rho| < M\rho^{1+\lambda}$, то у задачи (1), (2) существует ρ -решение $x_\alpha : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, принадлежащее множеству $\mathcal{U}(\rho, M, q)$, такое, что $x_\alpha(\rho) = \alpha$;
- (b) если $\frac{P'(c)}{\xi(c)} + \lambda > 0$, то у задачи (1), (2) существует непустое множество ρ -решений, принадлежащих множеству $\mathcal{U}(\rho, M, q)$.

Доказательство. Вначале выбираются постоянные ρ , M , q . Пусть выполнены условия:

- (1) если $L_y = 0$, то $q > \frac{|P'(c) + \lambda \xi(c)| + |\eta(c)|}{|\xi(c)|}$;
 если $L_y > 0$, то $\frac{|P'(c) + \lambda \xi(c)| + |\eta(c)|}{|\xi(c)|} < q < \frac{|P'(c) + \lambda \xi(c)| - L_x}{L_y}$;
- (2) $M > \frac{\sum_{(i,j,k) \notin \Omega_0} |a_{ijk}| |c|^{j+k} + K_1}{|P'(c) + \lambda \xi(c)| - L_x - qL_y}$.

Условия, определяющие выбор ρ , здесь не приводятся ввиду ограниченности объема настоящей статьи. Отметим лишь, что $\rho \in (0, \tau)$, ρ достаточно мало. Обозначим через $\mathcal{B}$ пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t \in [0, \rho]} (|x(t)| + |x'(t)|).$$

Пусть $\mathcal{U}$ — подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям (4), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = c$ и при этом

$$\forall \mu \in (0, \rho] \quad \forall t_i \in [\mu, \rho], \quad i \in \{1, 2\} : |u'(t_1) - u'(t_2)| \leq K(\mu)|t_1 - t_2|,$$

где

$$K(\mu) = \frac{2}{|\xi(c)| - L_y} \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{l_t(\mu) + 1}{\mu^{\nu_0}} \right),$$

$\mathcal{U}$ — замкнутое, ограниченное, выпуклое и (на основании теоремы Арцела) компактное множество. Преобразуем (1) к виду

$$\begin{aligned} -\xi(c)t^{\nu_0}(x' - c) &= \sum_{\substack{(i,j,k) \in \Omega_0 \\ k \geq 2}} a_{ijk} t^i (ct)^j \sum_{r=2}^k C_k^r c^{k-r} (x' - c)^r + \\ &+ \sum_{(i,j,k) \in \Omega_0} a_{ijk} t^i (x^j - (ct)^j) (x')^k + \sum_{(i,j,k) \notin \Omega_0} a_{ijk} t^i x^j (x')^k + f(t, x, x') \end{aligned}$$

и будем далее рассматривать дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} x' = c - \frac{t^{-\nu_0}}{\xi(c)} &\left(\sum_{\substack{(i,j,k) \in \Omega_0 \\ k \geq 2}} a_{ijk} t^i (ct)^j \sum_{r=2}^k C_k^r c^{k-r} (u'(t) - c)^r + \right. \\ &\left. + \sum_{(i,j,k) \in \Omega_0} a_{ijk} t^i (x^j - (ct)^j) (u'(t))^k + \sum_{(i,j,k) \notin \Omega_0} a_{ijk} t^i (u(t))^j (u'(t))^k + f(t, u(t), u'(t)) \right), \quad (5) \end{aligned}$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Пусть

$$\mathcal{D}_0 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \quad x \in \mathbb{R}\}.$$

На множестве $\mathcal{D}_0$ для уравнения (5) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Положим

$$\Phi_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \quad |x - ct| = Mt^{1+\lambda}\},$$

$$\mathcal{D}_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \quad |x - ct| < Mt^{1+\lambda}\},$$

$$H = \{(t, x) : t = \rho, \quad |x - c\rho| < M\rho^{1+\lambda}\}.$$

Пусть функция $A_1 : \mathcal{D}_0 \rightarrow [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_1(t, x) = (x - ct)^2 t^{-2(1+\lambda)}$$

и пусть $a_1 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — производная функции A_1 в силу уравнения (5). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} a_1(t, x) &= 2t^{-2(1+\lambda)} (-\xi(c)t^{\nu_0})^{-1} \left((x - ct)(-\xi(c)t^{\nu_0}(x' - c)) + (1 + \lambda)\xi(c)t^{\nu_0-1}(x - ct)^2 \right) = \\ &= 2t^{-2\lambda-3}(x - ct)^2 \left(-\frac{P'(c)}{\xi(c)} - \lambda + \varphi_1(t, x) \right), \quad (t, x) \in \Phi_1; \end{aligned}$$

здесь $\varphi_1 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $|\varphi_1(t, x)| \leq \sigma_1(t)$, $(t, x) \in \Phi_1$, где $\sigma_1 : (0, \rho] \rightarrow [0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim_{t \rightarrow +0} \sigma_1(t) = 0$.

Пусть сначала $\frac{P'(c)}{\xi(c)} + \lambda < 0$. Тогда, ввиду достаточной малости ρ , $a_1(t, x) > 0$ при $(t, x) \in \Phi_1$.

Отсюда следует, что если взять любую точку $(t_0, x_0) \in \Phi_1$ и обозначить через $J_0 : (t, x_0(t))$ интегральную кривую (5), которая проходит через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ имеем $(t, x_0(t)) \notin \overline{\mathcal{D}_1}$ для $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leq \rho$) и $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_1$ для $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Действительно, так как

$$A_1(t_0, x_0(t_0)) = A_1(t_0, x_0) = M^2, \quad a_1(t_0, x_0(t_0)) = a_1(t_0, x_0) > 0,$$

то при $t_0 \in (0, \rho)$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\text{sign} \left(A_1(t, x_0(t)) - A_1(t_0, x_0(t_0)) \right) = \text{sign}(t - t_0), \quad |t - t_0| < \delta,$$

или

$$\text{sign} \left(|x_0(t) - ct|t^{-1-\lambda} - M \right) = \text{sign}(t - t_0), \quad |t - t_0| < \delta.$$

Если же $t_0 = \rho$, то существует такое $\delta > 0$, что

$$A_1(t, x_0(t)) < A_1(\rho, x_0(\rho)), \quad t \in (\rho - \delta, \rho),$$

или

$$|x_0(t) - ct|t^{-1-\lambda} < M, \quad t \in (\rho - \delta, \rho).$$

Отсюда следует, что каждая из интегральных кривых уравнения (5), пересекающих множество H , определена при $t \in (0, \rho]$ и расположена в $\mathcal{D}_1$ при $t \in (0, \rho]$. Действительно, каждая из этих интегральных кривых при убывании t от $t = \rho$ до $t = 0$ не может иметь общих точек с Φ_1 . Пусть $G(\rho, x_G) \in H$ — произвольная фиксированная точка. Обозначим через $J_u : (t, x_u(t))$ интегральную кривую (5), проходящую через точку G . На основании сказанного, $J_u : (t, x_u(t))$ расположена в $\mathcal{D}_1$ при $t \in (0, \rho]$. Поэтому

$$|x_u(t) - ct| \leq Mt^{1+\lambda}, \quad t \in (0, \rho]. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$|x'_u(t) - c| \leq qMt^\lambda, \quad t \in (0, \rho]. \quad (7)$$

Докажем, что

$$\forall \mu \in (0, \rho] \quad \forall t_i \in [\mu, \rho], \quad i \in \{1, 2\} : \quad |x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| \leq K(\mu)|t_1 - t_2|. \quad (8)$$

Действительно, пусть для определенности $t_1 < t_2$. Тогда

$$\begin{aligned} |x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| &= \left| \frac{1}{|\xi(c)|t_2^{\nu_0}} - \xi(c)t_2^{\nu_0}(x'_u(t_1) - c) + \xi(c)t_2^{\nu_0}(x'_u(t_2) - c) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{L_y}{|\xi(c)|} \right) |u'(t_1) - u'(t_2)| + \frac{\mu^{\nu_0-2} + 1 + l_t(\mu)}{|\xi(c)|\mu^{\nu_0}} |t_1 - t_2| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{L_y}{|\xi(c)|} \right) K(\mu)|t_1 - t_2| + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{L_y}{|\xi(c)|} \right) K(\mu)|t_1 - t_2| = K(\mu)|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Положим $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = c$. Тогда $x_u \in \mathcal{U}$. Определим оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, полагая $Tu = x_u$. Отметим, что точка $G(\rho, x_G)$ остается неизменной при любом выборе функции $u \in \mathcal{U}$ в правой части (5), т.е. всегда $x_u(\rho) = x_G$.

Пусть теперь $\frac{P'(c)}{\xi(c)} + \lambda > 0$. Тогда, ввиду достаточной малости ρ , $a_1(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_1$.

Отсюда следует, что если взять любую точку $(t_0, x_0) \in \Phi_1$ и обозначить через $J_0 : (t, x_0(t))$ интегральную кривую (5), которая проходит через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ имеем $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_1$ для $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leq \rho$) и $(t, x_0(t)) \notin \overline{\mathcal{D}_1}$ для $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству, проведенному в предыдущем случае. Докажем, что хотя бы одна из интегральных кривых уравнения (5), пересекающих H , определена при $t \in (0, \rho]$ и расположена в $\mathcal{D}_1$ при $t \in (0, \rho]$. Действительно, если интегральная кривая (5) пересекает Φ_1 , то при последующем возрастании t она не сможет иметь общих точек с Φ_1 и потому пересечет $\overline{H}$. Определим отображение $\psi : \Phi_1 \rightarrow \overline{H}$, ставя в соответствие каждой точке $P \in \Phi_1$ точку $\psi(P) \in \overline{H}$, лежащую на той же интегральной кривой (5), что и точка P . Положим $\psi(\Phi_1) = \{\psi(P) : P \in \Phi_1\}$. Так как $\overline{H}$ — замкнутое множество, а $\psi(\Phi_1)$ — нет (это образ незамкнутого множества Φ_1), то множество $\overline{H} \setminus \psi(\Phi_1)$ непусто. Пусть $J_u : (t, x_u(t))$ — интегральная кривая уравнения (5) такая, что $(\rho, x_u(\rho)) \in \overline{H} \setminus \psi(\Phi_1)$. Очевидно, что эта интегральная кривая имеет требуемые свойства. Нетрудно убедиться в том, что имеют место свойства (6)–(8). Положим $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = c$. Тогда $x_u \in \mathcal{U}$. Наконец, покажем, что у уравнения (5) существует единственная интегральная кривая с такими свойствами. Иначе говоря, покажем, что если $(t_0, x_0) \in \overline{\mathcal{D}_1} \setminus \{(0, 0)\}$, $x_0 \neq x_u(t_0)$, то интегральная

кривая (5), проходящая через точку (t_0, x_0) , покинет множество $\overline{\mathcal{D}}_1$ при уменьшении t . В самом деле, рассмотрим однопараметрические семейства множеств

$$\begin{aligned}\Phi_2(\nu) &= \{(t, x) : t \in (0, \rho], |x - x_u(t)| = \nu t^{1+\lambda-\varepsilon}\}, \\ \mathcal{D}_2(\nu) &= \{(t, x) : t \in (0, \rho], |x - x_u(t)| < \nu t^{1+\lambda-\varepsilon}\},\end{aligned}$$

где ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$, ε — такая постоянная, что $0 < \varepsilon < \min \left\{ \lambda, \frac{P'(c)}{\xi(c)} + \lambda \right\}$. Пусть функция $A_2 : \mathcal{D}_0 \rightarrow [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_2(t, x) = (x - x_u(t))^2 t^{-2(1+\lambda+\varepsilon)}$$

и пусть $a_2 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — производная функции A_2 в силу уравнения (5). Нетрудно убедиться в том, что

$$a_2(t, x) = 2t^{-2\lambda-3+2\varepsilon} (x - x_u(t))^2 \left(-\frac{P'(c)}{\xi(c)} - \lambda + \varepsilon + \varphi_2(t, x) \right), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_0;$$

здесь $\varphi_2 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $|\varphi_2(t, x)| \leq \sigma_2(t)$, $(t, x) \in \mathcal{D}_0$, где $\sigma_2 : (0, \rho] \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim_{t \rightarrow +0} \sigma_2(t) = 0$. Так как ρ достаточно мало, то $a_2(t, x) < 0$ в любой точке $(t, x) \in \mathcal{D}_0$, удовлетворяющей условию $x \neq x_u(t)$. В частности, $a_2(t, x) < 0$, если $(t, x) \in \Phi_2(\nu)$ для каждого $\nu \in (0, 1]$. Поэтому если взять любую точку (t_0, x_0) любой кривой $\Phi_2(\nu)$, $\nu \in (0, 1]$, и обозначить через $J_0 : (t, x_0(t))$ интегральную кривую уравнения (5), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ имеем $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_2(\nu)$ для $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leq \rho$) и $(t, x_0(t)) \notin \overline{\mathcal{D}}_2(\nu)$ для $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение для Φ_1 . Пусть $P_*(t_*, x_*) \in \overline{\mathcal{D}}_1 \setminus \{(0, 0)\}$, $x_* \neq x_u(t_*)$. Существует такое $\nu_* \in (0, 1]$, что $P_* \in \Phi_2(\nu_*)$. На основании сказанного выше интегральная кривая $J_* : (t, x^*(t))$ уравнения (5), проходящая через точку P_* , располагается вне $\overline{\mathcal{D}}_2(\nu_*)$ при всех $t \in (t_-, t_*)$, где (t_-, t_*) — левый максимальный интервал существования решения x^* . Но, с другой стороны, существует такое $t_{**} \in (0, \rho)$, что если $(t, x) \in \overline{\mathcal{D}}_1$ и если $t \in (0, t_{**})$, то $(t, x) \in \mathcal{D}_2(\nu_*)$, так как

$$|x - x_u(t)| \leq |x - ct| + |x_u(t) - ct| \leq 2Mt^{1+\lambda} = \nu_* t^{1+\lambda-\varepsilon} \cdot \frac{2M}{\nu_*} t^\varepsilon < \nu_* t^{1+\lambda-\varepsilon},$$

если $t \in (0, t_{**})$, где $t_{**} \in (0, \rho)$ достаточно мало. Пусть $t^* = \min\{t_*, t_{**}\}$. На основании сказанного, $J_* : (t, x^*(t))$ лежит вне $\overline{\mathcal{D}}_1$ при $t \in (t_-, t_*)$, что и требовалось. Определим оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, полагая $Tu = x_u$.

Докажем, что $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ — непрерывный оператор. Пусть $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$, — произвольные фиксированные функции и пусть $Tu_i = x_i$, $i \in \{1, 2\}$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h$, $h > 0$. Положим

$$\begin{aligned}\Phi_3 &= \{(t, x) : t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| = h^\nu t^{1+\lambda-\varepsilon}\}, \\ \mathcal{D}_3 &= \{(t, x) : t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| < h^\nu t^{1+\lambda-\varepsilon}\},\end{aligned}$$

где ν, ε — постоянные, определяемые следующими условиями:

- (а) если $\frac{P'(c)}{\xi(c)} + \lambda < 0$, то $0 < \varepsilon < \lambda$;
- (б) если $\frac{P'(c)}{\xi(c)} + \lambda > 0$, то $0 < \varepsilon < \min \left\{ \lambda, \frac{P'(c)}{\xi(c)} + \lambda \right\}$ и $0 < \nu < \frac{\varepsilon}{1+\lambda}$, $0 < \nu < \min \left\{ 1, \varepsilon, \frac{1}{\lambda} \right\}$.

Пусть функция $A_3 : \mathcal{D}_0 \rightarrow [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_3(t, x) = (x - x_2(t))^2 t^{-2(1+\lambda-\varepsilon)}$$

и пусть $a_3 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — производная этой функции в силу уравнения

$$x' = c - \frac{t^{-\nu_0}}{\xi(c)} \left(\sum_{\substack{(i,j,k) \in \Omega_0 \\ k \geq 2}} a_{ijk} t^i (ct)^j \sum_{r=2}^k C_k^r c^{k-r} (u_1'(t) - c)^r + \right. \\ \left. + \sum_{(i,j,k) \in \Omega_0} a_{ijk} t^i (x^j - (ct)^j) (u_1'(t))^k + \sum_{(i,j,k) \notin \Omega_0} a_{ijk} t^i (u_1(t))^j (u_1'(t))^k + f(t, u_1(t), u_1'(t)) \right). \quad (9)$$

Так как

$$|u_1(t) - u_2(t)| = |u_1(t) - u_2(t)|^\nu |u_1(t) - u_2(t)|^{1-\nu} \leq \\ \leq \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}^\nu (|u_1(t) - ct| + |u_2(t) - ct|)^{1-\nu} \leq h^\nu (2Mt^{1+\lambda})^{1-\nu}, \\ |u_1'(t) - u_2'(t)| = |u_1'(t) - u_2'(t)|^\nu |u_1'(t) - u_2'(t)|^{1-\nu} \leq \\ \leq \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}^\nu (|u_1'(t) - c| + |u_2'(t) - c|)^{1-\nu} \leq h^\nu (2qMt^\lambda)^{1-\nu}, \quad t \in (0, \rho],$$

то нетрудно убедиться в том, что

$$a_3(t, x) = 2t^{-2(1+\lambda-\varepsilon)} (-\xi(c)t^{\nu_0})^{-1} \left\{ (x - x_2(t)) \times \right. \\ \times \left[\sum_{\substack{(i,j,k) \in \Omega_0 \\ k \geq 2}} a_{ijk} t^i (ct)^j \sum_{r=2}^k C_k^r c^{k-r} ((u_1'(t) - c)^r - (u_2'(t) - c)^r) + \right. \\ \left. + \sum_{(i,j,k) \in \Omega_0} a_{ijk} t^i ((x^j - (ct)^j) (u_1'(t))^k - ((x_2(t))^j - (ct)^j) (u_2'(t))^k) + \right. \\ \left. + \sum_{(i,j,k) \notin \Omega_0} a_{ijk} t^i ((u_1(t))^j (u_1'(t))^k - (u_2(t))^j (u_2'(t))^k) \right] + \\ \left. + (f(t, u_1(t), u_1'(t)) - f(t, u_2(t), u_2'(t))) + \xi(c)t^{\nu_0-1}(1+\lambda-\varepsilon)(x - x_2(t))^2 \right\} = \\ = 2t^{-3-2\lambda+2\varepsilon} (x - x_2(t))^2 \left(-\frac{P'(c)}{\xi(c)} - \lambda + \varepsilon + \varphi_3(t, x) \right), \quad (t, x) \in \Phi_3;$$

здесь $\varphi_3 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $|\varphi_3(t, x)| \leq \sigma_3(t)$, $(t, x) \in \Phi_3$, где $\sigma_3 : (0, \rho] \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim_{t \rightarrow +0} \sigma_3(t) = 0$.

Пусть сначала $\frac{P'(c)}{\xi(c)} + \lambda < 0$. Тогда, ввиду достаточной малости ρ , имеем $a_3(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_3$. Поэтому если (t_0, x_0) — любая точка кривой Φ_3 и $J_0 : (t, x_0(t))$ — интегральная кривая уравнения (9), проходящая через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ имеем $(t, x_0(t)) \notin \overline{\mathcal{D}_3}$ для $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leq \rho$) и $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_3$ для $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Это доказывается аналогично соответствующему утверждению для Φ_1 . При этом $x_1(\rho) = x_2(\rho) = x_G$. Если t уменьшается от $t = \rho$ до $t = 0$, то, на основании сказанного, интегральная кривая $J : (t, x_1(t))$ уравнения (9) не может иметь общих точек с Φ_3 . Поэтому указанная интегральная кривая располагается в $\mathcal{D}_3$ при всех $t \in (0, \rho]$. Следовательно,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq h^\nu t^{1+\lambda-\varepsilon} h, \quad t \in (0, \rho]. \quad (10)$$

Так как для каждого $i \in \{1, 2\}$ функция $x_i : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ является решением уравнения (5), где $u = u_i$, то с помощью (10) нетрудно убедиться в том, что

$$|x_1'(t) - x_2'(t)| \leq \sigma_4(t) h^\nu, \quad t \in (0, \rho], \quad (11)$$

где $\sigma_4 : (0, \rho] \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim_{t \rightarrow +0} \sigma_4 = 0$. Так как $\varepsilon < \lambda$, то из (10), (11) следует, ввиду достаточной малости ρ , что

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \leq h^\nu, \quad t \in (0, \rho]. \quad (12)$$

Пусть теперь $\frac{P'(c)}{\xi(c)} + \lambda > 0$. Тогда, как было отмечено, $\frac{P'(c)}{\xi(c)} + \lambda - \varepsilon > 0$ и, так как ρ достаточно мало, имеем $a_3(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_3$. Поэтому если $(t_0, x_0) \in \Phi_3$ — любая точка и $J_0 : (t, x_0(t))$ — интегральная кривая уравнения (9), проходящая через эту точку, то существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что $(t, x_0(t)) \in \mathcal{D}_3$ для $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leq \rho$) и $(t, x_0(t)) \notin \overline{\mathcal{D}}_3$ для $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Это доказывается так же, как и соответствующее утверждение для Φ_1 . При этом

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t) - ct| + |x_2(t) - ct| \leq 2Mt^{1+\lambda} < h^\nu t^{1+\lambda-\varepsilon},$$

если $t \in (0, t(h)]$, где $t(h) \in (0, \rho)$ достаточно мало. Следовательно, интегральная кривая $J : (t, x_1(t))$ уравнения (9) расположена в $\mathcal{D}_3$ при $t \in (0, t(h)]$. Если t возрастает от $t = t(h)$ до $t = \rho$, то на основании сказанного эта интегральная кривая не может иметь общих точек с Φ_3 , поэтому она расположена в $\mathcal{D}_3$ при всех $t \in (0, \rho]$. Это означает, что справедливо равенство (10). Теперь, как и ранее, получим (11), а затем (12).

Перейдем непосредственно к доказательству непрерывности оператора $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Положим

$$\delta(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/\nu}.$$

Если $h < \delta(\varepsilon)$, то

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in (0, \rho],$$

и потому

$$\max_{t \in [0, \rho]} (|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)|) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е.

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h < \delta(\varepsilon)$, то

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_{\mathcal{B}} = \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$. Непрерывность оператора $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ установлена.

Для завершения доказательства теоремы остается применить к оператору $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ теорему Шаудера о неподвижной точке. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. Ф. Усиление теоремы единственности для O -кривой в N_2 // Докл. АН СССР. — 1962. — 146, № 1. — С. 9–10.
2. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
3. Арнольд В. И. Теория катастроф. — М.: Наука, 1990.
4. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Ижевск, 2000.
5. Блинов С. П. Геометрический метод решения систем дифференциальных уравнений/ Деп. в ВИНТИ, № 2024–74 Деп. — Минск, 1974.
6. Витюк А. Н. Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных// Дифференц. уравн. — 1971. — 7, № 9. — С. 1575–1580.
7. Давыдов А. А. Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности особой точки// Функци. анал. прилож. — 1985. — 19, № 2. — С. 1–10.
8. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
9. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техн., 1972. 664 с.

10. Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Вища школа, 1974.
11. Зернов А. Е. Асимптотика решения задачи Коши, не разрешенной относительно производной// Дифференц. уравн. — 1995. — 31, № 5. — С. 37–43.
12. Зернов А. Е. О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши// Дифференц. уравн. — 1992. — 28, № 5. — С. 756–760.
13. Зернов А. Е. О решении сингулярной задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной// Укр. мат. ж. — 2001. — 53, № 2. — С. 258–262.
14. Зернов А. Е. Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши// Укр. мат. ж. — 2001. — 53, № 3. — С. 302–310.
15. Зернов А. Е., Кузина Ю. В. Асимптотическое поведение решений задачи Коши $x' = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$ // Укр. мат. ж. — 2002. — 54, № 12. — С. 1698–1703.
16. Зернов А. Е., Кузина Ю. В. Существование и асимптотическое поведение решений задачи Коши $x(x')^\gamma = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$ // Укр. мат. ж. — 2003. — 55, № 10. — С. 1433–1438.
17. Зернов А. Е., Кузина Ю. В. Качественное исследование сингулярной задачи Коши $F(t, x, x') = 0$, $x(0) = 0$ // Укр. мат. ж. — 2003. — 55, № 12. — С. 1720–1723.
18. Зернов А. Е., Кузина Ю. В. Качественный анализ сингулярной задачи Коши для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной// Дифференц. уравн. — 2003. — 39, № 8. — С. 1–8.
19. Кигурадзе И. Т. О задаче Коши для сингулярной системы дифференциальных уравнений// Дифференц. уравн. — 1965. — 1, № 10. — С. 1271–1291.
20. Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975.
21. Ремизов А. О. О правильных особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной// Дифференц. уравн. — 2002. — 38, № 5. — С. 622–630.
22. Ремизов А. О. О неправильных особых точках коранга 1 систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных// Дифференц. уравн. — 2002. — 38, № 8. — С. 1053–1062.
23. Ремизов А. О. Неявные дифференциальные уравнения и векторные поля с неизолрованными особыми точками// Мат. сб. — 2002. — 193, № 11. — С. 105–124.
24. Рудаков В. П. О существовании и единственности решений систем дифференциальных уравнений первого порядка// Изв. вузов. Сер. мат. — 1971. — 9. — С. 79–84.
25. Чечик В. А. О системах дифференциальных уравнений с особенностями// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1959. — 8. — С. 155–198.
26. Anichini G, Conti G. Boundary-value problems for implicit ODE's in a singular case// Diff. Equations Dynam. Systems. — 1999. — 7, № 4. — С. 437–459.
27. Conti R. Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, dx/dt) = 0$ // Ann. Mat. Pura Appl. — 1959. — № 48. — С. 97–102.
28. Frigon M., Kaczynski Z. Boundary value problems for systems of implicit differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 1993. — 179, № 2. — С. 317–326.
29. Kowalski Z. The polygonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y')$ // Ann. Polon. Math. — 1963. — 13, № 2. — С. 173–204.
30. Kowalski Z. A difference method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y')$ // Ann. Polon. Math. — 1965. — 15, № 2. — С. 121–148.

А. Е. Зернов, Ю. В. Кузина

Южноукраинский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского, Одесса

E-mail: itim@inbox.ru

О СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

© 2005 г. **А. Е. ЗЕРНОВ, О. Р. ЧАЙЧУК, О. Р. ЧАЙЧУК**

Аннотация. Рассматривается сингулярная задача Коши вида

$$t^r x'(t) = F(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad x(0) = 0$$

для различных частных случаев уравнения: линейного, возмущенного линейного и нелинейного. Предлагается единая схема исследования всех этих уравнений. Доказывается существование непустого множества непрерывно дифференцируемых решений с требуемыми асимптотическими свойствами в (малой) правой полукрестности особой точки $t = 0$. Используются методы качественной теории дифференциальных уравнений.

Регулярные задачи для функционально-дифференциальных уравнений изучены достаточно подробно [1–4]. Вместе с тем сингулярные задачи для функционально-дифференциальных уравнений исследованы сравнительно мало [1, 3, 5, 10–12]; в основном рассматривались вопросы о разрешимости в различных функциональных пространствах и о числе решений. Однако асимптотическое поведение решений таких задач в окрестности особой точки практически не изучено даже в самых простых случаях [3, 9]. В этой статье рассматривается сингулярная задача Коши вида

$$t^r x'(t) = F(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad x(0) = 0, \quad (0.1)$$

где $t \in (0, \tau)$ — действительная переменная, $x : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ — неизвестная функция, $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\mathcal{D} \subset (0, \tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $g : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ и $h : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывные функции, $g(t) \leq t$, $h(t) \leq t$, $t \in (0, \tau)$, $r > 1$.

Под решением задачи (0.1) понимается непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ (ρ — постоянная, $\rho \in (0, \tau)$) со свойствами:

- 1) $(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))) \in \mathcal{D}$ при всех $t \in (0, \rho]$;
- 2) x тождественно удовлетворяет уравнению (0.1) при всех $t \in (0, \rho]$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = 0$.

Последовательно рассматриваются частные случаи уравнения (0.1): линейное, возмущенное линейное и нелинейное уравнения. Предлагается единая схема исследования всех этих уравнений. Доказывается существование непустого множества непрерывно дифференцируемых решений с требуемыми асимптотическими свойствами в (малой) правой полукрестности особой точки $t = 0$. Используются методы качественной теории дифференциальных уравнений [6], а также [7–9].

1. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассматривается задача Коши

$$t^r x'(t) = a(t) + b_1(t)x(t) + b_2(t)x(g(t)) + b_3(t)(h(t))^r x'(h(t)), \quad x(0) = 0 \quad (1.1)$$

$$x(0) = 0 \quad (1.2)$$

в предположении, что выполнены следующие условия A :

- 1) $a : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$, $b_i : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ — непрерывные функции, $b_i(t) = b_{i0} + o(1)$, $t \rightarrow +0$, b_{i0} — постоянные, $i \in \{1, 2, 3\}$, $b_{10} \neq 0$, $|b_{30}| < 1/2$, $|b_{20}| < |b_{10}|(1 - 2|b_{30}|)$;
- 2) $g : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ и $h : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемые неубывающие функции, $\lim_{t \rightarrow +0} tg'(t)(g(t))^{-1} = g_0$, $\lim_{t \rightarrow +0} th'(t)(h(t))^{-1} = h_0$, $0 \leq g_0 < +\infty$, $0 \leq h_0 < +\infty$;
- 3) для любых точек $t_j \in (0, \tau)$, $j \in \{1, 2\}$, имеет место неравенство

$$|h(t_1) - h(t_2)| \leq |t_1 - t_2|; \quad (1.3)$$

- 4) для любых точек t_1, t_2 , удовлетворяющих условию $0 < t_* \leq t_j < \tau$, $j \in \{1, 2\}$, имеют место неравенства

$$|a(t_1) - a(t_2)| \leq l_0(t_*)|t_1 - t_2|, \quad |b_i(t_1) - b_i(t_2)| \leq l_0(t_*)|t_1 - t_2|, \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

где $l_0 : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывная невозрастающая функция;

- 5) существует непрерывно дифференцируемая функция $\xi : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$|t^r \xi'(t) - a(t) - b_1(t)\xi(t) - b_2(t)\xi(g(t)) - b_3(t)(h(t))^r \xi'(h(t))| \leq K t^N \beta(t), \quad t \in (0, \tau), \quad (1.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \xi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^r \xi'(t) = \xi_*, \quad |\xi_*| < +\infty, \quad (1.5)$$

где N — натуральное число, K — постоянная, $\beta : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая неубывающая функция, $\lim_{t \rightarrow +0} \beta(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +0} t\beta'(t)(\beta(t))^{-1} = \beta_0$, $0 \leq \beta_0 < +\infty$.

Отметим, что нетрудно сформулировать эффективные достаточные условия существования функции $\xi : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ указанного вида. Вот эти условия:

1)

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{k=1}^N a_k t^k + a^*(t), & b_i(t) &= \sum_{k=0}^N b_{ik} t^k + b_i^*(t), & i \in \{1, 2, 3\}, \\ g(t) &= \sum_{k=1}^N g_k t^k + g^*(t), & h(t) &= \sum_{k=1}^N h_k t^k + h^*(t), & t \in (0, \tau), \end{aligned}$$

где все a_k, b_{ik}, g_k, h_k — постоянные, $a^*(t) = O(t^N \beta(t))$, $b_i^*(t) = o(t^N)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $g^*(t) = o(t^N)$, $h^*(t) = o(t^N)$, $t \rightarrow +0$;

2) $t = O(\beta(t))$, $t \rightarrow +0$;

3) $b_{10} + b_{20}g_1^k \neq 0$, $k \in \{1, \dots, N\}$.

Действительно, при выполнении указанных условий положим

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N c_k t^k, \quad (1.6)$$

где $c_1, \dots, c_N$ — постоянные коэффициенты. Будем искать эти коэффициенты так, чтобы выполнялось условие

$$t^r \xi'(t) - a(t) - b_1(t)\xi(t) - b_2(t)\xi(g(t)) - b_3(t)(h(t))^r \xi'(h(t)) = O(t^N \beta(t)), \quad t \rightarrow +0. \quad (1.7)$$

Если подставить функцию (1.6) в левую часть равенства (1.7) и потребовать, чтобы в полученной сумме были равны нулю все коэффициенты при t^k , $k \in \{1, \dots, N\}$, то получим систему равенств

$$\begin{aligned} a_1 + b_{10}c_1 + b_{20}c_1g_1 &= 0, \\ b_{10}c_k + b_{20}c_kg_1^k + \Psi_k(c_1, \dots, c_{k-1}) &= 0, \quad k \in \{2, \dots, N\}, \end{aligned}$$

где Ψ_k , $k \in \{2, \dots, N\}$ — известные многочлены. Отсюда последовательно (и единственным образом) определяются все коэффициенты c_k , $k \in \{1, \dots, N\}$. Очевидно, для найденной функции (1.6) выполнены условия (1.4), (1.5), если только K достаточно велико и если взять $\xi_* = 0$.

Обозначим через $\mathcal{U}_1(\rho, M)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$|u(t) - \xi(t)| \leq M t^N \beta(t), \quad |u'(t) - \xi'(t)| \leq Q M t^{N-r} \beta(t), \quad t \in (0, \rho];$$

здесь ρ, M — положительные постоянные, $\rho < \tau$, а постоянная Q определяется следующим образом:

$$Q = \begin{cases} (|b_{10}| - |b_{20}|)|b_{30}|^{-1}, & \text{если } b_{30} \neq 0; \\ 2|b_{10}| + 1, & \text{если } b_{30} = 0. \end{cases}$$

(Отметим, что из условий A не следует ограниченность $\xi'(t)$ и $t^{N-r}\beta(t)$ при $t \rightarrow +0$.)

Теорема 1. Пусть выполнены условия А. Тогда существуют ρ, M такие, что:

- 1) если $b_{10} > 0$, то у задачи (1.1), (1.2) имеется бесконечное множество решений $x : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, каждое из которых принадлежит множеству $\mathcal{U}_1(\rho, M)$. При любом выборе постоянной α , удовлетворяющей неравенству $|\alpha - \xi(\rho)| < M\rho^N\beta(\rho)$, найдется решение $x_\alpha \in \mathcal{U}_1(\rho, M)$ такое, что $x_\alpha(\rho) = \alpha$;
- 2) если $b_{10} < 0$, то у задачи (1.1), (1.2) имеется непустое множество решений $x : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, каждое из которых принадлежит множеству $\mathcal{U}_1(\rho, M)$.

Доказательство. Выберем постоянные M, q так, чтобы выполнялись условия:

$$2|b_{10}| < q < \frac{|b_{10}| - |b_{20}|}{|b_{30}|}, \quad \text{если } b_{30} \neq 0; \quad q > 2|b_{10}|, \quad \text{если } b_{30} = 0;$$

$$M > K(|b_{10}| - |b_{20}| - q|b_{30}|)^{-1}.$$

Неравенства, определяющие выбор ρ , здесь не приведены ввиду ограниченности объема этой работы; отметим лишь, что ρ достаточно мало.

Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t \in [0, \rho]} (|x(t)| + |x'(t)|). \quad (1.8)$$

Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям

$$|u(t) - \xi(t)t^r| \leq Mt^{N+r}\beta(t), \quad |u'(t) - (\xi(t)t^r)'| \leq qMt^N\beta(t), \quad t \in (0, \rho], \quad (1.9)$$

причем $u(0) = 0$, $u'(0) = \xi_*$ и, кроме того,

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_i \in [0, \rho], \quad i \in \{1, 2\} : \quad |t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |u'(t_1) - u'(t_2)| \leq \varepsilon, \quad (1.10)$$

где $\delta(\varepsilon) = (1 - |b_{30}|)\varepsilon(4B(t_\varepsilon))^{-1}$; здесь $B(t_\varepsilon) = 2l_0(t_\varepsilon) + (g(t_\varepsilon))^{-r} + (h(t_\varepsilon))^{-1}$, причем постоянная $t_\varepsilon \in (0, \rho)$ выбрана так, чтобы при $t \in (0, t_\varepsilon]$ одновременно выполнялись неравенства

$$|(\xi(t)t^r)' - \xi_*| \leq (1 - |b_{30}|)\varepsilon/33, \quad Mt^{N+r}\beta(t) \leq (1 - |b_{30}|)\varepsilon/33.$$

Множество $\mathcal{U}$ замкнуто, ограничено, выпукло и (в соответствии с критерием Арцела) компактно. Полагая $x = yt^{-r}$, где $y : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ — новая неизвестная функция, получим задачу Коши

$$t^r y'(t) = a(t)t^r + b_1(t)y(t) + rt^{r-1}y(t) + b_2(t)t^r(g(t))^{-r}y(g(t)) + b_3(t)t^r y'(h(t)) - \\ - rb_3(t)t^r(h(t))^{-1}y(h(t)), \quad y(0) = 0.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'(t) = a(t) + b_1(t)t^{-r}y(t) + rt^{-1}y(t) + b_2(t)(g(t))^{-r}u(g(t)) + b_3(t)u'(h(t)) - rb_3(t)(h(t))^{-1}u(h(t)), \quad (1.11)$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Пусть

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ (t, y) : t \in (0, \rho], \quad y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Если $(t, y) \in \mathcal{D}_0$, то для уравнения (1.11) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Далее проводим рассуждения по схеме, предложенной ранее [7–9] одним из авторов; для удобства ссылок здесь сохраняются терминология и обозначения работ [7–9]. Обозначим

$$\Phi_1 = \left\{ (t, y) : t \in (0, \rho], \quad |y - \xi(t)t^r| = Mt^{N+r}\beta(t) \right\},$$

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ (t, y) : t \in (0, \rho], \quad |y - \xi(t)t^r| < Mt^{N+r}\beta(t) \right\},$$

$$H = \left\{ (t, y) : t = \rho, \quad |y - \xi(\rho)\rho^r| < M\rho^{N+r}\beta(\rho) \right\}.$$

Пусть функция $A_1 : \mathcal{D}_0 \rightarrow [0, +\infty)$ определяется равенством $A_1(t, y) = (y - \xi(t)t^r)^2(t^{N+r}\beta(t))^{-2}$. Нетрудно убедиться в том, что производная этой функции в силу уравнения (1.11) при $(t, y) \in \Phi_1$ имеет тот же знак, что и постоянная b_{10} . Поэтому если $b_{10} > 0$, то каждая из интегральных кривых

уравнения (1.11), пересекающих H , определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0, \rho]$. Выберем и зафиксируем любую точку $G(\rho, \alpha) \in H$ и обозначим через $J_u : (t, y_u(t))$ интегральную кривую уравнения (1.11), проходящую через точку G . Легко видеть, что если положить по определению $y_u(0) = 0$, $y'_u(0) = \xi_*$, то $y_u \in \mathcal{U}$. Определим оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ равенством $Tu = y_u$. Если же $b_{10} < 0$, то среди интегральных кривых уравнения (1.11), пересекающих H , найдется хотя бы одна, которая определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0, \rho]$; обозначим эту интегральную кривую через $J_u : (t, y_u(t))$. Затем доказывается, что у уравнения (1.11) имеется единственная интегральная кривая такого вида. С этой целью рассматриваются однопараметрические семейства множеств

$$\begin{aligned}\Phi_2(\nu) &= \left\{ (t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| = \nu t^{N+r} \beta(t) (-\ln t) \right\}, \\ \mathcal{D}_2(\nu) &= \left\{ (t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| < \nu t^{N+r} \beta(t) (-\ln t) \right\},\end{aligned}$$

где ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$, функция $A_2 : \mathcal{D}_0 \rightarrow [0, +\infty)$ определена равенством

$$A_2(t, y) = (y - y_u(t))^2 (t^{N+r} \beta(t) (-\ln t))^{-2},$$

и доказывается, что производная этой функции в силу уравнения (1.11) отрицательна при $(t, y) \in \Phi_2(\nu)$ для каждого $\nu \in (0, 1]$. При этом если (t, y) — любая точка множества $\overline{\mathcal{D}_1} \setminus \{(0, 0)\}$, то для любого фиксированного $\nu \in (0, 1]$

$$|y - y_u(t)| \leq |y - \xi(t)t^r| + |y_u(t) - \xi(t)t^r| \leq 2Mt^{N+r} \beta(t) < \nu t^{N+r} \beta(t) (-\ln t),$$

если только $t \in (0, t(\nu)]$, где постоянная $t(\nu)$ достаточно мала, $t(\nu) \in (0, \rho)$. Если положить по определению $y_u(0) = 0$, $y'_u(0) = \xi_*$, то легко видеть, что $y_u \in \mathcal{U}$. Определим оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ равенством $Tu = y_u$.

Затем доказывается непрерывность оператора $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. Пусть $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$ — произвольные фиксированные функции, $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = d$, $d > 0$. Обозначим $Tu_i = y_i$, $i \in \{1, 2\}$. Будем исследовать поведение интегральных кривых дифференциального уравнения (1.11), в котором $u = u_1$ (обозначим полученное дифференциальное уравнение через (1.11_{*})). Пусть

$$\begin{aligned}\Phi_3 &= \left\{ (t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_2(t)| = \mu d^\nu (t^{N+r} \beta(t))^{1-\nu} \right\}, \\ \mathcal{D}_3 &= \left\{ (t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_2(t)| < \mu d^\nu (t^{N+r} \beta(t))^{1-\nu} \right\},\end{aligned}$$

где μ, ν — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$0 < \nu < \frac{N}{N+r}, \quad \mu > 3|b_{10}|^{-1} (|b_{20}|(2M)^{1-\nu} + 1).$$

Пусть функция $A_3 : \mathcal{D}_0 \rightarrow [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_3(t, y) = (y - y_2(t))^2 (t^{N+r} \beta(t))^{-2(1-\nu)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при $(t, y) \in \Phi_3$ производная этой функции в силу уравнения (1.11_{*}) имеет тот же знак, что и постоянная b_{10} . Если $b_{10} > 0$, то используем равенства $y_1(\rho) = y_2(\rho) = \alpha$, в соответствии с которыми интегральная кривая $J_1 : (t, y_1(t))$ уравнения (1.11_{*}) лежит в $\mathcal{D}_3$ при $t = \rho$. Если t уменьшается от $t = \rho$ до $t = 0$, то эта интегральная кривая остается в $\mathcal{D}_3$. Если же $b_{10} < 0$, то, поскольку

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_1(t) - \xi(t)t^r| + |y_2(t) - \xi(t)t^r| \leq 2Mt^{N+r} \beta(t) < \mu d^\nu (t^{N+r} \beta(t))^{1-\nu}$$

при $t \in (0, t(d)]$, где постоянная $t(d)$ достаточно мала, $t(d) \in (0, \rho)$, интегральная кривая $J_1 : (t, y_1(t))$ уравнения (1.11_{*}) лежит в $\mathcal{D}_3$ при $t \in (0, t(d)]$. Если t возрастает от $t = t(d)$ до $t = \rho$, то эта интегральная кривая остается в $\mathcal{D}_3$. Итак, в обоих случаях

$$|y_1(t) - y_2(t)| < \mu d^\nu (t^{N+r} \beta(t))^{1-\nu}, \quad t \in (0, \rho],$$

откуда следует, что

$$|y_1(t) - y_2(t)| + |y'_1(t) - y'_2(t)| \leq d^\nu, \quad t \in (0, \rho].$$

Пусть $\varepsilon > 0$ дано. Положим $\delta(\varepsilon) = (\varepsilon/2)^{1/\nu}$. Если $\|u_1 - u_2\|_B = d < \delta(\varepsilon)$, то

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_B = \|y_1 - y_2\|_B \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Эти рассуждения не зависят ни от выбора функций $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$, ни от выбора $\varepsilon > 0$. Непрерывность оператора $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ доказана.

Доказательство теоремы 1 завершается применением теоремы Шаудера о неподвижной точке. $\square$

2. ВОЗМУЩЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассматривается задача Коши

$$t^r x'(t) = a(t) + b_1 x(t) + b_2 x(g(t)) + b_3 (h(t))^r x'(h(t)) + \varphi(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad (2.1)$$

$$x(0) = 0 \quad (2.2)$$

в предположении, что выполнены следующие условия B:

- 1) $a : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, b_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ — постоянные, $b_1 \neq 0$, $|b_3| < 1/2$, $|b_2| < |b_1|(1 - 2|b_3|)$, $\lim_{t \rightarrow +0} a(t) = 0$;
- 2) $g : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ и $h : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемые неубывающие функции, $\lim_{t \rightarrow +0} tg'(t)(g(t))^{-1} = g_0$, $\lim_{t \rightarrow +0} th'(t)(h(t))^{-1} = h_0$, $0 \leq g_0 < +\infty$, $0 \leq h_0 < +\infty$;
- 3) для любых точек $t_j \in (0, \tau)$, $j \in \{1, 2\}$ выполнено неравенство (1.3);
- 4) для любых точек t_1, t_2 , удовлетворяющих условию $0 < t_* \leq t_j < \tau$, $j \in \{1, 2\}$, имеем

$$|a(t_1) - a(t_2)| \leq l_a(t_*)|t_1 - t_2|,$$

где $l_a : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывная невозрастающая функция;

- 5) существует непрерывно дифференцируемая функция $\xi : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (1.5) и условию

$$t^r \xi'(t) = a(t) + b_1 \xi(t) + b_2 \xi(g(t)) + b_3 (h(t))^r \xi'(h(t)), \quad t \in (0, \tau);$$

- 6) $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция,

$$\mathcal{D} = \left\{ (t, y_1, y_2, y_3, y_4) : t \in (0, \tau), |y_1 - \xi(t)| < \mu_1(t), \right.$$

$$\left. |y_2 - \xi(g(t))| < \mu_2(t), |y_3 - \xi'(t)| < \mu_3(t), |y_4 - \xi'(h(t))| < \mu_4(t) \right\},$$

где $\mu_i : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывные функции, $\lim_{t \rightarrow +0} \mu_i(t) = 0$, $i \in \{1, 2\}$,

$$|\varphi(t, \xi(t), \xi(g(t)), \xi'(t), \xi'(h(t)))| \leq \beta(t), \quad t \in (0, \tau),$$

где $\beta : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая неубывающая функция,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \beta(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} t\beta'(t)(\beta(t))^{-1} = \beta_0, \quad 0 \leq \beta_0 < +\infty;$$

- 7) для любых точек $(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathcal{D}$, $(s, y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющих условию $0 < t_* \leq t$, $0 < t_* \leq s$, выполняется неравенство

$$|\varphi(t, y_1, y_2, y_3, y_4) - \varphi(s, y_1, y_2, y_3, y_4)| \leq l_0(t_*)|t - s|,$$

где $l_0 : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывная невозрастающая функция;

- 8) для любых точек $(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathcal{D}$, $(t, z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство

$$|\varphi(t, y_1, y_2, y_3, y_4) - \varphi(t, z_1, z_2, z_3, z_4)| \leq l(t)(|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| + t^r |y_3 - z_3| + (h(t))^r |y_4 - z_4|),$$

где $l : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim_{t \rightarrow +0} l(t) = 0$.

Обозначим через $\mathcal{U}_2(\rho, M)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$|u(t) - \xi(t)| \leq M\beta(t), \quad |u'(t) - \xi'(t)| \leq QMt^{-r}\beta(t), \quad t \in (0, \rho];$$

здесь ρ, M — положительные постоянные, $\rho < \tau$, а постоянная Q определяется следующим образом:

$$Q = \begin{cases} (|b_1| - |b_2|)|b_3|^{-1}, & \text{если } b_3 \neq 0; \\ 2|b_1| + 1, & \text{если } b_3 = 0. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия В. Тогда существуют ρ, M такие, что:

- 1) если $b_1 > 0$, то у задачи (2.1), (2.2) имеется бесконечное множество решений $x : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, каждое из которых принадлежит множеству $\mathcal{U}_2(\rho, M)$. При любом выборе постоянной α , удовлетворяющей неравенству $|\alpha - \xi(\rho)| < M\beta(\rho)$, найдется решение $x_\alpha \in \mathcal{U}_2(\rho, M)$ такое, что $x_\alpha(\rho) = \alpha$;
- 2) если $b_1 < 0$, то у задачи (2.1), (2.2) имеется непустое множество решений $x : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, каждое из которых принадлежит множеству $\mathcal{U}_2(\rho, M)$.

Доказательство. Выберем постоянные M, q так, чтобы выполнялись условия:

$$2|b_1| < q < (|b_1| - |b_2|)|b_3|^{-1}, \quad \text{если } b_3 \neq 0; \quad q > 2|b_1|, \quad \text{если } b_3 = 0;$$

$$M > (|b_1| - |b_2| - q|b_3|)^{-1}.$$

Неравенства, определяющие выбор ρ , здесь не приведены ввиду ограниченности объема этой работы; отметим лишь, что ρ достаточно мало. Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой (1.8). Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям

$$|u(t) - \xi(t)t^r| \leq Mt^r\beta(t), \quad |u'(t) - (\xi(t)t^r)'| \leq qM\beta(t), \quad t \in (0, \rho],$$

причем $u(0) = 0, u'(0) = \xi_*$ и, кроме того, выполнено условие (1.10), где $\delta(\varepsilon) = (1 - |b_3|)\varepsilon(6B(t_\varepsilon))^{-1}$; здесь

$$B(t_\varepsilon) = l_a(t_\varepsilon) + l_0(t_\varepsilon) + (g(t_\varepsilon))^{-r} + t_\varepsilon^{-1}(h(t_\varepsilon))^{-2},$$

причем постоянная $t_\varepsilon \in (0, \rho)$ выбрана так, чтобы при $t \in (0, t_\varepsilon]$ одновременно выполнялись неравенства

$$|(\xi(t)t^r)' - \xi_*| \leq (1 - |b_3|)\frac{\varepsilon}{12}, \quad qM\beta(t) \leq (1 - |b_3|)\frac{\varepsilon}{12}.$$

Все дальнейшие рассуждения полностью аналогичны тем, которые были проведены при доказательстве теоремы 1. Полагаем $x = yt^{-r}$, где $y : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ — новая неизвестная функция, и затем рассматриваем дифференциальное уравнение

$$y'(t) = a(t) + b_1t^{-r}y(t) + rt^{-1}y(t) + b_2(g(t))^{-r}u(g(t)) + b_3u'(h(t)) - rb_3(h(t))^{-1}u(h(t)) + \\ + \varphi(t, t^{-r}u(t), (g(t))^{-r}u(g(t)), t^{-r}u'(t) - rt^{-r-1}u(t), (h(t))^{-r}u'(h(t)) - r(h(t))^{-r-1}u(h(t))),$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Здесь следует взять

$$\Phi_1 = \left\{ (t, y) : t \in (0, \rho], |y - t^r\xi(t)| = Mt^r\beta(t) \right\}, \quad A_1(t, y) = (y - t^r\xi(t))^2(t^r\beta(t))^{-2},$$

затем

$$\Phi_2(\nu) = \left\{ (t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| = \nu t^r\beta(t)(-\ln t) \right\},$$

где ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$, $A_2(t, y) = (y - y_u(t))^2(t^r\beta(t)(-\ln t))^{-2}$, и, наконец,

$$\Phi_3 = \left\{ (t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_2(t)| = \gamma d^\nu t^r\beta(t)((g(t))^r\beta(t))^{-\nu} \right\},$$

где $d = \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}$, $d > 0$, $y_2 = Tu_2$, γ, ν — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$0 < \nu < \frac{r-1}{r}, \quad \gamma > 3|b_1|^{-1}(|b_2| + 1)(2M)^{1-\nu},$$

$$A_3(t, y) = (y - y_2(t))^2(t^r\beta(t)((g(t))^r\beta(t))^{-\nu})^{-2}.$$

Теорема доказана. $\square$

3. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассматривается задача Коши

$$t^r x'(t) = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad (3.1)$$

$$x(0) = 0 \quad (3.2)$$

в предположении, что выполнены следующие условия C :

- 1) $g : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$, $h : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемые неубывающие функции, $\lim_{t \rightarrow +0} tg'(t)(g(t))^{-1} = g_0$, $\lim_{t \rightarrow +0} th'(t)(h(t))^{-1} = h_0$, $0 \leq g_0 < +\infty$, $0 \leq h_0 < +\infty$ и для любых точек $t_j \in (0, \tau)$, $j \in \{1, 2\}$ выполнено условие (1.3);

- 2) $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция,

$$\mathcal{D} = \left\{ (t, y_1, y_2, y_3, y_4) : t \in (0, \tau), |y_1| < \mu(t), |y_2| < \mu(g(t)), |y_3| < \mu(t)t^{-1}, |y_4| < \mu(h(t))(h(t))^{-1} \right\};$$

здесь $\mu : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim_{t \rightarrow +0} \mu(t) = 0$;

- 3) имеет место неравенство

$$|f(t, 0, 0, 0, 0)| \leq \alpha(t)t^{r-1}, \quad t \in (0, \tau),$$

где $\alpha : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая неубывающая функция, $\lim_{t \rightarrow +0} \alpha(t)(\mu(t))^{-1} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +0} t\alpha'(t)(\alpha(t))^{-1} = \alpha_0$, $0 \leq \alpha_0 < +\infty$;

- 4) для любых точек $(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathcal{D}$, $(s, y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющих условию $0 < t_* \leq t$, $0 < t_* \leq s$, имеет место неравенство

$$|f(t, y_1, y_2, y_3, y_4) - f(s, y_1, y_2, y_3, y_4)| \leq l_0(t_*)|t - s|,$$

где $l_0 : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ — непрерывная невозрастающая функция;

- 5) для любых точек $(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathcal{D}$, $(t, z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{D}$ имеет место неравенство

$$|f(t, y_1, y_2, y_3, y_4) - f(t, z_1, z_2, z_3, z_4)| \leq l_1 t^{r-1} |y_1 - z_1| + \\ + l_2 t^{r-1} \alpha(t)(\alpha(g(t)))^{-1} |y_2 - z_2| + l_3 t^r |y_3 - z_3| + l_4 (h(t))^r |y_4 - z_4|,$$

где все l_i — постоянные, $l_3 + l_4 < 1$;

- 6) $l_1 + l_2 + (2r + \alpha_0)(l_3 + l_4) < \alpha_0$.

Пусть $\mathcal{U}_3(\rho, M)$ — множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$|u(t)| \leq M\alpha(t), \quad |u'(t)| \leq QM\alpha(t)/t, \quad t \in (0, \rho];$$

здесь ρ , M — положительные постоянные, $\rho < \tau$, а постоянная Q определяется следующим образом:

$$Q = \begin{cases} (\alpha_0 - l_1 - l_2)(l_3 + l_4)^{-1}, & \text{если } l_3 + l_4 \neq 0, \\ \alpha_0 + 2r + 1, & \text{если } l_3 + l_4 = 0. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия C . Тогда существуют ρ , M такие, что у задачи (3.1), (3.2) имеется непустое множество решений $x : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, каждое из которых принадлежит множеству $\mathcal{U}_3(\rho, M)$.

Доказательство. Выберем постоянные M , q так, чтобы выполнялись условия:

$$r + \alpha_0 < q < (\alpha_0 - l_1 - l_2)(l_3 + l_4)^{-1} - r, \quad \text{если } l_3 + l_4 \neq 0;$$

$$q > r + \alpha_0, \quad \text{если } l_3 + l_4 = 0;$$

$$M > (\alpha_0 - l_1 - l_2 - (l_3 + l_4)(r + q))^{-1}.$$

Неравенства, определяющие выбор ρ , здесь не приводим ввиду ограниченности объема этой работы; отметим лишь, что ρ достаточно мало. Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой (1.8). Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям

$$|u(t)| \leq Mt^r \alpha(t), \quad |u'(t)| \leq qMt^{r-1} \alpha(t), \quad t \in (0, \rho],$$

причем $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ и, кроме того, выполнено условие (1.10), где

$$\delta(\varepsilon) = (1 - l_3 - l_4)\varepsilon(2B(t_\varepsilon))^{-1};$$

здесь

$$B(t_\varepsilon) = l_0(t_\varepsilon) + (g(t_\varepsilon)\alpha(g(t_\varepsilon)))^{-1} + (h(t_\varepsilon))^{-1},$$

причем постоянная $t_\varepsilon \in (0, \rho)$ выбрана так, чтобы выполнялось условие

$$qMt^{r-1}\alpha(t) \leq (1 - l_3 - l_4)\frac{\varepsilon}{8}, \quad t \in (0, t_\varepsilon].$$

Все дальнейшие рассуждения полностью аналогичны тем, которые были проведены при доказательстве теоремы 1. Полагаем $x = yt^{-r}$, где $y : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ — новая неизвестная функция, и затем рассматриваем дифференциальное уравнение

$$y'(t) = rt^{-1}y(t) + f\left(t, t^{-r}u(t), (g(t))^{-r}u(g(t)), t^{-r}u'(t) - rt^{-r-1}u(t), (h(t))^{-r}u'(h(t)) - r(h(t))^{-r-1}u(h(t))\right), \quad (3.3)$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Пусть $\mathcal{D}_0 = \{(t, y) : t \in (0, \rho], y \in \mathbb{R}\}$. Если $(t, y) \in \mathcal{D}_0$, то для уравнения (3.3) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Пусть

$$\Phi_1 = \{(t, y) : t \in (0, \rho], |y| = Mt^r \alpha(t)\}, \quad \mathcal{D}_1 = \{(t, y) : t \in (0, \rho], |y| < Mt^r \alpha(t)\}.$$

Определим функцию $A_1 : \mathcal{D}_0 \rightarrow [0, +\infty)$ равенством $A_1(t, y) = y^2(t^r \alpha(t))^{-2}$ и докажем, что ее производная в силу уравнения (3.3) отрицательна при $(t, y) \in \Phi_1$. Поэтому существует по крайней мере одна интегральная кривая $J_u : (t, y_u(t))$ уравнения (3.3), которая определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0, \rho]$. Для доказательства единственности такой кривой рассматриваются однопараметрические семейства множеств

$$\begin{aligned} \Phi_2(\nu) &= \{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| = \nu t^r \alpha(t)(-\ln t)\}, \\ \mathcal{D}_2(\nu) &= \{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| < \nu t^r \alpha(t)(-\ln t)\}, \end{aligned}$$

где ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$ и доказывается, что производная в силу уравнения (3.3) функции $A_2 : \mathcal{D}_0 \rightarrow [0, +\infty)$, заданной равенством $A_2(t, y) = (y - y_u(t))^2(t^r \alpha(t)(-\ln t))^{-2}$, отрицательна при $(t, y) \in \Phi_2(\nu)$ для каждого $\nu \in (0, 1]$. Затем полагаем по определению $y_u(0) = 0$, $y'_u(0) = 0$ и доказываем, что $y_u \in \mathcal{U}$. Определяем оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ равенством $Tu = y_u$ и доказываем, что этот оператор непрерывен. При этом рассматриваем

$$\Phi_3 = \{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_2(t)| = d^\nu t^r \alpha(t)((g(t))^r \alpha(g(t))h(t))^{-\nu}\},$$

где $d = \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}$, $d > 0$, $y_2 = Tu_2$, ν — постоянная, определяемая следующим образом: если $g_0 = h_0 = 0$, то $0 < \nu < 1$; если $g_0 \neq 0$ или $h_0 \neq 0$, то $0 < \nu < \min\{\alpha_0(rg_0 + g_0\alpha_0 + h_0)^{-1}, 1\}$, а также функцию $A_3 : \mathcal{D}_0 \rightarrow [0, +\infty)$, определенную равенством

$$A_3(t, y) = (y - y_2(t))^2(t^r \alpha(t)((g(t))^r \alpha(g(t))h(t))^{-\nu})^{-2}.$$

Доказывается, что производная функции $A_3 : \mathcal{D}_0 \rightarrow [0, +\infty)$ в силу дифференциального уравнения (3.3), в котором $u = u_1$, отрицательна при $(t, y) \in \Phi_3$.

Доказательство теоремы 3 завершается применением теоремы Шаудера о неподвижной точке. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В.* Современное состояние и тенденции развития теории функционально-дифференциальных уравнений// Изв. вузов. Сер. мат. — 1999. — 6. — С. 8–19.
2. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
3. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
4. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С., Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* Теория уравнений нейтрального типа// Итоги науки и техн. Мат. анал. — М.: ВИНТИ, 1981. — 19. — С. 55–126.
5. *Бравый Е. И.* О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения// Изв. вузов. Сер. мат. — 1993. — 5. — С. 17–23.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
7. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши// Дифференц. уравн. — 1992. — 28. — 5. — С. 756–760.
8. *Зернов А. Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши// Укр. мат. ж. — 2001. — 53. — 3. — С. 302–310.
9. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотике решений некоторого функционально-дифференциального уравнения с сингулярностью// Укр. мат. ж. — 2001. — 53. — 4. — С. 455–465.
10. *Шиндяпин А. И.* О краевой задаче для одного сингулярного уравнения// Дифференц. уравн. — 1984. — 20, № 3. — С. 450–455.
11. *Grimm L. J.* Analytic solutions of a neutral differential equation near a singular point// Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — 36, № 1. — С. 187–190.
12. *Grimm L. J., Hall L. M.* Holomorphic solutions of singular functional differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 1975. — 50, № 3. — С. 627–638.

А. Е. Зернов, О. Р. Чайчук, О. Р. Чайчук

Южноукраинский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского, Одесса

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО РОДА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

© 2005 г. **А. С. КАЛИТВИН**

Аннотация. Рассматриваются вопросы фредгольмовости интегральных уравнений третьего рода с частными интегралами.

Линейное интегральное уравнение

$$Cx = (L + M + N)x + f, \quad (1)$$

где операторы C, L, M, N определяются равенствами

$$\begin{aligned} (Cx)(t, s) &= c(t, s)x(t, s), & (Nx)(t, s) &= \iint_D n(t, s, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma, \\ (Lx)(t, s) &= \int_a^b l(t, s, \tau)x(\tau, s)d\tau, & (Mx)(t, s) &= \int_c^d m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma, \end{aligned}$$

в которых $D = [a, b] \times [c, d]$, $t, \tau \in [a, b]$, $s, \sigma \in [c, d]$, l, m, n — заданные измеримые функции, будем называть уравнением третьего рода с частными интегралами. Частными случаями уравнения (1) являются уравнения первого и второго рода, получающиеся из (1) при $c(t, s) \equiv 0$ и $c(t, s) \equiv 1$ соответственно. Условия разрешимости и свойства решений уравнения (1) зависят от пространств, в которых рассматривается это уравнение, и от свойств оператора $K = L + M + N$ в этих пространствах. Свойства оператора K и разрешимость интегральных уравнений второго рода с частными интегралами в различных функциональных пространствах изучались в [2–4, 7]; здесь же приведена и библиография работ по теории операторов и уравнений с частными интегралами. Приложения уравнений с частными интегралами к задачам механики сплошных сред, теории упругости, плоскопараллельной теории переноса, интегро-дифференциальных уравнений Барбашина и к другим задачам рассматривались в [2, 4, 6, 7].

Уравнения первого и третьего рода с частными интегралами почти не изучались. Поэтому представляют интерес условия, при которых уравнение (1) является фредгольмовым и фредгольмовым с индексом нуль. Здесь под фредгольмовым уравнением $Ax = f$ в некотором комплексном банаховом пространстве понимается уравнение с линейным ограниченным оператором A , у которого замкнуто множество значений, конечны размерности ядра $n(A)$ и коядра $d(A)$, а $\text{ind } A = n(A) - d(A)$.

В [2, 7] приведены примеры фредгольмовых, но не фредгольмовых с индексом нуль, а также примеры не фредгольмовых уравнений с частными интегралами. Данное обстоятельство связано с тем, что уравнение (1) содержит частные интегралы, т.е. интегралы, в которых неизвестная функция интегрируется по части переменных. Поэтому операторы L, M, K не являются компактными даже если их ненулевые ядра обладают достаточно хорошими свойствами. Например, эти операторы не компактны в пространстве $C(D)$ непрерывных на D функций, если $l(t, s, \tau) \not\equiv 0$, $m(t, s, \sigma) \not\equiv 0$ и $n(t, s, \tau, \sigma)$ — непрерывные ядра.

Будем рассматривать уравнение (1) в $C(D)$. Напомним [2, 4, 7], что измеримые функции l, m и n называются непрерывными в целом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|t - t'| < \delta$, $|s - s'| < \delta$ выполняются неравенства

$$\int_a^b |l(t, s, \tau) - l(t', s', \tau)|d\tau < \varepsilon, \quad \int_c^d |m(t, s, \sigma) - m(t', s', \sigma)|d\sigma < \varepsilon,$$

$$\iint_D |n(t, s, \tau, \sigma) - n(t', s', \tau, \sigma)| d\tau d\sigma < \varepsilon,$$

и интегрально ограниченными, если найдется такое число B , что выполняются неравенства

$$\int_a^b |l(t, s, \tau)| d\tau \leq B, \quad \int_c^d |m(t, s, \sigma)| d\sigma \leq B, \quad \iint_D |n(t, s, \tau, \sigma)| d\tau d\sigma \leq B.$$

Теорема. Пусть функция c непрерывна, функции l , m и n непрерывны в целом и интегрально ограничены, а $f \in C(D)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Если $c(t, s) \neq 0$, то в $C(D)$ фредгольмовость индекса нуль (фредгольмовость) уравнения (1) равносильна обратимости (фредгольмовости) уравнений

$$x(t, s) = \int_a^b \frac{l(t, s, \tau)}{c(t, s)} x(\tau, s) d\tau + g(t, s), \quad (2)$$

$$x(t, s) = \int_c^d \frac{m(t, s, \sigma)}{c(t, s)} x(t, \sigma) d\sigma + g(t, s), \quad g \in C(D). \quad (3)$$

- 2) Если $c(t_0, s_0) = 0$, где $(t_0, s_0) \in D$, то уравнение (1) не фредгольмово в $C(D)$.

Доказательство. Если $c(t, s) \neq 0$, то в силу непрерывности функции c уравнение (1) равносильно уравнению второго рода

$$x(t, s) = \int_a^b \frac{l(t, s, \tau)}{c(t, s)} x(\tau, s) d\tau + \int_c^d \frac{m(t, s, \sigma)}{c(t, s)} x(t, \sigma) d\sigma + \iint_D \frac{n(t, s, \tau, \sigma)}{c(t, s)} x(\tau, \sigma) d\tau d\sigma + \frac{f(t, s)}{c(t, s)} \quad (4)$$

с непрерывными в целом и интегрально ограниченными функциями $l(t, s, \tau)/c(t, s)$, $m(t, s, \sigma)/c(t, s)$, $n(t, s, \tau, \sigma)/c(t, s)$.

Действительно, равносильность уравнений (1) и (4) очевидна. В силу непрерывности на D функции $c(t, s) \neq 0$ найдется такое число $c_0 > 0$, что $|c(t, s)| \geq c_0$. Отсюда и интегральной ограниченности функций l , m и n вытекают оценки

$$\int_a^b \left| \frac{l(t, s, \tau)}{c(t, s)} \right| d\tau \leq \frac{B}{c_0}, \quad \int_c^d \left| \frac{m(t, s, \sigma)}{c(t, s)} \right| d\sigma \leq \frac{B}{c_0}, \quad \iint_D \left| \frac{n(t, s, \tau, \sigma)}{c(t, s)} \right| d\tau d\sigma \leq \frac{B}{c_0},$$

которые означают интегральную ограниченность функций $l(t, s, \tau)/c(t, s)$, $m(t, s, \sigma)/c(t, s)$, $n(t, s, \tau, \sigma)/c(t, s)$. Непрерывность в целом этих функций доказывается с учетом непрерывности в целом функций l , m , n . Докажем, например, непрерывность в целом функции $l(t, s, \tau)/c(t, s)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы $|c(t, s) - c(t', s')| < \varepsilon$ и

$$\int_a^b |l(t, s, \tau) - l(t', s', \tau)| d\tau < \varepsilon.$$

Тогда при $|t - t'| < \delta$, $|s - s'| < \delta$

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \frac{l(t, s, \tau)}{c(t, s)} - \frac{l(t', s', \tau)}{c(t', s')} \right| d\tau &\leq \int_a^b \left| \frac{l(t, s, \tau)}{c(t, s)} - \frac{l(t', s', \tau)}{c(t, s)} \right| d\tau + \int_a^b |l(t', s', \tau)| \left| \frac{1}{c(t, s)} - \frac{1}{c(t', s')} \right| d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{c_0} \int_a^b |l(t, s, \tau) - l(t', s', \tau)| d\tau + \frac{|c(t, s) - c(t', s')|}{c_0^2} \int_a^b |l(t', s', \tau)| d\tau \leq \frac{\varepsilon}{c_0} + \frac{\varepsilon B}{c_0^2} = \frac{\varepsilon(c_0 + B)}{c_0^2}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает непрерывность в целом функции $l(t, s, \tau)/c(t, s)$. Непрерывность в целом функций $m(t, s, \sigma)/c(t, s)$ и $n(t, s, \tau, \sigma)/c(t, s)$ доказывается аналогично.

В [1] доказано, что фредгольмовость с индексом нуль (фредгольмовость) уравнения (4) с непрерывными в целом и интегрально ограниченными ядрами равносильна обратимости (фредгольмовости) уравнений (2) и (3). Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. Предположим, что $c(t_0, s_0) = 0$ в точке $(t_0, s_0) \in D$. Покажем, что в этом случае уравнение (1) не фредгольмово. Сначала рассмотрим случай непрерывных функций l , m и n . Для определенности будем считать, что $(t_0, s_0) = (a, b)$.

Пусть

$$a_n = a + \frac{b-a}{2^n}, \quad c_n = c + \frac{d-c}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Определим функции $x_n(t)$ и $y_n(s)$, $n = 1, 2, \dots$, равенствами

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{t-a_n}{a-a_n}, & t \in [a, a_n], \\ 0, & t \in [a_n, b], \end{cases} \quad y_n(s) = \begin{cases} \frac{s-c_n}{c-c_n}, & s \in [c, c_n], \\ 0, & s \in [c_n, d]. \end{cases}$$

Последовательности (x_n) и (y_n) некомпактны в $C([a, b])$ и в $C([c, d])$ соответственно, причем $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$. Тогда в $C(D)$ некомпактна и нормирована последовательность $(x_n \otimes y_n)$. Действительно, равенство $\|x_n \otimes y_n\| = \|x_n\| \|y_n\| = 1$ очевидно. Если предположить, что последовательность $(x_n \otimes y_n)$ компактна, то из нее можно выделить подпоследовательность, которая сходится в $C(D)$ к некоторой функции, но тогда она сходится к этой же функции и поточечно. Так как последовательность функций $(x_n(t)y_n(s))$ поточечно сходится к функции

$$x(t, s) = \begin{cases} 1, & (t, s) = (a, c), \\ 0, & (t, s) \neq (a, c), \end{cases}$$

которая разрывна в точке (a, c) , то выделенная подпоследовательность не сходится в $C(D)$, что противоречит предположению.

В силу непрерывности функций l , m и n на $D \times [a, b]$, $D \times [c, d]$, $D \times D$ соответственно найдется такое число P , что $|l(t, s, \tau)| \leq P$, $|m(t, s, \sigma)| \leq P$, $|n(t, s, \tau, \sigma)| \leq P$. Тогда

$$\begin{aligned} |K(x_n \otimes y_n)(t, s)| &\leq \int_a^b |l(t, s, \tau)| x_n(\tau) y_n(s) d\tau + \\ &+ \int_c^d |m(t, s, \sigma)| x_n(t) y_n(\sigma) d\sigma + \iint_D |n(t, s, \tau, \sigma)| x_n(\tau) y_n(\sigma) d\tau d\sigma \leq \\ &\leq P \left(y_n(s) \int_a^b x_n(\tau) d\tau + x_n(t) \int_c^d y_n(\sigma) d\sigma + \iint_D x_n(\tau) y_n(\sigma) d\tau d\sigma \right) \leq \\ &\leq P \left(\int_a^b x_n(\tau) d\tau + \int_c^d y_n(\sigma) d\sigma + \iint_D x_n(\tau) y_n(\sigma) d\tau d\sigma \right) \leq \\ &\leq \frac{P}{2^n} \left(b-a + d-c + \frac{(b-a)(d-c)}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|K(x_n \otimes y_n)\| \leq \frac{P}{2^n} \left(b-a + d-c + \frac{(b-a)(d-c)}{2^n} \right).$$

Отсюда вытекает, что $K(x_n \otimes y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Покажем, что $C(x_n \otimes y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В силу непрерывности функции $c(t, s)$ в точке (a, c) для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|t-a| < \delta$, $|s-c| < \delta$ выполняется

неравенство $|c(t, s) - c(a, c)| = |c(t, s)| < \varepsilon$. Выберем N так, чтобы для $n > N$ выполнялись неравенства $\frac{b-a}{2^n} < \delta$, $\frac{d-c}{2^n} < \delta$. Тогда для любого $n > N$

$$|c(t, s)x_n(t)y_n(s)| \leq |c(t, s)|, \quad \text{если } |t-a| < \frac{b-a}{2^n}, \quad |s-c| < \frac{d-c}{2^n},$$

$$|c(t, s)x_n(t)y_n(s)| = 0, \quad \text{если } |t-a| \geq \frac{b-a}{2^n} \quad \text{или} \quad |s-c| \geq \frac{d-c}{2^n}.$$

Следовательно, для любого $n > N$ имеем $|c(t, s)x_n(t)y_n(s)| < \varepsilon$ для всех $(t, s) \in D$. Поэтому $C(x_n \otimes y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $K(x_n \otimes y_n) \rightarrow 0$ и $C(x_n \otimes y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $(C - K)(x_n \otimes y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, оператор $C - K$ переводит некомпактную последовательность нормированных в $C(D)$ функций в последовательность, сходящуюся к нулю в $C(D)$. В силу [5] оператор $C - K$ не является фредгольмовым в $C(D)$. Тогда и уравнение (1) не является фредгольмовым в $C(D)$.

Рассмотрим теперь уравнение (1) с непрерывными в целом и интегрально ограниченными функциями l , m и n .

Через $X = C(L^1([a, b]))$, $Y = C(L^1([c, d]))$, $Z = C(L^1(D))$ обозначим пространство непрерывных на D вектор-функций со значениями в $L^1([a, b])$, $L^1([c, d])$, $L^1(D)$ соответственно. Элементы этих пространств допускают представление в виде непрерывных в целом и интегрально ограниченных функций $a(t, s, \tau)$, $b(t, s, \sigma)$, $c(t, s, \tau, \sigma)$. Так как в X , Y , Z плотно множество непрерывных на $D \times [a, b]$, $D \times [c, d]$, $D \times D$ соответственно функций, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдутся такие непрерывные функции $l_0(t, s, \tau)$, $m_0(t, s, \sigma)$, $n_0(t, s, \tau, \sigma)$, что

$$\max_{(t,s)} \|l(t, s, \cdot) - l_0(t, s, \cdot)\|_{L^1([a,b])} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \max_{(t,s)} \|m(t, s, \cdot) - m_0(t, s, \cdot)\|_{L^1([c,d])} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\max_{(t,s)} \|n(t, s, \cdot, \cdot) - n_0(t, s, \cdot, \cdot)\|_{L^1(D)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда

$$\|(C - K) - (C - K_0)\| \leq \sup_D \left(\int_a^b |l(t, s, \tau) - l_0(t, s, \tau)| d\tau + \int_c^d |m(t, s, \sigma) - m_0(t, s, \sigma)| d\sigma + \right. \\ \left. + \iint_D |n(t, s, \tau, \sigma) - n_0(t, s, \tau, \sigma)| d\tau d\sigma \right) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Если теперь оператор $C - K$ фредгольмов, то в силу устойчивости фредгольмовости относительно достаточно малых возмущений [5] фредгольмовым будет и оператор $C - K_0$ с непрерывными функциями s , l_0 , m_0 , n_0 , что противоречит приведенным выше рассуждениям. Таким образом, $C - K$ — не фредгольмов оператор. Тогда не фредгольмово и уравнение (1). Второе утверждение доказано. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Забрейко П. П., Калитвин А. С., Фролова Е. В. Об интегральных уравнениях с частными интегралами в пространстве непрерывных функций // Дифференц. уравн. — 2002. — 38, № 4. — С. 538–546.
2. Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000.
3. Калитвин А. С. Нелинейные операторы с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2002.
4. Калитвин А. С., Фролова Е. В. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1970.

6. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Nashed M. Z.* On some partial integral equations arising in the mechanics of solids// *Z. Ang. Math. Mech.* — 1999. — 79, № 2. — С. 703–713.
7. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial integral operators and integro-differential equations. — N.Y.: Marcel Dekker, 2000.

А. С. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет, Россия

E-mail: kalitvin@lipetsk.ru

РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ ВБЛИЗИ НЕОСОБОЙ ТОЧКИ

© 2005 г. **Е. С. КАРУЛИНА**

Аннотация. Для пятого уравнения Пенлеве с помощью методов степенной геометрии получены асимптотические разложения решений в окрестности неособой точки независимой переменной. Найдены четыре семейства разложений. Все эти разложения представляют собой сходящиеся ряды по целым степеням с постоянными комплексными коэффициентами.

Рассмотрим пятое уравнение Пенлеве (см. [7])

$$w'' = w'^2 \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \right) - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2} \left(aw + \frac{b}{w} \right) + c \frac{w}{z} + d \frac{w(w+1)}{w-1}, \quad (1)$$

где a, b, c, d — комплексные параметры. Методами степенной геометрии (см. [1, 2]) будем искать степенные и степенно-логарифмические разложения его решений вида

$$w = c_r(z - z_0)^r + \sum c_s(z - z_0)^s \quad (2)$$

вблизи неособой точки $z = z_0, z_0 \neq 0, z_0 \neq \infty$.

1. Основные результаты.

Теорема. Уравнение (1) в окрестности неособой точки имеет следующие решения:

$$w = \frac{\sqrt{-2b}}{z_0}(z - z_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(z - z_0)^k, \quad (3)$$

где $c_k = \text{const}$, коэффициент c_2 произвольный, а остальные коэффициенты c_k определяются однозначно;

$$w = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(z - z_0)^l, \quad (4)$$

где $c_l = \text{const}$, коэффициенты c_0 и c_1 произвольные, а остальные коэффициенты c_l определяются однозначно;

$$w = \frac{z_0}{\sqrt{2a}}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad (5)$$

где $c_n = \text{const}$, коэффициент c_0 произвольный, а остальные коэффициенты c_k определяются однозначно;

$$w = 1 + \sqrt{-2d}(z - z_0) + \left(-d + \frac{\sqrt{-2d} - c}{2z_0} \right) (z - z_0)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m(z - z_0)^m, \quad (6)$$

где $c_m = \text{const}$, коэффициент c_3 произвольный, а остальные коэффициенты c_m определяются однозначно.

Замечание. Отметим, что разложения (3), (4), (5), (6) сходятся в окрестности z_0 (см. [4, п. 3.7, теорема 3.4]). Разложения (3), (4), (5) также получены в [8], но другим методом, а семейство разложений (6) найдено впервые в настоящей работе. Разложения решений уравнения (1) вблизи особых точек см. в [5, 6].

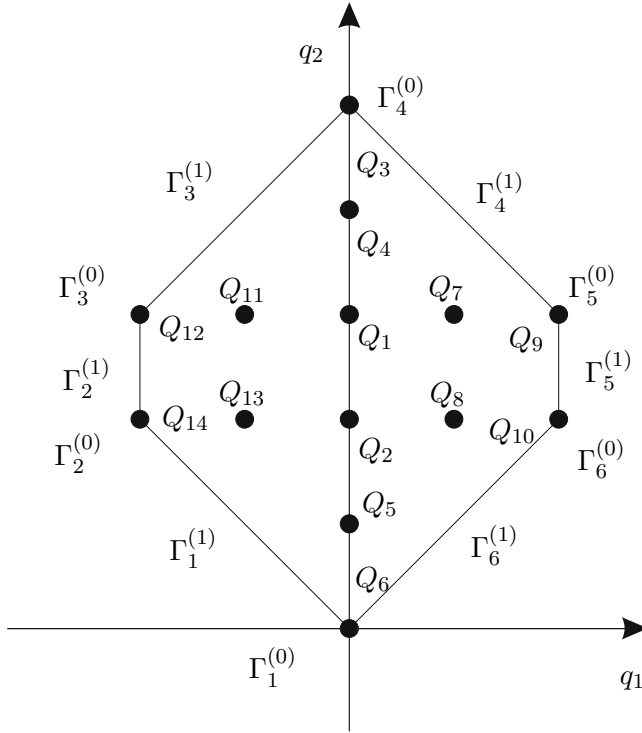


Рис. 1

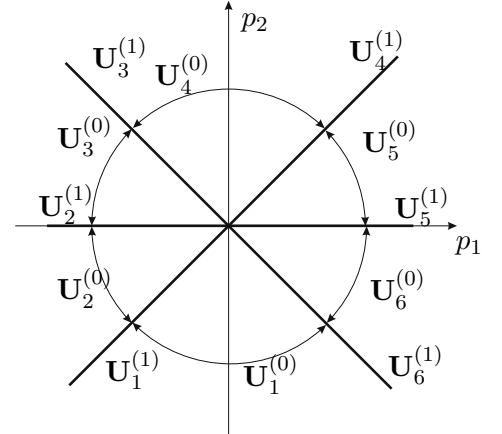


Рис. 2

2. Вычисление разложений решений. Умножим уравнение (1) на $z^2w(w-1)$, перенесем все члены уравнения в левую часть и получим уравнение

$$\begin{aligned} f(z, w) \stackrel{\text{def}}{=} & \left[w''w^2z^2 - \frac{3}{2}w'^2wz^2 + w'w^2z - (3a+b)w^3 \right] + \\ & + \left[-w''wz^2 + \frac{1}{2}w'^2z^2 - w'wz + (a+3b)w^2 \right] - \\ & - aw^5 + 3aw^4 - 3bw + b - cw^3z + cw^2z - dw^3z^2 - dw^2z^2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Перенесем начало координат в точку $(z_0, 0)$, т.е. сделаем замену $z = y + z_0$. Получим уравнение

$$\begin{aligned} v(y, w) \stackrel{\text{def}}{=} f(y + z_0, w) = & \left[w''w^2(y + z_0)^2 - \frac{3}{2}w'^2w(y + z_0)^2 + w'w^2(y + z_0) - (3a+b)w^3 \right] + \\ & + \left[-w''w(y + z_0)^2 + \frac{1}{2}w'^2(y + z_0)^2 - w'w(y + z_0) + (a+3b)w^2 \right] - aw^5 + 3aw^4 - 3bw \\ & + b - cw^3(y + z_0) + cw^2(y + z_0) - dw^3(y + z_0)^2 - dw^2(y + z_0)^2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Носитель $\mathbf{S}(v)$ уравнения (8) (см. [1, п.2.5]) состоит из 14 точек

$$\begin{aligned} Q_1 &= (0, 3), \quad Q_2 = (0, 2), \quad Q_3 = (0, 5), \quad Q_4 = (0, 4), \quad Q_5 = (0, 1), \\ Q_6 &= (0, 0), \quad Q_7 = (1, 3), \quad Q_8 = (1, 2), \quad Q_9 = (2, 3), \quad Q_{10} = (2, 2), \\ Q_{11} &= (-1, 3), \quad Q_{12} = (-2, 3), \quad Q_{13} = (-1, 2), \quad Q_{14} = (-2, 2). \end{aligned}$$

Выпуклая оболочка $\Gamma(v)$ носителя $\mathbf{S}(v)$ (многоугольник Ньютона) — это шестиугольник с вершинами $Q_3, Q_6, Q_9, Q_{10}, Q_{12}$ и Q_{14} (рис. 1). Им соответствуют укорочения $\hat{v}$ (см. [1, п. 2.4]):

$$-aw^5, \quad b, \quad -dw^3z^2, \quad -dw^2z^2, \quad z_0^2w''w^2 - \frac{3}{2}z_0^2w'^2w, \quad -z_0^2w''w + \frac{1}{2}z_0^2w'^2.$$

Вершины $\Gamma_1^{(0)} = Q_6$, $\Gamma_2^{(0)} = Q_{14}$, $\Gamma_3^{(0)} = Q_{12}$, $\Gamma_4^{(0)} = Q_3$, $\Gamma_5^{(0)} = Q_9$, $\Gamma_6^{(0)} = Q_{10}$ и ребра $\Gamma_1^{(1)} - \Gamma_6^{(1)}$ показаны на рис. 1. Внешние нормали N_j к ребрам $\Gamma_j^{(1)}$

$$N_1 = \{-1, -1\}, \quad N_2 = \{-1, 0\}, \quad N_3 = \{-1, 1\}, \quad N_4 = \{1, 1\}, \quad N_5 = \{1, 0\}, \quad N_6 = \{1, -1\}.$$

Нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(1)} = \{\lambda N_j\}$, $\lambda > 0$ ребер $\Gamma_j^{(1)}$ (см. [1, п. 1.2]) показаны на рис. 2.

Нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(0)}$ вершин $\Gamma_j^{(0)}$ — это углы между нормальными конусами прилегающих к вершине ребер (рис. 2).

Нас будут интересовать только те ребра и вершины многоугольника $\Gamma(v)$, нормальные конусы которых пересекаются с полуплоскостью $p_1 < 0$ (так как именно она соответствует $y \rightarrow 0$, см. [1, п. 2.3]), т.е. вершины $\Gamma_1^{(0)} - \Gamma_4^{(0)}$ и ребра $\Gamma_1^{(1)} - \Gamma_3^{(1)}$.

Введем параметр ω : $\omega = -1$, если $y \rightarrow 0$, и $\omega = 1$, если $y \rightarrow \infty$. Поскольку $y \rightarrow 0$, то везде $\omega = -1$.

Решения, соответствующие вершинам $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_4^{(0)}$, отсутствуют, так как соответствующие укорочения — алгебраические (см. [2, гл. II, § 4]).

Уравнение (8) обладает симметрией (см. [5, п. 2.2]):

$$(z_0, y, w, a, b, c, d) = (z_0^*, y^*, 1/w^*, -b^*, -a^*, -c^*, -d^*). \quad (9)$$

Применив данную замену переменных к уравнению (1), получим это же уравнение.

Теперь заметим, что при этой симметрии вершины $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_2^{(0)}$ переходят в вершины $\Gamma_4^{(0)}$ и $\Gamma_3^{(0)}$ соответственно, ребро $\Gamma_1^{(1)}$ переходит в ребро $\Gamma_3^{(1)}$, а ребро $\Gamma_2^{(1)}$ переходит в себя. Это означает, что применив замену переменных (9) к решениям, соответствующим вершинам $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_2^{(0)}$, получим решения для вершин $\Gamma_3^{(0)}$ и $\Gamma_4^{(0)}$ соответственно, а из решений, соответствующих ребру $\Gamma_1^{(1)}$, можно получить решения для ребра $\Gamma_3^{(1)}$.

2.1. Решения, соответствующие вершинам. Вершина $\Gamma_2^{(0)}$. Этой вершине соответствует укороченное уравнение (см. [2, введение])

$$\hat{v}_2^{(0)}(y, w) \stackrel{\text{def}}{=} -z_0^2 w'' w + \frac{1}{2} z_0^2 w'^2 = 0. \quad (10)$$

Характеристический многочлен дифференциальной суммы (см. [4, п. 1.3]) $v_2^{(0)}(y, w) \stackrel{\text{def}}{=} z_0^{-2} \hat{v}_2^{(0)}(y, w)$ равен

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} y^{-2r+2} v_2^{(0)}(y, y^r) = -r(r-1) + \frac{1}{2} r^2.$$

Он имеет два корня $r_1 = 0$, $r_2 = 2$. Ни один из векторов $\omega(1, r_i)$, т.е. $(-1, 0)$ и $(-1, -2)$ не лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_2^{(0)}$. И, согласно [4, п. 1.3], у уравнения (10) нет решений, которые бы являлись первыми приближениями уравнения (1).

Вершина $\Gamma_3^{(0)}$. Из симметрии (9) следует, что вершине $\Gamma_3^{(0)}$ также не соответствуют решения, являющиеся первыми приближениями уравнения (1).

2.2. Решения, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Этому ребру соответствует укороченное уравнение

$$\hat{v}_1^{(1)}(y, w) \stackrel{\text{def}}{=} b - z_0^2 w'' w + \frac{1}{2} z_0^2 w'^2 = 0. \quad (11)$$

Согласно нормальному конусу $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(-1, -1), \lambda > 0\}$ имеем $r = 1$. Согласно [4, п. 1.3] ищем решение уравнения (11) вида

$$w = c_1 y. \quad (12)$$

Для определения коэффициента c_1 подставим выражение $w = c_1 y$ в уравнение (11) и получим определяющее уравнение $\tilde{v}(c_1) \stackrel{\text{def}}{=} b + z_0^2 c_1^2 / 2 = 0$. Из корней этого уравнения мы должны выбрать только $c_1 \neq 0$:

$$c_1 = \frac{\sqrt{-2b}}{z_0}, \quad (13)$$

где $b \neq 0$. Итак, мы вычислили первое приближение (12) решения уравнения (8).

Найдем критические числа, соответствующие этому первому приближению (см. [4, п. 1.4]). Первая вариация укорочения (11) есть

$$\frac{\delta \widehat{v}_1^{(1)}}{\delta w} = -z_0^2 \frac{d^2}{dy^2} w - z_0^2 w'' + z_0^2 \frac{d}{dy} w'. \quad (14)$$

Согласно [3, лемма 3.1], на решении (12) она дает оператор

$$\mathcal{L}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta \widehat{v}_1^{(1)}}{\delta w} = -z_0^2 c_1 y \frac{d^2}{dy^2} + z_0^2 c_1 \frac{d}{dy} \neq 0.$$

Согласно [4, п. 1.3] характеристический многочлен имеет вид

$$\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} y^{1-k} \mathcal{L}(y) y^k = z_0^2 c_1 (-k^2 + 2k). \quad (15)$$

Уравнение $\nu(k) = 0$ имеет корни $k_1 = 2$ и $k_2 = 0$. Конус задач (см. [2, гл. I, § 6]) есть $\mathcal{K} = \{k > 1\}$. Поскольку $k_2 \notin \mathcal{K}$, $k_1 \in \mathcal{K}$, то $k_1 = 2$ является единственным критическим числом.

Согласно [4, п. 3.3], поскольку $k_1 \in \mathbb{N}$, разложения решений имеют вид

$$w = c_1 y + \sum_{l=2}^{\infty} c_l y^l, \quad (16)$$

где c_l — многочлены от $\ln y$. Если выполнено условие совместности (см. [4, п. 3.4]), то c_{k_1} не зависит от $\ln y$ и является произвольной постоянной, а остальные c_l также не зависят от $\ln y$ и являются определенными постоянными.

Здесь $\mu' = -1$, значит, $y^{\omega\mu'} = y$. Согласно [4, п. 3.4] условие совместности означает равенство нулю коэффициента b_1 в уравнении $\nu(2)c_2 + b_1 = 0$; b_1 — это коэффициент при $y^{\omega\mu'}$ во втором приближении $\widehat{v}(y, c_1 y)$ (см. [5, п. 1.7]);

$$\widehat{v} \stackrel{\text{def}}{=} -3bw + z_0 y w'^2 - 2z_0 y w'' w - z_0 w' w + z_0^2 w'' w^2 - \frac{3}{2} z_0^2 w'^2 w.$$

Подставив $w = c_1 y$, найдем коэффициент при $y^{\omega\mu'}$:

$$b_4 = -3c_1 \left(b + \frac{z_0^2 c_1^2}{2} \right).$$

Учитывая значение c_1 из (13), получим, что $b_1 \equiv 0$. Условие совместности выполнено, следовательно, в формуле (16) $c_l = \text{const}$, коэффициент c_2 — произвольный, остальные коэффициенты определяются однозначно.

Разложения (16) сходятся, так как порядок дифференцирования в операторе $\mathcal{L}(y)$ равен двум, так же как и порядок дифференцирования суммы v , т.е. $\Delta(v) = \Delta(\mathcal{L}(y))$ (см. [4, п. 3.7, теорема 3.4]).

Разложения решений, соответствующих ребру $\Gamma_3^{(1)}$, получаются симметрией (9) из разложений (16). Эти разложения имеют вид

$$w = \frac{z_0}{\sqrt{2a}} y^{-1} + \sum_{l=0}^{\infty} c_l y^l,$$

где $c_l = \text{const}$, коэффициент c_0 произвольный, остальные коэффициенты определяются однозначно. Согласно [4, теорема 3.4] они также сходятся.

2.3. Решения, соответствующие ребру $\Gamma_2^{(1)}$. Общий случай. Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{v}_2^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} z_0^2 w'' w^2 - \frac{3}{2} z_0^2 w'^2 w - z_0^2 w'' w + \frac{1}{2} z_0^2 w'^2 = 0. \quad (17)$$

Согласно нормальному конусу $\mathbf{U}_2^{(1)} = \{\lambda(-1, 0), \lambda > 0\}$ имеем $r = 0$. Будем искать решение уравнения (17) вида

$$w = c_0. \quad (18)$$

Для определения коэффициента c_0 подставим выражение $w = c_0$ в уравнение (17) и получим определяющее уравнение $\hat{v}(c_0) \equiv 0$. Отсюда следует, что c_0 — любое. Итак, мы вычислили первое приближение решения (18) уравнения (8). Найдем его критические числа. Первая вариация укорочения (17) есть

$$\frac{\delta \hat{v}_2^{(1)}}{\delta w} = z_0^2 \frac{d^2}{dy^2} w^2 + 2z_0^2 w'' w - 3z_0^2 \frac{d}{dy} w' w - \frac{3}{2} z_0^2 w'^2 - z_0^2 \frac{d^2}{dy^2} w - z_0^2 w'' + z_0^2 \frac{d}{dy} w'. \quad (19)$$

На решении (18) она дает оператор

$$\mathcal{L}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta \hat{v}_2^{(1)}}{\delta w} = z_0^2 c_0 (c_0 - 1) \frac{d^2}{dy^2}. \quad (20)$$

Здесь рассмотрим случай $\mathcal{L}(y) \neq 0$, т.е. $c_0 \neq 1$. Случай $c_0 = 1$ будет рассмотрен позже.

Найдем характеристический многочлен:

$$\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} y^{1-k} \mathcal{L}(y) y^k = z_0^2 c_0 (c_0 - 1) k(k-1). \quad (21)$$

Корни уравнения $\nu(k) = 0$ суть $k_1 = 1$ и $k_2 = 0$. Конус задач есть $\mathcal{K} = \{k > 0\}$. Поскольку $k_2 \notin \mathcal{K}$, $k_1 \in \mathcal{K}$, то $k_1 = 1$ является единственным критическим числом.

Поскольку $k_1 \in \mathbb{N}$, то разложения решений имеют вид

$$w = c_0 + \sum_{l=1}^{\infty} c_l y^l, \quad (22)$$

где c_l — многочлены от $\ln y$. Если выполнено условие совместности, то c_{k_1} не зависит от $\ln y$ и является произвольной постоянной, а остальные c_l также не зависят от $\ln y$ и являются постоянными.

Здесь $\mu' = 1$, значит, $y^{\omega\mu'} = y^{-1}$. Условие совместности означает равенство нулю коэффициента b_{-1} в уравнении $\nu(1)c_1 + b_{-1} = 0$, где b_{-1} — это коэффициент при $y^{\omega\mu'}$ во втором приближении $\hat{\hat{v}}(y, c_0)$;

$$\hat{\hat{v}} \stackrel{\text{def}}{=} v_{Q_{11}} + v_{Q_{13}} = 2z_0 y w'' w^2 - 3z_0 y w'^2 w + z_0 w' w^2 + z_0 y w'^2 - 2z_0 y w'' w - z_0 w' w.$$

Подставив $w = c_0$, получим, что $\hat{\hat{v}} \equiv 0$. Условие совместности выполнено, следовательно, в формуле (22) $c_l = \text{const}$, коэффициент c_1 произвольный, остальные коэффициенты определяются однозначно.

Разложения (22) сходятся, так как порядок дифференцирования в операторе $\mathcal{L}(y)$ равен двум, так же как и порядок дифференцирования суммы v , т.е. $\Delta(v) = \Delta(\mathcal{L}(y))$.

Случай $c_0 = 1$. При $c_0 = 1$ линейный оператор, определенный в (20), $\mathcal{L}(y) \equiv 0$. Сделаем замену $u = w - 1$ в уравнении (3), которая переводит точку $w = c_0 = 1$ в точку $u = 0$. Получим уравнение

$$\begin{aligned} p(y, u) \stackrel{\text{def}}{=} v(y, u+1) &= u''(u+1)^2(y+z_0)^2 - 1.5u'^2(u+1)(y+z_0)^2 + \\ &+ u'(u+1)^2(y+z_0) - (3a+b)(u+1)^3 - u''(u+1)(y+z_0)^2 + 0.5u'^2(y+z_0)^2 - \\ &- u'(u+1)(y+z_0) + (a+3b)(u+1)^2 - a(u+1)^5 + 3a(u+1)^4 - 3b(u+1) + b - \\ &- c(u+1)^3(y+z_0) + c(u+1)^2(y+z_0) - d(u+1)^3(y+z_0)^2 - d(u+1)^2(y+z_0)^2 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Носитель $\mathbf{S}(p)$ уравнения (23) и его выпуклая оболочка $\tilde{\Gamma}(p)$ изображены на рис. 3. Нормальные конусы изображены на рис. 4. Нас интересуют только те ребра и вершины, нормальные конусы которых пересекаются с третьим квадрантом плоскости $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ (так как именно он соответствует $y \rightarrow 0, u \rightarrow 0$), то есть вершины $\widetilde{\Gamma}_1^{(0)}, \widetilde{\Gamma}_2^{(0)}$ и ребро $\widetilde{\Gamma}_1^{(1)}$.

Вершине $\widetilde{\Gamma}_1^{(0)}$ соответствует алгебраическое укорочение $\hat{p}_0^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} -2dz_0^2$, поэтому решений, соответствующих этой вершине, нет.

Аналогично вычислениям п. 2.1 для вершины $\widetilde{\Gamma}_2^{(0)}$ получаем, что вершине $\widetilde{\Gamma}_2^{(0)}$ не соответствуют решения, являющиеся первыми приближениями уравнения (23).

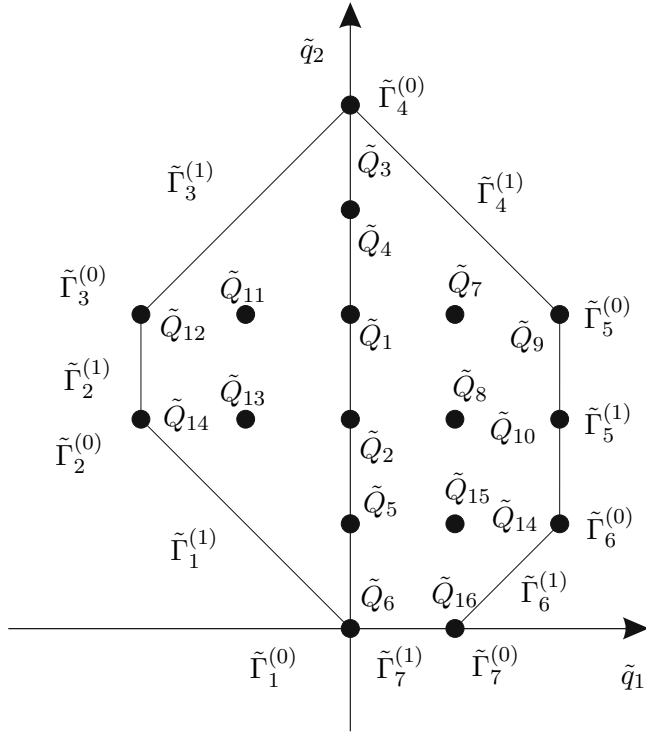


Рис. 3

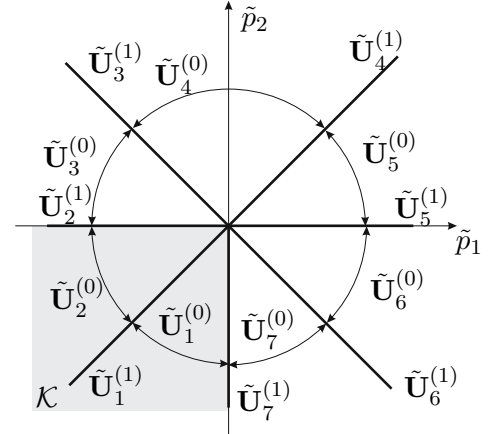


Рис. 4

Ребро $\widetilde{\Gamma_1^{(1)}}$. Этому ребру соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{p}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} z_0^2 u'' u - z_0^2 u'^2 - 2dz_0^2 = 0. \quad (24)$$

Согласно нормальному конусу $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(-1, -1), \lambda > 0\}$, $r = 1$. Согласно [2, п. 1.3] ищем решение уравнения (24) вида

$$u = c_1 y. \quad (25)$$

Для определения коэффициента c_1 подставим выражение $u = c_1 y$ в уравнение (24) и получим определяющее уравнение $\widehat{p}(c_1) \stackrel{\text{def}}{=} -2dz_0^2 - z_0^2 c_1^2 = 0$. Из корней этого уравнения мы должны выбрать только $c_1 \neq 0$:

$$c_1 = \sqrt{-2d}, \quad (26)$$

где $d \neq 0$. Итак, мы вычислили первое приближение (25) решения уравнения (23). Найдем его критические числа, соответствующие этому первому приближению. Первая вариация укорочения (24) есть

$$\frac{\delta \widehat{p}_1^{(1)}}{\delta u} = z_0^2 u \frac{d^2}{dy^2} + z_0^2 u'' - 2z_0^2 u' \frac{d}{dy}. \quad (27)$$

На решении (25) она дает оператор

$$\mathcal{L}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta \widehat{p}_1^{(1)}}{\delta u} = z_0^2 c_1 y \frac{d^2}{dy^2} - 2z_0^2 c_1 \frac{d}{dy} \neq 0.$$

Его характеристический многочлен:

$$\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} y^{1-k} \mathcal{L}(y) y^k = z_0^2 c_1 (k(k-1) - 2k). \quad (28)$$

Корни уравнения $\nu(k) = 0$ суть $k_1 = 3$ и $k_2 = 0$. Конус задач есть $\mathcal{K} = \{k > 1\}$. Поскольку $k_2 \notin \mathcal{K}$, $k_1 \in \mathcal{K}$, то $k_1 = 3$ является единственным критическим числом.

Поскольку $k_1 \in \mathbb{N}$, то разложения решений имеют вид

$$u = c_1 y + c_2 y^2 + \sum_{l=3}^{\infty} c_l y^l, \quad (29)$$

где c_l — многочлены от $\ln y$. Если выполнено условие совместности, то c_{k_1} не зависит от $\ln y$ и является произвольной постоянной, а остальные c_l также не зависят от $\ln y$ и являются постоянными.

Согласно [4, замечание 3.1], чтобы проверить выполнение условия совместности, а также для того, чтобы найти коэффициент c_2 , подставим в уравнение (7) первые три члена разложения: $w = 1 + c_1 y + c_2 y^2$. Получим $v(y, w) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots$. Коэффициент c_2 найдем, приравняв нулю коэффициент b_1 при y :

$$-2c_2 c_1 z_0^2 - 5dc_1 z_0^2 - 4dz_0 - 1,5c_1^3 z_0^2 - cc_1 z_0 - c_1^2 z_0 = 0,$$

откуда имеем

$$c_2 = -d + \frac{\sqrt{-2d} - c}{2z_0}. \quad (30)$$

Затем, подставив c_2 и c_1 в выражение для коэффициента

$$b_2 = -5,5c_2 c_1^2 z_0^2 - 2d - 4dc_1^2 z_0^2 - 2c_1^3 z_0 - 5dc_2 z_0^2 - \\ - 2cc_1^2 z_0 - 2c_2^2 z_0^2 - cc_2 z_0 - 10dc_1 z_0 - cc_1 - c_2 c_1 z_0,$$

получим $b_2 \equiv 0$.

Условие совместности означает равенство нулю коэффициента b_2 в уравнении $\nu(3)c_3 + b_2 = 0$. Условие совместности выполнено, следовательно, в формуле (29) $c_l = \text{const}$, коэффициент c_3 произвольный, остальные коэффициенты определяются однозначно. Разложения (29) сходятся, так как порядок дифференцирования в операторе $\mathcal{L}(y)$ равен двум, так же как и порядок дифференцирования суммы p , т.е. $\Delta(p) = \Delta(\mathcal{L}(y))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
2. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998.
3. Брюно А. Д. Степенные разложения решений одного алгебраического или дифференциального уравнения/ Препринт № 63. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2000.
4. Брюно А. Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения// Усп. мат. наук. — 2004. — 59, № 3. — С. 31–80.
5. Брюно А. Д., Карулина Е. С. Степенные разложения решений пятого уравнения Пенлеве/ Препринт № 50. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
6. Брюно А. Д., Карулина Е. С. Разложения решений пятого уравнения Пенлеве// Докл. РАН. — 2004. — 395, № 4. — С. 439–444.
7. Розов Н. Х. Пенлеве уравнение// Мат. энцикл. — М.: Советская Энциклопедия, 1985. — 5. — С. 666.
8. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. Painlevé differential equations in the complex plane. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2002.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С МАЛОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

© 2005 г. **О. Н. КИРИЛЛОВ**

Аннотация. В настоящей работе изучается парадоксальное влияние малых диссипативных и гироскопических сил на устойчивость линейных неконсервативных систем, состоящее в непредсказуемом на первый взгляд поведении критической неконсервативной нагрузки. С помощью исследования бифуркаций кратных корней характеристического полинома неконсервативной системы получено аналитическое описание этого эффекта. В качестве механического примера рассмотрена модель дискового тормоза, описывающая возникновение скрипа при торможении автомобиля.

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Рассмотрим линейную автономную неконсервативную механическую систему

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} + \mathbf{D}(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{y}}{dt} + \mathbf{A}(q)\mathbf{y} = 0, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{y}$ — вектор обобщенных координат, а $\mathbf{D}$ и $\mathbf{A}$ — действительные квадратные матрицы порядка m , первая из которых определяет диссипативные и гироскопические, а вторая — неконсервативные позиционные силы. Предполагается, что матрица $\mathbf{D}$ является гладкой функцией вектора параметров $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$, причем $\mathbf{D}(0) = 0$, а матрица $\mathbf{A}$ гладко зависит от скалярного параметра нагрузки $q \geq 0$.

Отыскивая решение уравнения (1.1) в форме $\mathbf{y} = \mathbf{u} \exp(\lambda t)$, приходим к обобщенной задаче на собственные значения

$$(\lambda^2 \mathbf{I} + \lambda \mathbf{D}(\mathbf{k}) + \mathbf{A}(q))\mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица порядка m , $\mathbf{u}$ — собственный вектор, а λ — собственное значение. Неконсервативная система без гироскопических и диссипативных сил ($\mathbf{k} = 0$)

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} + \mathbf{A}(q)\mathbf{y} = 0 \quad (1.3)$$

называется *циркуляционной* [2, 17]. Спектр циркуляционной системы симметричен относительно вещественной и мнимой осей комплексной плоскости: если λ — собственное значение линейного оператора $\lambda^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}(q)$, то $-\lambda$, $\bar{\lambda}$ и $-\bar{\lambda}$, где черта над символом обозначает комплексное сопряжение, также являются собственными значениями. Как следствие, циркуляционная система устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда все собственные значения λ являются чисто мнимыми и полупростыми [15].

Предположим, что при $q = 0$ циркуляционная система (1.3) устойчива. При возрастании параметра нагрузки ее собственные значения двигаются по мнимой оси. При этом два простых чисто мнимых собственных значения могут по достижении параметром q некоторой критической величины q_0 образовать двукратное собственное значение $\lambda_0 = i\omega_0$ с жордановой цепочкой длины 2. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит в общем случае к распаду λ_0 на два простых комплексных, одно из которых имеет положительную действительную часть, что означает колебательную неустойчивость (флаттер; см. рис. 1(а)). Таким образом, интервал $0 \leq q < q_0$ принадлежит области устойчивости циркуляционной системы (1.3).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00161) и гранта CRDF-BRHE № Y1-MP-06-19.

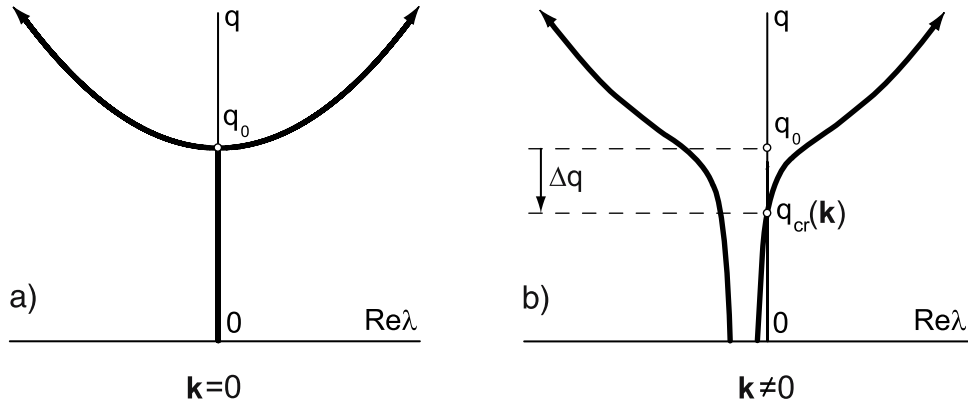


Рис. 1. Траектории собственных значений, иллюстрирующие парадокс дестабилизации.

Как было обнаружено при изучении различных механических задач [2, 5, 7, 8, 12, 13, 15–17], возмущение циркуляционной системы малыми диссипативными и гироскопическими силами ($\mathbf{k} \neq 0$) в общем случае разрушает взаимодействие собственных значений и приводит к тому, что по достижении параметром нагрузки некоторой критической величины $q = q_{\text{cr}}(k_1, \dots, k_{n-1})$ одно из собственных значений переходит в правую часть комплексной плоскости без образования двукратного собственного значения и его последующей бифуркации (см. рис. 1(b)). Кроме того, оказывается, что если положить $\mathbf{k} = \varepsilon \tilde{\mathbf{k}}$, где вектор $\tilde{\mathbf{k}}$ фиксирован, и устремить параметр ε к нулю, то

$$\tilde{q}_{\text{cr}} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_{\text{cr}}(\varepsilon \tilde{\mathbf{k}}) \leq q_0. \quad (1.4)$$

Неравенство вида (1.4) впервые было получено в 1952 году Г. Циглером [17], который, исследуя устойчивость двузвенного маятника, нагруженного следящей силой, пришел к неожиданному выводу, что критическая сила потери устойчивости неконсервативной системы с исчезающе малой диссипацией существенно ниже, чем в случае, когда диссипация в системе с самого начала предполагается отсутствующей. Это явление получило название *парадокс дестабилизации* [2, 5, 7, 8, 12, 13, 15–17].

Позднее на примерах различных механических систем было показано, что предел критической нагрузки $\tilde{q}_{\text{cr}}$ зависит от выбора вектора $\tilde{\mathbf{k}}$. В частности, изменяя соотношение между параметрами $k_1, \dots, k_{n-1}$, можно избежать снижения критической нагрузки, а значит, и дестабилизации (эффект Болотина [2]). В [6, 9] парадокс дестабилизации изучался для общих неконсервативных систем вида (1.1). Были найдены явные асимптотические выражения для критической нагрузки q в зависимости от вектора параметров $\mathbf{k}$, описывающие скачок критической нагрузки. Также было аналитически описано поведение собственных значений неконсервативной системы с малым трением. В [9] была определена структура матрицы диссипативных и гироскопических сил, стабилизирующих циркуляционную систему, и найдены необходимые и достаточные условия устойчивости. Результаты [6, 9] были получены при помощи теории возмущений собственных значений матриц [3] и использовали собственные и присоединенные векторы собственных значений циркуляционной системы (1.3).

В настоящей работе исследование парадокса дестабилизации основывается на анализе чувствительности корней характеристического полинома системы (1.1), коэффициенты которого находятся при помощи модифицированного алгоритма Леверье [4, 10]. Это позволяет избежать вычисления собственных и присоединенных векторов и получить выражения для критической нагрузки через производные характеристического полинома по параметрам, а в случае систем с двумя степенями свободы — непосредственно через инварианты матриц $\mathbf{D}$ и $\mathbf{A}$.

2. БИФУРКАЦИИ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

Влияние малых диссипативных и гироскопических сил на устойчивость неконсервативной системы (1.1), находящейся на границе между областями устойчивости и флаттера, является стабилизирующим или дестабилизирующим в зависимости от того, как расщепляется двукратное собственное значение циркуляционной системы при изменении параметров q и $\mathbf{k}$ и как при этом ведут себя простые собственные значения.

Собственные значения системы (1.1) являются корнями характеристического полинома

$$P(\lambda, \mathbf{p}) = \lambda^{2m} + \sum_{s=1}^{2m} a_s \lambda^{2m-s} = \det(\mathbf{I}\lambda^2 + \mathbf{D}(\mathbf{k})\lambda + \mathbf{A}(q)). \quad (2.1)$$

Коэффициенты полинома (2.1) являются гладкими функциями вектора n вещественных параметров $\mathbf{p} = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, q)$ и выражаются через инварианты матриц $\mathbf{D}$ и $\mathbf{A}$ посредством алгоритма Леверье [4, 10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= \mathbf{I}, \quad a_1 = \text{tr } \mathbf{D}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{C}_1 = -\mathbf{D}(\mathbf{k}) + a_1 \mathbf{I}, \\ a_j &= \frac{1}{j} \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{k})\mathbf{C}_{j-1} + 2\mathbf{A}(q)\mathbf{C}_{j-2}), \quad \mathbf{C}_j = -\mathbf{D}(\mathbf{k})\mathbf{C}_{j-1} - \mathbf{A}(q)\mathbf{C}_{j-2} + a_j \mathbf{I}, \\ j &= 2, 3, \dots, 2m-2, \\ \mathbf{D}(\mathbf{k})\mathbf{C}_{2m-2} + \mathbf{A}(q)\mathbf{C}_{2m-3} &= a_{2m-1} \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}(q)\mathbf{C}_{2m-2} = a_{2m} \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ функция $P(\lambda, \mathbf{p}_0)$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$. Изучим поведение этого корня при вариации вектора параметров $\mathbf{p}$ вдоль гладкой кривой

$$\mathbf{p}(\varepsilon) = \mathbf{p}_0 + \varepsilon \dot{\mathbf{p}} + \frac{\varepsilon^2}{2} \ddot{\mathbf{p}} + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \geq 0, \quad (2.3)$$

где точка обозначает дифференцирование по параметру ε , причем производные взяты при $\varepsilon = 0$. Тогда полином $P(\lambda, \mathbf{p}(\varepsilon))$ может быть представлен в виде

$$P(\lambda, \mathbf{p}(\varepsilon)) = \sum_{r=0}^{2m} \frac{(\lambda - \lambda_0)^r}{r!} \left(\frac{\partial^r P}{\partial \lambda^r} + \varepsilon \frac{\partial^r P_1}{\partial \lambda^r} + \varepsilon^2 \frac{\partial^r P_2}{\partial \lambda^r} + o(\varepsilon^2) \right), \quad (2.4)$$

где

$$\frac{\partial^r P_1}{\partial \lambda^r} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial^{r+1} P}{\partial \lambda^r \partial p_s} \dot{p}_s, \quad \frac{\partial^r P_2}{\partial \lambda^r} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \frac{\partial^{r+1} P}{\partial \lambda^r \partial p_s} \ddot{p}_s + \frac{1}{2} \sum_{s,t=1}^n \frac{\partial^{r+2} P}{\partial \lambda^r \partial p_s \partial p_t} \dot{p}_s \dot{p}_t, \quad (2.5)$$

а частные производные вычислены при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, $\lambda = \lambda_0$. При $r = 0$ формулы (2.5) дают выражения для величин P_1 и P_2 .

Пусть $\lambda_0 = i\omega_0$, тогда распад двукратного корня λ_0 характеристического полинома (2.1) при возмущении (2.3) описывается рядом Ньютона–Пюизо [3]

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon^{1/2} + \lambda_2 \varepsilon + \lambda_3 \varepsilon^{3/2} + \lambda_4 \varepsilon^2 + \dots \quad (2.6)$$

Подставляя разложения (2.4) и (2.6) в уравнение $P(\lambda, \mathbf{p}) = 0$ и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим соотношения, определяющие коэффициенты разложения (2.6):

$$P(\lambda_0, \mathbf{p}_0) = 0, \quad (2.7)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial P}{\partial \lambda} \bigg|_{\substack{\lambda=\lambda_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}} = 0, \quad (2.8)$$

$$\left(P_1 + \frac{1}{2} \lambda_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + \lambda_2 \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right) \bigg|_{\substack{\lambda=\lambda_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}} = 0, \quad (2.9)$$

$$\left(\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + \lambda_3 \frac{\partial P}{\partial \lambda} + \lambda_1 \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} + \lambda_1^3 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^3} \right) \bigg|_{\substack{\lambda=\lambda_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}} = 0. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.7), (2.8) выполняются автоматически, если λ_0 является двукратным корнем характеристического полинома (2.1). С использованием уравнения (2.8) из уравнений (2.9) и (2.10) найдем коэффициенты λ_1 и λ_2 в разложении (2.6):

$$\lambda_1^2 = -P_1 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^3} P_1 - \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-2}, \quad (2.11)$$

где все производные вычислены при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, $\lambda = \lambda_0$.

Таким образом, при вариации параметров вида (2.3) двукратное собственное значение $\lambda_0 = i\omega_0$ с цепочкой Жордана длины 2 распадается согласно формуле

$$\lambda = i\omega_0 \pm i \sqrt{\varepsilon P_1 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1} - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial P_1}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1} - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1} P_1 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1} \right)} + o(\varepsilon), \quad (2.12)$$

если при $\varepsilon \neq 0$ подкоренное выражение в (2.12) не обращается в нуль [16].

Случай $P_1 = 0$ является вырожденным, поскольку согласно уравнениям (2.11) коэффициент λ_1 в разложении (2.6) обращается в нуль. Подставляя разложения (2.4) и (2.6) с учетом условия $\lambda_1 = 0$ в уравнение $P(\lambda, \mathbf{p})$ и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε , найдем

$$\left(P_1 + \lambda_2 \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\substack{\lambda=\lambda_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}} = 0, \quad (2.13)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial P}{\partial \lambda} \Big|_{\substack{\lambda=\lambda_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}} = 0, \quad (2.14)$$

$$\left(P_2 + \lambda_2^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + \lambda_2 \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} + \lambda_4 \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\substack{\lambda=\lambda_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}} = 0. \quad (2.15)$$

В силу выполнения условия существования двукратного корня $\partial P / \partial \lambda = 0$ и условия вырождения $P_1 = 0$ в точке $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ уравнения (2.13) и (2.14) удовлетворяются автоматически. Уравнение (2.15) дает полином второй степени, служащий для определения коэффициента λ_2 в разложении (2.6):

$$\lambda_2^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + \lambda_2 \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} + P_2 = 0, \quad (2.16)$$

где все производные вычислены при $\lambda = \lambda_0$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Таким образом, двукратный корень λ_0 в случае вырождения, когда $P_1 = 0$, распадается по формуле $\lambda = \lambda_0 + \lambda_2 \varepsilon + o(\varepsilon)$, где коэффициент λ_2 находится из уравнения (2.16).

Аналогично можно показать, что поведение простых собственных значений $\lambda_{0,s}$ при вариации параметров (2.3) описывается формулой [16]

$$\lambda = \lambda_{0,s} + \mu_1 \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \mu_1 = -P_1 \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda} \right)^{-1} \Big|_{\substack{\lambda=\lambda_{0,s} \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}. \quad (2.17)$$

Таким образом, асимптотические формулы (2.6), (2.12), (2.16) и (2.17), коэффициенты которых выражаются через производные характеристического полинома, описывают поведение простых и двукратных собственных значений при изменении параметров в регулярном и вырожденном случаях.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим в n -мерном пространстве параметров $k_1, \dots, k_{n-1}, q$ системы (1.1) точку $\mathbf{p}_0 = (0, \dots, 0, q_0)$, предполагая, что $\pm \lambda_0 = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, являются двукратными собственными значениями оператора $\mathbf{A}(q_0) + \lambda^2 \mathbf{I}$ с жордановой цепочкой длины 2, а остальные собственные значения

$\pm\lambda_{0,s} = \pm i\omega_{0,s}$, $\omega_{0,s} > 0$, $s = 1, \dots, m-2$, — чисто мнимые и простые. Неконсервативная система, соответствующая $\mathbf{k} = 0$, $q = q_0$, является циркуляционной, а точка $\mathbf{p}_0$ принадлежит границе области устойчивости [2, 15].

Из уравнений (2.2) следует, что для нечетных коэффициентов характеристического полинома $a_{2r-1}(\mathbf{p})$ и матриц $\mathbf{C}_{2j-1}(\mathbf{p})$ справедливы соотношения

$$a_{2r-1}(\mathbf{p}_0) = 0, \quad \mathbf{C}_{2j-1}(\mathbf{p}_0) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{p}_0 = (0, \dots, 0, q_0)$. С другой стороны, при помощи выражений (2.2) можно по индукции показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{2r}}{\partial k_s}(\mathbf{p}_0) &= 0, & \frac{\partial a_{2r-1}}{\partial q}(\mathbf{p}_0) &= 0, & r &= 1, 2, \dots, m, \\ \frac{\partial \mathbf{C}_{2j}}{\partial k_s}(\mathbf{p}_0) &= 0, & \frac{\partial \mathbf{C}_{2j-1}}{\partial q}(\mathbf{p}_0) &= 0, & j &= 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь формулу (2.17), описывающую поведение простого собственного значения $\lambda_{0,s} = i\omega_{0,s}$ при изменении параметров. Определим скалярную величину $\tilde{g}_s$ и вектор $\mathbf{g}_s = (g_1^s, g_2^s, \dots, g_{n-1}^s)$ формулами

$$\tilde{g}_s = -i \frac{\partial P}{\partial q} \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda} \right)^{-1} \bigg|_{\substack{\lambda=i\omega_{0,s} \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}, \quad g_j^s = \frac{1}{\omega_{0,s}} \frac{\partial P}{\partial k_j} \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda} \right)^{-1} \bigg|_{\substack{\lambda=i\omega_{0,s} \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}. \quad (3.3)$$

В силу соотношений (3.1) и (3.2) величины $\tilde{g}_s$ и g_j^s действительные. С учетом соотношений (2.3) и (3.3), выражения (2.17) принимают вид

$$\lambda = i\omega_{0,s} - i\tilde{g}_s(q - q_0) - \omega_{0,s} \langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle + \dots, \quad (3.4)$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение действительных векторов: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{j=1}^{n-1} a_j b_j$.

Таким образом, малое изменение параметра нагрузки q оставляет простые собственные значения $\lambda_{0,s} = i\omega_{0,s}$ на мнимой оси, в то время как диссипативные и гироскопические силы, представленные вектором параметров $\mathbf{k}$, сдвигают $\lambda_{0,s}$ в правую или левую полуплоскость комплексной плоскости. Последнее происходит при условии

$$\langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle > 0, \quad s = 1, 2, \dots, m-2. \quad (3.5)$$

Распад двукратного собственного значения $\lambda_0 = i\omega_0$ в невырожденном случае описывается формулой (2.12). Определим скалярную величину $\tilde{f}$ и вектор $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ соотношениями

$$\tilde{f} = \frac{\partial P}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1} \bigg|_{\substack{\lambda=i\omega_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}, \quad f_s = \frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial P}{\partial k_s} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1} \bigg|_{\substack{\lambda=i\omega_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}. \quad (3.6)$$

В силу соотношений (3.1), (3.2) величины (3.6) являются действительными. С другой стороны, введем в рассмотрение вектор $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{n-1})$ и величину $\tilde{h}$, являющиеся с учетом соотношений (3.1), (3.2) действительными:

$$\begin{aligned} h_s &= \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1} \left(\frac{2\alpha_0}{i\omega_0} \frac{\partial P}{\partial k_s} - \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial k_s} \right) \bigg|_{\substack{\lambda=i\omega_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}, \\ \tilde{h} &= \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1} \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \frac{\partial P}{\partial q} - i \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial q} \right) \bigg|_{\substack{\lambda=i\omega_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}, \\ \alpha_0 &= i\omega_0 \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^3} \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

С учетом величин, определенных выражениями (3.6) и (3.7), уравнение (2.12) записывается в виде

$$\lambda = i\omega_0 \pm i\sqrt{\varepsilon i\omega_0 \langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \varepsilon \tilde{f} \dot{q}} - \varepsilon \frac{1}{2} (\langle \alpha_0 \mathbf{f} - \omega_0 \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle + i\tilde{h} \dot{q}) + o(\varepsilon). \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.8) следует, что в случае общего положения двукратное собственное значение $\lambda_0 = i\omega_0$ расщепляется на два комплексно сопряженных, одно из которых имеет положительную действительную часть (колебательная неустойчивость, или флаттер). Тем не менее, при выполнении условий $\langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{k}} \rangle = 0$, $\tilde{f}\dot{q} > 0$ и $\langle \mathbf{h}, \dot{\mathbf{k}} \rangle < 0$ двукратное собственное значение распадается на два простых с отрицательными действительными частями (асимптотическая устойчивость). Учитывая то, что в первом приближении $\mathbf{k} = \varepsilon \dot{\mathbf{k}}$ и $q = q_0 + \varepsilon \dot{q}$, а также предполагая $\tilde{f} < 0$, запишем эти условия в виде

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle = 0, \quad q < q_0, \quad \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0. \quad (3.9)$$

Условия (3.5) и (3.9) определяют в пространстве параметров множество направлений, ведущих из точки $\mathbf{p}_0$ в область асимптотической устойчивости, т.е. касательный конус к этой области в точке $\mathbf{p}_0$. Касательный конус (3.5), (3.9) вырожден, поскольку его размерность $n - 1$ меньше размерности n области асимптотической устойчивости [1, 16].

Для того, чтобы получить более детальную аппроксимацию области асимптотической устойчивости, рассмотрим поведение собственных значений при вариациях параметров вдоль кривых (2.3), касательных к множеству (3.9) и ортогональных оси q . Для этого должны выполняться условия

$$\langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{k}} \rangle = 0, \quad \dot{q} = 0, \quad (3.10)$$

означающие, что подкоренное выражение в формуле (3.8) обращается в нуль. При таком вырождении распад двукратного собственного значения λ_0 описывается разложением (2.6) с $\lambda_1 = 0$ и коэффициентом λ_2 , который находится из уравнения (2.16).

С учетом величин, определенных выражениями (3.6) и (3.7), при условиях (3.10) запишем уравнение (2.16) в виде

$$\lambda_2^2 - \omega_0 \langle \mathbf{h}, \dot{\mathbf{k}} \rangle \lambda_2 + \frac{1}{2} \tilde{f} \ddot{q} + \omega_0^2 \langle \mathbf{G} \dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle + i\omega_0 \left(\frac{1}{2} \langle \mathbf{f}, \ddot{\mathbf{k}} \rangle + \langle \mathbf{H} \dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle \right) = 0, \quad (3.11)$$

где элементы действительных матриц $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}$ определены соотношениями

$$H_{st} = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial k_s \partial k_t} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1} \bigg|_{\substack{\lambda=i\omega_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}, \quad (3.12)$$

$$G_{st} = \frac{1}{2\omega_0^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial k_s \partial k_t} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right)^{-1} \bigg|_{\substack{\lambda=i\omega_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}, \quad s, t = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.13)$$

Корни полинома (3.11) с комплексными коэффициентами находятся в левой части комплексной плоскости, если выполняются условия критерия Бильхарца [11]. С учетом выражений (2.3) и (3.10) эти условия записываются в виде

$$q < q_{\text{cr}}(\mathbf{k}), \quad \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0, \quad (3.14)$$

$$q_{\text{cr}}(\mathbf{k}) = q_0 + \frac{(\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H} \dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle)^2}{\tilde{f} \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle^2} - \frac{\omega_0^2}{\tilde{f}} \langle \mathbf{G} \dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle. \quad (3.15)$$

Условия (3.14) в совокупности с неравенствами (3.5) аппроксимируют область асимптотической устойчивости неконсервативной системы (1.1) в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (0, \dots, 0, q_0)$. Если предположить, как это часто случается, что при выполнении (3.14) автоматически удовлетворяются и условия (3.5), то уравнение (3.15) будет аппроксимировать границу области асимптотической устойчивости в окрестности точки $\mathbf{p}_0$.

В важном частном случае, когда неконсервативная система (1.1) имеет лишь две степени свободы ($m = 2$), условия устойчивости (3.5), отвечающие простым собственным значениям, отсутствуют, и все зависит лишь от распада двукратного собственного значения λ_0 . Из соотношений (2.1), (2.2) следует, что характеристический полином системы с двумя степенями свободы имеет вид

$$P = \lambda^4 + \lambda^3 \operatorname{tr} \mathbf{D}(\mathbf{k}) + \lambda^2 (\operatorname{tr} \mathbf{A}(q) + \det \mathbf{D}(\mathbf{k})) + \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{A}(q) \operatorname{tr} \mathbf{D}(\mathbf{k}) - \operatorname{tr}(\mathbf{A}(q) \mathbf{D}(\mathbf{k}))) + \det \mathbf{A}(q). \quad (3.16)$$

При отсутствии диссипативных и гироскопических сил ($\mathbf{k} = 0$) решения уравнения (3.16) выписываются в явном виде

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{\operatorname{tr} \mathbf{A}(q)}{2}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\operatorname{tr} \mathbf{A}(q))^2 - 4 \det \mathbf{A}(q)}. \quad (3.17)$$

При критическом значении параметра нагрузки $q = q_0$ подкоренное выражение $(\operatorname{tr} \mathbf{A}(q))^2 - 4 \det \mathbf{A}(q)$ в (3.11) обращается в нуль, приводя к образованию пары двукратных комплексно сопряженных собственных значений

$$\pm \lambda_0 = \pm i \omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\operatorname{tr} \mathbf{A}(q_0)}{2}} > 0. \quad (3.18)$$

Распад этих двукратных корней при учете диссипативных и гироскопических сил ($\mathbf{k} \neq 0$) приводит к условиям устойчивости (3.14).

В случае $m = 2$ степеней свободы величины $\tilde{f}$, $\tilde{h}$ и компоненты векторов $\mathbf{f}$, $\mathbf{h}$, входящие в соотношения (3.8), (3.14) и (3.15), выражаются непосредственно через инварианты матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$:

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \frac{1}{4\omega_0^2} \operatorname{tr} \left((\mathbf{A}(q_0) - \omega_0^2 \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \right), & f_s &= \frac{1}{4\omega_0^2} \operatorname{tr} \left((\mathbf{A}(q_0) - \omega_0^2 \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial k_s} \right), \\ \tilde{h} &= \frac{1}{4\omega_0^3} \operatorname{tr} \left((\mathbf{A}(q_0) - 3\omega_0^2 \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \right), & h_s &= \frac{1}{4\omega_0^3} \operatorname{tr} \left((\mathbf{A}(q_0) - 3\omega_0^2 \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial k_s} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Компоненты действительных матриц $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}$ находятся по формулам

$$H_{st} = \frac{1}{8\omega_0^2} \operatorname{tr} \left((\mathbf{A}_0 - \omega_0^2 \mathbf{I}) \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial k_s \partial k_t} \right), \quad G_{st} = \frac{1}{8\omega_0^2} \left(\operatorname{tr} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial k_s} \operatorname{tr} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial k_t} - \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial k_s} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial k_t} \right) \right), \quad (3.20)$$

где $s, t = 1, 2, \dots, n-1$. Производные в соотношениях (3.19) и (3.20) вычисляются при $\mathbf{k} = 0$ и $q = q_0$.

В заключение отметим, что из уравнения (3.11) следуют соотношения, описывающие траектории собственных значений на комплексной плоскости, а также выражения для действительных и мнимых частей собственных значений в зависимости от параметров

$$(\operatorname{Im} \lambda - \omega_0 - \operatorname{Re} \lambda - a/2)^2 - (\operatorname{Im} \lambda - \omega_0 + \operatorname{Re} \lambda + a/2)^2 = 2d, \quad (3.21)$$

$$(\operatorname{Re} \lambda + a/2)^4 + (c - a^2/4) (\operatorname{Re} \lambda + a/2)^2 = d^2/4, \quad (3.22)$$

$$(\operatorname{Im} \lambda - \omega_0)^4 - (c - a^2/4) (\operatorname{Im} \lambda - \omega_0)^2 = d^2/4. \quad (3.23)$$

Коэффициенты a , c и d уравнений (3.21)–(3.23) имеют вид

$$a = -\omega_0 \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle, \quad c = \tilde{f}(q - q_0) + \omega_0^2 \langle \mathbf{G} \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle, \quad d = \omega_0 (\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H} \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle). \quad (3.24)$$

4. ПРИМЕР. ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДИСКОВОГО ТОРМОЗА

Сжатие вращающегося гибкого диска толщины $2h$ с двух противоположных сторон может привести к его поперечным вибрациям с частотами, лежащими в звуковом диапазоне (скрип тормозов). В [14] была описана простая модель с двумя степенями свободы, описывающая механизм возникновения флаттера вращающегося диска при его торможении. Рассмотрим поперечное сечение элемента диска в плоскости, перпендикулярной его радиусу (рис. 2). Предполагается, что элемент диска массы m с моментом инерции J может поворачиваться вокруг своего центра масс на угол φ , а центр масс может смещаться по вертикали на величину x относительно положения равновесия. Вязкоупругие свойства диска моделируются восстанавливающими силами и моментами с коэффициентами жесткости c_1 , c_2 и коэффициентами вязкости d_1 , d_2 , влияющими на вертикальное поступательное и вращательное движения элемента, соответственно (рис. 2). Диск подвергается воздействию двух тормозных колодок с жесткостями контакта $c_3/2$, находящихся на верхней и нижней поверхностях диска на расстоянии s от центра вращения рассматриваемого элемента. Кулоновское трение в точках контакта создает силу сопротивления, пропорциональную силе нормального давления с коэффициентом μ . Предполагается, что при отсутствии нагрузки элемент диска движется с постоянной скоростью v_0 . Малые вибрации системы в окрестности положения

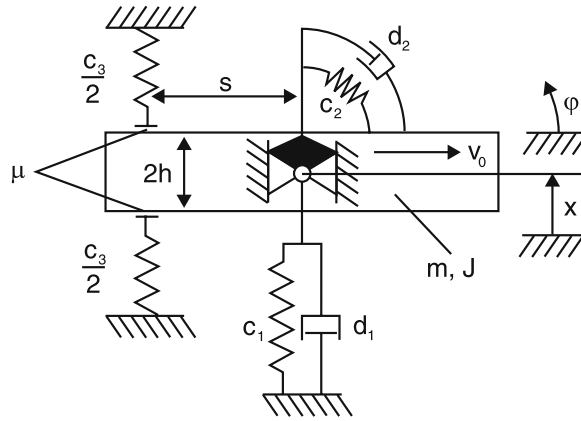


Рис. 2. Элемент вращающегося диска с точками контакта на верхней и нижней поверхностях [14].

равновесия, возникающие при воздействии тормозных колодок на диск, описываются уравнением (1.1), где $\mathbf{y} = [x, \varphi]^T$, а матрицы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{A}$ имеют вид [14]

$$\mathbf{D} = \frac{1}{mJ} \begin{bmatrix} Jd_1 & 0 \\ 0 & md_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{mJ} \begin{bmatrix} J(c_1 + c_3) & -Jc_3s \\ m(\mu h - s)c_3 & m(s - \mu h)c_3s + mc_2 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим сначала систему без демпфирования ($d_1 = 0$, $d_2 = 0$). Решая уравнение $(\text{tr } \mathbf{A})^2 = 4 \det \mathbf{A}$, найдем для такой системы критическое значение коэффициента трения μ , превышение которого вызывает вибрацию диска:

$$\mu_0 = \frac{s}{h} + \frac{mc_2 + J(c_3 - c_1) - 2\sqrt{c_3J(mc_2 - Jc_1)}}{hsmc_3}. \quad (4.2)$$

При приближении μ к критическому значению (4.2) две собственные частоты сближаются и образуют двукратную критическую частоту ω_0 . С учетом (4.2) из уравнения $\omega_0^2 = \text{tr } \mathbf{A}(\mu_0)/2$ найдем

$$\omega_0^2 = \frac{c_1}{m} + \frac{\sqrt{c_3J(mc_2 - Jc_1)}}{Jm}. \quad (4.3)$$

Дальнейшее увеличение коэффициента трения вызывает распад двукратного собственного значения $i\omega_0$ на два простых собственных значения, одно из которых уходит на правую полуплоскость комплексной плоскости, приводя к вибрациям диска, проявляющимся в виде скрипа тормозов.

Для значений параметров, приведенных в работе [14],

$$\begin{aligned} m &= 50 \text{ кг}, \quad J = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ c_1 &= 10 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}, \quad c_2 = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad c_3 = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}, \\ s &= 1 \text{ м}, \quad h = 2 \text{ м}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

критический коэффициент трения и частота равны

$$\mu_0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{15}\sqrt{6} \simeq 0,50337, \quad (4.5)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{5}\sqrt{5 + 10\sqrt{6}} \simeq 1,08618 \text{ с}^{-1}. \quad (4.6)$$

Критическое значение коэффициента трения $\mu_{\text{кр}}$ для системы с демпфированием ($d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$) находится при помощи критерия Рауса—Гурвица, примененного к характеристическому полиному

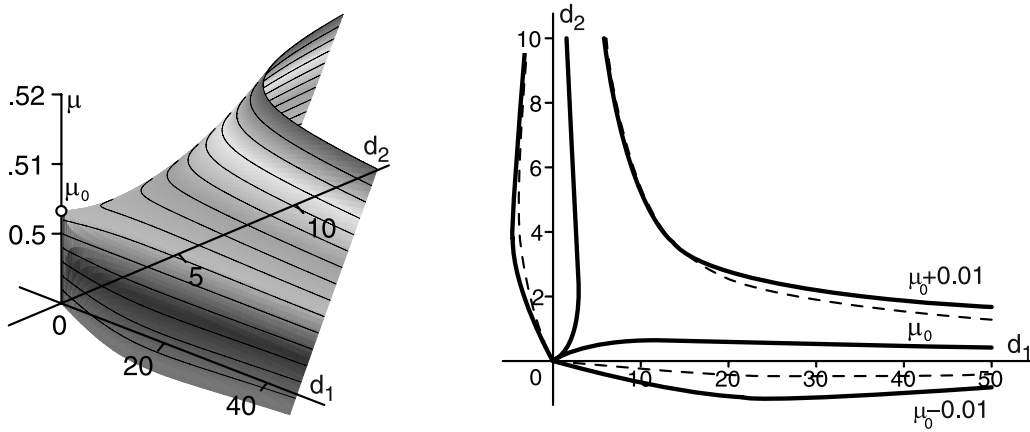


Рис. 3. Критическое значение коэффициента трения μ как функция d_1 , d_2 и ее линии уровня для значений параметров из (4.4).

системы (1.1), (4.1):

$$\mu_{cr} = \frac{s}{h} + \frac{mc_2 - Jc_1}{mhsc_3} + \frac{Jd_1^2 + md_1d_2}{2m^2hsc_3} + \frac{J^2d_1^2 + m^2d_2^2}{2m^2hsc_1d_2} - \frac{Jd_1 + md_2}{2d_1d_2m^2hsc_3} \left[(c_3(Jd_1 - md_2) + d_2d_1^2)^2 - 4md_1d_2(c_1c_3J - mc_2c_3 + d_1d_2c_1) \right]^{1/2}. \quad (4.7)$$

Поверхность (4.7) и ее линии уровня показаны на рис. 3. Для значений параметров из (4.4) и $d_1 = 1 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$, $d_2 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ с использованием (4.7) найдем [14]

$$\mu_{cr} = \frac{24803}{30000} - \frac{\sqrt{10553201}}{10000} \simeq 0,50191 < \mu_0 \simeq 0,50337. \quad (4.8)$$

Неравенство (4.8) выражает парадокс дестабилизации неконсервативной системы малыми диссипативными силами: критическое значение коэффициента трения падает скачком. Подставляя (4.4) и (4.8) в характеристическое уравнение системы (1.1), (4.1), найдем критическую частоту, соответствующую критическому коэффициенту трения (4.8)

$$\omega_{cr} \simeq 1,15304 \text{ с}^{-1}. \quad (4.9)$$

Сравнивая (4.6) и (4.9) можно сделать вывод, что критическая частота вибрации диска при учете диссипативных сил также меняется скачком.

Найдем теперь аппроксимации критических значений коэффициента трения и частоты, используя общие формулы настоящей работы. Подставляя матрицы (4.1) в выражения (3.19), (3.20), найдем величину $\tilde{f}$ и матрицу $\mathbf{G}$:

$$\tilde{f} = \frac{c_3sh(J(\omega_0^2m - c_1) - 2\sqrt{c_3J(mc_2 - Jc_1)})}{4mJ^2\omega_0^2}, \quad \mathbf{G} = \frac{1}{8\omega_0^2mJ} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

а также векторы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{f} = \left(\frac{c_1 + c_3 - \omega_0^2m}{4\omega_0^2m^2}, \frac{J(c_1 - c_3 - \omega_0^2m) + 2\sqrt{c_3J(mc_2 - Jc_1)}}{4\omega_0^2mJ^2} \right), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{h} = \left(\frac{c_1 + c_3 - 3\omega_0^2m}{4\omega_0^3m^2}, \frac{J(c_1 - c_3 - 3\omega_0^2m) + 2\sqrt{c_3J(mc_2 - Jc_1)}}{4\omega_0^3mJ^2} \right). \quad (4.12)$$

Используя (4.11) и (4.12) в уравнении (3.15) и учитывая (4.4), найдем критический коэффициент трения в виде

$$\mu_{cr}(d_1, d_2) = \mu_0 - \frac{1153\sqrt{6} - 2448}{3000} \frac{(d_1 - 5d_2)^2}{(5d_1 + (13 + 7\sqrt{6})d_2)^2} + \frac{12 + \sqrt{6}}{72000} d_1d_2. \quad (4.13)$$

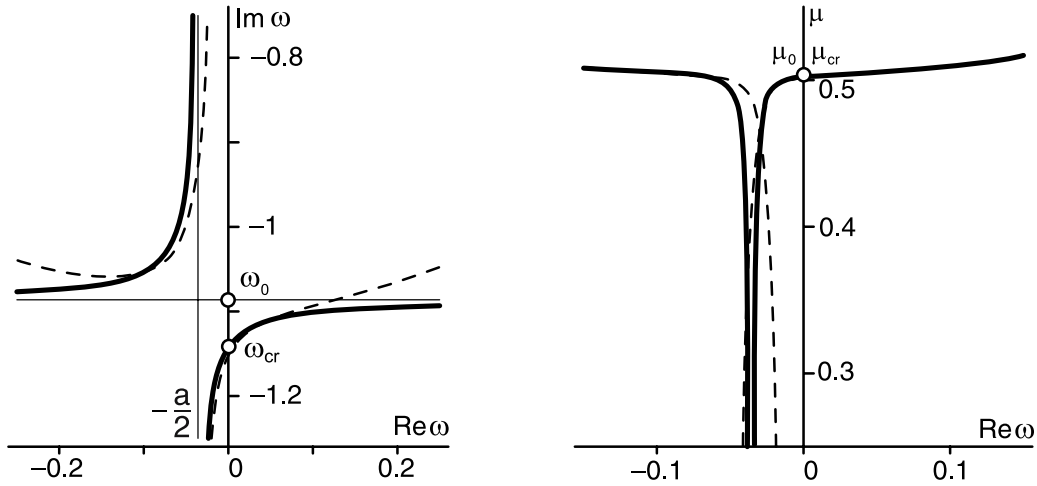


Рис. 4. Траектории собственных значений и их аппроксимации для $d_1 = 1 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$, $d_2 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Поверхность критического коэффициента трения (4.7) и ее аппроксимация (4.13) показаны на рис. 3.

Из (4.13) следует, что при $d_1 = 5d_2$ скачок критического коэффициента трения отсутствует. Для коэффициентов демпфирования $d_1 = 1 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$, $d_2 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ при помощи (4.13) получим

$$\mu_{\text{cr}} = \frac{119777}{6000} - \frac{63559}{8000}\sqrt{6} \simeq 0,50194. \quad (4.14)$$

При этом частота потери устойчивости, найденная по приближенной формуле (3.21), равна

$$\omega_{\text{cr}} = \frac{14\sqrt{6} - 29}{25}\sqrt{5 + 10\sqrt{6}} \simeq 1,14980 \text{ с}^{-1}. \quad (4.15)$$

Сравнение выражений (4.8), (4.9) и (4.14), (4.15) показывает, что аппроксимации критических величин, полученные из изучения распада кратных корней характеристического полинома, хорошо приближают точные решения.

С использованием (4.10)–(4.12) в формулах (3.21)–(3.23) можно найти аппроксимацию траекторий собственных значений на комплексной плоскости вблизи $i\omega_0$. Для значений параметров (4.4) величины, заданные уравнениями (3.24), имеют вид

$$\begin{aligned} a &= \frac{38 - 7\sqrt{6}}{2300}d_1 + \frac{43 + 6\sqrt{6}}{920}d_2, \quad c = \frac{6(\sqrt{6} - 12)}{23}(\mu - \mu_0) + \frac{d_1 d_2}{2000}, \\ d &= \left(-\frac{33 + 3\sqrt{6}}{2300}d_2 + \frac{-15 + 7\sqrt{6}}{11500}d_1 \right) \sqrt{5 + 10\sqrt{6}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Траектории собственных значений, вычисленные в [14] путем решения характеристического уравнения при значениях параметров (4.4) для $d_1 = 1 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$, $d_2 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, и их аппроксимации (3.21), (3.22), (4.16) показаны на рис. 4 пунктиром и сплошными линиями соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961.
3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений, I// Усп. мат. наук. — 1960. — 15, № 3. — С. 3–80.
4. Гугнина В. И. Распространение метода Д. К. Фаддеева на полиномиальные матрицы// Докл. АН УзССР. — 1958. — 1. — С. 5–10.

5. *Жинжер Н. И.* Влияние диссипативных сил с неполной диссипацией на устойчивость упругих систем// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1994. — 19, № 1. — С. 149–155.
6. *Кириллов О. Н.* Парадокс дестабилизации// Докл. РАН. — 395, № 5. — С. 614–620.
7. *Сейранян А. П.* Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем// Усп. мех. — 1990. — 13, № 2. — С. 89–124.
8. *Сейранян А. П.* О стабилизации неконсервативных систем диссипативными силами и неопределенности критической нагрузки// Докл. РАН. — 1996. — 348, № 3. — С. 323–326.
9. *Сейранян А. П., Кириллов О. Н.* О влиянии малых диссипативных и гироскопических сил на устойчивость неконсервативных систем// Докл. РАН. — 2003. — 393, № 4. — С. 483–488.
10. *Barnett S.* Leverrier's algorithm: a new proof and extensions// SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1989. — 10, № 4. — С. 551–556.
11. *Bilharz H.* Bemerkung zu einem Satze von Hurwitz// Z. Angew. Math. Mech. — 1944. — 24. — С. 77–82.
12. *Bloch A. M., Krishnaprasad P. S., Marsden J. E., Ratiu T. S.* Dissipation induced instabilities// Ann. Inst. H. Poincaré. — 1994. — 11, № 1. — С. 37–90.
13. *Bolotin V. V., Zhinzher N. I.* Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces// Int. J. Solids Structures. — 1969. — 5. — С. 965–989.
14. *Popp K., Rudolph M., Kroger M., Lindner M.* Mechanisms to generate and to avoid friction induced vibrations// In: VDI-Berichte № 1736. — 2002.
15. *Seyranian A. P., Kirillov O. N.* Bifurcation diagrams and stability boundaries of circulatory systems// Theor. Appl. Mech. — 2001. — 26. — С. 135–168.
16. *Seyranian A. P., Mailybaev A. A.* Multiparameter stability theory with mechanical applications. — Singapore: World Scientific, 2003.
17. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik// Ing.-Arch. — 1952. — 20. — С. 49–56.

О. Н. Кириллов

Институт механики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: kirillov@imec.msu.ru

О СТРУКТУРЕ ОБРАТИМОЙ СИСТЕМЫ С ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ К СЕДЛО-ЦЕНТРУ

© 2005 г. О. Ю. КОЛЬЦОВА

Аннотация. Основная цель работы — изучить динамику в окрестности симметричной гомоклинической траектории к особой точке типа седло-центр, в частности, найти гомоклинические траектории к периодическим решениям на центральном многообразии, а также периодические траектории, накапливающиеся к петле.

1. Введение. Основная цель данной работы — изучить динамику в окрестности симметричной гомоклинической траектории Γ к особой точке типа седло-центр $\mathcal{O}$, в частности, найти гомоклинические траектории к периодическим решениям на центральном многообразии, а также периодические траектории, накапливающиеся к петле. Существование гомоклинической траектории в этом случае есть вырождение коразмерности один, так же как и в обратимом гамильтоновом случае [13], в гамильтоновом случае — коразмерности два [4, 11], а в общем случае — коразмерности три.

В [13] приведен подобный анализ случая обратимой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы и петель к седло-центру и доказано существование n -обходных гомоклинических траекторий к седло-центру, n -обходных периодических траекторий и хаотическое поведение в окрестности исходной петли. Для доказательства этих фактов использовалось отображение Пуанкаре и локальная нормальная форма. В [4] рассмотрен гамильтонов случай без предположения обратимости векторного поля и доказано существование четырех гомоклинических траекторий к каждому периодическому движению на центральном подмногообразии, а также найдено счетное множество периодических решений в уровне гамильтониана, содержащем петлю. Оба эти результата получены при условии выполнения некоторого условия общности. В [11] рассмотрено общее двухпараметрическое семейство гамильтонианов с двумя степенями свободы с седло-центром, имеющее при некотором значении параметров петлю к седло-центру. В этой работе условие, полученное ранее в [4], сформулировано в инвариантной форме в терминах линеаризованной на петле системы, а также доказано существование однообходных периодических траекторий в окрестности петли. На языке спектральной теории условие, полученное в [4], было сформулировано в [7]. Результат о гомоклинических траекториях к центральному подмногообразию был обобщен на случай n степеней свободы в [12]. Существование систем с многообходными петлями к особой точке в двухпараметрическом семействе гамильтоновых систем с седло-центром доказано в [3, 10, 11] (в первых двух работах доказывается существование двухобходных и трехобходных гомоклинических траекторий, а в последней — $2^k 3^m$ -обходных для любых положительных k и m). В [5] рассматривались бифуркации симметричных гомоклинических траекторий к седло-центру в обратимом и обратимом гамильтоновом случае, но там использовалась нормальная форма, сходимости которой не доказана. В [9] рассматривалось двухпараметрическое семейство обратимых векторных полей, имеющее при некотором значении параметров петлю к седло-центру, там изучались бифуркации однообходных гомоклинических траекторий к центральному подмногообразию с помощью Лин метода.

Будем рассматривать аналитическое обратимое векторное поле f в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ с гомоклинической траекторией к особой точке $\mathcal{O}$ типа седло-центр. Напомним, что особая точка называется седло-центром, если оператор линеаризации $Df(\mathcal{O})$ имеет ненулевые собственные значения $\pm\lambda$, $\pm i\omega$ (в силу обратимости спектр оператора линеаризации симметричен относительно начала координат [6]). Обратимость означает, что существует линейная инволюция $R : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

Работа выполнена при поддержке CRDF (проект RU-M1-2583-MO-04), гранта Royal Society и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00483).

$R^2 = \text{id}$, $\dim \text{Fix}(R) = 2$, такая, что для любых $x \in \mathbb{R}^4$ выполнено условие $f(Rx) = -Rf(x)$. Предполагается, что особая точка $\mathcal{O}$ симметричная, т.е. $R(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Такая особая точка имеет локальное двумерное центральное подмногообразие W^c , заполненное симметричными периодическими траекториями седлового типа (семейство Ляпунова), окружающими особую точку $\mathcal{O}$ [6] (в данном случае это подмногообразие является единственным). Кроме того, существуют локальные трехмерные центрально-устойчивое (W^{cs}) и центрально-неустойчивое (W^{cu}) подмногообразия. Каждое из этих подмногообразий является объединением устойчивых или неустойчивых подмногообразий периодических траектории из W^c . Также существуют локальные одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия, W^s и W^u , которые, в силу обратимости, связаны отношением симметрии R . Таким образом, если гомоклиническая траектория существует, то она должна быть либо симметричной, либо должны существовать две гомоклинические траектории, связанные симметрией и образующие «восьмерку».

Не нарушая общности, можно считать, что точка $\mathcal{O}$ совпадает с началом координат, а оператор линеаризации $Df(0)$ приведен к нормальной форме:

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0, \quad \omega > 0.$$

Поскольку собственный вектор, соответствующий λ , под действием инволюции R переходит в собственный вектор, соответствующий $-\lambda$, а подпространство, натянутое на собственные векторы, соответствующие чисто мнимым собственным значениям $\pm i\omega$, инвариантно относительно действия инволюции, то можно считать, что R имеет следующий вид:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Локальная нормальная форма. Для изучения свойств локального потока, приведем векторное поле в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки $\mathcal{O}$ к нормальной форме.

Лемма 1. В некоторой окрестности точки $\mathcal{O}$ существует аналитическая, коммутирующая с R , замена координат которая приводит векторное поле f , $x = (x_1, x_2, y_1, y_2)$, к нормальной форме:

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 F(\xi, \eta), \quad \dot{x}_2 = \omega y_2 G(\xi, \eta), \quad \dot{y}_1 = -\lambda y_1 F(\xi, \eta), \quad \dot{y}_2 = -\omega x_2 G(\xi, \eta), \quad (1)$$

где $\xi = x_1 y_1$, $\eta = (x_2^2 + y_2^2)/2$ — первые интегралы, $F(0, 0) = G(0, 0) = 1$.

Доказательство. Перейдем от действительных координат $x = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ к комплексным координатам $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$:

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2 - iy_2, \quad z_3 = y_1, \quad z_4 = x_2 + iy_2.$$

Будем обозначать через $\bar{f}$ рассматриваемое векторное поле f в новых координатах. Матрица линеаризации $\Lambda = D\bar{f}(0)$ векторного поля $\bar{f}$ в точке $\mathcal{O}$ имеет жорданов вид

$$D\bar{f}(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega \end{pmatrix},$$

а поле остается обратимым относительно инволюции

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следуя [1], будем говорить, что рассматриваемая система

$$\dot{z} = \bar{f}(z), \quad z \in \mathbb{C}^4, \quad (2)$$

имеет нормальную форму, если правые части содержат только резонансные члены:

$$\dot{z}_k = z_k \sum_{(Q, \Lambda)=0} g_Q^k z^Q, \quad k = \overline{1, 4},$$

где $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, $z^Q = z_1^{q_1} z_2^{q_2} z_3^{q_3} z_4^{q_4}$, $q_k \geq 0$, $\Lambda = (\lambda, i\omega, -\lambda, -i\omega)$ — диагональ матрицы $D\bar{f}(0)$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение. В нашем случае условие резонанса имеет вид

$$(Q, \Lambda) = \lambda q_1 + i\omega q_2 - \lambda q_3 - i\omega q_4 = 0,$$

откуда сразу получаем, что $q_1 = q_3$, $q_2 = q_4$ и $z^Q = \zeta_1^{q_1} \zeta_2^{q_2}$, где $\zeta_1 = z_1 z_3$, $\zeta_2 = z_2 z_4$. Таким образом, нормальная форма (без учета обратимости) записывается в виде

$$\dot{z}_k = z_k \sum_{\substack{q_1 \geq 0 \\ q_2 \geq 0}} g_Q^k \zeta_1^{q_1} \zeta_2^{q_2}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (3)$$

где $g_0^1 = -g_0^3 = \lambda$, $g_0^2 = -g_0^4 = i\omega$. Процедура приведения к формальной нормальной форме является стандартной (см., например, [1, 8]). Так как нормальная форма наследует обратимость, то получаем, что $g_Q^1 = -g_Q^3$, $g_Q^2 = -g_Q^4$ для всех Q . Таким образом, формальная нормальная форма системы (2) имеет вид

$$\dot{z}_1 = \lambda z_1 F(\zeta_1, \zeta_2), \quad \dot{z}_2 = i\omega z_2 G(\zeta_1, \zeta_2), \quad \dot{z}_3 = -\lambda z_3 F(\zeta_1, \zeta_2), \quad \dot{z}_4 = -i\omega z_4 G(\zeta_1, \zeta_2), \quad (4)$$

где F, G — многочлены, $F(0, 0) = G(0, 0) = 1$. Для доказательства аналитичности нормализующего преобразования воспользуемся результатами [2].

Теорема 1. Если у аналитической системы вектор Λ удовлетворяет условию ω и нормальная форма

$$\dot{z}_k = \psi_k(z), \quad k = \overline{1, n},$$

удовлетворяет условию A , то существует аналитическое нормализующее преобразование.

Условие A . $\psi_k = \lambda_k z_k \alpha + \bar{\lambda}_k z_k \beta$, где $\alpha = \alpha(z)$, $\beta = \beta(z)$ — некоторые степенные ряды.

Условие ω . Положим $\omega_k = \min |(Q, \Lambda)|$ по Q :

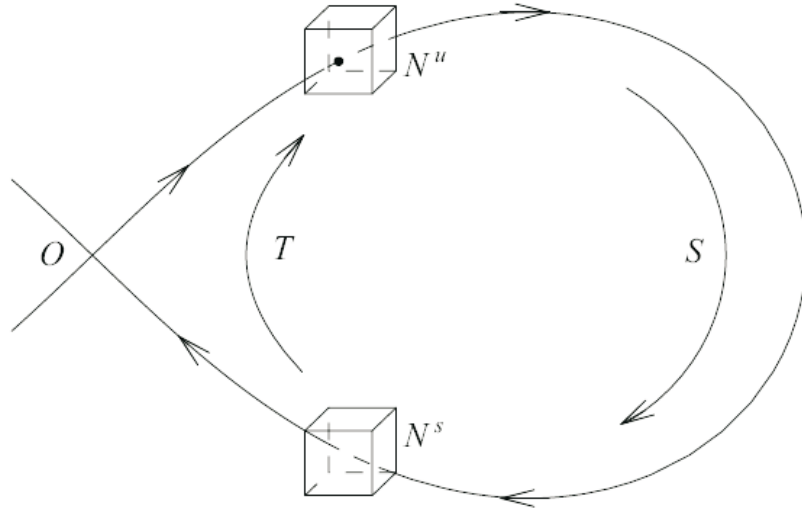
$$\sum q_i < 2^k, \quad Q + E_j \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (Q, \Lambda) \neq 0,$$

где E_j — j -й единичный вектор, $\mathbb{Z}_+^n = \mathbb{Z}^n \cap \{Q \geq 0\}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ln \omega_k > -\infty$.

Условие ω является слабым арифметическим ограничением на собственные числа и выполнено почти всегда. В данном случае нетрудно проверить, что $\omega_k = \mu$, где $\mu = \min\{\omega, \lambda\}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ln \mu$ сходится к $\ln \mu$, следовательно, условие ω выполнено. С другой стороны, условие A является жестким ограничением на нормальную форму. Покажем, что в нашем случае и это условие тоже выполнено. Действительно, из условия A получаем, что нормальная форма в рассматриваемом случае должна иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1(\lambda_1 \alpha + \bar{\lambda}_1 \beta) = \lambda z_1(\alpha + \beta), & \dot{z}_2 &= z_2(\lambda_2 \alpha + \bar{\lambda}_2 \beta) = i\omega z_2(\alpha - \beta), \\ \dot{z}_3 &= z_3(\lambda_3 \alpha + \bar{\lambda}_3 \beta) = -\lambda z_3(\alpha + \beta), & \dot{z}_4 &= z_4(\lambda_4 \alpha + \bar{\lambda}_4 \beta) = -i\omega z_4(\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), получаем $\alpha = (F + G)/2$, $\beta = (F - G)/2$. Возвращаясь к действительным координатам $x = (x_1, x_2, y_1, y_2)$, получаем (1). $\square$

Рис. 1. Отображение Пуанкаре $P: N^u \rightarrow N^s$, $P = T \circ S$.

Заметим, что в новых координатах все перечисленные выше локальные подмногообразия распрямлены, т.е. подмногообразие W^s совпадает с осью y_1 , W^u — с x_1 , а остальные подмногообразия имеют представления $W^{cs} = \{x_1 = 0\}$, $W^{cu} = \{y_1 = 0\}$, $W^c = \{x_1 = y_1 = 0\}$. Будем предполагать, что векторное поле f имеет гомоклиническую траекторию Γ к особой точке $\mathcal{O}$, т.е. одна из компонент множества $W^s \setminus \{\mathcal{O}\}$ совпадает с одной из компонент множества $W^s \setminus \{\mathcal{O}\}$, образуя петлю.

3. Отображение Пуанкаре. Для изучения поведения траекторий в окрестности Γ построим отображение Пуанкаре P , которое представим как композицию двух отображений: локального $T: N^s \rightarrow N^u$ в окрестности особой точки $\mathcal{O}$ и глобального $S: N^u \rightarrow N^s$ в окрестности глобальной части гомоклинической траектории Γ , где N^s и N^u — локальные секущие к W^s и W^u соответственно (рис. 1). В качестве N^u выберем трехмерный диск, трансверсальный W^s :

$$N^u = \{x_1 = \pm d, y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 < \varepsilon^2\},$$

где d и ε — достаточно малые положительные величины, выбранные таким образом, чтобы секущая N^u содержалась в некоторой окрестности особой точки $\mathcal{O}$, в которой векторное поле имеет вид (1). В качестве второй секущей возьмем образ N^u под действием инволюции R :

$$N^s = R(N^u) = \{y_1 = \pm d, x_1^2 + x_2^2 + y_2^2 < \varepsilon^2\}.$$

3.1. Локальное отображение T . Для построения локального отображения воспользуемся нормальной формой, полученной в лемме 1. Нетрудно видеть, что система (1) интегрируется в квадратурах, и ее решениями будут:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 \exp \lambda F^0 t, & x_2 &= x_2^0 \cos \omega G^0 t - y_2^0 \sin \omega G^0 t, \\ y_1 &= y_1^0 \exp(-\lambda F^0 t), & y_2 &= x_2^0 \sin \omega G^0 t + y_2^0 \cos \omega G^0 t, \end{aligned} \quad (6)$$

где $F^0 = F(\xi^0, \eta^0)$, $G^0 = G(\xi^0, \eta^0)$. Найдем время перехода t_{Π} с N^s на N^u . Для определенности будем предполагать, что траектория Γ выходит из особой точки, локально совпадая с полуосью $x_1 > 0$. В зависимости от того, как траектория входит в $\mathcal{O}$, будем различать два случая:

Случай А. Траектория Γ входит в особую точку, совпадая локально с $y_1 > 0$ (рис. 2).

Случай В. Входящая часть Γ совпадает локально с $y_1 < 0$, т.е. существуют две гомоклинические траектории, связанные отношением симметрии R (рис. 3).

Заметим, что существование симметричной гомоклинической траектории к особой точке (случай А) есть вырождение коразмерности один, в то время как в случае В — коразмерности три.

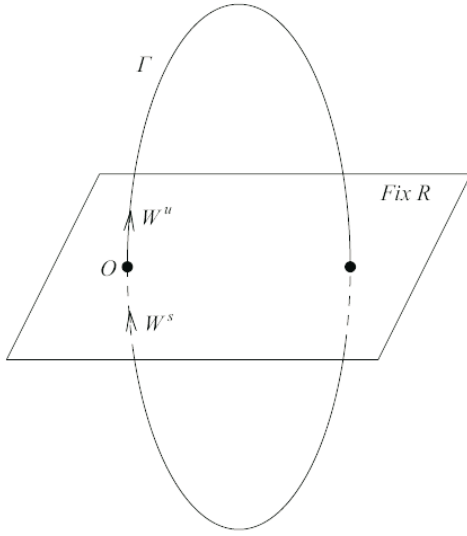


Рис. 2. Симметричная гомоклиническая траектория Γ к O (случай А).

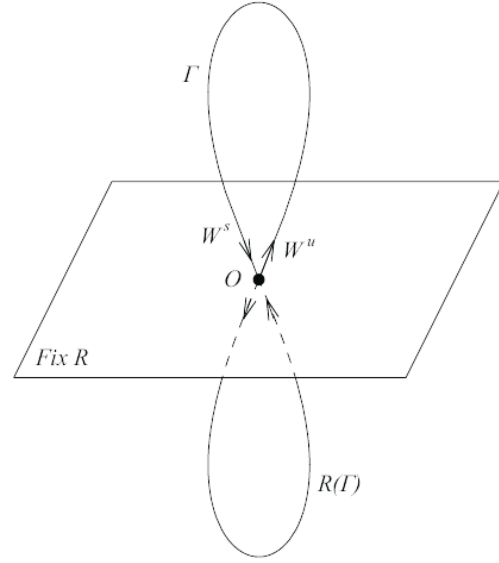


Рис. 3. Две гомоклинические траектории к O , связанные симметрией R (случай В).

В данной работе рассматривается случай А, т.е. предполагается, что траектория Γ — симметричная. Для обозначения координат на секущих N^s и N^u будем использовать соответствующие индексы, т.е. (x_1^s, x_2^s, y_2^s) — координаты на N^s , а (y_1^u, x_2^u, y_2^u) — на N^u . Используя вид локального потока (6), находим время перехода $t_{\Pi} = 1/(\lambda F^s) \ln d/x_1^s$, где $F^s = F(\xi^s, \eta^s)$. Таким образом, локальное отображение T записывается в следующем виде:

$$y_1^u = x_1^s, \quad x_2^u = x_2^s \cos \Delta - y_2^s \sin \Delta, \quad y_2^u = x_2^s \sin \Delta + y_2^s \cos \Delta,$$

где $\Delta = \kappa G^s / F^s \ln d / x_1^s$, $\kappa = \omega / \lambda$, $G^s = G(\xi^s, \eta^s)$.

3.2. Глобальное отображение S . Глобальное отображение — это $\tilde{R}$ -обратимый диффеоморфизм ($\tilde{R}$ — ограничение инволюции R на секущие) такой, что точка $(0, 0, 0) \in N^u$ переходит в $(0, 0, 0) \in N^s$ (условие существования гомоклинической траектории Γ). Обозначим через A матрицу Якоби $DS/D(y_1^u, x_2^u, y_2^u)$, вычисленную в точке $(0, 0, 0)$. Для дальнейшего изучения отображения Пуанкаре $P = T \circ S$ приведем матрицу A к некоторому наиболее простому виду.

Лемма 2. *Существует такая константа θ , зависящая от коэффициентов матрицы A , что преобразования линейного поворота на плоскости (x_2^s, y_2^s) на угол θ и на плоскости (x_2^u, y_2^u) на угол $-\theta$ приводит матрицу A к одному из следующих видов:*

если $a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\beta \\ \frac{\alpha^2 - 1}{\beta} & 0 & -\alpha \\ \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\beta} & 1 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\alpha = a_{11}$, $\beta = \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2}$, $\gamma = a_{33} - a_{22}$;

если $a_{31}^2 + a_{21}^2 \neq 0$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha & \frac{1 - \alpha^2}{\beta} & \frac{\gamma(\alpha - 1)}{\beta} \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & -\alpha & \gamma \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\alpha = a_{11}$, $\beta = \sqrt{a_{31}^2 + a_{21}^2}$, $\gamma = a_{33} - a_{22}$;

в остальных случаях

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\beta = (-\gamma + \sqrt{4 + \gamma^2})/2$, $\gamma = a_{33} - a_{22}$, или

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Доказательство. На секущих N^u и N^s сделаем линейную замену координат с матрицами T_{θ^u} и T_{θ^s} соответственно, где

$$T_{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \theta^s \quad \text{или} \quad \theta = \theta^u.$$

В результате получим новое глобальное отображение $\tilde{S} = T_{\theta^s} \circ S \circ T_{\theta^u}^{-1}$. Из условия обратимости $\tilde{S}$ относительно инволюции $\tilde{R}$ получаем, что $\theta^s = -\theta^u = \theta$. Если выполнено условие $a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$, то, полагая в преобразованной матрице $\tilde{A}$ коэффициент $\tilde{a}_{12}$ равным нулю, получаем, что

$$\sin \theta = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2}}, \quad \cos \theta = -\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2}}.$$

После преобразования коэффициентов с учетом того, что исходная матрица A обладает свойством обратимости

$$\tilde{R}A\tilde{R} = A^{-1}, \quad (11)$$

получаем, что матрица $\tilde{A}$ имеет вид (7).

В случае $a_{21}^2 + a_{31}^2 \neq 0$ можно обнулить коэффициент $\tilde{a}_{21}$, откуда получаем

$$\sin \theta = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{21}^2 + a_{31}^2}}, \quad \cos \theta = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{21}^2 + a_{31}^2}},$$

и после преобразования остальных коэффициентов получаем, что преобразованная матрица $\tilde{A}$ имеет вид (8).

Заметим, что в случае $a_{12} = a_{13} = a_{31} = a_{21} = 0$ из условия (11) получаем, что $a_{11}^2 = 1$, а остальные коэффициенты матрицы A должны удовлетворять одному из следующих двух условий:

$$a_{11} = -1, \quad a_{22} = a_{33} = 0, \quad a_{32} - a_{23} = 0, \quad a_{23}^2 = a_{32}^2 = 1$$

или

$$a_{11} = 1, \quad a_{23} + a_{32} = 0, \quad a_{22}a_{33} + a_{32}^2 = 1.$$

В первом случае сразу же получаем (10). Преобразованная матрица $\tilde{A}$ во втором случае имеет блочный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}.$$

Выбирая угол θ так, чтобы $\tilde{a}_{23} = 0$, получаем

$$\tilde{a}_{32} = 0, \quad \tilde{a}_{22} = \frac{1}{2} \left(-(a_{33} - a_{22}) + \sqrt{4 + (a_{33} - a_{22})^2} \right), \quad \tilde{a}_{33} = \frac{1}{2} \left(a_{33} - a_{22} + \sqrt{4 + (a_{33} - a_{22})^2} \right).$$

В данном случае угол поворота θ удовлетворяет соотношениям

$$\sin 2\theta = \frac{2a_{23}}{\sqrt{4a_{23}^2 + (a_{33} + a_{22})^2}}, \quad \cos 2\theta = \frac{a_{33} + a_{22}}{\sqrt{4a_{23}^2 + (a_{33} + a_{22})^2}}.$$

Таким образом, $\tilde{A}$ имеет вид (9). □

В дальнейшем мы будем предполагать, что матрица A имеет один из полученных выше видов (7)–(10).

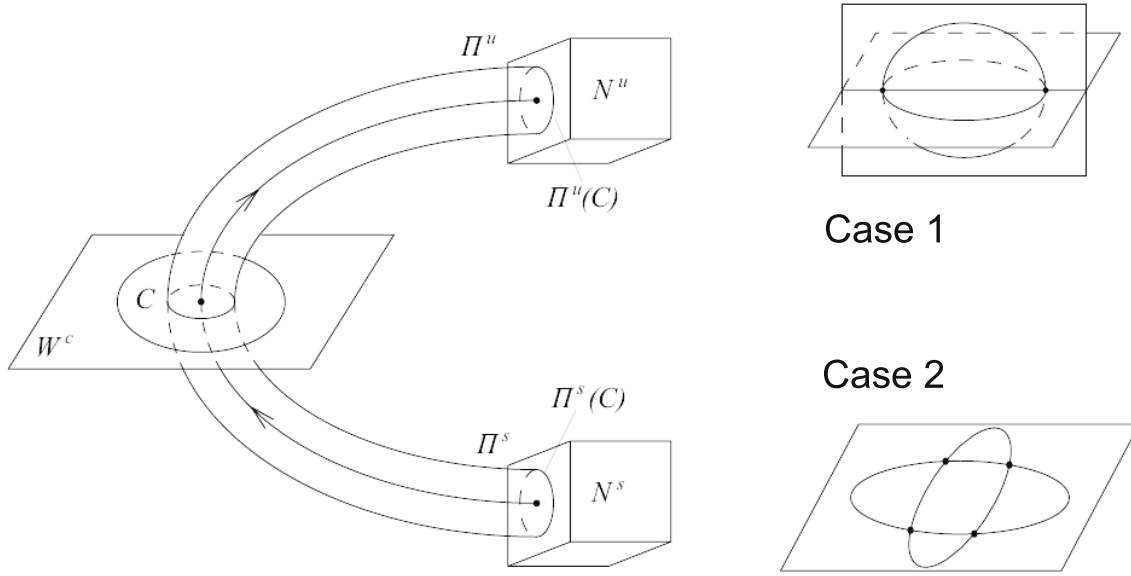


Рис. 4. Случаи I и II трансверсального и нетрансверсального пересечений Π^s и $S(\Pi^u)$.

4. Гомоклинические траектории к W^c . Зафиксируем некоторое периодическое движение C из W^c и найдем пересечение его устойчивого $W^s(C)$ и неустойчивого $W^u(C)$ многообразий.

Обозначим след центрально-устойчивого подмногообразия W^{cs} на N^s через Π^s , а след центрально-неустойчивого подмногообразия W^{cu} на N^u — через Π^u . В выбранных выше координатах они имеют представления $\Pi^s = \{x_1^s = 0\}$, $\Pi^u = \{y_1^u = 0\}$. Рассмотрим пересечение Π^s и образа Π^u под действием глобального отображения S . Возможны два случая (рис. 4):

Случай I. Трансверсальное пересечение: след Π^s и касательное пространство к $S(\Pi^u)$ в точке $(0, 0, 0)$ трансверсальны в N^s . Очевидно, что трансверсальное пересечение накладывает на матрицу A условие $a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$.

Случай II. Нетрансверсальное пересечение: след Π^s и касательное пространство к $S(\Pi^u)$ в точке $(0, 0, 0)$ совпадают. В этом случае получаем условие на коэффициенты матрицы A : $a_{12} = a_{13} = 0$.

В следующей теореме в случае I доказывается существование двух гомоклинических траекторий к каждому периодическому движению из W^c в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки $\mathcal{O}$, в которой локальный поток записан в нормальной форме (1).

Теорема 2. Пусть имеет место случай I (трансверсальное пересечение). Тогда существуют две трансверсальные гомоклинические траектории к каждой седловой периодической траектории Ляпунова из $W^c \cap \mathcal{U}$.

Доказательство. Пусть Π^s и касательное пространство к $S(\Pi^u)$ в точке $(0, 0, 0)$ пересекаются трансверсально в N^s . Тогда пересечение Π^s и $S(\Pi^u)$ одномерное, $L^s = \Pi^s \cap S(\Pi^u)$. Для того чтобы найти представление L^s , подставим $x_1^s = 0$, $y_1^u = 0$ в глобальное отображение

$$x_1^s = \alpha y_1^u - \beta y_2^u + O_2, \quad x_2^s = \frac{\alpha^2 - 1}{\beta} y_1^u - \alpha y_2^u + O_2, \quad y_2^s = \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\beta} y_1^u + x_2^u + \gamma y_2^u + O_2,$$

где O_2 — члены более высокого порядка по всем переменным. Отсюда получаем, что L^s — C^2 -близкая к прямой $\{x_1^s = x_2^s = 0\}$; прообразом этой кривой $S^{-1}(L^s)$ будет кривая L^u , которая C^2 -близка к $\{y_1^u = y_2^u = 0\}$. Ограничением глобального отображения на L^u является

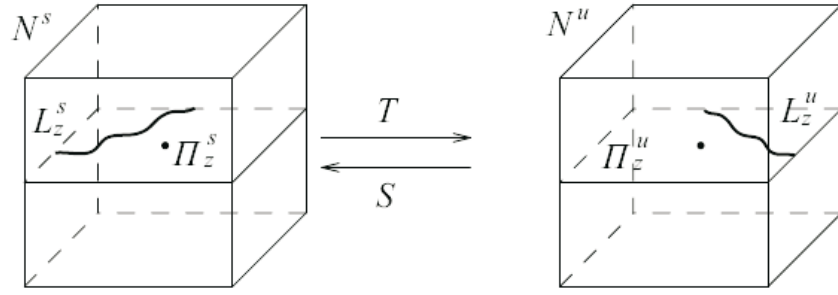


Рис. 5. Случай I: L_z^u — кривая, расположенная в слое Π_z^u , которая под действием глобального отображения остается в слое Π_z^s .

одномерное отображение $\hat{S} : L^u \rightarrow L^s$, близкое к тождественному:

$$y_2^s = x_2^u + O_2. \quad (12)$$

Зафиксировав периодическую траекторию на центральном многообразии $\mathcal{C} = \{x_2^2 + y_2^2 = \rho^2\}$, получаем, что следы ее устойчивого многообразия $W^s(\mathcal{C})$ в Π^s и неустойчивого $W^u(\mathcal{C})$ в Π^u в координатах леммы 1 имеют такое же представление, что и $\mathcal{C}$ на W^c , т.е.

$$W_{tr}^s(\mathcal{C}) = \{(x_2^s)^2 + (y_2^s)^2 = \rho^2\}, \quad W_{tr}^u(\mathcal{C}) = \{(x_2^u)^2 + (y_2^u)^2 = \rho^2\}.$$

Пересечение $W_{tr}^s(\mathcal{C})$ и L^s дает две симметричные относительно начала координат точки $p_{\pm}^s$ на кривой L^s , которые являются образами точек $p_{\pm}^u = W_{tr}^u(\mathcal{C}) \cap L^u$ под действием $\hat{S}$. Таким образом, полученные точки $p_{\pm}^s$ и $p_{\pm}^u$ соответствуют трансверсальному пересечению гомоклинических траекторий к $\mathcal{C}$ и соответствующей секущей (N^s или N^u). $\square$

5. Периодические траектории в окрестности Γ . Теперь рассмотрим вопрос о существовании периодических траекторий в окрестности Γ .

Теорема 3. *Найдется такая окрестность $\mathcal{V}$ траектории Γ , в которой существует однопараметрическое семейство периодических траекторий, накапливающихся к Γ .*

Доказательство. Заметим, что локальное отображение T тождественно относительно первой координаты, т.е. существуют локальные слоения $\Pi_z^s = \{x_1^s = z\}$ на N^s и $\Pi_z^u = \{y_1^u = z\}$ на N^u такие, что $\Pi_z^u = T(\Pi_z^s)$. Глобальное отображение в линейном приближении может либо сохранить слоение (при выполнении условия нетрансверсального пересечения, случай II), либо, если имеет место случай I, слой Π_z^s трансверсально пересечется с $S(\Pi_z^u)$ по одномерной кривой. Последний случай является общим; покажем сначала существование периодических траекторий для него. Пусть $L_z^s = \Pi_z^s \cap S(\Pi_z^u)$, $L_z^u = S^{-1}(L_z^s)$ (рис. 5). Подставляя $x_1^s = z$, $y_1^u = z$ в глобальное отображение, матрица Якоби которого имеет вид (7), получаем, что кривые L_z^s и L_z^u имеют следующие представления:

$$L_z^s = \left\{ x_1^s = z, x_2^s = \sigma z + \sum_{k=0}^{\infty} P_k^s(z)(y_2^s)^k \right\}, \quad L_z^u = \left\{ y_1^u = z, y_2^u = \sigma z + \sum_{k=0}^{\infty} P_k^u(z)(x_2^u)^k \right\},$$

где $\sigma = (\alpha - 1)/\beta$, $P_0^{s(u)}(z) = O(z^2)$, $P_1^{s(u)}(z) = O(z^1)$, $P_k^{s(u)}(z) = O(1)$ для $k > 1$.

Ограничение глобального отображения $\hat{S} : L_z^u \rightarrow L_z^s$ имеет вид (12). Найдём образ кривой L_z^s под действием локального отображения T и покажем, что это будут две конечные спирали, выходящие из одной точки. Зафиксировав z , получаем параметрическое представление $T(L_z^s)$ на Π_z^u :

$$x_2^u = (\sigma z + \Sigma^s) \cos \Delta - y_2^s \sin \Delta, \quad y_2^u = (\sigma z + \Sigma^s) \sin \Delta + y_2^s \cos \Delta,$$

где Σ^s — обозначение суммы в представлении L_z^s ,

$$\Delta = \kappa(1 + O_1(\xi^s, \eta^s) \ln d/z), \quad \xi^s = dz, \quad \eta^s = \frac{1}{2}((y_2^s)^2 + (\sigma z + \Sigma^s)^2).$$

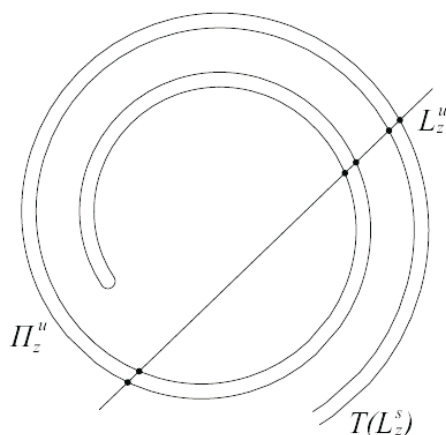


Рис. 6. Случай I: неподвижные точки отображения P на фиксированном слое Π_z^u .

Полученную кривую можно записать в виде

$$x_2^u = \rho(y_2^s, z) \cos(\Delta + \varphi(y_2^s, z)), \quad y_2^u = \rho(y_2^s, z) \sin(\Delta + \varphi(y_2^s, z)),$$

где

$$\rho(y_2^s, z) = \sqrt{(y_2^s)^2 + (\sigma z + \Sigma^s)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi(y_2^s, z) = \frac{y_2^s}{\sigma z + \Sigma^s}.$$

Нетрудно видеть, что $\rho(y_2^s, z)$ — монотонно возрастающая функция от y_2^s , а производная $\Delta + \varphi(y_2^s, z)$ по переменной y_2^s имеет в некоторой окрестности $y_2^s = 0$ при фиксированном z определенный знак; следовательно, при каждом фиксированном z получаем конечное число точек пересечения кривых $T(L_z^s)$ и L_z^u , которые соответствуют периодическим траекториям (рис. 6). Заметим, что при уменьшении z спираль закручивается сильнее (так как, очевидно, Δ увеличивается), а кривая L_z^u приближается к началу координат, следовательно число неподвижных точек отображения P увеличивается. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А. Д. Локальный метод нелокального анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
2. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Наука, 1998.
3. Кольцова О. Ю. О структуре бифуркационного множества в двухпараметрическом семействе гамильтоновых систем с петлей сепаратрисы седло-центра // Методы качественной теории дифференциальных уравнений и теории бифуркаций / Межвуз. сб. науч. тр. под ред. Л. П. Шильникова. — Нижегородский гос. ун-т, 1991. — С. 25–35.
4. Лерман Л. М. О гамильтоновых системах с петлей сепаратрисы седло-центра // Методы качественной теории дифференциальных уравнений / Межвуз. сб. науч. тр. под ред. Е. А. Леонтович-Андроновой. — Горьковский гос. ун-т, 1987. — С. 89–103.
5. Champneys A. R., Härtnerich J. Cascades of homoclinic orbits to a saddle-center for reversible and perturbed Hamiltonian systems // Dyn. Stab. Syst. — 2000. — 15, № 3. — С. 231–252.
6. Devaney R. Homoclinic orbits in Hamiltonian systems // J. Differ. Equations. — 1976. — 21. — С. 431–439.
7. Grotta Ragazzo C. Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian saddle-center // Commun. Pure Appl. Math. Phys. — 1997. — 50. — С. 105–147.
8. Iooss G., Adelmeyer M. Topics in bifurcation theory and applications / Adv. Ser. Nonlinear Dynamics. — World Scientific, 1992.
9. Klaus J., Knobloch J. Bifurcation of homoclinic orbits to a saddle-center in reversible systems // Int. J. Bifurcation Chaos. — 2003. — 13, № 9. — С. 2603–2622.
10. Koltsova O. Yu. Families of multi-round homoclinic and periodic orbits near a saddle-center equilibrium // Regul. Chaotic Dyn. — 2003. — 8, № 2. — С. 191–200.

11. *Koltsova O. Yu., Lerman L. M.* Periodic and homoclinic orbits in a two-parameter unfolding of a Hamiltonian systems with a homoclinic orbit to a saddle-center// *Int. J. Bifurcation Chaos.* — 1995. — 5, № 2. — С. 397–408.
12. *Koltsova O. Yu., Lerman L. M.* Families of transverse Poincaré homoclinic orbits in $2n$ -dimensional Hamiltonian systems close to the system with a loop to a saddle-center// *Int. J. Bifurcation Chaos.* — 1996. — 6, № 6. — С. 991–1006.
13. *Mielke A., Holmes P., O'Reilly O.* Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle-center// *J. Dyn. Differ. Equations.* — 1992. — 4. — С. 95–126.

О. Ю. Кольцова

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

E-mail: koltsova@uic.nnov.ru

МОНОДРОМИЯ R -СИСТЕМ ВЕСЕЛОВА—КОНО—ЧЕРЕДНИКА© 2005 г. **В. П. ЛЕКСИН**

Аннотация. В работе изучаются системы Пфаффа типа Фукса на комплексных линейных пространствах, которые определяются по конфигурациям векторов в этих пространствах. Показано, что ∇ -условия Веселова на конфигурацию векторов равносильны интегрируемости этих систем. Для конфигураций векторов, являющихся системами корней вещественных или комплексных групп отражений, дано описание представлений монодромии рассматриваемых пфаффовых систем. Эти представления являются деформациями стандартных представлений групп отражений типа представлений Бурау и были определены ранее Сквайером и Гивенталем.

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются линейные пфаффовы системы

$$d\Psi(z) = \left(\sum_{\alpha \in R} \frac{h_\alpha d(z, \alpha)}{(z, \alpha)} r_\alpha \right) \Psi(z) \quad (*)$$

на комплексных линейных пространствах $\mathbb{C}^n$ с логарифмическими полюсами на конечных конфигурациях гиперплоскостей $\mathcal{H} = \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$. Предполагается, что решения $\Psi(z)$ также принимают значения в $\mathbb{C}^n$. Коэффициенты r_α , $\alpha \in R$, рассматриваемых систем, являются постоянными проекторами ранга 1 на $\mathbb{C}^n$, т.е. $r_\alpha^2 = r_\alpha$, $\text{rk } r_\alpha = 1$, и определяются по отражениям s_α , $\alpha \in R$, в $\mathbb{C}^n$. Например, для комплексных отражений s_α второго порядка можно положить $r_\alpha = \frac{1}{2}(1 - s_\alpha)$, а для комплексных отражений порядка $p_\alpha > 2$ —

$$r_\alpha = \frac{1}{p_\alpha} \sum_{j=0}^{p_\alpha-1} \det(s_\alpha^j) s_\alpha^j.$$

Для определения гиперплоскостей конфигурации и отражений выбираются конечный набор векторов R в $\mathbb{C}^n$ и пара форм $(\cdot, \cdot)$, $(\cdot, \cdot)_1$ (билинейные или эрмитовы) на $\mathbb{C}^n$. Гиперплоскость H_α конфигурации $\mathcal{H}$ ортогональна вектору $\alpha \in R$ относительно одной из форм $(\cdot, \cdot)$, а отражение s_α определяется по вектору $\alpha \in R$ относительно другой формы $(\cdot, \cdot)_1$. В общем случае эти формы различны. В правой части системы $(*)$ набор параметров $\underline{h} = \{h_\alpha, \alpha \in R\}$ состоит из комплексных чисел и предполагается, что выполняются равенства $h_{-\alpha} = h_\alpha$, $\alpha \in R$. Систему $(*)$ можно интерпретировать как уравнение на горизонтальные сечения мероморфной связности

$$\nabla_R = d - \sum_{\alpha \in R} \frac{h_\alpha d(z, \alpha)}{(z, \alpha)} r_\alpha$$

в тривиальном векторном расслоении $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Пфаффовы системы вида $(*)$ появляются в скрученной теории Пикара—Лефшеца голоморфных отображений с особенностями [11] при изучении специальных решений уравнений ассоциативности [18], в r -матричной теории Чередника уравнений Книжника—Замолотчикова и их обобщенных вариантов [6, 8]. В силу сказанного мы называем системы $(*)$ и калибровочно эквивалентные им системы R -системами Веселова—Коно—Чередника или просто R -системами, а связность ∇_R — R -связностью. В дальнейшем термины R -система и R -связность будем использовать как равноправные термины.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ведущих научных школ России НШ-457.2003.1 и российско-французского гранта РФФИ 03-01-22000-НЦНИ-а(PICS 2094).

Отметим связь R -систем с квантовыми вычислениями (см. [9, 10]). Проекторы r_α , являющиеся коэффициентами R -системы, имеют два собственных значения 0 и 1, и потому их можно интерпретировать в рамках теории квантовых вычислений как квантовые фильтры (gates), действующие на квантовые биты (q-биты), т.е. на векторы из $\mathbb{C}^n$, представленные в виде суммы $v = x|0\rangle + y|1\rangle$, где $|0\rangle \in V_0$, $|1\rangle \in V_1$ — какие-либо векторы из корневых подпространств V_0 , V_1 оператора r_α . Процесс вычисления голономии (монодромии в интегрируемом случае) R -системы (например, с помощью рядов Лаппо-Данилевского) интерпретируется как процесс квантовых вычислений. Если группа голономии или монодромии всюду плотна в соответствующей группе Ли преобразований $\mathbb{C}^n$, то это можно интерпретировать как квантовую разрешимость соответствующей задачи квантовых вычислений [9, 10].

Мы рассматриваем относительно R -систем два типа задач. Сначала мы выясняем, для каких конечных наборов векторов R и билинейных или эрмитовых форм $(\cdot, \cdot)$, $(\cdot, \cdot)_1$ соответствующая R -система интегрируема в смысле Фробениуса. Затем мы даем описание монодромии соответствующей интегрируемой R -системы. Именно, для любой вещественной системы корней $R \subset \mathbb{R}^n$, отвечающей некоторой конечной неприводимой группе Кокстера $W(R)$, стандартной билинейной формы $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ на базе расслоения, канонической билинейной формы $G_R(u, v) = \sum_{\alpha \in R} (\alpha, u)(\alpha, v)$ на слое расслоения и $W(R)$ -инвариантного $\{h_{w\alpha} = h_\alpha\}$ набора параметров $\underline{h} = \{h_\alpha\}$ мы даем новое доказательство того, что условия Веселова [18] выполняются для системы корней R и являются необходимыми и достаточными условиями интегрируемости R -системы (*). Более того, в этом случае R -система инвариантна относительно стандартного правого диагонального действия группы Кокстера $W(R)$ на базе и слое тривиального расслоения $(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H}$ и потому определяет интегрируемую связность $\tilde{\nabla}_R$ на векторном фактор-расслоении $((\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H}) \times \mathbb{C}^n)/W(R) \rightarrow (\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H})/W(R)$. Фундаментальная группа базы фактор-расслоения $B_n(W(R)) = \pi_1((\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H})/W(R))$ изоморфна обобщенной группе кос, отвечающей группе Кокстера $W(R)$, и называется группой кос Брискорна. Монодромия фактор-связности $\tilde{\nabla}_R$ определяет представление группы кос Брискорна. Это представление является деформацией стандартного действия группы Кокстера $W(R)$ на слое фактор-расслоения и эквивалентно, для некоторых значений параметров h_α , представлению группы кос Брискорна $B_n(W(R))$, определенному ранее Сквайером [16] Гивенталем в [3]. Монодромия исходной интегрируемой R -системы определяет представление группы крашенных кос Брискорна $P_n(W(R)) = \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H})$ (отметим, что длинная точная гомотопическая последовательность фактор-расслоения дает короткую точную последовательность групп $1 \rightarrow P_n(W(R)) \rightarrow B_n(W(R)) \rightarrow W(R) \rightarrow 1$) и является ограничением представлением Сквайера—Гивенталю на группу крашенных кос. В случае, когда система корней R имеет тип A_{n-1} , представление монодромии связности $\tilde{\nabla}_{A_{n-1}}$ эквивалентно, как показал Коно [11], представлению Бурау.

Затем мы даем доказательство интегрируемости R -систем, когда R является системой корней комплексной группы отражений, и определяем деформации (подобные деформациям Сквайера и Гивенталю) стандартного действия этой комплексной группы отражений и описываем в терминах этих деформаций представление монодромии.

Я выражаю благодарность А. Н. Варченко, указавшему мне на работу А. Б. Гивенталю [3].

1. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ R -СИСТЕМЫ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ АССОЦИАТИВНОСТИ

Пусть $R = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ обозначает конечный набор ненулевых векторов с вещественными координатами в комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^n$. Будем требовать, следуя [18], чтобы R порождало все пространство $\mathbb{R}^n$ и было инвариантно при действии симметрии $v \rightarrow -v$. Мы также положим, что R — приведенный набор, т.е. для каждого $\alpha \in R$ вектор $-\alpha$ является единственным вектором в R , который коллинеарен α в $\mathbb{R}^n$. При наложенных ограничениях любая гиперплоскость H , проходящая через начало координат в $\mathbb{R}^n$ и не содержащая векторов из R , делит множество векторов R на две непересекающиеся части с одинаковым числом элементов. Одну

из этих частей обозначим R_+ , тогда другая равна $R_- = -R_+$. В каждой из этих частей любые два вектора неколлинеарны.

Пусть $(\cdot, \cdot)$ обозначает невырожденную симметрическую билинейную форму в $\mathbb{C}^n$, которая получена комплексификацией стандартного скалярного произведения на $\mathbb{R}^n$. Мы будем отождествлять $\mathbb{C}^n$ и двойственное пространство $(\mathbb{C}^n)^*$ относительно этой формы $(\cdot, \cdot)$. Мы будем также рассматривать на $\mathbb{C}^n$ каноническую симметрическую билинейную форму

$$G_R = \sum_{\alpha \in R} \alpha \otimes \alpha, \quad G_R(x, y) = \sum_{\alpha \in R} (\alpha, x)(\alpha, y), \quad x, y \in \mathbb{C}^n,$$

отвечающую набору векторов R .

Перечислим некоторые свойства канонической билинейной формы G_R . Так как R порождает все пространство $\mathbb{R}^n$, а следовательно, и $\mathbb{C}^n$, то G_R — невырожденная билинейная форма на $\mathbb{R}^n$. Действительно, если $G_R(u, v) = 0$ для всех $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, то $G_R(v, v) = 0$ или, в силу определения формы G_R ,

$$G_R(v, v) = \sum_{\alpha \in R} (\alpha, v)^2 = 0,$$

откуда получаем $(\alpha, v) = 0$ для всех $\alpha \in R$. Так как R порождает $\mathbb{R}^n$, то элементы стандартного базиса $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 1)$ являются линейными комбинациями векторов из R и поэтому $(e_i, v) = v_i = 0$, следовательно, $v = 0$, так как все координаты v_i вектора v равны нулю. Из предыдущих рассуждений следует, что форма G_R является положительно определенной формой на $\mathbb{R}^n$. Действительно, если $v \neq 0$, то

$$G_R(v, v) = \sum_{\beta \in R} (\beta, v)^2 > 0.$$

В частности, $G_R(\alpha, \alpha) > 0$ для всех $\alpha \in R$. Итак, форма G_R определяет скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$.

Теперь покажем, что форма G_R является невырожденной и на $\mathbb{C}^n$. Пусть $v \in \mathbb{C}^n$ и для всех $u \in \mathbb{C}^n$ выполняется равенство $G_R(u, v) = 0$. В частности, для всех $u \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ будет выполняться равенство $G_R(u, v) = 0$. Вектор v представим в виде $v = v' + iv''$, где i — мнимая единица, а $v', v'' \in \mathbb{R}^n$ — векторы с вещественными координатами. Тогда $G_R(u, v) = G_R(u, v') + iG_R(u, v'') = 0$ для всех $u \in \mathbb{R}^n$, следовательно, $G_R(u, v') = 0$, $G_R(u, v'') = 0$. Из невырожденности G_R на $\mathbb{R}^n$ получаем $v' = 0$, $v'' = 0$, т.е. $v = 0$. Таким образом, G_R является невырожденной билинейной формой на $\mathbb{C}^n$.

Рассмотрим вектор $\alpha^* \in (\mathbb{C}^n)^* \simeq \mathbb{C}^n$, двойственный вектору $\alpha \in \mathbb{C}^n$ относительно изоморфизма между $\mathbb{C}^n$ и $(\mathbb{C}^n)^*$, определяемого формой G_R . Тогда для вектора α^* , с учетом отождествления $\mathbb{C}^n$ и $(\mathbb{C}^n)^*$ относительно $(\cdot, \cdot)$, выполняется равенство $(\alpha^*, v) = G_R(\alpha, v)$. Обозначим символом $\alpha^\vee$ вектор, определенный равенством $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{G_R(\alpha, \alpha)}$. В этом случае мы определим на $\mathbb{C}^n$ отражение

s_α , отвечающее вектору $\alpha \in R$, как линейный оператор $s_\alpha(v) = v - G_R(\alpha^\vee, v)\alpha$. Легко проверяется, что $s_\alpha^2 = 1$, где 1 обозначает тождественный оператор на $\mathbb{C}^n$. Отсюда вытекает, что отражение — обратимый линейный оператор и, следовательно, имеет нулевое ядро. Легко проверяется, что форма G_R инвариантна относительно таких отражений, т.е. $G_R(s_\alpha(u), s_\alpha v) = G_R(u, v)$. В частности, отражения s_α являются самосопряженными операторами относительно формы G_R . Действительно, $G_R(s_\alpha(u), v) = G_R(s_\alpha^2(u), s_\alpha(v)) = G_R(u, s_\alpha(v))$. Отражения s_α являются ортогональными преобразованиями $\mathbb{R}^n$ относительно скалярного произведения, определяемого G_R . Отметим, что свойство инвариантности формы G_R и самосопряженность операторов s_α выполняются для любого комплексного набора векторов $R = \{\alpha\}$, если только выполняется условие $G_R(\alpha, \alpha) \neq 0$ для всех $\alpha \in R$.

Обозначим через $W(R)$ подгруппу в ортогональной группе $O_{G_R}(n) \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$, порожденную отражениями s_α , $\alpha \in R$. Набор векторов $R \subset \mathbb{R}^n$ называется системой корней (относительно скалярного произведения G_R), если все отражения s_α , $\alpha \in R$, оставляют набор R инвариантным, т.е. $s_\alpha : R \rightarrow R$, $\alpha \in R$. Группа $W(R)$ является подгруппой группы перестановок системы корней

R и потому конечной группой (см. [1, 18]). В общем случае, когда R не является системой корней, группа $W(R)$ может быть бесконечной группой.

Отметим, что скалярное произведение G_R на $\mathbb{R}^n$ пропорционально стандартному скалярному произведению $(\cdot, \cdot)$, когда R является неприводимой системой корней (см. [1, 18]). Действительно, в этом случае отражения s_α , $\alpha \in R$, определяемые относительно стандартного скалярного произведения, оставляют инвариантной форму G_R , так как

$$\begin{aligned} G_R(s_\alpha(u), s_\alpha(v)) &= \sum_{\beta \in R} (\beta, s_\alpha(u))(\beta, s_\alpha(v)) = \\ &= \sum_{\beta \in R} (s_\alpha(\beta), u)(s_\alpha(\beta), v) = \sum_{\gamma \in s_\alpha(R)=R} (\gamma, u)(\gamma, v) = G_R(u, v). \end{aligned}$$

Следовательно, такие отражения s_α являются самосопряженными операторами относительно G_R . Так как R — приведенная неприводимая система корней в $\mathbb{R}^n$, порождающая $\mathbb{R}^n$, то конечная группа $W(R)$, порожденная отражениями относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$, действует неприводимо на $\mathbb{R}^n$ (см. [1]). Форма G_R инвариантна относительно действия конечной группы $W(R)$. Линейный оператор $(\cdot)^*$ на $\mathbb{R}^n$, который мы определяли равенством $(u^*, v) = G_R(u, v)$, перестановочен с действием $W(R)$. Действительно, для порождающих группу $W(R)$ отражений имеем

$$((s_\alpha(u))^*, v) = G_R(s_\alpha(u), v) = G_R(u, s_\alpha(v)) = (u^*, s_\alpha(v)) = (s_\alpha(u^*), v).$$

В силу неприводимости действия $W(R)$ оператор $(\cdot)^*$ будет скалярным оператором $u^* = \lambda u$. Это дает равенство $\lambda(u, v) = G_R(u, v)$, т.е. каноническая билинейная форма G_R пропорциональна стандартному скалярному произведению. В этом случае операторы отражения, определяемые по стандартному скалярному произведению и положительно определенной форме G_R , совпадают. Отметим, что все перечисленные свойства формы G_R выполняются и для формы $G_{\tilde{R}} = \{\tilde{R}\}$, если векторы из набора $\tilde{R} = \{\alpha\}$ получены из векторов набора R умножением на произвольные вещественные константы $h_{-\alpha} = h_\alpha$, т.е. $\tilde{\alpha} = h_\alpha \alpha$. Для корневых систем R надо требовать дополнительно, чтобы набор параметров $\underline{h} = \{h_\alpha\}$ был $W(R)$ -инвариантным набором, т.е. $h_{w\alpha} = h_\alpha$, $w \in W(R)$.

Для линейных операторов $\alpha^* \otimes \alpha$ на $\mathbb{C}^n$ ранга 1, определенных обычным правилом

$$(\alpha^* \otimes \alpha)(v) = (\alpha^*, v)\alpha = G_R(\alpha, v)\alpha,$$

имеем равенство

$$\alpha^* \otimes \alpha = \frac{G_R(\alpha, \alpha)}{2}(1 - s_\alpha).$$

Таким образом, операторы $\alpha^* \otimes \alpha$, $\alpha \in R$, являются элементами групповой алгебры $\mathbb{C}[W(R)]$, которая естественно реализуется как подалгебра алгебры комплексных матриц размера $n \times n$. Легко проверяется, что оператор $r_\alpha = \frac{1}{2}(1 - s_\alpha)$ является проектором ранга 1. Поэтому связность

$$\nabla_R = d - \sum_{\alpha \in R} h_\alpha \frac{d(\alpha, z)}{(\alpha, z)} \alpha^* \otimes \alpha$$

является R -связностью при любых значениях параметров $h_\alpha = h_{-\alpha}$.

Пусть $L \subset \mathbb{C}^n$ — произвольное двумерное линейное подпространство в $\mathbb{C}^n$. Определим оператор P_L равенством $P_L = \sum_{\alpha \in R \cap L} \alpha^* \otimes \alpha$. Он отображает все пространство $\mathbb{C}^n$ в подпространство L и, в частности, L является инвариантным подпространством относительно этого оператора.

Теперь мы опишем условия Веселова (V-условия) на набор векторов R . Формулировка условий отличается от формулировки, данной в [18]

Определение 1. Набор векторов R удовлетворяет условию Веселова, если для любого двумерного подпространства $L \subset \mathbb{C}^n$ выполняется одно из следующих условий:

- 1) $G_R(\alpha, \beta) = 0$, если пересечение $R_+ \cap L$ состоит ровно из двух неколлинеарных векторов $\alpha, \beta \in R_+$;

- 2) если пересечение $R_+ \cap L$ состоит более чем из двух попарно неколлинеарных векторов, то линейный оператор $P_L = \sum_{\alpha \in R \cap L} \alpha^* \otimes \alpha$ при ограничении на подпространство L пропорционален тождественному оператору, т.е. выполняется равенство $P_L|_L = \lambda(L) \cdot 1$.

Заметим, что формулировка условий Веселова имеет смысл для произвольных приведенных наборов комплексных векторов R , т.е. наборов, которые можно представить в виде объединения $R = R_+ \cup -R_+$, где R_+ состоит из попарно неколлинеарных векторов.

Пусть $F(z)$ — трижды дифференцируемая комплекснозначная функция от n комплексных переменных $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Матричные функции $\hat{F}_i(z)$, $i = 1, \dots, n$, определяются равенствами $\hat{F}_i(z) = G^{-1}(z)F_i(z)$, где $F_i(z) — (n \times n)$ -матрицы, составленные из третьих производных функции $F(z)$, а именно, $(F_i(z))_{kl} = \frac{\partial^3 F(z)}{\partial z_i \partial z_k \partial z_l}$, а матричная функция $G(z)$ определяется равенством $G(z) = \sum_{i=1}^n z_i F_i(z)$. Мы полагаем, что матричная функция $G(z)$ и ее определитель $\det G(z)$ не равняются тождественно нулю.

Уравнения ассоциативности на функцию $F(z)$ имеют вид коммутационных соотношений (см. [18]):

$$[\hat{F}_i(z), \hat{F}_j(z)] = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (1)$$

где квадратные скобки $[\cdot, \cdot]$ обозначают коммутатор матриц.

Заметим, что если функция $F(z)$ определяет решение уравнения ассоциативности, то функция $\tilde{F}(z) = F(z) + p_2(z)$, где $p_2(z)$ — любой многочлен второго порядка по переменным $z_1, \dots, z_n$, также является решением уравнения ассоциативности.

Уравнение (1) называется уравнением ассоциативности в силу того, что некоммутативная алгебра, заданная образующими $a_1, \dots, a_n$ и соотношениями $a_i \circ a_j = \hat{F}_{ij}^k a_k$, где $\hat{F}_{ij}^k$ — элементы матрицы $\hat{F}_i$, является ассоциативной тогда и только тогда, когда выполняются уравнения ассоциативности (1) на матрицы $\hat{F}_1(z), \dots, \hat{F}_n(z)$.

В следующем предложении дано новое доказательство основных утверждений из [18] о связи условий интегрируемости R -систем (R -связностей) с уравнениями ассоциативности и условиями Веселова.

Предложение 1. Пусть R — приведенный набор векторов, порождающий $\mathbb{C}^n$. Тогда имеют место следующие утверждения.

1) Функция

$$F_{R, \underline{h}}(z) = \sum_{\alpha \in R} h_\alpha(\alpha, z)^2 \log(\alpha, z)^2, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (2)$$

отвечающая набору векторов R , является решением обобщенных уравнений ассоциативности (1) тогда и только тогда, когда R -связность

$$\nabla_R(\underline{h}) = d - \sum_{\alpha \in R} h_\alpha \frac{d(\alpha, z)}{(\alpha, z)} \alpha^* \otimes \alpha \quad (3)$$

в тривиальном векторном расслоении над $\mathbb{C}^n$ со слоем $\mathbb{C}^n$ является вполне интегрируемой в смысле Фробениуса. Иными словами, замкнутая форма

$$\Omega_R(\underline{h}) = \sum_{\alpha \in R} h_\alpha \frac{d(\alpha, z)}{(\alpha, z)} \alpha^* \otimes \alpha$$

связности (3) удовлетворяет условию

$$\Omega_R(\underline{h}) \wedge \Omega_R(\underline{h}) = 0.$$

- 2) Пусть в R -связности $\nabla_R(\underline{h}) = d - \Omega_R(\underline{h})$ все параметры h_α являются положительными вещественными числами. В этом случае R -связность $\nabla_R(\underline{h})$ интегрируема тогда и только тогда, когда набор векторов $\tilde{R} = \{\sqrt{h_\alpha} \alpha\}$ удовлетворяет условиям Веселова.

Доказательство. Рассмотрим набор векторов $\tilde{R} = \{\sqrt{h_\alpha}\alpha, \alpha \in R\}$. Функция

$$F_{R,\underline{h}}(z) = \sum_{\alpha \in R} h_\alpha(\alpha, z)^2 \log(\alpha, z)^2$$

тогда и только тогда является решением уравнений ассоциативности, когда таковым является функция

$$\tilde{F}_{\tilde{R}}(z) = \sum_{\alpha \in \tilde{R}} (\alpha, z)^2 \log(\alpha, z)^2,$$

так как

$$\begin{aligned} F_{R,\underline{h}}(z) &= \sum_{\alpha \in R} \left(\sqrt{h_\alpha}\alpha, z \right)^2 \left(\log(\sqrt{h_\alpha}\alpha, z)^2 + \log h_\alpha^{-1} \right) = \\ &= \tilde{F}_{\tilde{R}}(z) + \text{многочлен второй степени}. \end{aligned}$$

Для доказательства первого утверждения теоремы заметим, что прямыми вычислениями (см. [18]) проверяются равенства

$$G_{\tilde{R}}(z) = \sum_{i=1}^n z_i \tilde{F}_{\tilde{R},i}(z) = \sum_{\alpha \in \tilde{R}} \alpha \otimes \alpha$$

(т.е. $G_{\tilde{R}}(z)$ совпадает с постоянной канонической билинейной формой $G_{\tilde{R}}$) и

$$\sum_{i=1}^n \hat{\tilde{F}}_{\tilde{R},i}(z) dz_i = \Omega_R(\underline{h}).$$

Далее,

$$\Omega_R(\underline{h}) \wedge \Omega_R(\underline{h}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[\hat{\tilde{F}}_{\tilde{R},i}(z), \hat{\tilde{F}}_{\tilde{R},j}(z) \right] dz_i \wedge dz_j,$$

откуда следует требуемая равносильность интегрируемости R -связности ∇_R и того факта, что функция $\tilde{F}_{\tilde{R},i}(z)$ является решением уравнения ассоциативности. Следовательно, в силу наблюдения, указанного в начале доказательства, интегрируемость $\nabla_R(\underline{h})$ равносильна тому, что функция $F_{R,\underline{h}}(z)$ является решением уравнения ассоциативности.

Для доказательства второго утверждения теоремы мы используем хорошо известный факт (см. [2, 14]) для операторных 1-форм

$$\Omega = \sum_{\alpha \in R} \frac{t_\alpha d(\alpha, z)}{(\alpha, z)}$$

с логарифмическими полюсами на гиперплоскостях $(\alpha, z) = 0$, $\alpha \in R$, в $\mathbb{C}^n$ и постоянными операторными коэффициентами t_α , $\alpha \in R$: замкнутая форма

$$\Omega = \sum_{\alpha} \frac{t_\alpha d(\alpha, z)}{(\alpha, z)}$$

удовлетворяет условию Фробениуса тогда и только тогда, когда для произвольной двумерного подпространства $L \subset \mathbb{C}^n$ выполняются равенства

$$\left[t_\alpha, \sum_{\beta \in R \cap L} t_\beta \right] = 0, \quad \forall \alpha \in R \cap L. \quad (4)$$

Докажем достаточность условий Веселова: если набор векторов $\tilde{R}$ удовлетворяет условию Веселова, то для формы

$$\Omega_{\tilde{R}} = \sum_{\alpha \in \tilde{R}} \frac{d(\alpha, z)}{(\alpha, z)} \alpha^* \otimes \alpha$$

выполняются условия интегрируемости (4). Обозначим $t_\alpha = \alpha^* \otimes \alpha$, $\alpha \in \tilde{R}$. Очевидно, что условия Веселова для всех двумерных подпространств L , содержащих произвольное $\alpha \in \tilde{R}$, влекут равенства

$$\left[t_\alpha, \sum_{\beta \in \tilde{R} \cap L} t_\beta \right]_L = [t_\alpha|_L, P_L|_L] = [t_\alpha|_L, \lambda(L) \cdot 1] = 0.$$

Покажем, что из этих условий также следуют равенства

$$\left[t_\alpha, \sum_{\beta \in \tilde{R} \cap L} t_\beta \right] = 0.$$

Действительно, вычислим композиции операторов t_α , $\alpha \in \tilde{R} \cap L$, и $P_L = \sum_{\alpha \in \tilde{R} \cap L} t_\alpha$ на произвольном векторе $v \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} (P_L t_\alpha)(v) &= P_L t_\alpha(v) = P_L((\alpha^*, v)\alpha) = (\alpha^*, v)P_L(\alpha) = (\alpha^*, v)\lambda(L)\alpha, \\ (t_\alpha P_L)(v) &= t_\alpha \left(\sum_{\beta \in \tilde{R} \cap L} (\beta^*, v)\beta \right) = \sum_{\beta \in \tilde{R} \cap L} ((\beta^*, v)(\alpha^*, \beta)\alpha) = \\ &= \sum_{\beta \in \tilde{R} \cap L} G_{\tilde{R}}(\beta, v)G_{\tilde{R}}(\alpha, \beta)\alpha = \sum_{\beta \in \tilde{R} \cap L} (v^*, \beta)(\beta^*, \alpha)\alpha = \\ &= (v^* \otimes \alpha) \left(\sum_{\beta \in \tilde{R} \cap L} (\beta^* \otimes \beta)(\alpha) \right) = (v^* \otimes \alpha)(P_L(\alpha)) = (v^* \otimes \alpha)(\lambda(L)\alpha) = \\ &= \lambda(L)(v^*, \alpha)\alpha = (\alpha^*, v)\lambda(L)\alpha. \end{aligned}$$

Итак, для любого вектора $v \in \mathbb{C}^n$ получаем $[t_\alpha, P_L](v) = 0$, т.е. коммутатор $[t_\alpha, P_L]$ операторов t_α и P_L равен нулю для всех $\alpha \in \tilde{R} \cap L$. Это показывает, что условия Веселова являются достаточными для интегрируемости связности $\nabla_{\tilde{R}}$.

Докажем необходимость условий Веселова. Если в подпространстве L содержатся только два неколлинеарных вектора $\alpha, \beta \in \tilde{R}_+$, то условие интегрируемости (4) влечет коммутирование операторов t_α и t_β . С другой стороны, из определения этих операторов следует равенство для коммутатора

$$[t_\alpha, t_\beta](v) = G_{\tilde{R}}(\alpha, \beta)(G_{\tilde{R}}(\beta, v)\alpha - G_{\tilde{R}}(\alpha, v)\beta).$$

Неколлинеарность векторов α и β и невырожденность формы $G_{\tilde{R}}$ влекут равенство $G_{\tilde{R}}(\alpha, \beta) = 0$.

Рассмотрим теперь произвольное двумерное подпространство $L \subset \mathbb{C}^n$, содержащее не менее трех векторов из $\tilde{R}_+$. Для доказательства в этом случае необходимости условий Веселова используем следующее представление операторов:

$$t_\alpha = \frac{G_{\tilde{R}}(\alpha, \alpha)}{2}(1 - s_\alpha),$$

т.е. мы рассматриваем их как элементы групповой алгебры $\mathbb{C}[W(\tilde{R})]$ группы $W(\tilde{R})$, которые были определены выше. Любое двумерное подпространство $L \subset \mathbb{C}^n$, содержащее не менее трех попарно неколлинеарных векторов из $\tilde{R}$, во-первых, инвариантно относительно подалгебры $\mathbb{C}[W(\tilde{R} \cap L)] \subset \mathbb{C}[W(\tilde{R})]$, порожденной отражениями s_α , $\alpha \in \tilde{R} \cap L$ (отражения определяются относительно формы $G_{\tilde{R}}$), и во-вторых, неприводимо относительно этого действия. Действительно, если существует ненулевое собственное подпространство в L , инвариантное относительно $\mathbb{C}[W(\tilde{R} \cap L)]$, то оно одномерно и его некоторый базисный вектор является собственным вектором образующих $s_\alpha \in W(\tilde{R} \cap L)$ в группе $W(\tilde{R} \cap L)$. Имеем

$$s_\alpha(v) = v - \frac{2G_{\tilde{R}}(\alpha, v)}{G_{\tilde{R}}(\alpha, \alpha)}\alpha = \lambda(\alpha)v$$

или

$$\frac{2G_{\tilde{R}}(\alpha, v)}{G_{\tilde{R}}(\alpha, \alpha)}\alpha = (1 - \lambda(\alpha))v.$$

Если собственное число $\lambda(\alpha)$ равно единице, то $G_{\tilde{R}}(\alpha, v) = 0$. Если таких векторов α не менее двух, то имеем равенство $G_{\tilde{R}}(\alpha, v) = 0$ для всех $\alpha \in R_+ \cap L$. Если собственных чисел, равных единице, не более одного, то других $\alpha \in \tilde{R} \cap L$, для которых $\lambda(\alpha) \neq 1$, не менее двух, и если $G_{\tilde{R}}(\alpha, v) \neq 0$, то получаем противоречие с неколлинеарностью векторов из $\tilde{R}_+ \cap L$. Поэтому во всех случаях и для всех $\alpha \in \tilde{R} \cap L$ должны выполняться равенства $G_{\tilde{R}}(\alpha, v) = 0$; но форма $G_{\tilde{R}}|_L$ при условиях, наложенных на R и $\underline{h}$, невырождена (доказывается точно так же, как невырожденность самой формы G_R и формы $G_{\tilde{R}}$), следовательно $v = 0$. Итак, собственное инвариантное подпространство должно быть нулевым, и потому $W(\tilde{R} \cap L)$ и $\mathbb{C}[W(\tilde{R} \cap L)]$ действуют неприводимо на L . Из коммутационных соотношений (4) следует, что оператор

$$P_L = \sum_{\alpha \in \tilde{R} \cap L} \frac{G_{\tilde{R}}(\alpha, \alpha)}{2}(1 - s_\alpha)$$

принадлежит центру алгебры $\mathbb{C}[W(\tilde{R} \cap L)]$. Из того факта, что P_L есть элемент центра $\mathbb{C}[W(\tilde{R} \cap L)]$ и неприводимости подпространства L следует, что оператор $P_L|_L$ является скалярным оператором. Это завершает доказательство необходимости условий Веселова для интегрируемости связности $\nabla_{\tilde{R}}$. Предложение доказано. $\square$

Основной пример конфигураций векторов, удовлетворяющих условиям Веселова, дает следующая теорема, которая является некоторым обобщением теоремы Веселова из [18]

Теорема 1. Пусть $R = R_+ \cup R_-$ — приведенная система корней неприводимой группы Коксетера $W(R)$ и $\underline{h} = \{h_\alpha, \alpha \in R\}$ — произвольный $W(R)$ -инвариантный набор вещественных ненулевых чисел. Тогда наборы R и $R(\underline{h}) = \{h_\alpha\alpha, \alpha \in R\}$ удовлетворяют условиям Веселова.

Доказательство. Заметим, что $R(\underline{h})$ при сделанных предположениях является системой корней той же группы Коксетера, так как отражения s_α и $s_{h_\alpha\alpha}$ совпадают и $R(\underline{h})$ инвариантно относительно $W(R)$. Действительно,

$$s_\beta(h_\alpha\alpha) = h_\alpha s_\beta(\alpha) = h_\alpha\gamma = h_\gamma\gamma, \quad \gamma \in R.$$

Последнее равенство справедливо в силу $W(R)$ -инвариантности набора $\underline{h}$. Для R -связностей имеем равенство

$$\nabla_R(\{h_\alpha^2\}) = \nabla_{R(\underline{h})}(\{h_\alpha = 1\}).$$

Связность $\nabla_R(\{h_\alpha^2\})$ одновременно интегрируема со связностью Чередника (см. [6, 8, 14])

$$\nabla = d - \sum_{\alpha \in R} \frac{h_\alpha^2 d(\alpha, z)}{(\alpha, z)} s_\alpha,$$

которая, как хорошо известно [8, 14], для любой системы корней R является интегрируемой связностью; значит, таковыми являются связности $\nabla_R(\{h_\alpha^2\})$ и $\nabla_{R(\underline{h})}(\{h_\alpha = 1\})$. Отсюда получаем, что системы корней $R(\underline{h})$, а если положить исходные параметры $\{h_\alpha\}$ равными единице, то и система корней R , в силу предложения 1, удовлетворяют условиям Веселова. $\square$

2. Монодромия R -связностей Веселова—Коно—Чередника для вещественных систем корней

Теперь будем предполагать, что набор векторов R является комплексификацией некоторой неприводимой приведенной системой корней R группы Коксетера $W(R)$, $R_+ \subset R$ — множество положительных корней и $\underline{h} = \{h_\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in R\}$ — $W(R)$ -инвариантный набор неотрицательных

вещественных чисел, $h_{w\alpha} = h_\alpha$, $w \in W(R)$, $\alpha \in R$. Мы рассмотрим голоморфную R -связность $\nabla_R(\underline{h}) = d - \Omega_R(\underline{h})$ в тривиальном векторном расслоении

$$p: \left(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\alpha \in R_+} \{(\alpha, z) = 0\} \right) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\alpha \in R_+} \{(\alpha, z) = 0\},$$

где форма связности $\Omega_R(\underline{h})$ имеет вид

$$\Omega_R(\underline{h}) = \sum_{\alpha \in R} \frac{h_\alpha d(\alpha, z)}{(\alpha, z)} \alpha^* \otimes \alpha = \sum_{\alpha \in R} \frac{G_R(\alpha, \alpha) h_\alpha d(\alpha, z)}{2(\alpha, z)} (1 - s_\alpha).$$

Действие отражений s_α на слое определено относительно канонической билинейной формы $G_R = \sum_{\alpha \in R} \alpha \otimes \alpha$ и совпадает с действием отражений относительно комплексификации стандартного скалярного произведения $\mathbb{R}^n$, так как форма G_R на $\mathbb{R}^n$ положительно определена и пропорциональна стандартному скалярному произведению. Для набора векторов $\tilde{R} = \{\sqrt{h_\alpha} \alpha \mid \alpha \in R\}$ в силу теоремы 1 выполнено условие Веселова, поэтому R -связность $\nabla_{\tilde{R}}$ вполне интегрируема в смысле Фробениуса, а потому интегрируема R -связность $\nabla_R(\underline{h})$. В силу этого определено представление монодромии

$$\rho_R(\underline{h}) : P_n(R) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^n) = \text{GL}(n, \mathbb{C}) \quad (5)$$

обобщенной группы крашенных кос Брискорна

$$P_n(R) = \pi_1 \left(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\alpha \in R_+} \{(\alpha, z) = 0\}, z_0 \right).$$

Для группы Коксетера $W(R)$ определено естественное правое действие на базе и слое расслоения и, следовательно, диагональное действие на пространстве указанного выше расслоения. Относительно этого действия связность $\nabla_R(\underline{h})$ $W(R)$ -инвариантна, и потому определена плоская фактор-связность $\bar{\nabla}_R(\underline{h})$ на фактор-расслоении

$$\bar{p}: \left(\left(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\alpha \in R_+} \{(\alpha, z) = 0\} \right) \times \mathbb{C}^n \right) / W(R) \rightarrow \left(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\alpha \in R_+} \{(\alpha, z) = 0\} \right) / W(R).$$

Монодромия связности $\bar{\nabla}_R(\underline{h})$ расширяет представление $\rho_R(\underline{h})$ (см. [15, ч. II]) до представления

$$\bar{\rho}_R(\underline{h}) : B_n(R) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^n) = \text{GL}(n, \mathbb{C}) \quad (6)$$

группы кос Брискорна $B_n(R)$. При нулевых значениях параметров h_α , $\alpha \in R$, представление $\bar{\rho}_R(\underline{h})$ совпадает с естественным действием группы Коксетера на слое $\mathbb{C}^n$. Для малых значений параметров (или произвольных параметров «общего положения») представление факторизуется (см. [8, теорема 2], [15, ч. II, теоремы 3.6 и 6.3]) через алгебру Гекке

$$H_n(q_k, k = 1, \dots, n) = \mathbb{C}[B_n(R)] / \left((\sigma_k - q_k)(\sigma_k + q_k^{-1}) = 0, q_k = \exp(2\pi i h_{\alpha_k} G_R(\alpha_k, \alpha_k) / 2) \right),$$

где $\{\alpha_k, k = 1, \dots, n\}$ — некоторая система простых корней в R_+ . Иными словами, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B_n(R) & \xrightarrow{\bar{\rho}_R(\underline{h})} & \text{Aut}(\mathbb{C}^n) = \text{GL}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\subset} \text{End}(\mathbb{C}^n) = \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \\ \downarrow j & & \uparrow \hat{\rho}_R(\underline{h}) \\ \mathbb{C}(B_n(R)) & \xrightarrow{\phi} & H_n(q_k, k = 1, \dots, n) \xlongequal{\quad} H_n(q_k, k = 1, \dots, n) \end{array}$$

С другой стороны, представление $\bar{\rho}_R(\underline{h})$ с точностью до эквивалентности однозначно определяется представлением алгебры Гекке $\hat{\rho}_R(\underline{h})$ из диаграммы факторизации, рассмотренным при нулевых значениях параметров $h_{\alpha_k} = 0$, т.е. представлением групповой алгебры $\mathbb{C}[W(R)]$. Этот факт следует из того, что алгебра Гекке при значениях $q_k, k = 1, \dots, n$, близких к единице, или при любых

значениях «общего положения» изоморфна групповой алгебре $\mathbb{C}[W(R)]$, причем изоморфизм аналитически зависит от параметров q_k (см. [7, 15]).

Напомним представление в $\mathbb{C}^n$ группы кос Брискорна $B_n(R)$, определенное Сквайером в [16]. Это представление $\rho_S(\lambda, \mu)$ определяется на образующих σ_i группы кос Брискорна $B_n(R)$ равенствами

$$\rho_S(\lambda, \mu)(\sigma_i)(v) = v - (v^t J e_i) e_i, \quad (7)$$

где $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^n$, а J — $(n \times n)$ -матрица, которая является деформацией билинейной формы, ассоциированной с матрицей Коксетера $M = (m_{ij})$ группы Коксетера $W(R)$. Элементы a_{ij} матрицы J определяются равенствами

$$a_{ij} = \begin{cases} -2\lambda \cos \frac{\pi}{m_{ij}}, & i < j, \\ 1 + \lambda\mu, & i = j, \\ -2\mu \cos \frac{\pi}{m_{ij}}, & i > j. \end{cases}$$

Это представление факторизуется через фактически однопараметрическую алгебру Гекке, так как для всех $i = 1, \dots, n$ выполняются равенства

$$\rho_S^2(\sigma_i) + (\lambda\mu - 1)\rho_S(\sigma_i) - \lambda\mu = 0.$$

Точнее, определенное представление эквивалентно представлению, которое факторизуется через алгебру Гекке с параметром $q = \lambda\mu$.

При $\lambda = \mu = 1$ указанное представление группы кос совпадает со стандартным точным представлением $\hat{\rho}$ группы Коксетера $W(R)$ с помощью отражений в $\mathbb{C}^n$.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему (см. [5, 12–14, 17])

Теорема 2. Пусть R — некоторая неприводимая приведенная коксетеровская система корней. Тогда представление монодромии R -связности $\bar{\nabla}_R(\underline{h})$ с равными параметрами $h_\alpha = h$ дает представление $\bar{\rho}_R(\underline{h})$ группы кос Брискорна $B_n(W(R))$, эквивалентное некоторому представлению Сквайера.

Доказательство. Представление монодромии $\bar{\rho}_R$, как отмечалось выше, является деформацией стандартного точного представления группы Коксетера с помощью отражений s_α , причем при наших требованиях на R и $\underline{h}$ число независимых параметров деформации у алгебры Гекке, через которую факторизуется представление монодромии, равно 1. Таковым является и представление Сквайера. При нулевом значении h и при $\lambda = \mu = 1$ получаем одинаковые представления $\rho_R(\underline{0}) = \rho_S(0, 0) = \hat{\rho}$ алгебры Гекке в диаграмме факторизации

$$\begin{array}{ccccccc} B_n(R) & \xrightarrow{\bar{\rho}_R(\underline{h})} & \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\subset} & \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) & \xlongequal{\quad} & \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \\ j \downarrow & & \hat{\rho}_R(\underline{h}) \uparrow & & \uparrow \hat{\rho}_S & & \uparrow \hat{\rho} \\ \mathbb{C}(B_n(R)) & \xrightarrow{\phi} & H_n(q) & \xlongequal{\quad} & H_n(q) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{C}[W(R)], \end{array}$$

которые на самом деле являются стандартным продолжением на групповую алгебру $\mathbb{C}[W(R)]$ представления $\hat{\rho}$ группы Коксетера $W(R)$. В указанной факторизации представления монодромии R -связности и представления Сквайера через алгебру Гекке и отмеченного выше однозначного определения представления группы кос по представлению алгебры Гекке при нулевых значениях параметров (т.е. по соответствующему представлению групповой алгебры группы Коксетера), а также в силу отмеченного совпадения последних представлений групповой алгебры для представления монодромии и представления Сквайера получаем эквивалентность представления Сквайера и представления монодромии $\bar{\rho}_R(h)$, причем соответствующий сплетающий оператор аналитически зависит от параметров деформации $u = \lambda\mu$ и $q = \exp(2\pi i h)$. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что для корневой системы A_{n-1} представление Сквайера ρ_S при $\lambda = 1$ и представление монодромии $\bar{\rho}_{A_{n-1}}(h)$ (см. [11]) совпадают с представлением Бурау группы кос Артина.

Также отметим, что семейство представлений Сквайера $\rho_S(\lambda, \mu)$ при малых значениях параметров λ и μ в силу однозначной разрешимости проблемы Римана—Гильберта [4] однозначно определяет R -связность. Поэтому интересно выяснить, каков смысл в теории представлений обобщенных групп кос специального решения

$$F_R(z) = \sum_{\alpha \in R} h_\alpha(\alpha, z)^2 \log(\alpha, z)^2$$

уравнений ассоциативности, отвечающего полученной R -связности.

3. Монодромия R -связностей для комплексных систем корней

Пусть $R = \{\alpha \in \mathbb{C}^n\}$ — произвольный конечный набор векторов комплексного линейного пространства $\mathbb{C}^n$, порождающих это пространство. Пусть векторы $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ из R образуют базис в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим стандартную эрмитову форму $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$ на $\mathbb{C}^n$. Для каждого вектора $\alpha \in R$, натурального числа $p_\alpha \in \mathbb{N}$ и примитивного корня из единицы $\zeta = \exp 2\pi i/p_\alpha$ степени p_α определим комплексное отражение на $\mathbb{C}^n$ по формуле

$$s_\alpha(v) = v - (1 - \zeta_\alpha) \frac{(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha. \quad (8)$$

Эти отражения являются унитарными операторами на $\mathbb{C}^n$ порядка p_α (т.е. $s_\alpha^{p_\alpha} = \text{id}$). Предположим, что для всех $\alpha \in R$ операторы $s_\alpha : R \rightarrow R$ отображают набор векторов R в себя. Тогда группа $W(R)$, порожденная отражениями s_α , $\alpha \in R$, будет конечной. Эту группу назовем группой комплексных отражений, а набор векторов R — системой корней этой группы. Если группа $W(R)$ действует неприводимо на $\mathbb{C}^n$, то группа $W(R)$ называется неприводимой. Полная классификация конечных групп унитарных отражений получена Шепардом и Тоддом в 1954 г. (см. ссылки в [7]). Существование «системы корней» доказано для всех неприводимых групп действующих на $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, и для многих неприводимых групп отражений, действующих в $\mathbb{C}^2$. Мы будем предполагать, что существует базис $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в R (следовательно, и в $\mathbb{C}^n$), для которого отражения $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_n}$ порождают группу отражений $W(R)$. Это верно для групп бесконечной серии $G(de, e, n)$ в классификации Шепарда—Тодда и для большинства исключительных групп. Такой базис $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в R будем называть системой простых корней в R . Как для вещественных конфигураций векторов R , мы можем и для комплексных конфигураций векторов R определить обобщенную группу крашенных кос $P_n(R)$ как фундаментальную группу дополнения к гиперплоскостям эрмитово-ортогональным к векторам конфигурации:

$$P_n(R) = \pi_1 \left(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \{(v, \alpha) = 0\} \right),$$

а обобщенную группу кос $B_n(W(R))$ как фундаментальную группу фактор-пространства:

$$B_n(W(R)) = \pi_1 \left(\left(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \{(v, \alpha) = 0\} \right) / W(R) \right).$$

При наших предположениях на R в группе кос $B_n(W(R))$ существуют образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, отвечающих простым корням $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и соответствующим отражениям. Эти образующие удовлетворяют системе однородных соотношений, подобной соотношениям для обобщенных групп кос, отвечающих вещественным коксетеровским системам корней.

Положим, что для всех простых корней $\alpha_i \in R$ степени p_{α_i} равны между собой, и мы выбираем один примитивный корень из единицы ζ для всех образующих (такая ситуация имеет место, например, для бесконечной серии импримитивных групп отражений $G(de, e, n)$). Рассмотрим «матрицу Картана»

$$K = \left((1 - \zeta) \frac{(\alpha_k, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \right)_{k, m=1, \dots, n},$$

отвечающую системе простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в R . В терминах простых корней и матрицы Картана для R любое отражение s_α записывается в следующем виде

$$s_\alpha(v) = v - (v^t K \alpha^*) \alpha, \quad (9)$$

где верхний индекс t обозначает транспонирование вектора-столбца, а верхний индекс $*$ обозначает комплексное сопряжение координат вектор-столбца.

Представим матрицу Картана в виде $K = K^- + K^+$, где матрица K^- является нижнетреугольной с единицами на диагонали, а матрица K^+ — верхнетреугольная с числом $-\zeta$ на диагонали. Рассмотрим деформацию Гивенталю K_q матрицы K [3]: $K_q = K^- + qK^+$, где q — комплексный или формальный параметр, и рассмотрим свободный модуль ${}^n \otimes \mathbb{C}[q, q^{-1}] = \mathbb{C}[q, q^{-1}]^{\oplus n}$ ранга n над кольцом многочленов Лорана $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$. Будем полагать, что операция сопряжения $*$ включает замену $q^\pm \rightarrow q^\mp$. Определим обратимые преобразования модуля $\mathbb{C}[q, q^{-1}]^{\oplus n}$ формулой

$$\rho_G S(\sigma_i)(v) = v - (v^t K_q \alpha_i^*) \alpha_i. \quad (10)$$

Имеет место обобщение теорем Коно [11], Сквайера [16] и Гивенталю [3].

Теорема 3. *При сделанных предположениях на систему комплексных корней R и соответствующую группу комплексных отражений $W(R)$ преобразования $\rho_G S(\sigma_i)$ определяют представление обобщенной группы кос $B_n(W(R))$ в группу автоморфизмов свободного модуля $\text{Aut}(\mathbb{C}[q, q^{-1}]^{\oplus n})$.*

Доказательство. Доказательство моделирует доказательство Сквайера аналогичной теоремы для вещественных коксетеровских систем корней [16]. Оно сводит доказательство соотношений в двумерных подмодулях V_{ij} , $i < j$, над полиномами Лорана $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$, которые эрмитово ортогональны пересечению зеркал отражения $vK_q \alpha_i^* = 0$ и $vK_q \alpha_j^* = 0$. Эти модули инвариантны относительно действия операторов $\rho_G S(\sigma_i)$ и $\rho_G S(\sigma_j)$, которые имеют вид

$$a = \begin{pmatrix} q\zeta & k_j i(q) - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_i j(q) - 1 & q\zeta \end{pmatrix}.$$

Для матрицы

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{q} \sqrt{k_i j(q) k_{ji}^{-1}} \\ \sqrt{q^{-1}} \sqrt{(k_i j(q) k_{ji}^{-1})^{-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

легко проверить равенство $b = RaR$. Проверка соотношений обобщенной группы кос сводится к проверке равенств вида $(aR)^m = (Ra)^m$ для некоторых натуральных чисел m . Матрицы aR и Ra имеют одинаковые характеристические уравнения, а именно, $\mu^2 + (1 - \zeta) \sqrt{k_{ij} k_{ji}^{-1}} \mu - \zeta = 0$. Отсюда выводится, что собственные числа матриц aR и Ra удовлетворяют требуемым равенствам. Отыскивая в явном виде матрицы, сопрягающие матрицы aR и Ra с диагональными матрицами, можно прямыми вычислениями проверить требуемые равенства для самих матриц aR и Ra . $\square$

Рассмотрим R -систему Веселова—Коно—Чередника, ассоциированную с системой корней R , удовлетворяющую всем перечисленным в этом пункте условиям на R и $W(R)$:

$$d\Psi(z) = \left(\sum_{\alpha \in R} \frac{h_\alpha d(z, \alpha)}{(z, \alpha)} r_\alpha \right) \Psi(z), \quad (11)$$

где

$$r_\alpha = \frac{1}{p_\alpha} \sum_{j=0}^{p_\alpha-1} \det(s_\alpha^j) s_\alpha^j.$$

Легко проверить, что

$$r_\alpha = \frac{p_\alpha}{(\alpha, \alpha)} \alpha * \otimes \alpha,$$

где $(\alpha * \otimes \alpha)(v) = (v, \alpha) \alpha$. Отметим, что эрмитова форма G_R на $\mathbb{C}^n$, определенная равенством $G_R(u, w) = \sum_{\alpha \in R} (u, \alpha)(\alpha, w)$, является невырожденной и для неприводимых систем корней R (т.е.

когда группа $W(R)$ неприводима) пропорциональна стандартному эрмитову произведению (u, w) . Поэтому унитарные отражения для любого вектора $\alpha \in \mathbb{C}^n$, определенные относительно формы G_R и стандартной эрмитовой формы, совпадают, так что R -система (11) действительно является системой Веселова—Коно—Чередника, как это было определено выше.

R -Система (11) является интегрируемой системой, что легко проверяется на основе равенства $s_\alpha r_\beta = r_{s_\alpha(\beta)} s_\alpha$. Указанное свойство очевидным образом извлекается из аналогичного свойства для произвольных отражений s_α и s_β , унитарности отражений и того факта, что пересечение любой комплексной системы корней с любым двумерным подпространством в $\mathbb{C}^n$ также является системой корней. Положим, что $h_\alpha = h$, $\alpha \in R$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Представление монодромии R -системы (11), отвечающей комплексной системе корней R , удовлетворяющей всем перечисленным выше условиям, эквивалентно некоторому обобщенному представлению Гивенталья—Сквайера.*

Доказательство. Доказательство повторяет основные шаги доказательства теоремы о монодромии в предыдущем разделе. Теорема факторизации через алгебры Гекке представления монодромии R -системы и основные факты об алгебрах Гекке и их представлениях, в том числе и теорема единственности восстановления представления монодромии групп кос по соответствующим представлениям групповых алгебр и алгебр Гекке, которые были необходимы для доказательства теоремы в предыдущем разделе, распространены и на циклотомические алгебры Гекке (см. [7, предложение 4.2.2], [15, ч. II, теоремы 3.6, 6.3] и ссылки в этой книге) и их представления приводят к доказательству. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы IV–VI. — М.: Мир, 1972.
2. Василевич Н. Д., Ладис Н. Н. Интегрируемость уравнений Пфаффа на $\mathbb{C}P^n$ // Дифференц. уравн. — 1979. — 17, № 4. — С. 732–733.
3. Гивенталь А. Б. Скрученные формулы Пикара—Лефшеца// Функци. анализ. прилож. — 1988. — 22, № 1. — С. 12–22.
4. Лексин В. П. О задаче Римана—Гильберта для аналитических семейств представлений// Мат. заметки. — 1991. — 50, № 2. — С. 89–97.
5. Лексин В. П. Монодромия систем Веселова—Чередника для вещественных и комплексных конфигураций векторов// Proc. Int. Conf. “Differential Equations and Related Topics” Dedic. 103 Anniv. of I. G. Petrovskii. — Moscow, 2004. — С. 127–128.
6. Чередник И. В. Монодромия r -систем и обобщенные группы кос// Докл. АН СССР. — 1989. — 256. — С. 15–18.
7. Broué M., Malle G., Rouquier R. Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras// J. Reine Angew. Math. — 1998. — 500. — С. 127–190.
8. Cherednik I. Monodromy representations for generalized Knizhnik–Zamolodchikov equations// Publ. RIMS. Kyoto Univ. — 1991. — 27. — С. 711–726.
9. Freedman M., Kitaev A., Larsen M., Wang Z. Topological quantum computation/ arXiv: q-ph/0101025.
10. Giorgadze G. Monodromy approach to quantum computing// Int. J. Mod. Phys. B. — 2002. — 16, № 30. — С. 4593–4605.
11. Kohno T. Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations// Contemp. Math. — 1988. — 78. — С. 339–363.
12. Lexin V. P. WDVV equations and generalized Burau representations// Междунар. конф. «Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания»: Обнинск, 14–18 мая 2002 г./ Тез. докл. — С. 59–60.
13. Lexin V. P. Geometry vector configurations and monodromy KZ-type connections// Междунар. конф.-школа по геометрии и анализу, посвященная памяти А. Д. Александрова: Новосибирск, 9–20 сентября 2002 г./ Тез. докл. — С. 80–81.
14. Lexin V. P. Monodromy of rational KZ-equations and some related topics// Acta Appl. Math. — 2003. — 75, №№ 1–3. — С. 105–115.
15. Opdam E. M. Lecture notes on Dunkl operators for real and complex reflection groups/ MSJ Memoirs. — 2000. — 8.
16. Squier C. C. Matrix representations of Artin groups// Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — 103. — С. 49–53.

17. *Toledano Laredo V.* Flat connections and quantum groups// Acta Appl. Math. — 2002. — 73. — С. 155–173.
18. *Veselov A. P.* On geometry of a special class of solutions to generalized WDVV equations// Integrability: the Seiberg–Witten and Whitham Equations: Edinburg, 1998. — Amsterdam: Gordon and Breach, 2000. — С. 125–136.

В. П. Лексин

Коломенский государственный педагогический институт

E-mail: lexine@mcsme.ru

О ЗАДАЧЕ НАИМЕНЬШЕГО И НАИБОЛЬШЕГО УСРЕДНЕННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

© 2005 г. А. Ю. ПЛАХОВ

Аннотация. Рассматривается тело, движущееся в разреженной среде точечных неподвижных частиц. Центр массы тела движется с постоянной скоростью; кроме того, тело совершает медленные вращательные движения. Определяется сила сопротивления среды движению тела. Вводится понятие шероховатого тела и доказано, что отношение сопротивлений шероховатого тела и соответствующего ему гладкого тела заключено между 0,969 и 2.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Пусть Ω — ограниченное множество с границей класса C^2 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Предположим, что $(v(t), x(t))$, $t \in \mathbb{R}$, — бильярдное движение в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ с конечным числом отражений, и обозначим

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} v(t) = v, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t) - vt) = x, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v^+, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - v^+t) = x^+.$$

Отображение, которое значению $(v, x) \in \mathbb{R}^6$ ставит в соответствие значение $(v^+, x^+) \in \mathbb{R}^6$, называется отображением рассеяния и в дальнейшем обозначается $(v_\Omega^+(v, x), x_\Omega^+(v, x))$; оно определено для почти всех значений $(v, x) \in \mathbb{R}^6$ (см. [2, 4]).

Будем обозначать символом $(\cdot | \cdot)$ скалярное произведение. Ограничение функции $v - v_\Omega^+(v, x)$ на множество $K = \{(v, x) \in \mathbb{R}^6 : |v| = 1, (v|x) = 0\}$, снабженное четырехмерной хаусдорфовой мерой, является измеримой ограниченной функцией с компактным носителем; следовательно, согласно теореме Фубини, для почти всех значений $v \in S^2$ определена величина

$$R_\Omega(v) = \int_{v^\perp} (v - v_\Omega^+(v, x)) dx \quad (1)$$

и существует интеграл

$$\tilde{R}(\Omega) = \int_{S^2} (R_\Omega(v)|v) dv. \quad (2)$$

Здесь $v^\perp$ обозначает ортогональное дополнение к $\{v\}$ в $\mathbb{R}^3$.

Предположим, что некоторое твердое тело движется равномерно и прямолинейно в разреженной однородной среде с единичной скоростью. Выберем систему отсчета, связанную с этим телом, и обозначим через Ω множество, занимаемое телом, и через v — скорость, с которой движутся частицы среды в выбранной системе отсчета. Примем, что частицы первоначально покоятся, не взаимодействуют между собой и абсолютно упруго отражаются при столкновениях с телом. Тогда сила сопротивления среды движению тела совпадает (с точностью до постоянной, пропорциональной плотности среды) с $R_\Omega(v)$, а проекция силы сопротивления на направление движения тела равна $-(R_\Omega(v)|v)$.

Предположим теперь, что центр массы тела движется прямолинейно и равномерно с единичной скоростью и, кроме того, тело совершает медленное вращательное движение, так что в системе отсчета, связанной с телом, доля времени, проводимого вектором скорости в любой области из S^2 , пропорциональна площади этой области. Тогда проекция силы сопротивления на направление движения, усредненная по времени, равна $-\tilde{R}(\Omega)$. Будем называть $\tilde{R}(\Omega)$ усредненным сопротивлением множества Ω .

Рассмотрим выпуклое множество $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ с непустой внутренностью и границей класса C^1 . Будем обозначать через n_x вектор внешней нормали к $\partial\mathcal{B}$ в точке $x \in \partial\mathcal{B}$. Назовем шероховатым телом, подчиненным $\mathcal{B}$, последовательность множеств $\bar{\Omega} = \{\Omega_m \subset \mathbb{R}^3, m = 1, 2, 3, \dots\}$ такую, что

- 1) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots$ и $\bigcup_1^\infty \Omega_m = \mathcal{B}$;
- 2) границы $\partial\Omega_m, m = 1, 2, 3, \dots$, — гладкие многообразия класса C^2 ;
- 3) существует $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{R}(\Omega_m)$.
- 4) Обозначим $\Xi_\Omega(v, x) = \{x(t), t \in \mathbb{R}, \text{ где } (v(t), x(t)) \text{ — бильярдное движение в } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \text{ с ко-}$
 $\text{нечным числом отражений, причем } \lim_{t \rightarrow -\infty} v(t) = v, \lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t) - vt) = x\}$. Таким образом,
 $\Xi_\Omega(v, x)$ — бильярдная траектория в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, содержащая некоторую полупрямую $\{x + vt, t$
 $\text{достаточно мало}\}$. Определим множество

$$A_{\varepsilon, \Omega} := \{(v, x) \in K : \text{diam}(\Xi_\Omega(v, x) \cap \partial\mathcal{B}) \geq \varepsilon\}$$

и будем обозначать символом $|\cdot|$ четырехмерную хаусдорфову меру. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо $\lim_{m \rightarrow \infty} |A_{\varepsilon, \Omega_m}| = 0$.

Величину $\mathcal{R}(\bar{\Omega}) := \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{R}(\Omega_m)$ будем называть усредненным сопротивлением шероховатого тела $\bar{\Omega}$.

Замечание 1. Любая бильярдная траектория в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_m$ пересекает $\partial\mathcal{B}$ не более чем в двух точках. Таким образом, $A_{\varepsilon, \Omega_m}$ есть множество точек (v, x) таких, что соответствующая бильярдная траектория существует и пересекает $\partial\mathcal{B}$ в двух точках, причем расстояние между этими точками не меньше ε .

Замечание 2. Определение шероховатого тела не является чрезмерно ограничительным. В самом деле, какова бы ни была последовательность $\{\Omega_m\}$, удовлетворяющая условиям 1) и 2), из нее всегда можно выбрать подпоследовательность $\{\Omega_{m_k}\}$ такую, что $\tilde{R}(\Omega_{m_k})$ сходится. Далее, обозначим через $\text{conv } \Omega$ выпуклую оболочку множества Ω и предположим, что, в дополнение к 1) и 2), множества $\partial\Omega_m \setminus \partial(\text{conv } \Omega_m)$ распадаются на связные компоненты, диаметр которых не превосходит некоторого значения d_m , стремящегося к нулю при $m \rightarrow \infty$. (Это условие выполняется, в частности, если все множества Ω_m выпуклые.) Тогда справедливо 4).

Зафиксируем $\mathcal{B}$ и рассмотрим задачу минимизации и максимизации усредненного сопротивления в классе шероховатых тел, подчиненных $\mathcal{B}$. В настоящей работе будет показано, что для любого $\bar{\Omega}$ из этого класса справедливы неравенства

$$0,969 \leq \frac{\mathcal{R}(\bar{\Omega})}{\tilde{R}(\mathcal{B})} \leq 2. \quad (3)$$

Другими словами, сделав поверхность гладкого выпуклого тела шероховатой, невозможно уменьшить его сопротивление более чем на 3,1% и невозможно увеличить его более чем вдвое. Вопрос о том, являются ли эти оценки точными, остается открытым.

2. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОЦЕНКЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ К ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА МАССЫ МОНЖА—КАНТОРОВИЧА

Из (1) и (2) следует, что

$$\tilde{R}(\Omega) = \int_{S^2} \int_{v^\perp} (1 - (v_\Omega^+(v, x)|v)) dx dv. \quad (4)$$

Для каждого вектора $n \in S^2$ определим сферическую систему координат (φ_n, θ_n) в S^2 : каждому вектору $v \in S^2$ соответствуют его координаты $(\varphi_n(v), \theta_n(v))$, где $\varphi_n(v) \in [0, \pi]$ — угол между n и v , а $\theta_n(v) \in [0, 2\pi]$ кусочно непрерывно зависит от n и v . Нетрудно проверить следующее соотношение: если $n_k, v_k \in S^2$, $(n_k | v_k) > 0$, $k = 1, 2$, и α — угол между n_1 и n_2 , $0 \leq \alpha \leq \pi$, то

$$\cos(\varphi_{n_1}(v_1) + \varphi_{n_2}(v_2)) - \alpha \leq (v_1 | v_2) \leq 1. \quad (5)$$

Допустим, что бильярдная траектория $\Xi_{\Omega_m}(v, x)$ пересекает $\partial\mathcal{B}$ в точках x_1 и x_2 (точка входа и точка выхода соответственно); эти точки могут совпадать. Введем сокращенные обозначения $n_1 := n_{x_1}$, $n_2 := n_{x_2}$, $v_m^+ := v_{\Omega_m}^+(v, x)$. В сферических координатах, связанных с векторами n_1 и n_2 , скорости $-v$ и v_m^+ имеют вид $(\varphi_{n_1}(-v), \theta_{n_1}(-v))$ и $(\varphi_{n_2}(v_m^+), \theta_{n_2}(v_m^+))$ соответственно. Обозначим через $\alpha_m(x_1, \varphi_{n_1}(-v), \theta_{n_1}(-v))$ угол между $-v$ и v_m^+ . Это определение корректно задает измеримую функцию $\alpha_m : \partial\mathcal{B} \times [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow [0, \pi]$. Далее, каждой тройке значений $(x_1, \varphi_{n_1}(-v), \theta_{n_1}(-v))$ поставим в соответствие тройку $(x_2, \varphi_{n_2}(v_m^+), \theta_{n_2}(v_m^+))$. Это соответствие корректно определяет взаимно однозначное отображение

$$(x, \varphi, \theta) \mapsto (X_m(x, \varphi, \theta), \Phi_m(x, \varphi, \theta), \Theta_m(x, \varphi, \theta))$$

множества $\partial\mathcal{B} \times [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ на себя, сохраняющее меру $d^2x \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta$, где d^2x — элемент площади в $\partial\mathcal{B}$. Другими словами, задано соответствие между значениями бильярдного движения в $\mathbb{R} \setminus \Omega_m$ в первый и второй моменты пересечения с $\partial\mathcal{B}$, причем скорости движения записаны в соответствующих локальных сферических системах координат.

Учитывая соотношения (4) и (5), получаем оценку для $\tilde{R}(\Omega_m)$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{B}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \cos(\varphi + \Phi_m(x, \varphi, \theta)) - \alpha_m(x, \varphi, \theta)\right) d\theta \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d^2x &\leq \\ &\leq \tilde{R}(\Omega_m) \leq \int_{\partial\mathcal{B}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2 d\theta \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d^2x. \end{aligned} \quad (6)$$

Функции α_m ограничены в совокупности и, согласно условию 4), $\alpha_m(x, \varphi, \theta)$ стремится по мере к нулю при $m \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathcal{B}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \alpha_m(x, \varphi, \theta) d\theta \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d^2x = 0.$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$\inf_{\partial\mathcal{B}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \cos(\varphi + \Phi(x, \varphi, \theta))\right) d\theta \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d^2x \leq \mathcal{R}(\bar{\Omega}) \leq 2\pi |\partial\mathcal{B}|, \quad (7)$$

где $|\partial\mathcal{B}|$ — площадь поверхности $\partial\mathcal{B}$, а точная нижняя грань берется по всем сохраняющим меру $d\mu(x, \varphi, \theta) := d^2x \cdot \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta$ отображениям $T : (x, \varphi, \theta) \mapsto (X, \Phi, \Theta)$ множества $\Pi := \partial\mathcal{B} \times [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ на себя. В частном случае, когда $\Omega_m = \mathcal{B}$, имеем $\alpha_m \equiv 0$, $\Phi_m(x, \varphi, \theta) = \varphi$ и

$$\tilde{R}(\mathcal{B}) = \int_{\partial\mathcal{B}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\theta \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d^2x = \pi |\partial\mathcal{B}|.$$

Отсюда и из второго неравенства в (7) немедленно вытекает второе неравенство в (3).

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество отображений $T = (X(\cdot), \Phi(\cdot), \Theta(\cdot)) : \Pi \rightarrow \Pi$, сохраняющих меру μ . Рассмотрим задачу

$$\inf_{T \in \mathcal{T}} F(T), \quad (8)$$

где

$$F(T) = \int_{\Pi} \left(1 + \cos(\varphi + \Phi(x, \varphi, \theta))\right) d\mu(x, \varphi, \theta). \quad (9)$$

Следуя идее Л. В. Канторовича [1], рассмотрим вспомогательную задачу минимизации функционала, заданного на множестве борелевских мер. Именно, положим $\mathcal{Q} = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ и рассмотрим

борелевскую меру λ на $[0, \pi/2]$ с плотностью $2\pi|\partial\mathcal{B}|\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$. Вспомогательная задача имеет вид

$$\inf_{\nu \in \mathcal{M}_\lambda} \mathcal{F}(\nu), \quad \mathcal{F}(\nu) = \int_Q c(\varphi, \varphi') d\nu(\varphi, \varphi'), \quad (10)$$

где $c(\varphi, \varphi') = 1 + \cos(\varphi + \varphi')$, а $\mathcal{M}_\lambda$ обозначает множество борелевских мер ν на $\mathcal{Q}$, проекции которых на обе координатные оси совпадают с λ , т.е. удовлетворяющих равенству

$$\nu(J \times [0, \pi/2]) = \nu([0, \pi/2] \times J) = \lambda(J) \quad (11)$$

для любого борелевского множества $J \subset [0, \pi/2]$. Хорошо известно, что задача Монжа—Канторовича (10) имеет по крайней мере одно решение ν_* . Заметим также, что каждое преобразование $T = (X(\cdot), \Phi(\cdot), \Theta(\cdot)) \in \mathcal{T}$ индуцирует некоторую меру $\nu_T \in \mathcal{M}_\lambda$ следующим образом. Определим отображения $\Gamma_T : \Pi \mapsto \Pi^2$ и $\eta : \Pi^2 \rightarrow \mathcal{Q}$ формулами

$$\Gamma_T(x, \varphi, \theta) = (x, \varphi, \theta, X(x, \varphi, \theta), \Phi(x, \varphi, \theta), \Theta(x, \varphi, \theta)), \quad \eta(x, \varphi, \theta, x', \varphi', \theta') = (\varphi, \varphi');$$

тогда по определению $\nu_T(A) = \mu((\eta\Gamma_T)^{-1}A)$ для любого борелевского множества $A \subset \mathcal{Q}$. Нетрудно видеть, что $F(T) = \mathcal{F}(\nu_T)$; отсюда следует, что минимум в задаче (10) не превосходит инфимума в задаче (8), (9). Кроме того, если существует хотя бы одно преобразование T^* , индуцирующее оптимальную меру, то соответствующие минимум и инфимум совпадают, а все такие преобразования T^* составляют множество решений задачи (8), (9).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Наша задача в этом разделе — показать, что минимум в задаче (10) равен $0,969\pi|\partial\mathcal{B}|$, откуда будет вытекать левое неравенство в (3). Введем обозначения

$$\mathcal{Q} = [-\pi/4, \pi/4]^2, \quad c(\varphi, \varphi') = c(\pi/4 - \varphi, \pi/4 - \varphi') - 1 = \sin(\varphi + \varphi')$$

и определим борелевскую меру μ на $[-\pi/4, \pi/4]$ соотношением

$$\mu(A) = \frac{\lambda(\pi/4 - A)}{\pi|\partial\mathcal{B}|};$$

здесь A — борелевское множество, $A \subset [-\pi/4, \pi/4]$, $\pi/4 - A := \{\pi/4 - a, \text{ где } a \in A\}$. Легко видеть, что плотность меры μ равна $\cos 2\varphi$, а производящая функция равна $\sin 2\varphi/2$. В новых обозначениях задача принимает следующий вид: доказать, что

$$\inf_{\nu \in \mathcal{M}_\mu} \mathcal{L}(\nu) = 0,969, \quad (12)$$

где

$$\mathcal{L}(\nu) = 1 + \int_Q \sin(\varphi + \varphi') d\nu(\varphi, \varphi').$$

Для ее решения используем результат, полученный в [3]. Этот результат (в несколько ослабленной форме) может быть сформулирован следующим образом.

Предположим, что

- (i) h — нечетная непрерывная функция на $\mathbb{R}$, строго вогнутая на $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$;
- (ii) борелевская мера η не содержит атомов, а ее носитель $\text{spt } \eta$ компактен и состоит из конечного числа отрезков.

Определим знакопеременную меру $\tilde{\eta}$ на $\mathbb{R}_+$ формулой $\tilde{\eta}(B) = \eta(B) - \eta(-3B)$, где $B \subset \mathbb{R}_+$ — произвольное борелевское множество, $-3B := \{-3x : x \in B\}$, и обозначим через η_+ и η_- верхнюю и нижнюю вариации $\tilde{\eta}$.

Определение 1. Конечное или счетное семейство интервалов $I_i = (a_i, b_i)$, $0 \leq a_i < b_i \leq +\infty$, называется η -допустимым, если

- (а) при $i \neq j$ выполняется соотношение

$$\bar{I}_i \cap \bar{I}_j = \emptyset; \quad (13)$$

(б) если $a_i > 0$, то

$$\tilde{\eta}(I_i) = 0, \quad \mathbb{R}_+ \setminus (\cup_i I_i) \subset \text{spt } \eta_+; \quad (14)$$

(в) при любом i и при

$$x \in \begin{cases} (a_i, b_i), & \text{если } a_i > 0, \\ (-3b_i, b_i), & \text{если } a_i = 0 \end{cases}$$

справедливы неравенства

$$\eta((-3b_i, -2b_i - x)) \leq \eta((x, b_i)) \leq \eta((-3b_i, -2a_i - x)). \quad (15)$$

Пусть $\mathcal{I} = \{I_i\}$ — η -допустимое семейство интервалов. Определим множество $G_{\mathcal{I}, \eta}$ следующим образом. Пусть

$$G_i^D := \left\{ (x, y) : x \in \text{spt } \eta \cap I_i, y \in \text{spt } \eta \cap (-3I_i), \eta((x, b_i)) = \eta((-3b_i, y)) \right\},$$

G_i^L — множество, симметричное G_i^D относительно прямой $\{x = y\}$;

$$G_i = \begin{cases} G_i^D \cup G_i^L, & \text{если } a_i \neq 0; \\ \{(x, y) : x, y \in \text{spt } \eta \cap (-3b_i, b_i), \eta((x, b_i)) = \eta((-3b_i, y))\}, & \text{если } a_i = 0; \end{cases}$$

$$G_{(0)}^D = \left\{ (x, y) : y = -3x, x \in \mathbb{R}_+ \setminus \left(\bigcup_i I_i \right), y \in \text{spt } \eta \right\},$$

$G_{(0)}^L$ — множество, симметричное $G_{(0)}^D$ относительно прямой $\{x = y\}$;

$$G^- = G_{(0)}^D \cup G_{(0)}^L \cup \left(\bigcup_i G_i' \right),$$

где G' обозначает множество предельных точек множества G ;

$$G^+ = \left\{ (x, x) : x \in \mathbb{R}_+ \setminus \left(\bigcup_i I_i \right) \right\}.$$

Наконец, множество $G_{\mathcal{I}, \eta}$ определяется соотношением

$$G_{\mathcal{I}, \eta} = \overline{G^+} \cup G^-.$$

Основной результат [3] заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Предположим, что условия (i) и (ii) выполнены. Если мера ν_* является решением задачи*

$$\inf_{\nu \in \mathcal{M}_\eta} \int_{\mathbb{R}^2} h(\varphi + \varphi') d\nu(\varphi, \varphi'), \quad (16)$$

то для некоторого η -допустимого семейства интервалов $\mathcal{I}$ справедливо $\text{spt } \nu_* = G_{\mathcal{I}, \eta}$.

Заметим, что величина интеграла в (12) не изменится, если подынтегральную функцию заменить на $h(\varphi + \varphi')$, где функция $h(\varphi)$ совпадает с $\sin \varphi$ при $|\varphi| \leq \pi/4$ и какая угодно при $|\varphi| > \pi/4$. Воспользовавшись этим, определим

$$h(\varphi) := \begin{cases} \sin \varphi, & \text{если } |\varphi| \leq \pi/4, \\ 3\frac{\varphi}{\pi} - 4\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^3, & \text{если } |\varphi| > \pi/4. \end{cases}$$

Этот выбор обусловлен тем, что данная функция h удовлетворяет условию (i). Далее, мера μ удовлетворяет условию (ii) и имеет носитель $\text{spt } \mu = [-\pi/4, \pi/4]$. Нетрудно найти меру $\tilde{\mu}$ и затем определить носители мер μ_+ и μ_- :

$$\text{spt } \mu_+ = \left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{4} \arccos \frac{2}{3} \right] \cup \left[\frac{1}{4} \arccos \frac{2}{3}, \frac{\pi}{4} \right], \quad \text{spt } \mu_- = \left[-\frac{1}{4} \arccos \frac{2}{3}, \frac{1}{4} \arccos \frac{2}{3} \right].$$

Из условий (а) и (б) следует, что семейство интервалов либо содержит единственный элемент $\mathbb{R}_+$, либо содержит два элемента $(0, b)$, $(\pi/4, +\infty)$, где

$$\frac{1}{4} \arccos \frac{2}{3} \leq b < \frac{\pi}{4}.$$

Каждый из указанных интервалов удовлетворяет условию (в); следовательно, любое μ -допустимое семейство есть либо $\mathcal{I}_0 = \{\mathbb{R}_+\}$, либо $\mathcal{I}_b = \{(0, b), (\pi/4, +\infty)\}$.

Таким образом, кандидатами на оптимальную меру в задаче (12) являются меры $\nu_0 \in \mathcal{M}_\mu$ и $\nu_b \in \mathcal{M}_\mu$ такие, что $\text{spt } \nu_0 = G_{\mathcal{I}_0, \mu}$, $\text{spt } \nu_b = G_{\mathcal{I}_b, \mu}$, при указанных выше значениях b . Приступим к вычислению этих мер и к последующему сравнению соответствующих значений функционала в (12).

Рассмотрим семейство $\mathcal{I}_0 = \{I_0 = \mathbb{R}_+\}$. Имеем

$$G^+ = G_{(0)}^D = G_{(0)}^L = \emptyset, \quad G_0 = \{(x, y) : x, y \in [-\pi/4, \pi/4], x + y = 0\}, \quad G^- = G_{(0)}^D \cup G_{(0)}^L \cup G'_0 = G_0;$$

отсюда $G_{\mathcal{I}_0, \mu} = \bar{G}^+ \cup G^- = G_0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{spt } \nu_0 &= \{(\varphi, \varphi') : \varphi, \varphi' \in [-\pi/4, \pi/4], \varphi + \varphi' = 0\}, \\ \mathcal{L}(\nu_0) &= 1 + \int_{\mathbb{R}^2} h(\varphi + \varphi') d\nu_0(\varphi, \varphi') = 1 + h(0) \cdot \nu_0(Q) = 1. \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим семейство $\mathcal{I}_b = \{I_1 = (0, b), I_2 = (\pi/4, +\infty)\}$. Имеем $G_2^D = G_2^L = \emptyset$, $G^+ = \{(x, x) : x \in [b, \pi/4]\}$. Рассмотрим отдельно два случая:

$$\frac{1}{4} \arccos \frac{2}{3} \leq b \leq \frac{\pi}{12}, \quad \frac{\pi}{12} < b < \frac{\pi}{4}.$$

(а) $\frac{1}{4} \arccos \frac{2}{3} \leq b \leq \frac{\pi}{12}$. Имеем

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(x, y) : x, y \in (-3b, b), \mu((x, b)) = \mu((-3b, y))\}, \quad G_{(0)}^D = \{(x, y) : y = -3x, x \in [b, \pi/12]\}, \\ G_{(0)}^L &\text{ симметрично } G_{(0)}^D \text{ относительно прямой } \{x = y\}, \quad G^- = G_{(0)}^D \cup G_{(0)}^L \cup G'_1, \quad G_{\mathcal{I}_b, \mu} = G^+ \cup G^-. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{I}_b, \mu} &= \{(\varphi, \varphi') : \varphi \in [-\pi/4, -3b], \varphi' = -\varphi/3, \\ &\text{или } \varphi \in [-3b, b], \sin 2\varphi + \sin 2\varphi' = \sin 2b - \sin 6b, \\ &\text{или } \varphi \in [b, \pi/12], \varphi' = -3\varphi, \text{ или } \varphi \in [b, \pi/4], \varphi' = \varphi\}. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\mathcal{L}(\nu_b) = 1 + \int_{\mathbb{R}^2} \sin(\varphi + \varphi') d\nu_b(\varphi, \varphi').$$

Обозначая $B = \sin^2(\pi/4 - b)$, делая замену переменных $x = \pi/4 - \varphi$, $y = \pi/4 - \varphi'$ и учитывая симметрию меры ν_b относительно диагонали $\{x = y\}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\nu_b) &= 1 + \int_0^{\pi/6} \cos 2x d(\sin^2 x) + \int_{\pi/6}^{\pi/4-b} \cos 2x d(\sin^2 x + \sin^2 3x) + \\ &+ \int_{\pi/4-b}^{\pi/4+3b} \cos(x + y(x)) d(\sin^2 x) + 2 \int_{\pi/4+3b}^{\pi/2} \cos\left(\frac{\pi + 2x}{3}\right) d(\sin^2 x) = \\ &= 1 + B - B^2 + 3 \int_{\pi/6}^{\pi/4-b} \cos 2x d(\sin^2 3x) + \int_{\pi/4-b}^{\pi/4+3b} \cos(x + y(x)) d(\sin^2 x), \end{aligned}$$

где функция $y(x)$ определяется из соотношения

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin^2(\pi/4 - b) + \sin^2(\pi/4 + 3b).$$

Делая замену переменных $t = \sin^2 x$, получаем $\mathcal{L}(\nu_b) = f_2(B)$, где

$$f_2(B) = 1 + B - B^2 + 3 \int_{1/4}^B (1 - 2t) d[t(3 - 4t)^2] + \\ + \int_B^{B(3-4B)^2} \left(\sqrt{1-t} \sqrt{1-B-B(3-4B)^2+t} - \sqrt{t} \sqrt{B+B(3-4B)^2-t} \right) dt,$$

причем B меняется от $1/4$ до $(1 - 1/\sqrt{6})/2$.

(б) $\pi/12 < b < \pi/4$. Имеем

$$G_1 = \{(x, y) : x, y \in (-\pi/4, b), \mu((x, b)) = \mu((-\pi/4, y))\}, \quad G_{(0)}^D = G_{(0)}^L = \emptyset,$$

следовательно,

$$G^- = G_1' = \{(x, y) : x, y \in [-\pi/4, b], \mu((x, b)) = \mu((-\pi/4, y))\}, \quad G_{\mathcal{I}_b, \mu} = G^+ \cup G^-,$$

а значит,

$$G_{\mathcal{I}_b, \mu} = \{(\varphi, \varphi') : \varphi \in [-\pi/4, b], \sin 2\varphi + \sin 2\varphi' = \sin 2b - 1 \text{ или } \varphi \in [b, \pi/4], \varphi' = \varphi\}.$$

В этом случае имеем

$$\mathcal{L}(\nu_b) = 1 + \int_{-\pi/4}^b \sin(\varphi + \varphi'(\varphi)) d \frac{\sin 2\varphi}{2} + \int_b^{\pi/4} \sin 2\varphi d \frac{\sin 2\varphi}{2},$$

где функция $\varphi'(\varphi)$ определяется из соотношения $\sin 2\varphi + \sin 2\varphi' = \sin 2b - 1$. Снова делая замену переменных $x = \pi/4 - \varphi$, $y = \pi/4 - \varphi'$, $t = \sin^2 x$, получаем $\mathcal{L}(\nu_b) = f_1(B)$, где

$$f_1(B) = 1 + B - B^2 + \int_B^1 \left(\sqrt{(1-t)(t-B)} - \sqrt{t(1-t+B)} \right) dt,$$

причем B меняется от 0 до $1/4$.

Таким образом, задача сводится к минимизации функции

$$f(B) = \begin{cases} f_1(B), & \text{если } B \in [0, 1/4], \\ f_2(B), & \text{если } B \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1 - 1/\sqrt{6}}{2} \right]. \end{cases}$$

Эта задача была решена численно с помощью Maple; оказалось, что минимум функции $f(B)$ равен 0,96945 и достигается в точке $B = 0,228$. Таким образом, оба неравенства в (3) полностью доказаны.

Выражаю благодарность Delfim Torres за помощь в проведении численного счета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович Л. В. О перемещении масс// Докл. АН СССР. — 1942. — 37, № 7–8. — С. 227–229.
2. Плахов А. Ю. Задача Ньютона о теле наименьшего усредненного сопротивления// Мат. сб. — 2004. — 195, № 7. — С. 105–126.
3. Плахов А. Ю. Точные решения одномерной задачи Монжа—Канторовича// Мат. сб. — 2004. — 195, № 9. — С. 57–74.
4. Tabachnikov S. Billiards. — Soc. Math. France, 1995.

ЗАДАЧА СТЕФАНА ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2005 г. **Е. Н. СТРАТИЛАТОВА**

Аннотация. Рассматривается краевая задача с неизвестной границей, моделирующая процесс плавления неоднородного одномерного материала в рамках гиперболического закона теплопроводности. Эффективно вычислены матрицы Римана первого и второго рода получаемой гиперболической системы с переменными коэффициентами. На этой основе построено и исследовано интегральное уравнение для производящей функции краевой задачи, предложена итерационная процедура решения этого уравнения и, тем самым, краевой задачи.

Введение. В [2] исследована краевая задача с неизвестной границей, моделирующая процесс плавления одномерного однородного материала в рамках гиперболического закона теплопроводности [5]. Обоснована корректность задачи, предложена итерационная процедура построения решения. В основе подхода лежит построенный в [3, 4] аппарат матриц-функций Римана первого и второго рода для одномерной гиперболической системы и его развитие [1].

Данная работа посвящена переносу результатов из [2] на случай неоднородного материала. Основным новым результатом — вычислена матрица Римана второго рода гиперболической системы уравнений теплопроводности с переменными коэффициентами (теорема 2), что позволило провести анализ корректности краевой задачи аналогично [2].

В п.1 изложены используемые далее сведения из [3, 4, 1].

1. Задача типа Коши для одномерной гиперболической системы (случай двух уравнений).

Рассмотрим гиперболический оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + A(x) \frac{\partial}{\partial s} + B(x), \quad x = (s, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Здесь A, B — матрицы второго порядка, $A = \text{diag}(a_1, a_2)$, $a_1 > a_2$, $a_k \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $B = (b_{ij}) \in C(\mathbb{R}^2)$, $|a_k| \geq \text{const} > 0$, $|a'_{ks}| \leq \text{const}$. При этих условиях, в частности, проходящие через каждую точку $y = (s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ характеристики

$$l_k(y) = \left\{ (s, t) : s = s_k(t, y), \quad s'_{kt} = a_k(s_k, t), \quad s_k(t_0, y) = s_0 \right\}$$

определены глобально и пересекаются каждой горизонталью и вертикалью один раз.

Части характеристик $l_k(y)$, лежащие соответственно не ниже ($t \geq t_0$) и не выше ($t \leq t_0$) точки y , будем называть лучами и обозначать $l_k^+(y)$, $l_k^-(y)$. Обозначим через K^{++} , K^{--} , K^{+-} , K^{-+} открытые углы между лучами l_1^+ и l_2^+ , l_1^- и l_2^- , l_1^+ и l_2^- , l_1^- и l_2^+ соответственно.

1.1. Дадим определения функций Римана для частного случая (1).

Функцией Римана первого рода с номером k оператора (1) будем называть функцию $U_k(x, y)$, определенную на множестве $\{(x, y) : y \in \mathbb{R}^2, x \in l_k(y)\}$ и являющуюся при каждом $y \in \mathbb{R}^2$ решением по x задачи Коши

$$[D_k + b_{kk}(x)]u = 0, \quad u|_{x=y} = 1, \quad (2)$$

где D_k — оператор дифференцирования по t вдоль l_k .

Функцией Римана второго рода оператора (1) будем называть матрицу $V(x, y) = (v_{ij})_{i,j=1}^2$, определенную на множестве $\{(x, y) : y \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \cup l_k(y)\}$ и определяемую при каждом $y \in \mathbb{R}^2$ равенством

$$V = \begin{cases} V_0, & x \in K^{++}(y) + K^{--}(y), \\ 0, & x \in K^{+-}(y) + K^{-+}(y), \end{cases}$$

где $V_0(x, y)$ — матричное решение по x задачи Гурса

$$\begin{aligned} L(V_0) &= 0, \\ v_{21} &= \frac{e_1(x, y)b_{21}(x)}{a_2(x) - a_1(x)}U_1(x, y), \quad v_{22} = 0, \quad x \in l_1(y), \\ v_{12} &= \frac{e_2(x, y)b_{12}(x)}{a_2(x) - a_1(x)}U_2(x, y), \quad v_{11} = 0, \quad x \in l_2(y), \\ e_k &= \exp \left\{ \int_y^x a'_{ks} dt \right\}; \end{aligned} \quad (3)$$

интегрирование ведется (здесь и далее) вдоль l_k . Из общих результатов работ [3, 4] следует, что функции U_1, U_2, V существуют и единственны и имеют место двойственные соотношения по y при фиксированном x .

1.2. Представим оператор (1) в виде

$$L = D + B, \quad D = \text{diag}(D_1, D_2), \quad (4)$$

где D_k — введенный выше оператор. Зафиксируем область $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Будем предполагать, что граница $\partial\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$ содержит кусочно гладкий замкнутый участок Γ такой, что для каждой точки $x \in \overline{\mathcal{D}} \setminus \Gamma$, лучи $l_1^-(x), l_2^-(x)$ пересекают Γ один раз под ненулевым углом и не имеют общих точек с $\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma$, кроме, быть может, самой точки x . Построим отображения $\overline{\mathcal{D}} \rightarrow \Gamma$

$$y_k(x) = \begin{cases} l_k^-(x) \cap \Gamma, & x \in \overline{\mathcal{D}} \setminus \Gamma, \\ \hat{y}_k(x), & x \in \Gamma, \end{cases}$$

где $\hat{y}_k$ — точка из $l_k^-(x) \cap \Gamma$, наиболее удаленная от x . Будем говорить, что участок Γ регулярно достигим выходящими из $\overline{\mathcal{D}} \setminus \Gamma$ лучами l_1^-, l_2^- , если выполнены указанные требования и при этом каждая точка $x \in \Gamma$ содержится хотя бы в одном из множеств $y_k(\overline{\mathcal{D}})$. Рассмотрим краевую задачу (задачу типа Коши)

$$L(u) = 0, \quad x \in \overline{\mathcal{D}}, \quad u|_{\Gamma} = \psi(x), \quad (5)$$

где участок $\Gamma \subset \partial\mathcal{D}$ регулярно достигим выходящими из $\overline{\mathcal{D}} \setminus \Gamma$ лучами l_1^-, l_2^- , $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T \in C(\Gamma)$. Решением задачи (5) будем называть функцию $u(x) = (u_1, u_2)^T$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u \in C(\overline{\mathcal{D}})$;
- 2) существуют производные $D_k u_k \in C(\mathcal{D})$, непрерывно продолжаемые в $\overline{\mathcal{D}}$;
- 3) выполняются соотношения (5), где оператор L понимается в смысле (4).

Класс функций со свойствами 1)–3) будем обозначать S_L . Из результатов [1] вытекает следующая теорема.

Теорема 1. 1° Если задача типа Коши (5) разрешима в классе S_L , то имеет место формула

$$u(x) = \mathcal{F}\psi = \begin{bmatrix} U_1(x, y_1)\psi_1(y_1) \\ U_2(x, y_2)\psi_2(y_2) \end{bmatrix} + \int_{\Gamma_x} V(x, z)(I ds - A dt)\psi(z), \quad (6)$$

где V, U_k — функции Римана, $I = \text{diag}(1, 1)$, Γ_x — проходимый в положительном направлении отрезок $[y_1, y_2]$ кривой Γ .

2° Для разрешимости задачи типа Коши (5) в классе S_L необходимо и достаточно выполнения условия

$$\psi(x) = \mathcal{F}\psi, \quad x \in \Gamma. \quad (7)$$

2. Задача Стефана для одномерной гиперболической системы уравнений теплопроводности. Рассматривается следующая краевая задача с неизвестной границей.

2.1. При произвольно фиксированной константе $t^* > 0$ требуется найти функции $T(x)$, $q(x)$, $\varphi(t)$ такие, что

$$\varphi \in C^1[0, t^*], \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(t) > 0 \text{ при } t > 0, \quad (8)$$

а функции T , q в области

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_\varphi = \{x = (s, t) : 0 < t < t^*, \quad 0 < s < \varphi(t)\} \quad (9)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0, \quad e = cT + d, \quad \tau \frac{\partial q}{\partial t} + k \frac{\partial T}{\partial s} + q = 0 \quad (10)$$

и краевым условиям

$$q|_{s=0} = q^*, \quad q|_l = \rho \dot{\varphi} e, \quad kT|_l = \tau \dot{\varphi} q|_l, \quad (11)$$

$$T(x) > 0, \quad q(x) > 0, \quad x \in \overline{\mathcal{D}}. \quad (12)$$

Здесь $l = \{x : s = \varphi(t)\}$ — граница раздела жидкой ($0 < s < \varphi(t)$) и твердой ($s > \varphi(t)$) фаз в момент $t > 0$; e , T , q — соответственно плотность внутренней энергии, температура и тепловой поток в жидкой фазе; τ — период релаксации; q^* — заданная положительная константа; $\rho = \rho(s)$, $k = k(s)$, $c = c(s)$, $d = d(s)$ — плотность, удельные теплопроводность и теплоемкость, скрытая теплота плавления.

2.2. После перехода к римановым инвариантам по формулам

$$T = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{kc\rho}{\tau} \right)^{1/2} (u_1 - u_2) \quad (13)$$

задача принимает следующий вид. При произвольно фиксированной $t^* > 0$ ищутся функция $\varphi(t)$ со свойствами (8) и вектор-функция $u(x) = (u_1, u_2)^T$, определяемая равенствами (13) и являющаяся решением класса S_L уравнения

$$L(u) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A(s) \frac{\partial}{\partial s} + B(s) \right) u = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad (14)$$

$$A = \begin{pmatrix} a(s) & 0 \\ 0 & -a(s) \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ij}) = \frac{1}{2\tau} \begin{pmatrix} 1 + b(s) & -(1 + b(s)) \\ -(1 - b(s)) & 1 - b(s) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

и удовлетворяющая условиям

$$u_1 - u_2|_{s=0} = 2\beta q^*, \quad u_2|_l = -\frac{u_1 \delta}{2u_1 + \delta}|_l, \quad \dot{\varphi} = \frac{au_1}{u_1 + \delta}|_l, \quad (16)$$

$$u_1 + u_2 > 0, \quad u_1 - u_2 > 0, \quad x \in \overline{\mathcal{D}}, \quad (17)$$

где введены обозначения

$$a = \sqrt{\frac{k}{\tau c \rho}}, \quad b = \frac{(\sqrt{\tau k c \rho})'}{c \rho}, \quad \delta = \frac{d}{c}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\tau}{k c \rho}}|_{s=0}.$$

Будем предполагать, что

$$b_0 = \sup_s |b(s)| < 1. \quad (18)$$

Далее a_m , δ_m и a_M , δ_M — точные нижние и верхние грани $a(s)$, $\delta(s)$.

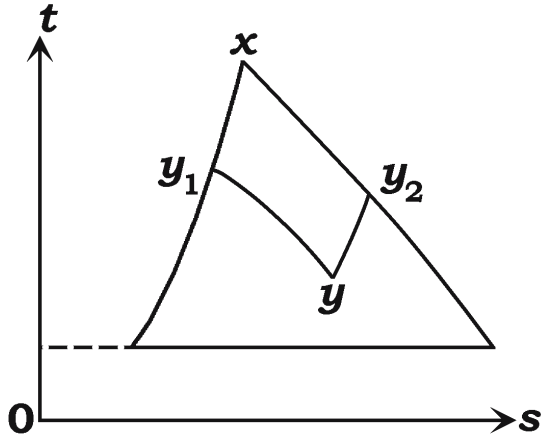


Рис. 1

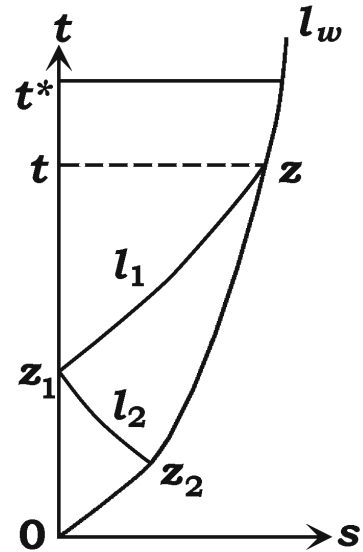


Рис. 2

3. Вычисление матрицы V . Из (2) следует, что функции Римана первого рода оператора (14) даются формулами

$$U_k(x, y) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau} \int_y^x (1 \pm b) dt \right\}, \quad k = 1, 2. \quad (19)$$

Условия (3) на характеристиках для матрицы V_0 , с учетом (15), имеют вид

$$\begin{aligned} v_{21}(x, y) &= \frac{1 - b(s_x)}{4\tau a(s_y)} U_1(x, y), & v_{22}(x, y) &= 0, & x &\in l_1(y), \\ v_{12}(x, y) &= \frac{1 + b(s_x)}{4\tau a(s_y)} U_2(x, y), & v_{11}(x, y) &= 0, & x &\in l_2(y), \end{aligned} \quad (20)$$

где s_x, s_y — абсциссы точек x, y . Зафиксируем точки $x \in \mathbb{R}^2, y \in K^{--}(x)$ и проведем лучи $l_k^+(y)$ до пересечения с лучами $l_k^-(x)$ в точках y_1, y_2 (рис. 1). Положим

$$h_0(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & U_1(x, y_1)v_{12}(y_1, y) \\ U_2(x, y_2)v_{21}(y_2, y) & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где v_{ij} — функции (20). Построим последовательность матриц

$$h_n(x, y) = \mathcal{A}^n h_0, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где A_1, A_2 действуют на функции от y и определяются равенствами

$$A_1 f = 2 \int_y^{y_1} a(s_z) v_{12}(z, y) f(z) dt, \quad A_2 f = 2 \int_y^{y_2} a(s_z) v_{21}(z, y) f(z) dt.$$

Теорема 2. Для матрицы Римана второго рода гиперболического оператора теплопроводности (14) имеет место представление

$$V(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in K^{--}(x), \quad (23)$$

где h_n — последовательность (21), (22).

Доказательство. 1. Обозначим символом $\triangle$ замкнутый криволинейный треугольник, ограниченный линиями $l_k^-(x)$ и произвольно проведенной ниже точки x горизонталью $t = \text{const}$ (рис. 1). Пусть H — банахово пространство непрерывных в $\triangle$ вещественных матриц второго порядка $h(y)$ с нормой $\|h\| = \max_{\triangle} |h|$, где $|h|$ — максимальная сточная сумма $|h_{ij}|$. Формула (22) задает вольтерров оператор $\mathcal{A} : H \rightarrow H$. Отсюда следует сходимость ряда $\sum \mathcal{A}^n$ в операторной топологии и равенство

$$(I - \mathcal{A})^{-1}h = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n h, \quad h \in H. \quad (24)$$

2. Проведем из точки $y \in \mathbb{R}^2$ лучи $l_k^+(y)$. В силу утверждения 1° теоремы 1 матрица $V(x, y)$, рассматриваемая как функция от x в угле $K^{++}(y)$, может быть представлена через свои значения $V(z, y)$ на кривой $\Gamma = l_1^+(y) \cup l_2^+(y)$ формулой (5); с учетом (20), (21) и соотношения $ds = \pm a dt$ она принимает вид

$$V(x, y) = h_0(x, y) + 2 \int_y^{y_1} V(x, z) a v_{12}(z, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dt + 2 \int_y^{y_2} V(x, z) a v_{21}(z, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dt.$$

Будем теперь рассматривать $V(x, y)$ как функцию от y в угле $K^{--}(x)$. Тогда последнее равенство примет вид

$$(I - \mathcal{A})V(x, y) = h_0(x, y),$$

откуда, ввиду (24), следует (23). Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. В ситуации теоремы 2 для элементов матрицы V имеют место неравенства

$$\frac{1 - b_0}{\tau a_M} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \leq \sum v_{ij} \leq \frac{2}{\tau a_m} e^{\alpha(t-t_0)}, \quad (25)$$

где b_0 — постоянная (18).

Следствие 2. Если точки x, y в (23) лежат на одной вертикали и при этом $b(s) \leq 0$, то имеет место неравенство

$$v_{11} - v_{22} + v_{21} - v_{12} \geq 0. \quad (26)$$

4. Производящая функция задачи (14)–(17). Пусть задача (14)–(17) имеет решение $(\varphi(t), u(x))$, l — кривая $s = \varphi(t)$, $\mathcal{D}$ — область (9), Γ — участок границы $\partial\mathcal{D}$, состоящий из отрезка $[0, t^*]$ оси $s = 0$ и кривой l , $\psi(x) = u|_{\Gamma}$. Очевидно, участок Γ регулярно достижим выходящими из $\overline{\mathcal{D}} \setminus \Gamma$ лучами l_k^- . Положим

$$\theta(t) = T(\varphi(t), t), \quad v(t) = \theta(t) + \sqrt{\theta^2(t) + \theta(t)\delta(\varphi(t))}, \quad (27)$$

где $T(x)$ — функции (12).

Лемма. Пусть задача (14)–(17) имеет решение (φ, u) и функция $v(t)$ известна. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\varphi(t)$ — решение на $[0, t^*]$ задачи Коши

$$\dot{\varphi} = \frac{a(\varphi)v}{v + \delta(\varphi)}, \quad \varphi(0) = 0; \quad (28)$$

2) функция $\psi(x)$ вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} \psi|_l &= \begin{bmatrix} v \\ -h(v, \delta) \end{bmatrix}, \quad h(s_1, s_2) = \frac{s_1 s_2}{2s_1 + s_2}, \\ \psi_1(0, t) &= 2\beta q^* + \psi_2(0, t), \quad \psi_1(0, t) = g_1(t) + g_2(t), \\ \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ U_2(0, t; \hat{y})\psi_2(\hat{y}) \end{bmatrix} + \frac{2q^*}{c(0)\rho(0)} \int_0^t \begin{bmatrix} v_{11}(0, t; 0, \tilde{t}) \\ v_{21}(0, t; 0, \tilde{t}) \end{bmatrix} d\tilde{t} + \\ &+ \int_{l_t} V(0, t; y) [\dot{\varphi}(t_y)I - A(s_y)] \psi(y) dt_y, \end{aligned} \quad (29)$$

где U_k, V — функции Римана (19), (23), $\hat{y} = l \cap l_2^-(0, t)$, l_t — отрезок $[0, \hat{y}]$ кривой l ;

3) $u(x)$ вычисляется по формуле (6).

Доказательство. Уравнение для $\varphi(t)$ и формула для $\psi|_l$ следуют из (16). Функция $\psi(0, t)$ вычисляется аналогично [2]. Формула (6) для $u(x)$ следует из утверждения 1° теоремы 1. $\square$

Будем называть $v(t)$ производящей функцией задачи (14)–(17).

Требование непрерывности $q(x)$ в точке $(0, 0)$ дает

$$v(0) = v_0 = q^* - \frac{\delta(0)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2(0) + 4q^{*2}}. \quad (30)$$

5. Уравнение для производящей функции. Зафиксируем произвольно $t^* > 0$. Введем класс функций $C_+ = \{w \in C[0, t^*], w > 0\}$. Каждой функции $w \in C_+$ поставим в соответствие решение $\varphi_w(t)$ задачи Коши (28) с заменой v на w , кривую l_w с уравнением $s = \varphi_w(t)$ и область $\mathcal{D}_w$, определяемую аналогично (9). Каждой паре $(w, t) \in C_+ \times [0, t^*]$ поставим в соответствие точки z, z_1, z_2 , как указано на рис. 2. Обозначим

$$F_w(t) = U_1(z, z_1) \left[2\beta q^* - \int_{t_2}^t \hat{V}(z_1; \varphi_w(\tilde{t}), \tilde{t}) \delta(\varphi_w(\tilde{t})) \dot{\varphi}_w(\tilde{t}) d\tilde{t} \right],$$

где t_2 — ордината точки z_2 , матрица $\hat{V}(x, y)$ — решение по $y \in K^{+-}(x)$ задачи Гурса $L^*(\hat{V}) = 0$,

$$\hat{V}\Pi_1|_{l_2(x)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1-b(s_y)}{4\tau a(s_y)} U_2(x, y) & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{V}\Pi_2|_{l_1(x)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+b(s_y)}{4\tau a(s_y)} U_1(x, y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\Pi_1 = \text{diag}(1, 0)$, $\Pi_2 = I - \Pi_1$. Построим последовательность отображений

$$C_+ \times [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}: \quad f_0(w, t) = w(t),$$

$$f_k(w, t) = F_w(t) - U_1(z, z_1) U_2(z_1, z_2) h[f_{k-1}(w, t_2), \delta(\varphi_w(t_2))], \quad k \geq 1,$$

где h — функция (29).

Теорема 3. 1) При условии

$$q^* \geq q_0(t^*) = \frac{\delta_M}{2\beta} \left[\frac{1}{2} e^{\alpha t^*} + 3(e^{2\alpha t^*} - 1) \right]$$

для любой $w \in C_+$ имеем $f_k(w, t) \in C_+$ и

$$f_k(w, t) \rightrightarrows f(w, t) \in C_+ \quad \text{на } [0, t^*].$$

2) При условии

$$q^* \geq q_1(t^*) = q_0 + \frac{1}{2\beta} e^{\alpha t^*} \left(\frac{\delta_M}{2} + 2\alpha \right) \quad (31)$$

уравнение

$$w(t) = f(w, t) \quad (32)$$

однозначно разрешимо в классе C_+ .

3) Если при этом задача (14)–(17) разрешима, то ее производящая функция $v(t)$ является решением уравнения (32). Имеет место формула $v(t) = \lim v_n(t)$, где $v_n(t) = f(v_{n-1}, t)$, v_0 — константа (30).

Обоснование проводится аналогично [2].

6. Основной результат.

Теорема 4. 1) При условии (31) существует единственная пара $(\varphi(t), u(x))$, удовлетворяющая (14)–(16).

2) При дополнительных условиях

$$b(s) \leq 0, \quad |b'(s)| \leq \frac{1 - b^2(s)}{2a(s)} \quad (33)$$

выполняются требования положительности (17) для функций (13).

Доказательство. Построим по решению $v(t)$ уравнения (32) функцию $\psi(x)$, как указано в п. 4. Обоснование существования вектор-функции $u(x)$, удовлетворяющей (14), (16), состоит в проверке условия разрешимости (7) задачи типа Коши (5) для оператора теплопроводности (14) и проводится повторением рассуждений из [2]. Единственность решения (φ, u) следует из леммы и теоремы 3. Докажем второе утверждение теоремы.

(i) Положим $T^*(t) = T(0, t)$, где $T(x)$ — функция (13). Из формулы (6) для $u(x)$ следуют равенства

$$\begin{aligned} (I - P)T^* &= \mu(t), \quad Pf = a(0) \int_0^t p(t, \tilde{t}) f(\tilde{t}) d\tilde{t}, \\ \mu(t) &= \beta q^* \left[1 + a(0) \int_0^t r(t, \tilde{t}) d\tilde{t} \right] - \mu_0(t), \\ p &= v_{11} - v_{22} + v_{21} - v_{12}, \quad r = \sum v_{ij}, \quad v_{ij} = v_{ij}(0, t; 0, \tilde{t}), \\ \mu_0(t) &= \int_{l_t} \delta \dot{\varphi} \sum v_{ij}(0, t; y) dt_y + U_2(0, t; \hat{y}) h(v, \delta). \end{aligned} \quad (34)$$

В силу условия $b \leq 0$ и следствий 1, 2 из теоремы 2 имеем

$$p \geq 0, \quad r \geq \frac{1 - b_0}{\tau a_M} e^{-\frac{t-\tilde{t}}{\tau}}, \quad \sum v_{ij}(0, t; y) \leq \frac{2}{\tau a_m} e^{\alpha(t-t_y)}. \quad (35)$$

Условие (31) вместе со вторым и третьим неравенствами (35) дает неравенство $\mu(t) > 0$ на $[0, t^*]$. Так как P — вольтерров оператор в $C[0, t^*]$ с неотрицательным ядром (учтено первое неравенство (35)), имеем

$$T^*(t) = (I - P)^{-1} \mu = \sum_{n=0}^{\infty} P^n \mu \geq \mu(t) > 0. \quad (36)$$

(ii) Замена

$$\tilde{u} = u \cdot \exp \left\{ (2\tau)^{-1} \left(t + \int_0^s b a^{-1} d\sigma \right) \right\}$$

приводит систему (14) к виду

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} + a \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial s} = \frac{1+b}{2} \tilde{u}_2, \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} - a \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial s} = \frac{1-b}{2} \tilde{u}_1.$$

Пусть $x \in \overline{D} \setminus \Gamma$. Умножая первое равенство на $\frac{1-b}{2\tau}$, второе на $\frac{1+b}{2\tau}$ и интегрируя оба равенства по области D_x , ограниченной сверху лучами $l_k^-(x)$ и снизу кривой Γ , после преобразований

получим соотношения

$$(I - P_1)\tilde{T} = \mu_1(x), \quad (I - P_2)\tilde{q} = \mu_2(x), \quad (37)$$

где

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2), \quad \tilde{q} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2), \quad P_k f = \iint_{D_x} \left(\frac{1 - b^2}{8a\tau^2} \mp \frac{b'}{4\tau} \right) f \, ds \, dt,$$

$\mu_k(x) > 0$ при условиях (31), (35), (36). Так как P_k — операторы Вольтерра в $C(\overline{D})$ с неотрицательными ядрами (учтено второе условие (33)), аналогично (i) получим $\tilde{T}(x) > 0$, $\tilde{q}(x) > 0$. Отсюда следует (17). $\square$

Отметим, что в случае однородной среды $b(s) = 0$, и условия (33) выполняются автоматически. Условие $b(s) \leq 0$ выделяет класс неоднородных сред, для которых удалось доказать положительность температуры и теплового потока в жидкой фазе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьева Е. В., Романовский Р. К. Метод характеристик для гиперболических краевых задач на плоскости// Сиб. мат. ж. — 2000. — 41, № 3. — С. 531–540.
2. Романовский Р. К., Стратилатова Е. Н. Решение одномерной однофазной гиперболической задачи Стефана методом граничных интегральных уравнений// Сиб. ж. индустр. мат. — 2004. — 7, № 3. — С. 119–131.
3. Романовский Р. К. О матрицах Римана первого и второго рода// Мат. сб. — 1985. — 127, № 4. — С. 494–501.
4. Романовский Р. К. Экспоненциально расщепляемые гиперболические системы с двумя независимыми переменными// Мат. сб. — 1987. — 133, № 3. — С. 341–355.
5. Соболев С. Л. Локально неравновесные модели процессов переноса// Усп. физ. наук. — 1997. — 167, № 10. — С. 1095–1106.