

ISSN 1512–1712

**Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики**

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 23

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ



**Тбилиси
2005**

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Е. С. Голод (Московский государственный университет)

И. Т. Кигурадзе (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

А. Лаши (Грузинский технический университет)

Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Овчинников (Московский государственный университет)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Сарычев (Университет Флоренции)

Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 23

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

**Посвящается восьмидесятилетнему юбилею
академика Николая Николаевича Красовского**

**კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი**

2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

К восьмидесятилетию со дня рождения Николая Николаевича Красовского (Э. Г. Альбрехт, А. Г. Ченцов, Г. С. Шелементьев)	3
Оптимальное наблюдение и управление в линейных системах (Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Н. С. Павленок)	7
Эллипсоидальные методы для задач динамики и управления. Часть I (П. Варайя, А. Б. Куржанский)	34
К вопросу о сходимости одного варианта метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления (М. С. Никольский)	73
Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх (В. С. Пацко)	79
О процедурах построения решений в дифференциальных играх на конечном промежутке времени (А. М. Тарасьев, Т. Б. Токманцев, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков)	123
Глобально управляемые линейные системы (Е. Л. Тонков)	145
Игровая задача о «мягкой посадке» для систем второго порядка (А. А. Чикрий, А. А. Белоусов)	166

К ВОСЬМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ НИКОЛАЯ НИКОЛАЕВИЧА КРАСОВСКОГО

© 2005 г. **Э. Г. АЛЬБРЕХТ, А. Г. ЧЕНЦОВ, Г. С. ШЕЛЕМЕНТЬЕВ**

Николай Николаевич Красовский — выдающийся русский математик и механик, академик Российской академии наук, родился 7 сентября 1924 года в Екатеринбурге в семье врача. В 1949 г. он окончил Уральский государственный технический университет (УГТУ-УПИ), в котором затем работал до 1959 г. В 1959–1970 гг. Н. Н. Красовский работал в Уральском государственном университете им. А. М. Горького (УрГУ), а с 1970 г. по настоящее время работает в Институте математики и механики Уральского отделения РАН, который он возглавлял в 1970–1977 гг.

Интерес к исследованиям по математике Н. Н. Красовский проявил уже в студенческие годы на младших курсах. На втором курсе он углубленно занимался теорией групп и теорией неравенств под руководством С. Н. Черникова. На старших курсах под влиянием Е. А. Барбашина он заинтересовался проблемами теории устойчивости движения и в 1953 г. защитил кандидатскую диссертацию «Об устойчивости движения при больших начальных возмущениях». В 1955–1957 гг. Н. Н. Красовский учился в докторантуре у Н. Г. Четаева и в 1957 г. защитил докторскую диссертацию «Некоторые вопросы теории устойчивости нелинейных систем».

Фундаментальные научные результаты, полученные Николаем Николаевичем Красовским, являются гордостью российской науки и принесли ему мировую известность. Круг научных интересов Н. Н. Красовского весьма широк. Это качественная теория дифференциальных уравнений, проблема устойчивости и стабилизации динамических систем, теория оптимального управления и наблюдения, антагонистические дифференциальные игры. Кроме того, Н. Н. Красовский выполнил ряд работ по приложению математических методов к задачам механики, металлургии, энергетики, теплотехники и т. д. Он получил принципиально новые результаты в теории устойчивости движения, развив методы Ляпунова—Четаева. Н. Н. Красовский до конца разрешил проблему существования функций Ляпунова во всех основных случаях устойчивости и неустойчивости, продолжив исследования Е. А. Барбашина, И. Г. Малкина, Х. Л. Массеры, К. П. Персидского, Н. Г. Четаева. Он развил теорию Ляпунова об устойчивости по первому приближению и получил эффективные критерии устойчивости нелинейных регулируемых систем, когда начальные возмущения не являются малыми. Широкую известность и многочисленные приложения получила теорема Барбашина—Красовского об асимптотической устойчивости в большом и в целом, когда производная функции Ляпунова в силу уравнений возмущенного движения может быть равна нулю на множестве, не содержащем целых траекторий. Н. Н. Красовским разработана оригинальная трактовка систем с последействием, которая позволяет описывать движение систем с наследственностью обыкновенными дифференциальными уравнениями в функциональном фазовом пространстве, когда в качестве фазовых состояний рассматриваются отрезки траекторий в подходящем функциональном пространстве. Этот подход открыл путь для развития эффективной теории устойчивости систем с последействием с использованием в роли функции Ляпунова функционалов, определенных на отрезках траекторий. Установлены теоремы о существовании функционалов Ляпунова с нужными свойствами. Выявлено полугрупповое свойство динамических систем с последействием, которое позволило описать спектральные свойства инфинитезимального оператора и открыло путь для многих исследований по устойчивости таких систем. Некоторые итоги работы по теории устойчивости изложены в монографии Н. Н. Красовского «Некоторые задачи теории устойчивости движения» (М.: Физматгиз, 1959).

В исследованиях по математической теории оптимальных управляемых процессов, начиная с самых первых работ по этой теории, Н. Н. Красовский принял активное участие в построении эффективных методов решения задач оптимального управления. Он разработал функциональный

подход к задачам об оптимальном управлении. В результате им были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости ряда линейных задач, которые доставляют дополнительную информацию к принципу максимума Л. С. Понтрягина, облегчают вычисление оптимальных управлений и порождаемых ими оптимальных движений и проведение качественного анализа. Этот подход открыл путь к вычислению оптимальных процессов в нелинейных системах и развитию теории управляемости по первому приближению и оказался тесно связанным с выпуклым программированием, что позволяет сводить задачу об управлении линейной системой к исследованию более удобных сопряженных задач.

Н. Н. Красовским установлено свойство двойственности задач управления и наблюдения, что позволило разработать игровой минимаксный подход к решению задач наблюдения линейных систем в условиях неопределенных помех. В случае нелинейных систем им разработана теория наблюдаемости по первому приближению. Эти пионерские исследования привели к возникновению теории гарантированного оценивания, развитой многими российскими и зарубежными учеными (Н. Н. Красовский, «Теория управления движением», М.: Наука, 1968).

Большой цикл работ Н. Н. Красовского посвящен теории стабилизации динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с последействием и дифференциальными уравнениями со случайными параметрами. Эта теория построена им на основе синтеза методов теории устойчивости и теории оптимального управления. Основным методом исследования в работах этого цикла является модификация метода динамического программирования. Н. Н. Красовским для задач стабилизации обоснованы методы построения уравнения Ляпунова—Беллмана, изучены его свойства и разработаны методы вычисления его решения, предложены эффективные практические методы решения задач стабилизации линейных систем и создана теория стабилизации нелинейных систем по первому приближению. В рамках цикла работ о стабилизации были развиты классические результаты Н. Г. Четаева о влиянии на устойчивость механических систем сил сопротивления и гироскопических сил. Н. Н. Красовский установил эффективно проверяемые условия, при которых не вполне управляемая механическая система становится вполне управляемой при наложении на нее гироскопических сил, и разработал теорию стабилизации механических систем за счет одновременного наложения на нее сил сопротивления и гироскопических сил.

Н. Н. Красовским была построена современная теория управления динамическими системами, подверженными воздействию непредсказуемых помех и возмущений различного характера, включая возможное противодействие в достижении целей управления. Задачи такого рода рассматриваются в теории дифференциальных игр, которая как полноценная математическая теория и была создана Н. Н. Красовским, причем в форме, наиболее естественной для соответствующих инженерных приложений. Именно Н. Н. Красовскому удалось построить стройную теорию управления по принципу обратной связи на идейно новой основе. Потребовалось использовать существенно нерегулярные законы обратной связи (нелинейные, разрывные), что, вообще говоря, исключало «прямую подстановку» их в дифференциальные уравнения. Между тем именно такие законы требовались для борьбы с неизвестными возмущениями; информация о последних, как правило, отсутствует в практических задачах. В этой связи Н. Н. Красовский предложил принципиально новую формализацию игрового управления по принципу обратной связи, которую впоследствии стали называть формализацией Н. Н. Красовского. Эта формализация, с одной стороны, позволила построить плодотворную теорию и получить глубокие качественные результаты, а с другой, допускала возможность эффективной инженерной реализации с применением пошаговых движений, фрагменты которых определялись (наряду с действующими на систему возмущениями) управляющими воздействиями, формируемыми по соответствующему закону обратной связи в дискретные моменты времени. Сами управляющие воздействия, стесненные традиционными для теории управления геометрическими ограничениями, формируются при этом из соображений, определяемых выбранной стратегией в виде функции позиции. Н. Н. Красовский указал конкретный принцип построения позиционных стратегий, гарантированно разрешающих ту или иную задачу управления и, как уже отмечалось, не использующих при этом информацию о реализующихся возмущениях (помехах). Упомянутый принцип выражался идеей экстремального сдвига, что соответствовало,

для данного класса задач, воплощению одного ключевого положения классической теории управления. Именно в такой форме был реализован аналог принципа максимума Л. С. Понтрягина.

При некоторых естественных условиях регулярности соответствующую позиционную стратегию удавалось реализовать на базе упомянутой аналогии конструктивно, используя экстремальный выбор управлений в направлениях, определяемых сопряженной переменной, как и в классическом принципе максимума Л. С. Понтрягина. Такая конструкция построения управляющей стратегии была названа правилом экстремального прицеливания; она изложена в монографии Н. Н. Красовского «Игровые задачи о встрече движений» (М.: Наука, 1970). Тем самым, в наиболее естественной форме Н. Н. Красовскому удалось осуществить соединение хорошо развитой, прежде всего в работах советских математиков, теории программного управления и оригинальной схемы синтеза управления по принципу обратной связи. Это позволило решить целый ряд конкретных задач управления типичными механическими системами при наличии помех и явного противодействия. Последнее отвечало, в частности, важным приложениям, связанным с интересами безопасности государства.

Если условия регулярности не выполнялись, то построение стратегий, гарантирующих решение соответствующей задачи управления, существенно затруднялось. Более того, была неясной сама возможность такого решения. Настоящим прорывом явилась фундаментальная теорема об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина, которая определила существование и структуру решения нелинейной дифференциальной игры в общем случае. Здесь принцип экстремального сдвига был реализован иначе: управление выбиралось из соображений построения своеобразного барьера «вокруг» множества со свойством, которое было названо Н. Н. Красовским стабильностью. Это множество имело характер моста, ведущего к цели, а проверка самой возможности достижения этой цели сводилась к требованию принадлежности начальной позиции данному (предельно широкому) мосту. В противном случае, напротив, по принципу обратной связи можно построить процедуру помехового управления, гарантированно исключающую достижение целевого множества. Это соответствовало объективно успеху «противника», в ведении которого находились всевозможные неконтролируемые факторы. Упомянутая теорема имела целый ряд важных следствий, касающихся, в частности, положений о существовании седловых точек в различных, по условиям информационной согласованности, классах позиционных стратегий. Была создана строгая математическая теория дифференциальных игр в постановке Н. Н. Красовского. Она была дополнена конструкцией, обеспечивающей устойчивость к помехам канала измерения. Эта конструкция предусматривала построение стабилизирующей модели (поводыря), управляемой с учетом движения основной системы стороной, заинтересованной в гарантированном решении той или иной задачи на движениях системы. Появились новые возможности в части компьютерного моделирования. Итогом упомянутых исследований стала монография Н. Н. Красовского и А. И. Субботина «Позиционные дифференциальные игры» (М.: Наука, 1974); позднее эта монография была существенно дополнена и опубликована на английском языке (N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin, «Game-theoretical control problems», New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1988).

В последующих исследованиях Н. Н. Красовского конструкция, предусматривающая активное использование динамической модели, получила новое развитие, основу которого составил принципиально новый подход, связанный с построением стохастического программного синтеза. Вспомогательные программные конструкции, получаемые ранее на основе детерминированных построений, стали включать важные стохастические элементы. Особенно ощутимым было продвижение в вопросах теории конфликтного управления линейными системами, где Н. Н. Красовскому удалось соединить стохастические конструкции, элементы теории принципа максимума и идеи двойственности функциональных пространств, что позволило существенно расширить круг задач (конфликтного управления), допускающих эффективное решение. Появились новые возможности для компьютерного моделирования с использованием современной вычислительной техники, которому Н. Н. Красовский всегда уделял много внимания. Вышеупомянутые подходы к решению задач управления с помехами отражены в монографии Н. Н. Красовского «Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата» (М.: Наука, 1985) и в монографии

А. Н. Красовского и Н. Н. Красовского «Control under lack of information» (Boston: Birkhäuser, 1996).

Достижения Н. Н. Красовского в области теории дифференциальных игр получили всемирное признание, они определили направления развития этой математической теории. Благодаря этим работам стали понятными механизмы игрового поведения в конструкциях с инфинитезимальными преобразованиями. Так, например, понятие стабильности множеств, предложенное Н. Н. Красовским, получило развитие в виде свойства стабильности функций позиции. Вопросы, связанные с построением функции цены дифференциальной игры, мотивировали, в свою очередь, развитие новых подходов к построению функций со свойством стабильности. Последовательно развивая эти представления для широкого круга задач, А. И. Субботин построил теорию обобщенных решений для широкого класса дифференциальных уравнений с частными производными, восходящих к уравнению Гамильтона—Якоби.

Н. Н. Красовский является продолжателем уральской школы по теории устойчивости движения и одним из основателей школы по математической теории управления. Н. Н. Красовский воспитал большое число учеников, работающих в разных учреждениях России и мира. Среди его учеников — инженеры и преподаватели, доктора и кандидаты наук, члены-корреспонденты и академики РАН. Достижения этой школы получили широкое признание.

Работая руководителем ИММ УНЦ АН СССР, Николай Николаевич Красовский инициировал и поощрял прикладные работы и укрепление вычислительной базы УНЦ УрО АН СССР, РАН.

Много времени и сил отдает Николай Николаевич пропаганде достижений фундаментальной науки среди ученых-прикладников, инженеров, учителей, студентов, школьников. Актуальные проблемы вузовского и школьного математического образования всегда находятся в центре его внимания. В 1980-х годах он возглавил работу по компьютеризации школ и вузов Свердловской области. Это дало сильный первоначальный импульс дальнейшему выходу школьного образования Екатеринбурга и области на достойный уровень современных информационных технологий.

Авторитет Н. Н. Красовского среди ученых очень высок. Он был членом Президиума РАН, членом бюро Отделения механики и процессов управления АН СССР, является членом Президиума Национального комитета по теоретической и прикладной механике, входит в редколлегии авторитетных научных изданий. Николай Николаевич — почетный доктор УПИ-УГТУ и УрГУ.

Научные достижения и преподавательская деятельность Н. Н. Красовского высоко оценены государством (Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий, кавалер орденов Советского Союза и России) и научной общественностью (Большая золотая медаль им. М. В. Ломоносова Российской академии наук, Золотая медаль им. А. М. Ляпунова, Демидовская премия в области физико-математических наук, премия «Триумф», Золотая медаль им. С. В. Вонсовского, доктор Honoris causa Венгерской Академии наук, награда Международного общества инженеров электриков и электронщиков (IEEE)).

ОПТИМАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

© 2005 г. **Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА, Н. С. ПАВЛЕНОК**

Аннотация. Работа состоит из двух частей. В части I рассматривается задача оптимального наблюдения недетерминированной линейной системы по результатам глубокой обработки выходного сигнала динамического измерительного устройства (сенсора). Изучаемая задача является вспомогательной для исследования в части II задачи оптимального управления динамическими системами в условиях множественной неопределенности. Описываются методы построения апостериорного, программного и позиционного решений. Результаты иллюстрируются на примере задач оптимального наблюдения и оптимального управления в механической системе четвертого порядка.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть I. Оптимальное наблюдение с глубокой обработкой сигналов динамического сенсора	7
1. Введение	7
2. Задача оптимального дискретного наблюдения	10
3. Построение апостериорного решения	13
4. Оптимальное наблюдение в реальном времени	19
5. Пример	20
Часть II. Оптимальное управление по результатам наблюдения	22
6. Введение	22
7. Оптимальные обратные связи на неточных измерениях выходных сигналов	24
8. Оптимальное управление в реальном времени	27
9. Первая стадия оптимального управления в условиях неопределенности	30
10. Пример	31
Список литературы	32

ЧАСТЬ I

ОПТИМАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ С ГЛУБОКОЙ ОБРАБОТКОЙ СИГНАЛОВ ДИНАМИЧЕСКОГО СЕНСОРА

1. ВВЕДЕНИЕ

Наблюдение — получение информации о состояниях динамического объекта путем обработки доступных измерению его выходных сигналов. Содержание задач наблюдения и методы их решения зависят от того, с какой целью ведется наблюдение, и от используемых моделей неопределенности. В настоящее время наиболее полно исследованы задачи наблюдения, связанные с задачами стохастического управления, где используются вероятностные модели неопределенности (задачи фильтрации). Первую задачу оптимального наблюдения с множественной моделью неопределенности поставил и решил Н. Н. Красовский [13]. Аналогичные задачи рассматривались позже в [14, 20, 22].

Работа выполнена при поддержке Государственной программы фундаментальных исследований НАН Беларуси (Математические структуры 16) и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (гранты Ф04Р-002 и Ф03М-031).

В теории управления задачам оптимального управления (ОУ) можно поставить в соответствие «чистую» задачу управляемости [12], которая получается из первых после «очищения» их от геометрических ограничений на управляющие воздействия и критериев качества. Согласно принципу дуальности Калмана, задаче управляемости без учета ограничений на управляющие воздействия соответствует определенная задача наблюдаемости, в которой считается, что измерения выходного сигнала объекта наблюдения производятся с абсолютной точностью. При этом в теории управляемости используются кусочно-непрерывные управляющие воздействия, в теории наблюдаемости — кусочно-непрерывные измерения, при которых сигналы измеряются во всех точках промежутка наблюдения, за исключением, возможно, конечного их числа. Понятно, что, как и в случае задач ОУ, «чистая» задача наблюдаемости связана с задачами оптимального наблюдения (ОН), в которых учитываются естественные в приложениях ограничения на точность измерений выходного сигнала объекта наблюдения и имеются критерии качества. В соответствии с этой схемой задачи ОУ в классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий соответствуют задаче управляемости в том же классе (но без ограничений), которая, в свою очередь, дуальна задаче наблюдаемости с точными кусочно-непрерывными измерениями. Поэтому в задачах ОН, которые дуальны задачам ОУ в классе кусочно-непрерывных функций, естественно использование кусочно-непрерывных измерений. При этом геометрическим ограничениям на управляющие воздействия

$$u_* \leq u(t) \leq u^*, \quad t \in T,$$

соответствуют измерения с ограниченной точностью:

$$y(t) = c'x(t) + \xi(t), \quad \xi_* \leq \xi(t) \leq \xi^*, \quad t \in T; \quad \xi^* - \xi_* > 0.$$

Из-за сложности задач ОУ с геометрическими ограничениями на управляющие воздействия для их решения привлекаются вычислительные устройства дискретного действия (микропроцессоры), что делает естественным использование дискретных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T$ (с периодом квантования времени h), которые получаются из дискретных управляющих сигналов $u(\tau)$, $\tau \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\} \subset T$, по правилу

$$u(t) = u(\tau), \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h, \quad (1.1)$$

где $h = (t^* - t_*)/N$ — период квантования (дискретизации) времени, N — натуральное число.

С целью повышения помехоустойчивости процедуры наблюдения введем дуальный аналог такой процедуры управления — дискретное наблюдение (с периодом квантования h), при котором обрабатываются дискретные сигналы

$$y(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} c'x(\vartheta) d\vartheta, \quad \tau \in \bar{T}_h = T_h \setminus t_*, \quad (1.2)$$

полученные из выходного сигнала $c'x(t)$, $t \in T$, объекта наблюдения. Формулу (1.2) можно рассматривать как уравнение простейшего фильтра.

Известна связь между управляемостью системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

в классе кусочно-непрерывных функций ($\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{(n-1)}b) = n$) и управляемостью (1.3) в классе дискретных функций (1.1). Аналогичная связь существует и в задаче наблюдаемости. Рассмотрим на промежутке времени $T = [0, t^*]$ стационарную систему

$$\dot{x} = Ax \quad (1.4)$$

и измерительные устройства двух типов:

$$y(t) = c'x(t), \quad t \in T; \quad (1.5)$$

$$y(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} c'x(\vartheta) d\vartheta, \quad \tau \in \bar{T}_h. \quad (1.6)$$

Если пара (1.4), (1.5) наблюдаема ($\text{rank}(c, A'c, \dots, (A')^{n-1}c) = n$), то на достаточно большом промежутке времени при почти всех $0 < h < \infty$ наблюдаема и пара (1.4), (1.6). Существует такое число $h_0 > 0$, что из наблюдаемости пары (1.4), (1.5) следует наблюдаемость пары (1.4), (1.6) при всех $0 < h < h_0$. В случае (1.4), (1.5) для восстановления начального состояния системы (1.4) достаточно обработать любой сколь угодно малый отрезок $c'x(t)$, $0 \leq t \leq t^*$, $t^* > 0$. В случае (1.4), (1.6) для восстановления начального состояния нужно обработать отрезок, не меньший $c'x(t)$, $t \in [0, nh]$.

В [7] с целью повышения эффективности управления рассмотрены задачи ОУ в более широком, чем (1.1), классе дискретных управляющих воздействий конечной степени p_c :

$$u(t) = \sum_{j=0}^{p_c} u_j(\tau)(t - \tau)^j, \quad t \in [\tau, \tau + h], \quad \tau \in T_h, \quad (1.7)$$

которые при $p_c = 0$ включают (1.1) (дискретные управляющие воздействия нулевой степени). Дуальным аналогом управляющих воздействий (1.7) являются дискретные измерения глубины p_0 , когда обрабатываются дискретные сигналы:

$$y^i(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i c'x(\vartheta) d\vartheta, \quad \tau \in \bar{T}_h, \quad i = \overline{0, p_0}. \quad (1.8)$$

При $p_0 = 0$ из (1.8) получаются (1.2) (дискретные измерения нулевой глубины). Дискретные измерения глубины $p_0 > 0$ повышают эффективность наблюдения, т.е. позволяет получать больше, чем в случае (1.2), информации о реализовавшемся состоянии объекта наблюдения. Если использовать измерительное устройство (1.8), то при всех $h > 0$ для наблюдаемости пары (1.4), (1.8), $p_0 \geq n - 1$, необходима и достаточна наблюдаемость пары (1.4), (1.5). При этом любое начальное состояние можно восстановить по сигналу $c'x(t)$, $t \in [0, h]$.

Принципиальной особенностью задач ОУ, из-за которой в свое время пришлось создавать неклассическое (новое, современное) вариационное исчисление (математическую теорию оптимальных процессов [17]), являются геометрические ограничения на управляющие воздействия, которые для дискретных управляющих воздействий (1.1) имеют вид

$$u_* \leq u(\tau) \leq u^*, \quad \tau \in T_h.$$

В задачах ОН им соответствуют дискретные измерения с ограниченной точностью

$$y(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} c'x(\vartheta) d\vartheta + \xi(\tau), \quad \xi_* \leq \xi(\tau) \leq \xi^*, \quad \tau \in \bar{T}_h; \quad \xi^* - \xi_* > 0.$$

Наложение на дискретные управляющие воздействия конечной степени (1.7) геометрических ограничений

$$u_{*j} \leq u_j(\tau) \leq u_j^*, \quad j = \overline{0, p_c}, \quad \tau \in T_h,$$

соответствует дискретным измерениям глубины p_0 с ограниченной точностью:

$$y^i(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i c'x(\vartheta) d\vartheta + \xi^i(\tau), \quad \xi_*^i \leq \xi^i(\tau) \leq \xi^{*i}, \quad \tau \in \bar{T}_h, \quad i = \overline{0, p_0}.$$

Возможен еще один способ измерения в «чистой» теории наблюдения. Выходные сигналы объекта наблюдения измеряются в дискретные моменты времени T_h (с периодом квантования h):

$$y(\tau) = c'x(\tau), \quad \tau \in T_h.$$

Такому способу измерения соответствует использование в «чистой» теории управления импульсных управляющих воздействий (с периодом квантования h):

$$u(t) = \sum_{\tau \in T_h} u(\tau) \delta(t - \tau), \quad t \in T,$$

где $\delta(t)$, $t \in T$, — δ -функция Дирака.

При переходе от теории ОУ к теории ОН используются измерения с ограниченной точностью и управляющие воздействия с ограниченной интенсивностью

$$y(\tau) = c'x(\tau) + \xi(\tau), \quad \xi_* \leq \xi(\tau) \leq \xi^*, \quad \tau \in T_h, \quad \xi^* - \xi_* > 0; \quad u_* \leq u(\tau) \leq u^*, \quad \tau \in T_h.$$

Как и в случае дискретных управляющих воздействий конечной степени и дискретных измерений конечной глубины, импульсные управляющие воздействия и измерения допускают следующие обобщения. Функция

$$u(t) = \sum_{\tau \in T_h} \sum_{j=0}^{p_c} u_j(\tau) \delta^{(j)}(t - \tau), \quad t \in T,$$

называется импульсным управляющим воздействием порядка p_c (здесь $\delta^{(j)}(t)$, $t \in T$, — j -я производная δ -функции Дирака). При импульсных измерениях порядка p_0 используется совокупность сигналов

$$y^i(\tau) = c' A^i x(\tau), \quad \tau \in T_h, \quad i = \overline{0, p_0},$$

составленная из производных выходного сигнала $c'x(t)$, $t \in T$, в моменты времени $\tau \in T_h$.

Понятно, что при $p_0 \geq n - 1$ для перемещения системы (1.3) ($\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{(n-1)}b) = n$) в любую точку фазового пространства достаточно приложить управляющие воздействия p_c -го порядка только в один момент времени, для восстановления состояния системы (1.4) ($\text{rank}(c, A'c, \dots, (A')^{n-1}c) = n$) достаточно использовать измерения порядка p_0 только в один момент времени.

Прикладные системы управления строятся, как правило, по принципу непрямого управления. В них управляющий сигнал, выработанный по сигналам измерения, сначала поступает в динамический регулятор, который за счет внешней энергии создает управляющие воздействия необходимой мощности. В [8] решена линейная задача ОУ с использованием динамического регулятора конечного порядка. Дуальным аналогом такой задачи ОУ является задача ОН, в которой обрабатываются выходные сигналы динамического сенсора:

$$y(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} d'z(\vartheta) d\vartheta + \xi(\tau), \quad \dot{z} = Gz + Cx + Lw, \quad z(t_*) = z_0; \\ \xi_* \leq \xi(\tau) \leq \xi^*, \quad \tau \in \bar{T}_h, \quad \xi^* - \xi_* > 0.$$

При этом геометрические ограничения на выходные сигналы динамического регулятора соответствуют ограниченным возмущениям $w_* \leq w(t) \leq w^*$, $t \in T$, влияющим на работу сенсора.

Основываясь на этих соображениях дуальности, в данной части работы мы исследуем задачу ОН линейной системы с использованием дискретных измерений глубины p_0 выходных сигналов динамического сенсора. При этом учитываются возмущения, действующие как на объект наблюдения, так и на сенсор, и считается, что измерения производятся с ограниченной точностью. По изложенной ниже схеме можно рассмотреть задачу ОН с использованием импульсных измерений глубины p_0 .

В части I развивается подход [4], где задача ОН с множественными неопределенностями связывается с терминальной задачей ОУ и трактуется как детерминированный аналог задачи фильтрации. Конструктивный подход [4] был в различных направлениях развит в [6].

2. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ДИСКРЕТНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

Рассмотрим линейную систему наблюдения, состоящую из динамического объекта наблюдения и динамического измерительного устройства (сенсора), которая под действием ограниченных возмущений функционирует на промежутке времени $T = [t_*, t^*]$ с неизвестным начальным состоянием

объекта наблюдения из ограниченного множества X_0 и известным начальным состоянием динамического сенсора. Будем строить математическую модель этой системы в виде соотношений:

$$\dot{x} = A(t)x + M(t)w, \quad x(t_*) \in X_0, \quad (2.1)$$

$$\dot{z} = G(t)z + C(t)x + L(t)w, \quad z(t_*) = z_0, \quad (2.2)$$

$$y^i(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta)z(\vartheta)d\vartheta + \xi^i(\tau), \quad (2.3)$$

$$\xi_*^i \leq \xi^i(\tau) \leq \xi^{*i}, \quad \tau \in \bar{T}_h; \quad \xi^{*i} - \xi_*^i > 0, \quad i = \overline{0, p_0}. \quad (2.4)$$

Здесь $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $G(t) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $L(t) \in \mathbb{R}^{r \times q}$, $t \in T$, — кусочно непрерывные матричные функции; $d(t) \in \mathbb{R}^r$, $t \in T$, — кусочно-непрерывная вектор-функция; $x = x(t)$ — n -вектор состояния математической модели объекта наблюдения в момент времени t ; $z = z(t)$ — r -вектор состояния математической модели измерительного устройства, z_0 — известный вектор; $y^i(\tau) \in \mathbb{R}$ — значение i -го выходного сигнала измерительного устройства в момент времени τ ; $w = w(t)$, $t \in T$, — конечнопараметрическое возмущение:

$$w(t) = \sum_{i \in Q} \lambda_i(t)v_i = \Lambda(t)v, \quad t \in T,$$

где $\lambda_i(t)$, $i \in Q = \{1, 2, \dots, q\}$, — известные кусочно непрерывные n_w -вектор-функции, $\Lambda(t) = (\lambda_i(t), i \in Q)$; $v = (v_i, i \in Q)$ — q -вектор неизвестных параметров возмущения с ограниченным множеством возможных значений $V = \{v \in \mathbb{R}^q : v_* \leq v \leq v^*\}$; $\xi^i(\tau) \in \mathbb{R}$, $\tau \in \bar{T}_h$, $i = \overline{0, p_0}$, — ошибки измерительного устройства.

Замечание 1. Как и в [7], при получении выходных сигналов (2.3) вместо степенных $(\tau - \vartheta)^i$, $i = \overline{0, p_0}$, можно рассматривать произвольные базисные функции (произвольные линейные фильтры).

Пусть $\bar{X}(t)$, $\bar{Y}(t)$ — множества всевозможных состояний $\bar{x}(t)$, $t \in T$, объекта наблюдения и всевозможных выходных сигналов

$$\bar{y}_t(\cdot) = (\bar{y}^i(\tau), \tau \in \{t_* + h, t_* + 2h, \dots, t\}, i = \overline{0, p_0})$$

измерительного устройства физической системы в момент времени t , соответствующие всевозможным начальным состояниям x_0 , возмущениям, действующим на физическую систему наблюдения, и ошибкам измерения; $X(t)$, $Y(t)$ — аналогичные множества для математических моделей (2.1)–(2.4).

Будем говорить, что соотношения (2.1)–(2.4) являются математическими моделями физических объекта наблюдения и измерительного устройства, если выполняются включения

$$\bar{X}(\tau) \subset X(\tau), \quad \tau \in T_h; \quad \bar{Y}(\tau) \subset Y(\tau), \quad \tau \in \bar{T}_h.$$

Точность математических моделей определим числом

$$\max \left\{ \max_{t \in T_h} \beta(X(t), \bar{X}(t)), \max_{t \in \bar{T}_h} \beta(Y(t), \bar{Y}(t)) \right\},$$

где

$$\beta(X_1, X_2) = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} \rho(x_1, x_2)$$

— полуотклонение по Хаусдорфу множества X_1 от множества X_2 .

Далее считается, что упомянутое выше множество X_0 начальных состояний физического объекта наблюдения и модели (2.1) представимо в виде

$$X_0 = x_0 + \Omega S,$$

где x_0 — известный n -вектор; Ω — $(n \times n_s)$ -матрица; $S = \{s \in \mathbb{R}^{n_s} : d_* \leq s \leq d^*\}$ — ограниченное множество возможных значений неизвестного параметра s начального состояния $x(t_*)$; d_* , d^* — заданные n_s -векторы.

Множество $\Gamma = S \times V$ характеризует априорную неопределенность в поведении системы (2.1). Назовем множества S , V , X_0 и Γ априорными распределениями параметров начального состояния s , параметров возмущения v , начального состояния $x(t_*)$ и параметров системы соответственно. Таким образом, начальное состояние объекта наблюдения (2.1) имеет вид $x(t_*) = x_0 + \Omega s$.

С целью уменьшения априорной неопределенности будем вести за физической системой наблюдение, обрабатывая записываемые в дискретные моменты $\tau \in \bar{T}_h$ сигналы $y^i(t_* + h)$, $y^i(t_* + 2h)$, $\dots$, $y^i(t_* - h)$, $i = \overline{0, p_0}$, физического сенсора.

Начнем с постановки задачи оптимального апостериорного наблюдения, которую можно рассматривать как двойственный аналог задачи оптимального программного управления. Задача апостериорного наблюдения решается после проведения всех измерений; время, нужное для ее решения, не имеет существенного значения.

Пусть

$$\bar{y}(\cdot) = (y^i(\tau), \tau \in \bar{T}_h, i = \overline{0, p_0})$$

— совокупность всех проведенных измерений по ходу одного конкретного процесса. Множество $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}(\bar{y}(\cdot))$ назовем *апостериорным распределением параметров системы*, соответствующим сигналу измерения $\bar{y}(\cdot)$ физического объекта физическим сенсором, если оно состоит из тех и только тех векторов $\gamma = (s, v) \in \Gamma$, которым соответствуют начальные состояния $x(t_*) = x_0 + \Omega s$, способные вместе с некоторыми возможными помехами $w(t)$, $t \in T$, ошибками $\xi^i(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$, $i = \overline{0, p_0}$, математического измерительного устройства (2.4) и траекторией $x(\cdot)$ математического объекта наблюдения (2.1) породить выходной сигнал $\bar{y}(\cdot)$. Элементы $\gamma \in \hat{\Gamma}$ будем называть (апостериорно) возможными значениями параметров системы.

Множеству $\hat{S}$ соответствует апостериорное распределение $\hat{X}_0 = \hat{X}_0(y(\cdot)) = x_0 + \Omega \hat{S}$ начального состояния.

Следуя [4]¹, линейной задачей оптимального апостериорного наблюдения назовем экстремальную задачу

$$\hat{\alpha}(y(\cdot)) = p' \gamma^* = \max_{\gamma \in \hat{\Gamma}} p' \gamma, \quad (2.5)$$

где p — заданный n -вектор.

Вектор $\gamma^* = \gamma^*(y(\cdot))$ называется *апостериорным решением задачи ОН*, $\hat{\alpha}(y(\cdot))$ — *оценкой апостериорного распределения*.

Перейдем к формулировке задачи оптимального позиционного наблюдения. Пусть $\tau \in \bar{T}_h$ — произвольный текущий момент времени, $y_\tau(\cdot)$ — совокупность измерений, проведенных к этому моменту времени, $Y(\tau)$ — множество всех возможных сигналов $y_\tau(\cdot)$. Множество $\hat{\Gamma}(\tau) = \hat{\Gamma}(\tau, y_\tau(\cdot))$ назовем *текущим распределением параметров системы* для позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$; ему соответствует текущее распределение $\hat{X}_0(\tau) = \hat{X}_0(\tau; y_\tau(\cdot)) = x_0 + \Omega \hat{S}(\tau)$ начального состояния.

Семейство задач

$$\hat{\alpha}(\tau, \bar{y}_\tau(\cdot)) = p' \gamma^0(\tau, \bar{y}_\tau(\cdot)) = \max_{\gamma \in \hat{\Gamma}(\tau)} p' \gamma, \quad (2.6)$$

зависящих от выходных сигналов $\bar{y}_\tau(\cdot) \in \bar{Y}(\tau)$ измерительного устройства и моментов $\tau \in \bar{T}_h$, называется *задачей оптимального позиционного наблюдения*.

Функционал

$$\gamma^0(\tau, \bar{y}_\tau(\cdot)), \quad \bar{y}_\tau(\cdot) \in \bar{Y}(\tau), \quad \tau \in \bar{T}_h, \quad (2.7)$$

будем называть *решением задачи оптимального позиционного наблюдения (позиционным решением задачи ОН)*.

Знание позиционного решения задачи ОН позволяет вести наблюдение оперативно по ходу измерений. Для этого достаточно в каждый текущий момент времени $\tau \in \bar{T}_h$, получив очередное измерение $\bar{y}(\tau)$, составить вектор $\bar{y}_\tau(\cdot)$ и подставить его в (2.7), что даст оценку $\hat{\alpha}(\tau, \bar{y}_\tau(\cdot))$ текущего распределения $\hat{X}_0(\tau)$ начального состояния.

Как и в случае ОУ типа обратной связи, построение позиционного решения (2.7) в замкнутой форме невозможно для нетривиальных случаев, т.е. не удастся реализовать принцип ОН по «замкнутому» контуру. В связи с этим для реализации позиционного решения задачи ОН перейдем

¹См. также далее раздел 8.

к принципу оптимального наблюдения в реальном времени, который является аналогом принципа ОУ в реальном времени, описанным в [1]. При ОН в реальном времени функционал (2.7) не составляется заранее, а интересующие оценки вычисляются в процессе наблюдения по мере поступления измерений. ОН в реальном времени основано на следующем анализе.

Предположим, что позиционное решение (2.7) построено. Рассмотрим конкретный процесс наблюдения, в котором реализовался неизвестный наблюдателю вектор параметров начального состояния s^* , породивший начальное состояние $x^*(t_*) = x_0 + \Omega s^*$. Это начальное состояние физического прототипа, неизвестное возмущение $w^*(t)$, $t \in T$, действующее на физическую систему наблюдения, и реализовавшиеся ошибки $\xi^{i*}(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$, физического измерительного устройства породят траекторию $x^*(t|t_*, x^*(t_*))$ объекта наблюдения, $t \in T(\theta) = [t_*, \theta]$, траекторию $z^*(t|t_*, x^*(t_*))$ динамического сенсора, $t \in T(\theta)$, и измеренный к моменту θ сигнал $\bar{y}_\theta^*(\cdot)$. Согласно сделанным предположениям, этот сигнал можно получить и с помощью математической модели (2.1)–(2.4). Решение задачи (2.6) для позиции $(\theta, y_\theta^*(\cdot))$ дает функционал (2.7), вдоль которого выполняются следующие тождества:

$$\begin{aligned} y_\theta^{*i}(\tau) &\equiv \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) z^*(\vartheta|t_*, x^*(t_*)) d\vartheta + \xi^{i*}(\tau), \quad i = \overline{0, p}, \quad \tau \in T_h(\theta) \setminus t_*, \\ \dot{z}^*(t|t_*, x^*(t_*)) &\equiv G(t) z^*(t|t_*, x^*(t_*)) + Z(t) x^*(t|t_*, x^*(t_*)) + L(t) w^*(t), \quad z^*(t_*) = z_0, \\ \dot{x}^*(t|t_*, x^*(t_*)) &\equiv A(t) x^*(t|t_*, x^*(t_*)) + M(t) w^*(t), \quad t \in T(\theta); \\ x^0(\theta, y_\theta^*(\cdot)) &\equiv x_0 + \Omega s^0(\theta, y_\theta^*(\cdot)); \quad \hat{\alpha}(\theta, y_\theta^*(\cdot)) \equiv p' \gamma^0(\theta, y_\theta^*(\cdot)). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в конкретном процессе наблюдения позиционное решение (2.7) не используется полностью (для всех $\bar{y}_\tau(\cdot) \in \bar{Y}(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$), нужны лишь его значения вдоль реализующихся выходных сигналов $\bar{y}_\tau^*(\cdot)$, $\tau \in \bar{T}_h$, измерительного устройства.

Функцию $\gamma^*(\tau) = \gamma^0(\tau, \bar{y}_\tau^*(\cdot))$, $\tau \in \bar{T}_h$, назовем реализацией позиционного решения задачи ОН в конкретном процессе наблюдения. Устройство, способное при $\tau \in \bar{T}_h$ вычислять значение $\gamma^*(\tau)$ для каждой текущей позиции $(\tau, \bar{y}_\tau^*(\cdot))$ за время, не превосходящее h , будем называть оптимальным эстиматором, реализующим позиционное наблюдение в реальном времени. Таким образом, проблема оптимального позиционного наблюдения свелась к построению алгоритма работы оптимального эстиматора. Предварительно решим задачу апостериорного наблюдения.

3. ПОСТРОЕНИЕ АПОСТЕРИОРНОГО РЕШЕНИЯ

С целью аналитической формулировки задачи (2.5) опишем сначала множество $\hat{\Gamma}$. Для этого представим систему (2.1), (2.2) в блочном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ C(t) & G(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M(t) \\ L(t) \end{pmatrix} w. \quad (3.1)$$

Фундаментальная матрица решений расширенной системы (3.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{F} & \dot{P} \\ \dot{\Psi} & \dot{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ C(t) & G(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & P \\ \Psi & \Phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F(t_*) & P(t_*) \\ \Psi(t_*) & \Phi(t_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

После блочного перемножения матриц справа получим уравнения для блоков фундаментальной матрицы

$$\begin{aligned} F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} : \quad \dot{F} &= A(t)F, & F(t_*) &= E; \\ \Psi(t) \in \mathbb{R}^{r \times n} : \quad \dot{\Psi} &= G(t)\Psi + C(t)F, & \Psi(t_*) &= 0; \\ \Phi(t) \in \mathbb{R}^{r \times r} : \quad \dot{\Phi} &= G(t)\Phi, & \Phi(t_*) &= E; \\ P(t) \in \mathbb{R}^{n \times r} : \quad P(t) &\equiv 0; & t &\in T. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения и формулу Коши

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t) & 0 \\ \Psi(t) & \Phi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{-1}(t_*) & 0 \\ -\Phi^{-1}(t_*)\Psi(t_*)F^{-1}(t_*) & \Phi^{-1}(t_*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + \Omega s \\ z_0 \end{pmatrix} + \\ + \int_{t_*}^t \begin{pmatrix} F(t) & 0 \\ \Psi(t) & \Phi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{-1}(\vartheta) & 0 \\ \Phi^{-1}(\vartheta)\Psi(\vartheta)F^{-1}(\vartheta) & \Phi^{-1}(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M(\vartheta) \\ L(\vartheta) \end{pmatrix} w(\vartheta) d\vartheta,$$

можно записать сигналы $y^i(\tau)$, $i = \overline{0, p_0}$, $\tau \in \bar{T}_h$, измерительного устройства (2.3) для вектора параметров начального состояния $s \in S$, функции помех $w(t)$, $t \in T$, и функций ошибок $\xi^i(\tau)$, $i = \overline{0, p_0}$, $\tau \in \bar{T}_h$, измерительного устройства в виде

$$\begin{aligned} y^i(\tau) = & \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau-t)^i d'(t) \left[\Psi(t)F^{-1}(t_*) - \Phi(t)\Phi^{-1}(t_*)\Psi(t_*)F^{-1}(t_*) \right] dt (x_0 + \Omega s) + \\ & + \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau-t)^i d'(t) \Phi(t)\Phi^{-1}(t_*) dt z_0 + \int_{\tau-h}^{\tau} \int_{t_*}^t (\tau-t)^i d'(t) \left[\Psi(t)F^{-1}(\vartheta)M(\vartheta) - \right. \\ & \left. - \Phi(t)\Phi^{-1}(\vartheta)\Psi(\vartheta)F^{-1}(\vartheta)M(\vartheta) + \Phi(t)\Phi^{-1}(\vartheta)L(\vartheta) \right] \Lambda(\vartheta) d\vartheta dt v + \xi^i(\tau), \quad \tau \in \bar{T}_h; \quad i = \overline{0, p_0}. \end{aligned}$$

Следовательно, при полученных сигналах $y^i(t)$, $i = \overline{0, p_0}$, $t \in \bar{T}_h$, множество $\hat{S}$, с учетом ограничения (2.4), состоит из тех и только тех векторов s , которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \xi_*^i(\tau) & \leq \sum_{j=1}^{n_s} h_j^s(i, \tau) s_j + \sum_{j=1}^q h_j^v(i, \tau) v_j \leq \xi^{*i}(\tau), \\ \tau & \in \bar{T}_h, \quad i = \overline{0, p_0}; \quad d_* \leq s \leq d^*; \quad v_* \leq v \leq v^*, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_*^i(\tau) & = \xi_*^i - y^i(\tau) - \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau-\vartheta)^i d'(\vartheta) \left[\Psi(\vartheta)F^{-1}(t_*) - \Phi(\vartheta)\Phi^{-1}(t_*)\Psi(t_*)F^{-1}(t_*) \right] d\vartheta x_0 - \\ & - \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau-\vartheta)^i d'(\vartheta) \Phi(\vartheta)\Phi^{-1}(t_*) d\vartheta z_0 \in \mathbb{R}, \\ \xi^{*i}(\tau) & = \xi^{*i} - y^i(\tau) - \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau-\vartheta)^i d'(\vartheta) \left[\Psi(\vartheta)F^{-1}(t_*) - \Phi(\vartheta)\Phi^{-1}(t_*)\Psi(t_*)F^{-1}(t_*) \right] d\vartheta x_0 - \\ & - \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau-\vartheta)^i d'(\vartheta) \Phi(\vartheta)\Phi^{-1}(t_*) d\vartheta z_0 \in \mathbb{R}, \\ h^s(i, \tau) & = \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau-\vartheta)^i d'(\vartheta) \left[\Psi(\vartheta)F^{-1}(t_*) - \Phi(\vartheta)\Phi^{-1}(t_*)\Psi(t_*)F^{-1}(t_*) \right] d\vartheta \Omega \in \mathbb{R}^{n_s}, \\ h^v(i, \tau) & = \int_{\tau-h}^{\tau} \int_{t_*}^t (\tau-t)^i d'(t) \left[\Psi(t)F^{-1}(\vartheta)M(\vartheta) - \Phi(t)\Phi^{-1}(\vartheta)\Psi(\vartheta)F^{-1}(\vartheta)M(\vartheta) + \right. \\ & \left. + \Phi(t)\Phi^{-1}(\vartheta)L(\vartheta) \right] \Lambda(\vartheta) d\vartheta dt \in \mathbb{R}^q. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Элементы (3.3) можно вычислить и динамически. Пусть $\zeta^\xi(t)$, $t \in T$, — компонента решения $(\chi^\xi(t), \zeta^\xi(t))$, $t \in T$, системы (2.1), (2.2) с $\omega(t) \equiv 0$, $t \in T$, и начальными условиями $x(t_*) = x_0$,

$z(t_*) = z_0$; $\zeta_j^s(t)$, $t \in T$, — компонента решения $(\chi_j^s(t), \zeta_j^s(t))$, $t \in T$, системы (2.1), (2.2) с $w(t) \equiv 0$, $t \in T$, и начальными условиями $x(t_*) = g_{(j)}$, $z(t_*) = 0$; $\zeta_j^v(t)$, $t \in T$, — компонента решения $(\chi_j^v(t), \zeta_j^v(t))$, $t \in T$, системы (2.1), (2.2) с $w(t) = \lambda_j(t)$, $t \in T$, и нулевыми начальными условиями $x(t_*) = 0$, $z(t_*) = 0$. Тогда для (3.3) получим:

$$\begin{aligned}\xi_*^i(\tau) &= \xi_*^i - y^i(\tau) - \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta^i(\vartheta) d\vartheta; \\ \xi^{*i}(\tau) &= \xi^{*i} - y^i(\tau) - \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta^i(\vartheta) d\vartheta; \\ h_j^s(i, \tau) &= \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta_j^s(\vartheta) d\vartheta, \quad j \in J; \\ h_j^v(i, \tau) &= \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta_j^v(\vartheta) d\vartheta, \quad j \in Q; \quad \tau \in \bar{T}_h, \quad i = \overline{0, p_0}.\end{aligned}$$

Задача (2.5) после замены множества $\hat{\Gamma}$ на его аналитическое описание (3.2) примет вид

$$\begin{aligned}p'_s s + p'_v v &\rightarrow \max; \\ \xi_*^i(\tau) &\leq \sum_{j=1}^{n_s} h_j^s(i, \tau) s_j + \sum_{j=1}^q h_j^v(i, \tau) v_j \leq \xi^{*i}(\tau), \quad \tau \in \bar{T}_h, \quad i = \overline{0, p_0}; \\ d_* &\leq s \leq d^*; \quad v_* \leq v \leq v^*.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Задача линейного программирования (ЛП) (3.4) имеет $(N-1) \times (p_0+1)$ основных ограничений и $q+n_s$ переменных. Ее специфика состоит в том, что при $h \rightarrow 0$ количество основных ограничений неограниченно растет, т.е. она становится «полубольшой». В отличие от общей задачи ЛП элементы задачи (3.4) имеют динамическую природу. Ниже описывается двойственный метод ее решения, который представляет быструю динамическую реализацию двойственного адаптивного метода ЛП [9].

Основным инструментом описываемого двойственного метода является *опора*. Она состоит из тройки множеств $K_{\text{оп}} = \{I_{\text{оп}}; J_{\text{оп}}, Q_{\text{оп}}\}$, $I_{\text{оп}} \subset I = K \times \{\bar{T}_h\}$, $K = \{0, 1, 2, \dots, p_0\}$, $J_{\text{оп}} \subset J = \{1, 2, \dots, n_s\}$, $Q_{\text{оп}} \subset Q$, $|I_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}| + |Q_{\text{оп}}|$, для которой, в случае непустых множеств $I_{\text{оп}}$, $J_{\text{оп}}$, $Q_{\text{оп}}$, не вырождена матрица $D_{\text{оп}} = (D_{\text{оп}}^s, D_{\text{оп}}^v)$:

$$\begin{aligned}D_{\text{оп}}^s &= \left(- \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta_j^s(\vartheta) d\vartheta, \quad j \in J_{\text{оп}}, \quad \{i, \tau\} \in I_{\text{оп}} \right), \\ D_{\text{оп}}^v &= \left(- \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta_l^v(\vartheta) d\vartheta, \quad l \in Q_{\text{оп}}, \quad \{i, \tau\} \in I_{\text{оп}} \right).\end{aligned}$$

В случае $K_{\text{оп}} = \{I_{\text{оп}} = \emptyset, J_{\text{оп}} = \emptyset, Q_{\text{оп}} = \emptyset\}$ совокупность $K_{\text{оп}}$ — (пустая) опора по определению. Таким образом, при использовании $|J_{\text{оп}}| + |Q_{\text{оп}}|$ параллельно функционирующих процессоров работа, выполняемая одним процессором для формирования $D_{\text{оп}}$, не превосходит одного интегрирования системы (2.1), (2.2) на промежутке T .

При решении задачи (3.4) наряду с $K_{\text{оп}}$ используются сопровождающие ее элементы:

1. *Функция потенциалов* $\nu(\tau) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\tau \in \bar{T}_h$: $\nu_i(\tau) = 0$, $\{i, \tau\} \in I_{\text{н}} = I \setminus I_{\text{оп}}$; $\nu_{\text{оп}} = (\nu_i(\tau), \{i, \tau\} \in I_{\text{оп}})$ — решение системы уравнений

$$\nu'_{\text{оп}} D_{\text{оп}}^s = p'_{\text{соп}}, \quad \nu'_{\text{оп}} D_{\text{оп}}^v = p'_{\text{воп}},$$

где $p_{\text{соп}} = (p_{sj}, j \in J_{\text{оп}})$, $p_{\text{воп}} = (p_{vl}, l \in Q_{\text{оп}})$. В случае пустой опоры полагаем $\nu(\tau) = 0$, $\tau \in \bar{T}_h$.

2. Векторы оценок $\delta^s = (\delta_{\text{оп}}^s, \delta_{\text{н}}^s)$, $\delta^v = (\delta_{\text{оп}}^v, \delta_{\text{н}}^v)$:

$$\delta_{\text{н}}^s = (\delta_j^s, j \in J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оп}}) = \left(p_{sj} + \sum_{\tau \in \bar{T}_h} \sum_{i=\overline{0, p_0}} \nu_i(\tau) \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta_j^s(\vartheta) d\vartheta, j \in J_{\text{н}} \right),$$

$$\delta_{\text{н}}^v = (\delta_l^v, l \in Q_{\text{н}} = Q \setminus Q_{\text{оп}}) = \left(p_{vl} + \sum_{\tau \in \bar{T}_h} \sum_{i=\overline{0, p_0}} \nu_i(\tau) \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta_l^v(\vartheta) d\vartheta, l \in Q_{\text{н}} \right).$$

Опорные компоненты векторов оценок равны нулю: $\delta_{\text{оп}}^s = (\delta_j^s = 0, j \in J_{\text{оп}})$; $\delta_{\text{оп}}^v = (\delta_l^v = 0, l \in Q_{\text{оп}})$.

3. Вектор псевдопараметров начального состояния $\varkappa$ и вектор псевдопараметров возмущения ω . Неопорные компоненты $\varkappa_j, j \in J_{\text{н}}$; $\omega_l, l \in Q_{\text{н}}$, равны

$$\varkappa_j = d_{*j}, \text{ если } \delta_j^s < 0; \quad \varkappa_j = d_j^*, \text{ если } \delta_j^s > 0; \quad \varkappa_j \in [d_{*j}, d_j^*], \text{ если } \delta_j^s = 0; \quad j \in J_{\text{н}};$$

$$\omega_l = v_{*l}, \text{ если } \delta_l^v < 0; \quad \omega_l = v_l^*, \text{ если } \delta_l^v > 0; \quad \omega_l \in [v_{*l}, v_l^*], \text{ если } \delta_l^v = 0; \quad l \in Q_{\text{н}}.$$

Опорные компоненты $\varkappa_{\text{оп}} = (\varkappa_j, j \in J_{\text{оп}})$, $\omega_{\text{оп}} = (\omega_l, l \in Q_{\text{оп}})$ — решение уравнения

$$D_{\text{оп}}^s \varkappa_{\text{оп}} + D_{\text{оп}}^v \omega_{\text{оп}} = (\mu_i(\tau) - \mu_i^0(\tau), \{i, \tau\} \in I_{\text{оп}}).$$

Здесь $\mu_i(\tau) = \xi_*^i(\tau)$, если $\nu_i(\tau) < 0$; $\mu_i(\tau) = \xi^{*i}(\tau)$, если $\nu_i(\tau) > 0$; $\mu_i(\tau) \in [\xi_*^i(\tau), \xi^{*i}(\tau)]$, если $\nu_i(\tau) = 0, \{i, \tau\} \in I_{\text{оп}}$;

$$\mu_i^0(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta^0(\vartheta) d\vartheta, \quad \tau \in \bar{T}_h, \quad i = \overline{0, p_0};$$

$\zeta^0(t), t \in T$, — псевдосостояние измерительного устройства — решение системы (2.1), (2.2) с $w(t) = \Lambda(t)\omega^0, t \in T$, и начальными условиями $x(t_*) = \Omega \varkappa^0, z(t_*) = 0$, где $\omega^0 = (\omega_{\text{оп}}^0 = 0; \omega_{\text{н}}^0 = \omega_{\text{н}})$; $\varkappa^0 = (\varkappa_{\text{оп}}^0 = 0; \varkappa_{\text{н}}^0 = \varkappa_{\text{н}})$.

4. Функция псевдоошибок $\mu(\tau) = (\mu_i(\tau), \{i, \tau\} \in I)$:

$$\mu_i(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta(\vartheta) d\vartheta, \quad \tau \in \bar{T}_h, \quad i = \overline{0, p_0},$$

где $\zeta(t), t \in T$, — псевдосостояние измерительного устройства — решение системы (2.1), (2.2) с $w(t) = \Lambda(t)\omega, t \in T$, и начальными условиями $x(t_*) = \Omega \varkappa, z(t_*) = 0$.

Определение 1. Опора $K_{\text{оп}}$ называется

1) *регулярной*, если сопровождающие ее элементы удовлетворяют соотношениям

$$\delta_j^s \neq 0, j \in J_{\text{н}}; \quad \delta_l^v \neq 0, l \in Q_{\text{н}}; \quad \nu_i(\tau) \neq 0, \{i, \tau\} \in I_{\text{оп}};$$

2) *оптимальной*, если на некоторых сопровождающих ее элементах выполняются неравенства

$$d_{*j} \leq \varkappa_j \leq d_j^*, j \in J_{\text{оп}}; \quad v_{*l} \leq \omega_l \leq v_l^*, l \in Q_{\text{оп}}; \quad \xi_*^i(\tau) \leq \mu_i(\tau) \leq \xi^{*i}(\tau), \{i, \tau\} \in I_{\text{н}}.$$

Регулярную опору сопровождают единственные вектор псевдопараметров начального состояния, вектор псевдопараметров возмущения и функция псевдоошибок. При оптимальной опоре решение задачи (3.4) имеет вид $s^0 = \varkappa, v^0 = \omega; \chi^* = p' \varkappa$.

Решение задачи оптимального апостериорного наблюдения (3.4) двойственным методом начинается с произвольной опоры $K_{\text{оп}}^1$ (возможно, пустой) и завершается построением оптимальной опоры $K_{\text{оп}}^0$. Каждая итерация метода представляет замену «старой» опоры $K_{\text{оп}}$ на «новую» $\bar{K}_{\text{оп}}$, при которой выполняется неравенство $p' \bar{\varkappa} \leq p' \varkappa$. Ниже описываются основные операции двойственного метода [9] применительно к задаче (3.4).

Момент $\tau \in \bar{T}_h$ будем называть точкой минимума i -й компоненты функции псевдоошибок $\mu_i(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$, если $\mu_i(\tau) < \mu_i(\tau - h)$ и $\mu_i(\tau) < \mu_i(\tau + h)$; точкой максимума, если $\mu_i(\tau) > \mu_i(\tau - h)$ и $\mu_i(\tau) > \mu_i(\tau + h)$. Множество точек минимума i -й компоненты $\mu_i(\tau), \tau \in \bar{T}_h$, обозначим через T_i^- ,

множество точек максимума — через T_i^+ ; $T_i^0 = T_i^- \cup T_i^+$ — множество всех точек экстремума i -й компоненты $\mu_i(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$.

К началу каждой итерации в памяти ЭВМ хранится следующая информация:

- 1) опора $K_{\text{оп}}$;
- 2) матрицы

$$D_{(\text{оп})}^s = \left(- \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta^s(\vartheta) d\vartheta, \quad \{i, \tau\} \in I_{\text{оп}} \right),$$

$$D_{(\text{оп})}^v = \left(- \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta^v(\vartheta) d\vartheta, \quad \{i, \tau\} \in I_{\text{оп}} \right);$$

- 3) опорные значения функции потенциалов $\nu_{\text{оп}}$;
- 4) векторы оценок δ^s, δ^v ;
- 5) вектор псевдопараметров начального состояния $\varkappa$;
- 6) вектор псевдопараметров возмущения ω ;
- 7) множество T_i^0 , $i = \overline{0, p_0}$, точек экстремума i -й компоненты $\mu_i(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$;
- 8) значения матричных функций $F(\tau)$, $\Phi(\tau)$, $\Psi(\tau)$, $\tau \in \bigcup_{i=\overline{0, p_0}} T_i^0 \cup \{t_*, t^*\}$.

По этой информации подсчитывается $\rho^0(K_{\text{оп}}) = \max\{\rho_{j^0}^x, \rho_{l^0}^w, \rho(i^0, t^0)\}$:

$$\rho_{j^0}^x = \max \rho(\varkappa_j, [d_{*j}, d_{*j}^*]), \quad j \in J_{\text{оп}}; \quad \rho_{l^0}^w = \max \rho(\omega_l, [v_{*l}, v_{*l}^*]), \quad l \in Q_{\text{оп}};$$

$$\rho(i^0, \tau^0) = \max \rho(\mu_i(\tau), [\xi_*^i(\tau), \xi^{*i}(\tau)]), \quad \tau \in T_i^0 \cup \{t_*, t^*\}, \quad i = \overline{0, p_0},$$

где $\rho(c, [a, b])$ — расстояние от числа c до отрезка $[a, b]$.

Если $\rho^0(K_{\text{оп}}) = 0$, то $K_{\text{оп}}$ — оптимальная опора. Иначе строятся вариации функции потенциалов $\Delta\nu(t)$, $t \in T_h$, и векторов оценок $\Delta\delta^s, \Delta\delta^v$:

- 1) при $\rho^0(K_{\text{оп}}) = \rho_{j^0}^x$:

$$\Delta\nu_i(t) = 0, \quad \{i, t\} \in I_h; \quad \Delta\nu'_{\text{оп}} D_{\text{оп}}^s = -(\Delta\delta_j^s, j \in J_{\text{оп}})'; \quad \Delta\nu'_{\text{оп}} D_{\text{оп}}^v = 0; \quad \Delta\delta_l^v = 0, \quad l \in Q_{\text{оп}};$$

$$\Delta\delta_{j^0}^s = 1, \text{ если } \varkappa_{j^0} > d_{*j^0}^*; \quad \Delta\delta_{j^0}^s = -1, \text{ если } \varkappa_{j^0} < d_{*j^0}^*; \quad \Delta\delta_j^s = 0, \quad j \in J_{\text{оп}} \setminus j^0;$$

- 2) при $\rho^0(K_{\text{оп}}) = \rho_{l^0}^w$:

$$\Delta\nu_i(t) = 0, \quad \{i, t\} \in I_h; \quad \Delta\nu'_{\text{оп}} D_{\text{оп}}^s = 0; \quad \Delta\nu'_{\text{оп}} D_{\text{оп}}^v = -(\Delta\delta_l^v, l \in Q_{\text{оп}})'; \quad \Delta\delta_j^s = 0, \quad j \in J_{\text{оп}};$$

$$\Delta\delta_{l^0}^v = 1, \text{ если } \omega_{l^0} > v_{*l^0}^*; \quad \Delta\delta_{l^0}^v = -1, \text{ если } \omega_{l^0} < v_{*l^0}^*; \quad \Delta\delta_l^v = 0, \quad l \in Q_{\text{оп}} \setminus l^0;$$

- 3) при $\rho^0(K_{\text{оп}}) = \rho(i^0, \tau^0)$:

$$\Delta\nu_i(\tau) = 0, \quad \{i, \tau\} \in I_h \setminus \{i^0, \tau^0\}; \quad \Delta\delta_j^s = 0, \quad j \in J_{\text{оп}}; \quad \Delta\delta_l^v = 0, \quad l \in Q_{\text{оп}};$$

$$\Delta\nu_{i^0}(\tau^0) = 1, \text{ если } \mu_{i^0}(\tau^0) > \xi_*^{*i^0}(\tau^0); \quad \Delta\nu_{i^0}(\tau^0) = -1, \text{ если } \mu_{i^0}(\tau^0) < \xi_*^{*i^0}(\tau^0);$$

$$\Delta\nu'_{\text{оп}} D_{\text{оп}}^s = \Delta\nu_{i^0}(\tau^0) \left(\int_{\tau^0-h}^{\tau^0} (\tau^0 - \vartheta)^{i^0} d'(\vartheta) \zeta_j^s(\vartheta) d\vartheta, \quad j \in J_{\text{оп}} \right)';$$

$$\Delta\nu'_{\text{оп}} D_{\text{оп}}^v = \Delta\nu_{i^0}(\tau^0) \left(\int_{\tau^0-h}^{\tau^0} (\tau^0 - \vartheta)^{i^0} d'(\vartheta) \zeta_l^v(\vartheta) d\vartheta, \quad l \in Q_{\text{оп}} \right)'.$$

Затем находятся вариации неопорных компонент векторов оценок:

$$\Delta\delta_j^s = \sum_{\tau \in \bar{T}_h} \sum_{i=\overline{0, p_0}} \Delta\nu_i(\tau) \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta_j^s(\vartheta) d\vartheta, \quad j \in J_n;$$

$$\Delta\delta_l^v = \sum_{\tau \in \bar{T}_h} \sum_{i=\overline{0, p_0}} \Delta\nu_i(\tau) \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta_l^v(\vartheta) d\vartheta, \quad l \in Q_n.$$

Подсчитываются числа

$$\sigma_j^s = -\frac{\delta_j^s}{\Delta\delta_j^s}, \quad \text{если } \delta_j^s \Delta\delta_j^s < 0; \quad \sigma_j^s = \infty, \text{ если } \delta_j^s \Delta\delta_j^s \geq 0; \quad j \in J_n;$$

$$\sigma_l^v = -\frac{\delta_l^v}{\Delta\delta_l^v}, \quad \text{если } \delta_l^v \Delta\delta_l^v < 0; \quad \sigma_l^v = \infty, \text{ если } \delta_l^v \Delta\delta_l^v \geq 0; \quad l \in Q_n;$$

$$\sigma_i(t) = -\frac{\nu_i(t)}{\Delta\nu_i(t)}, \quad \text{если } \nu_i(t) \Delta\nu_i(t) < 0; \quad \sigma_i(t) = \infty, \text{ если } \nu_i(t) \Delta\nu_i(t) \geq 0; \quad \{i, t\} \in I_{\text{оп}}.$$

Пусть числа σ_j^s , $j \in J_n$; σ_l^v , $l \in Q_n$; $\sigma_i(t)$, $\{i, t\} \in I_{\text{оп}}$, различны и отличны от нуля (общий случай исследован в [9]). Нумеруются конечные из этих чисел в порядке возрастания: $0 < \sigma^1 < \sigma^2 < \dots < \sigma^{k_0}$, и находится такое число $\sigma^* = \sigma^{k^*}$, что $\alpha^{k^*} < 0$, $\alpha^{k^*+1} \geq 0$, где $\alpha^1 = -\rho(K_{\text{оп}})$; $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta\alpha^k$, $\Delta\alpha^k = (d_{j^k}^* - d_{*j^k})|\Delta\delta_{j^k}^s|$, если $\sigma^k = \sigma_{j^k}^s$; $\Delta\alpha^k = (v_{i^k}^* - v_{*i^k})|\Delta\delta_{i^k}^v|$, если $\sigma^k = \sigma_{i^k}^v$; $\Delta\alpha^k = (\xi^{*i}(t) - \xi_*^i(t))|\Delta\nu_{i^k}(t^k)|$, если $\sigma^k = \sigma_{i^k}(t^k)$; $k = \overline{1, k_0}$.

В зависимости от

- а) $\sigma^* = \sigma_{j^{k^*}}^s$,
- б) $\sigma^* = \sigma_{l^{k^*}}^v$,
- в) $\sigma^* = \sigma_{i^{k^*}}(t^{k^*})$

строится новая опора $\bar{K}_{\text{оп}} = \{\bar{I}_{\text{оп}}; \bar{J}_{\text{оп}}, \bar{Q}_{\text{оп}}\}$. Используя обозначения

- а) $j^* = j^{k^*}$,
- б) $l^* = l^{k^*}$,
- в) $\{i^*, t^*\} = \{i^{k^*}, t^{k^*}\}$,

получаем:

- 1а) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j^0) \cup j^*$, $\bar{Q}_{\text{оп}} = Q_{\text{оп}}$;
- 1б) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j^0$, $\bar{Q}_{\text{оп}} = Q_{\text{оп}} \cup l^*$;
- 1в) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \setminus \{i^*, t^*\}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j^0$, $\bar{Q}_{\text{оп}} = Q_{\text{оп}}$;
- 2а) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup j^*$, $\bar{Q}_{\text{оп}} = Q_{\text{оп}} \setminus l^0$;
- 2б) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$, $\bar{Q}_{\text{оп}} = (Q_{\text{оп}} \setminus l^0) \cup l^*$;
- 2в) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \setminus \{i^*, t^*\}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$, $\bar{Q}_{\text{оп}} = Q_{\text{оп}} \setminus l^0$;
- 3а) $\bar{I}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}} \cup \{i^0, t^0\}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup j^*$, $\bar{Q}_{\text{оп}} = Q_{\text{оп}}$;
- 3б) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \cup \{i^0, t^0\}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$, $\bar{Q}_{\text{оп}} = Q_{\text{оп}} \cup l^*$;
- 3в) $\bar{I}_{\text{оп}} = (I_{\text{оп}} \setminus \{i^*, t^*\}) \cup \{i^0, t^0\}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$, $\bar{Q}_{\text{оп}} = Q_{\text{оп}}$.

По завершении итерации преобразуется информация 2)–6) для новой опоры $\bar{K}_{\text{оп}}$.

Коррекция информации 7)–8) проводится для каждой точки $t \in T_i^0 \cup \{t_*, t^*\}$, $i \in K$, по следующей схеме:

- 1) Вычисляется значение вариации функции псевдоошибок $\Delta\mu(t) = -h^\zeta(t)(\bar{x} - x) - h^v(t)(\bar{\omega} - \omega)$.
- 2) Вычисляется величина

$$\vartheta_i(t) = -\frac{\mu_i(t + s_i(t)h) - \mu_i(t)}{\Delta\mu_i(t + s_i(t)h) - \Delta\mu_i(t)}, \quad t \in T_i^0 \cup \{t_*, t^*\},$$

где $s_i(t) = 1$, если $\frac{\mu_i(t + h) - \mu_i(t)}{\Delta\mu_i(t + h) - \Delta\mu_i(t)} < 0$; $s_i(t) = -1$ в противном случае, $t \in T_i^0$; $s_i(t_*) = 1$, $s_i(t^*) = -1$. Число $\vartheta_i(t)$ связано с шагом, при котором точка экстремума t i -й компоненты

функции $\mu(t, \vartheta) = \mu(t) + \vartheta \Delta \mu(t)$, $t \in T_h$, $\vartheta \geq 0$ ($\mu(t, 0) = \mu(t)$, $\mu(t, 1) = \bar{\mu}(t)$) переходит в точку $t + s_i(t)h$. Если обрабатывается точка t_* или t^* , то $\vartheta_i(t_*)$, $\vartheta_i(t^*)$ — шаги, при которых у функции $\mu_i(t, \vartheta)$, $t \in T_h$, $\vartheta \geq 0$, появляется новая точка экстремума.

- 3) Если $0 < \vartheta_i(t) < 1$, то точка t в множестве T_i^0 заменяется на новую точку экстремума $t + s_i(t)h$; вычисляется значение $F(t + s_i(t)h)$, $\Phi(t + s_i(t)h)$, $\Psi(t + s_i(t)h)$. Если $\vartheta_i(t) < 0$, то t перестает быть точкой экстремума и удаляется из T_i^0 . Из памяти ЭВМ удаляются значения $F(t)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$.
- 4) Повторяются шаги 1)–3), пока не будет достигнуто $\vartheta_i(t) \geq 1$.

Если $\vartheta_i(t) \geq 1$, то хранящаяся в памяти ЭВМ информация годится для использования на следующей итерации. На этом текущая итерация завершается.

Согласно описанной схеме, каждая итерация метода сопровождается перемещениями точек максимума и минимума функции $\mu(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$. На этих перемещениях производится интегрирование прямой системы (2.1), (2.2). Следуя [18], при оптимизации динамических систем трудоемкость итерации определяется суммарной длиной промежутков времени, на которых производится интегрирование прямой или сопряженной системы. При оценке эффективности метода за единицу трудоемкости принимается одно полное интегрирование прямой или сопряженной системы на всем промежутке наблюдения T .

Описанный метод конечен, если на итерациях опоры регулярны. Можно построить [9] модификацию метода, конечную для любой задачи (3.4).

4. ОПТИМАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Реализация позиционного решения осуществляется оптимальным эстиматором. До начала процесса наблюдения он вычисляет оценку $\hat{\alpha}^*(t_* - 0)$ по решению $\gamma^*(t_* - 0)$ задачи

$$\hat{\alpha}^*(t_* - 0) = p' \gamma^*(t_* - 0) = \max_{\gamma \in \Gamma} p' \gamma,$$

и сохраняет оптимальную опору $K_{\text{оп}}^0(t_* - 0)$ для дальнейших операций.

Предположим, что оптимальный эстиматор проработал на отрезке $[t_*, \tau]$, вычислив по результату $y_\tau^*(\cdot)$ векторы $\gamma^*(\tau)$, $x^*(\tau)$, $z^*(\tau)$, $\tau \in T_h(\tau) = \{t_*, t_* + h, \dots, \tau\}$ и оценки $\hat{\alpha}^*(t)$, $t \in T_h(\tau)$. В момент $\tau + h$ эстиматору становится известным результат $y^*(\tau + h)$ измерения, и он должен быстро вычислить значения $\gamma^*(\tau + h)$, $x^*(\tau + h)$, $z^*(\tau + h)$, $\hat{\alpha}^*(\tau + h)$.

Согласно предположению, в предыдущий момент τ оптимальный эстиматор решил задачу

$$\begin{aligned} p' \gamma &\rightarrow \max; \\ \xi_*^i(t) &\leq \sum_{j=1}^{n_s} h_j^s(i, t) s_j + \sum_{j=1}^q h_j^v(i, t) v_j \leq \xi^{*i}(t), \quad t \in T_h(\tau), \quad i = \overline{0, p_0}; \\ d_* &\leq s \leq d^*; \quad v_* \leq v \leq v^*, \end{aligned} \quad (4.1)$$

сохранил ее оптимальную опору $K_{\text{оп}}^0(\tau)$ и соответствующую ей информацию 2)–7).

В момент $\tau + h$ оптимальный эстиматор решает задачу

$$\begin{aligned} p' \gamma &\rightarrow \max; \\ \xi_*^i(t) &\leq \sum_{j=1}^{n_s} h_j^s(i, t) s_j + \sum_{j=1}^q h_j^v(i, t) v_j \leq \xi^{*i}(t), \quad t \in T_h(\tau), \quad i = \overline{0, p_0}; \\ d_* &\leq s \leq d^*; \quad v_* \leq v \leq v^*, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\xi_*^i(\tau + h) \leq \sum_{j=1}^{n_s} h_j^s(i, \tau + h) s_j + \sum_{j=1}^q h_j^v(i, \tau + h) v_j \leq \xi^{*i}(\tau + h), \quad (4.3)$$

которая отличается от (4.1) дополнительным ограничением (4.3).

Для решения задачи (4.2), (4.3) в качестве начальной опоры $K_{\text{оп}}(\tau + h)$ эстиматор берет оптимальную опору $K_{\text{оп}}^0(\tau)$ задачи (4.1). Тогда

$$\kappa(K_{\text{оп}}(\tau + h)) = \kappa(K_{\text{оп}}^0(\tau)); \quad \mu_i(t|K_{\text{оп}}(\tau + h)) = \mu_i(t|K_{\text{оп}}^0(\tau)), \quad t \in T_h(\tau); \quad (4.4)$$

$$\omega(K_{\text{оп}}(\tau + h)) = \omega(K_{\text{оп}}^0(\tau)); \quad \mu_i(\tau + h|K_{\text{оп}}(\tau + h)) = \int_{\tau}^{\tau+h} (\tau + h - \vartheta)^i d'(\vartheta) \zeta(\vartheta|K_{\text{оп}}^0(\tau)) d\vartheta, \quad (4.5)$$

причем $\xi_*^i(t) \leq \mu_i(t|K_{\text{оп}}(\tau + h)) \leq \xi^{*i}(t)$, $t \in T_h(\tau)$.

Если выполняются неравенства

$$\xi_*^i(\tau + h) \leq \mu_i(\tau + h|K_{\text{оп}}(\tau + h)) \leq \xi^{*i}(\tau + h),$$

то $K_{\text{оп}}^0(\tau)$ — оптимальная опора задачи (4.2), (4.3). В противном случае имеем

$$\rho^0(K_{\text{оп}}(\tau + h)) = \rho^0(\mu_i(\tau + h|K_{\text{оп}}(\tau + h)), [\zeta_*^i(\tau + h), \zeta^{*i}(\tau + h)]) \sim h.$$

В силу этого для коррекции начальной опоры $K_{\text{оп}}(\tau + h)$ до получения оптимальной опоры $K_{\text{оп}}^0(\tau + h)$ достаточно небольшого числа итераций, в процессе которых происходят небольшие перемещения точек экстремума псевдоошибок. На этих перемещениях интегрируется прямая система. Отсюда следует, что трудоемкость решения задачи (4.2), (4.3) с начальной опорой $K_{\text{оп}}(\tau + h) = K_{\text{оп}}^0(\tau)$ невелика. Количественное представление о трудоемкости реализации предложенного позиционного решения можно получить из [6], где описанный подход применен к задаче ОН, по сложности аналогичной рассмотренной выше.

5. ПРИМЕР

Для иллюстрации разработанного метода ОН динамической системы рассмотрим задачу ОН четвертной модели автомобиля, изображенной на рис. 1. Уравнения математической модели ($u = 0$) имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_1 x_2, \quad m_2 \ddot{x}_2 = k_1 x_1 - (k_1 + k_2) x_2 + k_2 w, \quad (5.1)$$

где $x_1 = x_1(t)$ — отклонение от положения равновесия первой массы, $x_2 = x_2(t)$ — отклонение от положения равновесия второй массы, m_1, m_2 — массы, k_1, k_2 — коэффициенты упругости пружин.

Систему (5.1) будем рассматривать на промежутке $T = [0, 10]$ при следующих значениях параметров: $m_1 = 1$, $m_2 = 10$, $k_1 = 1$, $k_2 = 9,2$. Считаем, что задано ее начальное положение $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, а начальные скорости $\dot{x}_1(0)$ и $\dot{x}_2(0)$ могут принимать значения s_1 и s_2 : $\dot{x}_1(0) = s_1$, $\dot{x}_2(0) = s_2$, где

$$(s_1, s_2) \in S = \{s \in S : |s_1| \leq 0,5, |s_2| \leq 0,5\}.$$

Относительно возмущения предположим, что оно имеет вид

$$w(t) = v_1 \sin 4t + v_2 \sin 3t, \quad t \in T,$$

с параметрами

$$(v_1, v_2) \in V = \{v \in \mathbb{R}^2 : |v_i| \leq 0,1; i = 1, 2\}.$$

Рассмотрим измерительные устройства трех видов. Первое описывается выражением

$$y(t) = -x_1(t) - x_2(t) - w(t) + \xi(t), \quad t \in T_h = \{0, h, \dots, 10 - h\}, \quad h = 0,1, \quad (5.2)$$

где $\xi(t)$, $t \in T_h$, — ограниченные ошибки измерения, $|\xi(t)| \leq \xi_1 = 0,1$, $t \in T_h$. Второе устройство имеет вид

$$y(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} (-x_1(t) - x_2(t) - w(t)) dt + \xi(\tau), \quad \tau \in \bar{T}_h = \{h, 2h, \dots, 10 - h\}, \quad (5.3)$$

где $|\xi(\tau)| \leq \xi_2 = 0,005$, $\tau \in \bar{T}_h$, а третье —

$$y^1(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - t)(-x_1(t) - x_2(t) - w(t)) dt + \xi(\tau), \quad \tau \in \bar{T}_h, \quad (5.4)$$

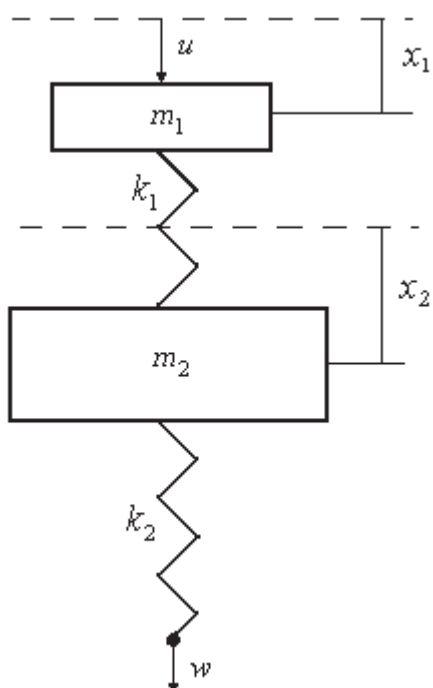
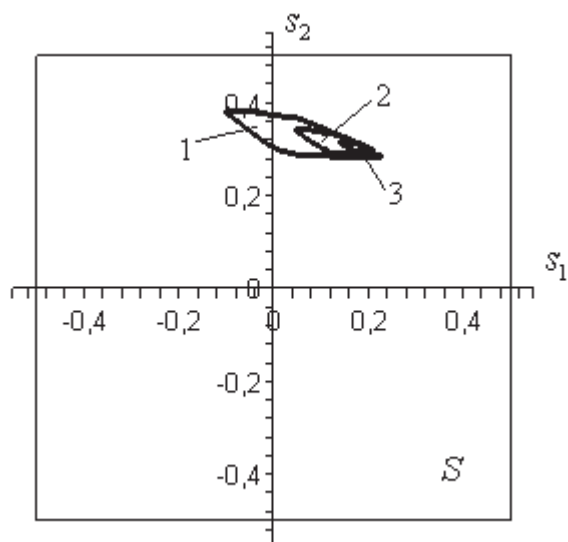
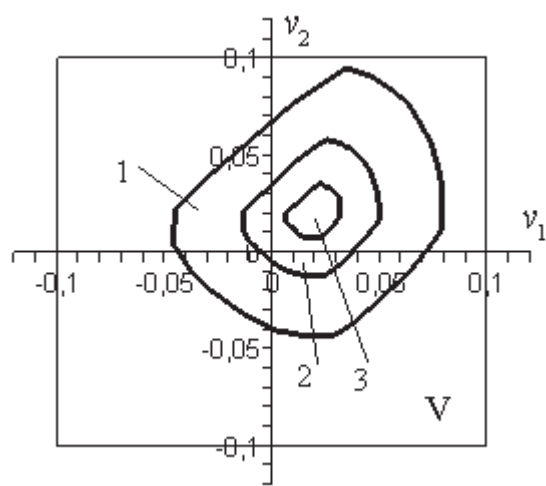


Рис. 1



(a)



(b)

Рис. 2

где $|\xi(\tau)| \leq \xi_3 = 0,0001$, $\tau \in \bar{T}_h$.

Допустим, что в конкретном процессе наблюдения динамической системы реализовались следующие значения неизвестных параметров:

$$s_1^* = 0,2, \quad s_2^* = 0,3, \quad v_1^* = 0,02, \quad v_2^* = 0,02.$$

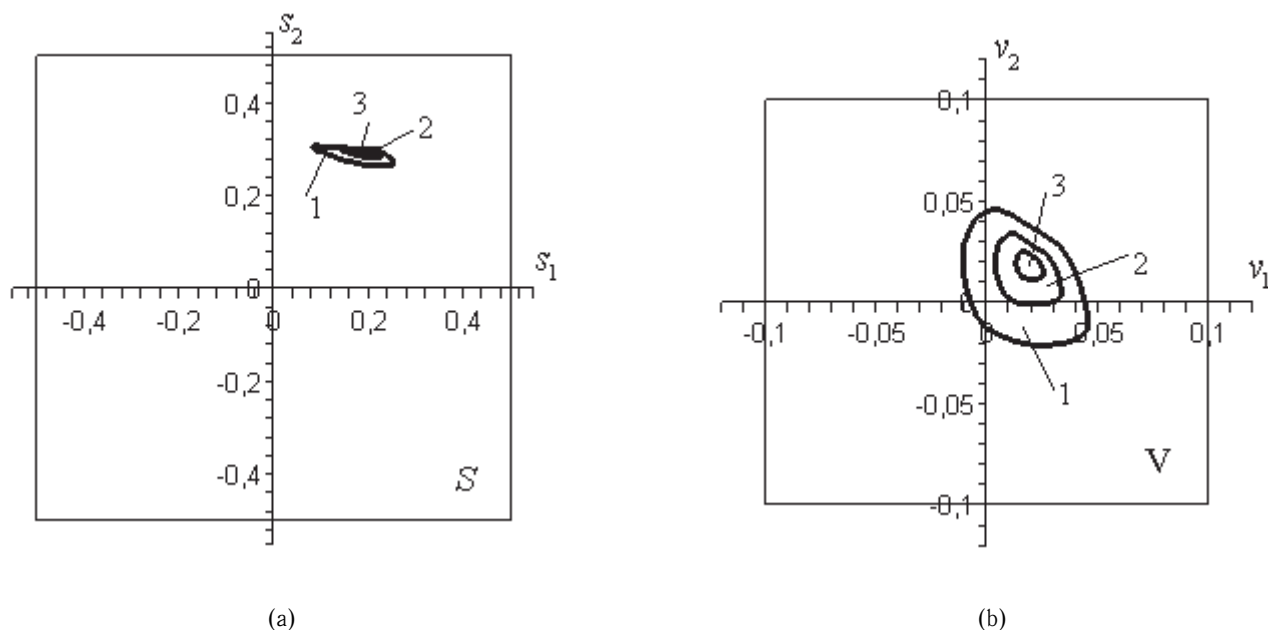


Рис. 3

На рис. 2(a) изображены проекции априорного и апостериорного распределений параметров начального состояния, соответствующие первому, второму и третьему измерительным устройствам (множества 1, 2 и 3 соответственно) в случае, когда реализовавшаяся (но неизвестная) функция ошибок измерительного устройства имеет вид

$$\xi(t) = \xi^* \sin t, \quad t \in T, \quad \xi^* = \xi_1, \xi_2, \xi_3.$$

На рис. 2(b) представлены проекции параметров возмущения при таких же ошибках (множества 1, 2 и 3).

На рис. 3 представлена аналогичная информация для случая, когда

$$\xi(t) = \xi^* \cos \frac{t}{2}, \quad t \in T, \quad \xi^* = \xi_1, \xi_2, \xi_3.$$

На рис. 4 изображены проекции априорного и апостериорного распределений параметров начального состояния для измерительного устройства (5.2) (множества 1), а также для случая, когда обрабатываются выходные сигналы динамического сенсора первого порядка (множества 2):

$$\dot{z}(t) = -z(t) - x_1(t) - x_2(t) - w(t), \quad z(0) = 0; \quad y(t) = z(t) + \xi(t), \quad t \in T.$$

ЧАСТЬ II

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАБЛЮДЕНИЯ

6. ВВЕДЕНИЕ

Управление — создание в каждый текущий момент времени целенаправленных воздействий на объект управления в зависимости от доступной информации о поведении объекта и действующих на него возмущений. Программное управляющее воздействие (программа) создается по априорной информации, при создании позиционного управляющего воздействия (управления) дополнительно используется и текущая информация.

Программы (управление по принципу разомкнутого контура) в реальных процессах управления используется редко из-за неизбежных неточностей математического моделирования и действия

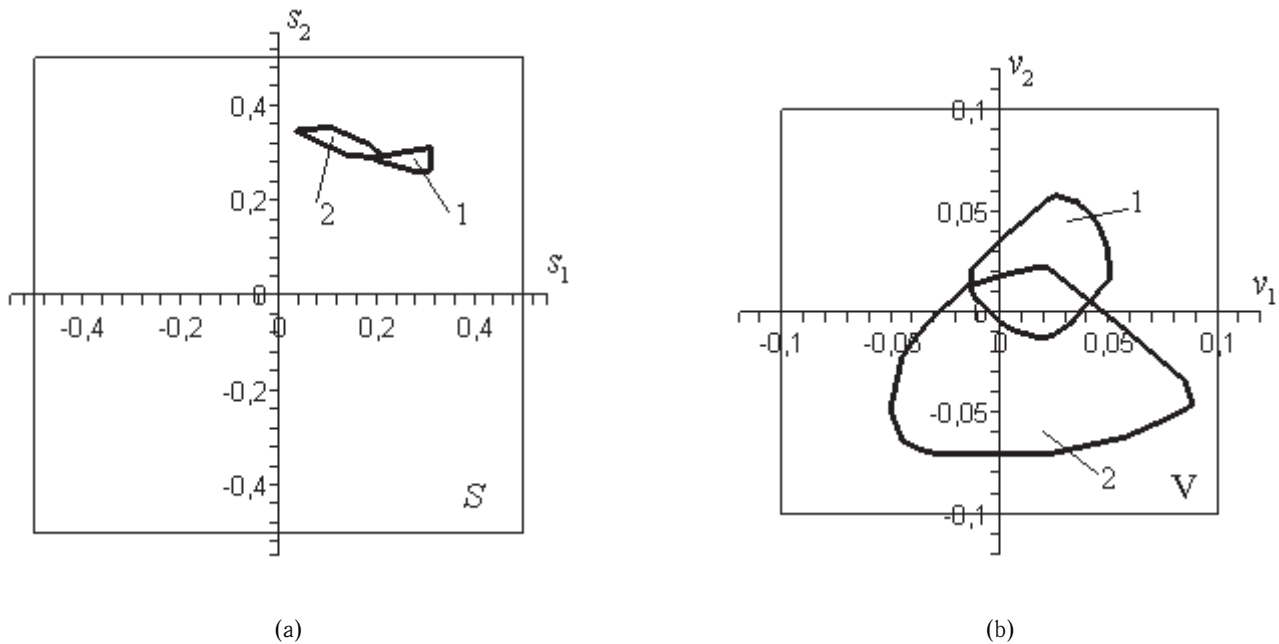


Рис. 4

возмущений. При позиционном управлении чаще всего привлекаются обратные связи, которые представляют одну из реализаций принципа управления по замкнутому контуру.

Первые задачи оптимального управления (ОУ), поставленные и решенные специалистами по автоматическому регулированию [19] более полувека назад, состояли в синтезе оптимальных обратных связей. Они ставились по детерминированным моделям в предположении, что в процессе управления будут доступны точные значения всех фазовых переменных. Инженерам удалось синтезировать оптимальные системы второго порядка, используя в качестве вспомогательного средства оптимальные программы. Исходя из этих исследований, Л. С. Понтрягин сформулировал [17] новую экстремальную задачу по построению оптимальных программ, назвав ее неклассической задачей вариационного исчисления. Принципиальное отличие задачи Л. С. Понтрягина от классических задач вариационного исчисления состояло в учете ограничений, заданных с помощью замкнутых множеств и нестрогих неравенств. К задачам оптимального программного управления, кроме задач вариационного исчисления, сводились многие другие экстремальные задачи, не связанные ни с управлением, ни с динамическими системами. В связи с этим можно сказать, что в течение пятидесяти лет под названием «теория оптимального управления» интенсивно развивалось современное (новое, неклассическое) вариационное исчисление. Задачи управления при этом были отодвинуты на задний план¹.

Управляющие (позиционные) воздействия, подаваемые на реальный объект в процессе управления, создаются по математической модели и предназначены для достижения целей управления с парированием неточностей математического моделирования и возмущений, возникающих по ходу управления. При этом обрабатывается доступная информация о поведении объекта и возмущениях. Таким образом, процедура управления вынуждается неопределенностью и невозможна без процедуры наблюдения. В системах управления, функционирующих по принципу замкнутого контура, процедура наблюдения сводится к измерению доступных выходных сигналов. Результаты измерения поступают в управляющий орган, который по заранее заготовленным правилам вырабатывает по ним управляющие воздействия. В данной работе для управления используется принцип

¹Исключение составили линейно-квадратичные задачи Летова—Калмана [12, 15], которые не содержали типичных для теории ОУ геометрических ограничений на управляющее воздействие, и поэтому допускали простые (линейные) позиционные решения.

ОУ в реальном времени [5], в котором процедура наблюдения дополняется обработкой оптимальными эстиматорами результатов измерений. Получаемые после этого оценки текущих состояний направляются в управляющий орган для выработки управляющих сигналов, по которым в исполнительных устройствах создаются управляющие воздействия.

В идеальных условиях, когда поведение математической модели абсолютно точно описывает поведение физического объекта управления и можно по априорной информации точно прогнозировать поведение объекта в будущем, потребность в оптимальном (позиционном) управлении отпадает, поскольку в этих случаях достаточно использовать оптимальные программы, рассчитываемые методами современного вариационного исчисления [17, 18].

Общепризнано, что центральной проблемой теории ОУ является проблема синтеза оптимальных обратных связей. Несмотря на огромные усилия, она не решена до сих пор даже в классической постановке, при которой оптимальная обратная связь строится по детерминированной модели в предположении, что состояния оптимизируемой системы в процессе управления измеряются точно. Такая постановка была естественным аналогом задачи синтеза обратных связей в классической теории управления. Если в силу специфики задачи стабилизации (основной задачи теории управления) стабилизирующие обратные связи, построенные по этому принципу, были достаточно эффективными¹ при практическом их использовании, то в теории ОУ классические обратные связи оказывались не всегда достаточно эффективными. Например, оптимальные обратные связи, построенные по линейным детерминированным задачам, часто в процессе управления не способны удерживать объекты управления в области управляемости при действии возмущений.

Инженеры понимали [19], что адекватный учет доступной информации о возмущениях может лишь повысить качество проектируемых систем управления. Но долгое время не было соответствующих методов синтеза. Первые системы управления, синтезированные с учетом возмущений, были сконструированы в рамках теории стохастического управления. С созданием теории ОУ появились возможности использования множественных (нестохастических) моделей неопределенности [13, 14, 22].

Другое обобщение классической постановки задачи синтеза оптимальных систем состоит в отказе от требования совершенных измерений. С годами из-за усложнения объектов управления и повышения требований к качеству управления ими растет размерность используемых математических моделей. При этом у физических прототипов последних удается измерять лишь отдельные выходные сигналы и осуществлять это с ограниченной точностью. В результате возникла проблема синтеза оптимальных управлений типа обратной связи по недетерминированным моделям с использованием неточных измерений выходных сигналов объектов управления [13, 14]. Именно этой проблеме посвящена данная часть работы. Проблема исследуется для линейных систем управления, что может показаться странным, поскольку для них, согласно [17], давно построена полная теория. Однако здесь уместно привести слова Л. С. Понтрягина, Дж. Данцига и Р. Беллмана — ученых, сыгравших определяющую роль в формировании современной (качественной и конструктивной) теории экстремальных задач: «Я считаю, что если не все, то во всяком случае многие математики должны в своей работе обращаться к первоисточникам, то есть к приложениям математики. Это необходимо как для того, чтобы оправдать свое существование, так и для того, чтобы влить новую свежую струю в научные исследования» [16], «Решающим критерием при оценке той или иной теории является ее способность решать те проблемы, которые послужили исходным толчком для ее развития» [11], «Любое математическое исследование следует судить в конечном счете по его внутреннему содержанию, а не по удельному весу высокопарных псевдоабстракций» [3].

7. ОПТИМАЛЬНЫЕ ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ НА НЕТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим линейную систему управления, состоящую из динамического объекта управления и динамического измерительного устройства, которые функционируют на промежутке времени $T = [t_*, t^*]$ под действием ограниченных кусочно непрерывных возмущений. Математическую модель

¹ Обратная связь, стабилизирующая линеаризованную детерминированную модель объекта управления до равномерной асимптотической устойчивости, обеспечивает самому объекту управления устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

объекта управления будем строить в виде соотношений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + M(t)w, \quad (7.1)$$

где $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $t \in T$, — кусочно непрерывная матричная функция, $x = x(t)$ — n -вектор состояния математической модели объекта управления в момент времени t ; $u = u(t)$ — значение r -мерного управляющего воздействия. Остальные элементы, а также начальное состояние $x(t_*) \in X_0$ и возмущение $w = w(t)$, $t \in T$, определены в разделе 2.

Множество $\Gamma = S \times V$ теперь характеризует априорную неопределенность в поведении системы (7.1). Как и в разделе 2, назовем множества S , V , $X_0 = x_0 + \Omega S$, Γ априорными распределениями параметров начального состояния, параметров возмущения, начального состояния $x(t_*)$, параметров системы (7.1).

В качестве доступных управляющих воздействий $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$ будем использовать дискретные управляющие воздействия степени p_c с периодом квантования h :

$$u(t) = \sum_{j=0}^{p_c} v_j(\tau)(t - \tau)^j, \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h; \quad u_*(t) \leq u(t) \leq u^*(t), \quad t \in T,$$

где $v(\tau) = (v_j(\tau), j = \overline{0, p})$, $\tau \in T_h$, — управляющие сигналы, $v_j(\tau) \in \mathbb{R}^r$, $v_{j*}(\tau) \leq v_j(\tau) \leq v_j^*(\tau)$; $j = \overline{0, p}$; $\tau \in T_h$; $h = (t^* - t_*)/N$, N — натуральное число; $T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\}$; $u_*(t)$, $u^*(t)$, $t \in T$, — непрерывные функции.

В процессе управления текущие состояния системы (7.1) не доступны измерению, информация о поведении системы (7.1) поступает от динамического измерительного устройства, математическая модель которого имеет вид (2.2)–(2.4):

$$\dot{z} = G(t)z + C(t)x + L(t)w, \quad z(t_*) = z_0,$$

$$y^i(\tau) = \int_{\tau-h}^{\tau} (\tau - \vartheta)^i d'(\vartheta) z(\vartheta) d\vartheta + \xi^i(\tau),$$

$$\xi_*^i \leq \xi^i(\tau) \leq \xi^{*i}, \quad \tau \in \bar{T}_h; \quad \xi^{*i} - \xi_*^i > 0, \quad i = \overline{0, p_0}.$$

Пусть $\bar{X}(t|x_0, u(\cdot))$, $\bar{Y}(t|x_0, u(\cdot))$ — множества всевозможных состояний системы управления и всевозможных выходных сигналов измерительного устройства физической системы в момент времени t , соответствующее фиксированному начальному состоянию x_0 объекта управления, управляющему воздействию $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$ и всевозможным возмущениям, действующим на физические системы в процессе управления и измерения; $X(t|x_0, u(\cdot))$, $Y(t|x_0, u(\cdot))$ — множества состояний и выходных сигналов математических моделей (7.1), (2.2)–(2.4) при тех же условиях.

Будем говорить, что соотношения (7.1), (2.2)–(2.4) являются моделями физических систем управления и измерения, если для всех возможных x_0 , $u(\cdot)$ выполняются соотношения

$$\bar{X}(\tau|x_0, u(\cdot)) \subset X(\tau|x_0, u(\cdot)), \quad \bar{Y}(\tau|x_0, u(\cdot)) \subset Y(\tau|x_0, u(\cdot)), \quad \tau \in \bar{T}_h = T_h \setminus t_*. \quad (7.2)$$

Точность математических моделей определяется числом

$$\max \left\{ \max_{\tau \in \bar{T}_h} \max_{x_0, u(\cdot)} \beta(X(\tau|x_0, u(\cdot)), \bar{X}(\tau|x_0, u(\cdot))), \max_{\tau \in \bar{T}_h} \max_{x_0, u(\cdot)} \beta(Y(\tau|x_0, u(\cdot)), \bar{Y}(\tau|x_0, u(\cdot))) \right\}.$$

Таким образом, в процессе управления состояния $\bar{x}(t)$, $t \in T$, физической системы не доступны точному измерению, а для управления используются сигналы измерительного устройства, каждый сигнал которого, в силу свойства (7.2), может быть получен при измерении устройством (2.2)–(2.4) выходных сигналов математической модели (7.1).

Дискретное управление физической системой по классическому принципу замкнутого контура осуществляется следующим образом. Процесс управления начинается в момент t_* . На промежутке времени $[t_*, t_* + h[$ на вход физической системы управления подается управляющее воздействие

$$u(t) = \sum_{j=0}^{p_c} v_j(t_*)(t - t_*)^j, \quad t \in [t_*, t_* + h[,$$

в котором управляющие сигналы $v_j(t_*)$, $j = \overline{0, p_c}$, построены до начала процесса управления по априорной информации с использованием математических моделей (7.1), (2.2)–(2.4). В момент $t = t_* + h$ поступает сигнал $y(t_* + h) = (y^i(t_* + h), i = \overline{0, p_0})$, физического измерительного устройства, порожденный реализовавшимися начальным состоянием $x(t_*)$, возмущением $w(t)$, $t \in [t_*, t_* + h[$, и ошибками измерения $\xi(t_* + h) = (\xi^i(t_* + h), i = \overline{0, p_0})$. По сигналу $y(t_* + h)$, следуя заранее (до начала процесса управления) составленным для моделей (7.1), (2.2)–(2.4) правилам, выбираются доступные управляющие сигналы $v_j(t_* + h) = v_j(t_* + h, y(t_* + h))$, $j = \overline{0, p_c}$, и на вход физической системы управления подается управляющее воздействие

$$u(t) = \sum_{j=0}^{p_c} v_j(t_* + h)(t - t_* - h)^j, \quad t \in [t_* + h, t_* + 2h[.$$

Оно вместе с реализовавшимся возмущением $w(t)$, $t \in [t_* + h, t_* + 2h[$, переведет систему в не доступное измерению состояние $x(t_* + 2h)$, которое в совокупности с реализовавшейся ошибкой $\xi(t_* + 2h)$ приведет к доступному сигналу $y(t_* + 2h)$. Продолжая этот процесс, в произвольный момент $\tau \in \bar{T}_h$, получив измерение $y(\tau)$, выберем предварительно вычисленные доступные сигналы $v_j(\tau) = v_j(\tau, y_\tau(\cdot))$, $j = \overline{0, p_c}$, $y_\tau(\cdot) = (y(\vartheta), \vartheta \in \{t_* + h, t_* + 2h, \dots, \tau\})$, и на вход системы управления подадим управляющее воздействие

$$u(t) = \sum_{j=0}^{p_c} v_j(\tau)(t - \tau)^j, \quad t \in [\tau, \tau + h[.$$

В основе операций, сопровождающих описанный процесс управления, лежит векторный функционал

$$v(\tau, y_\tau(\cdot)) = (v_j(\tau, y_\tau(\cdot)), j = \overline{0, p_c}), \quad y_\tau(\cdot) \in Y(\tau), \quad \tau \in \bar{T}_h, \quad (7.3)$$

где $Y(\tau)$ — набор всех сигналов $y_\tau(\cdot)$ измерительного устройства (2.2)–(2.4), которые можно получить к моменту τ . Назовем функционал (7.3) и порожденные им управляющие воздействия

$$u(t) = u(t|y_t(\cdot)) = \sum_{j=0}^{p_c} v_j(\tau, y_\tau(\cdot))(t - \tau)^j, \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in \bar{T}_h,$$

(дискретной) обратной связью на неточных измерениях выходного сигнала системы управления. Здесь

$$y_t(\cdot) = y_\tau(\cdot), \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in \bar{T}_h.$$

Траектория $x(t) = x(t|u(t, y_t(\cdot)))$, $t \in T$, системы управления, полученная в результате приведенного процесса управления, является одной из траекторий замкнутой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t, y_t(\cdot)) + M(t)w. \quad (7.4)$$

Пусть $X(t|u(t, y_t(\cdot)))$, $t \in T$, — семейство всех траекторий уравнения (7.4), которые могут быть порождены всеми возможными начальными состояниями $x(t_*)$ и возмущениями $w(t)$, $t \in T$, и которые вместе с возможными ошибками измерения $\xi(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$, приводят к сигналам $y(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$.

Обратную связь (7.3) будем называть допустимой, если на ней выполняется включение

$$X(t^*|u(t^*|y_{t^*}(\cdot))) \subset X^*, \quad (7.5)$$

где X^* — заданное терминальное множество:

$$X^* = \{x \in \mathbb{R}^n : g_* \leq Hx \leq g^*\}, \quad H \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad g_*, g^* \in \mathbb{R}^m, \quad g_* < g^*.$$

Свойство (7.5) означает, что допустимая обратная связь $v(\tau, y_\tau(\cdot))$, $y_\tau(\cdot) \in Y(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$, порождает такое управляющее воздействие, которое с гарантией (при всех возможных s , v , $\xi(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$) переводит систему управления в момент t^* на терминальное множество X^* .

Качество допустимой обратной связи (7.3) оценивается по значениям естественного для данной модели неопределенности функционала

$$J(u) = \min c'_0 x, \quad x \in X(t^*|u(t^*, y_{t^*}(\cdot))),$$

где $c_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

Оптимальной обратной связью на неточных измерениях выходного сигнала называется такая допустимая обратная связь $v^0(\tau, y_\tau(\cdot))$, $y_\tau(\cdot) \in Y(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$, что на соответствующем ей управляющем воздействии выполняется равенство

$$J(u^0) = \max J(u),$$

где максимум вычисляется по всем допустимым обратным связям (7.3).

Оптимальная обратная связь обеспечивает наилучший результат управления при наихудших условиях (дает оптимальный гарантированный результат). Задача синтеза оптимальной замкнутой системы заключается в конструировании оптимальной обратной связи $v^0(\tau, y_\tau(\cdot))$, $y_\tau(\cdot) \in Y(\tau)$, $\tau \in \bar{T}_h$.

Оптимальная обратная связь на неточных измерениях выходного сигнала является обобщением классической оптимальной обратной связи по состоянию, которая строится по детерминированной модели ($\Omega = 0$, $w(t) \equiv 0$, $t \in T$) в предположении, что в процессе управления производятся точные измерения текущих состояний системы (7.1).

Таким образом, классический принцип оптимального управления по замкнутому контуру требует построения оптимальной обратной связи до начала процесса управления. Решение этой задачи позволяет после замыкания системы (7.1) оптимальной обратной связью получить оптимальную автоматическую систему управления, т.е. решить задачу, поставленную инженерами в конце 1940-х гг. Поскольку до сих пор проблему оптимального управления по замкнутому контуру не удается решить даже для классических оптимальных обратных связей по состоянию, перейдем к другому (современному) принципу управления — оптимальному управлению в реальном времени.

8. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Оптимальное управление в реальном времени по неточным измерениям выходных сигналов опишем для одного специального типа обратных связей.

До начала процесса управления в классе дискретных управляющих сигналов по априорной информации строим (см. ниже) оптимальную программу $u^0(t)$, $t \in T$. При этом затраты времени не играют существенной роли.

Процесс управления начинаем в момент t_* с подачи на вход физической системы управления управляющего воздействия $u^*(t) = u^0(t)$, $t \geq t_*$.

В момент $t = t_* + h$ поступает первое измерение $y^*(t_* + h)$. По этому измерению за время $s(t_* + h) < h$ вычислим (см. ниже) управляющие сигналы $v_j^0(\tau|t_* + h, y^*(t_* + h))$, $j = \overline{0, p_c}$, $\tau \in \bar{T}_h$, и соответствующее им управляющее воздействие

$$u^0(t|t_* + h, y^*(t_* + h)) = \sum_{j=0}^{p_c} v_j^0(\tau|t_* + h, y^*(t_* + h))(t - \tau)^j, \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in \bar{T}_h.$$

Будем подавать с момента $t_* + h + s(t_* + h)$ на физическую систему управления вместо $u^0(t)$, $t \geq t_*$, управляющее воздействие

$$u^*(t) = u^0(t|t_* + h, y^*(t_* + h)), \quad t \in [t_* + h + s(t_*), t_* + 2h + s(t_* + 2h)[.$$

Предположим, что проведены измерения $y^*(t_* + h)$, $y^*(t_* + 2h)$, $\dots$, $y^*(\tau - h)$ за время $s(t_* + h)$, $s(t_* + 2h)$, $\dots$, $s(\tau - h)$, подсчитаны управляющие сигналы

$$\begin{aligned} v_j^0(t|t_* + h, y^*(t_* + h)), \quad t \in \{t_* + h, \dots, t^* - h\}, \\ v_j^0(t|t_* + 2h, y^*(t_* + 2h)), \quad t \in \{t_* + 2h, \dots, t^* - h\}, \\ \dots, \\ v_j^0(t|\tau - h, y_{\tau-h}^*(\cdot)), \quad t \in \{\tau - h, \dots, t^* - h\}, \end{aligned}$$

$j = \overline{0, p_c}$, и на систему (7.1) подано управляющее воздействие

$$u^*(t) = \begin{cases} u^0(t), & t \in [t_*, t_* + h + s(t_* + h)], \\ u^0(t|\theta, y_\theta^*(\cdot)), & t \in [\theta + s(\theta), \theta + h + s(\theta + h)], \quad \theta \in \{t_* + h, \dots, \tau - h\}, \\ u^0(t|\tau - h, y_{\tau-h}^*(\cdot)), & t \geq \tau - h + s(\tau - h). \end{cases}$$

В текущий момент $t = \tau$, получив измерение $y^*(\tau)$, вычислим (см. ниже) за время $s(\tau) < h$ управляющие сигналы $v_j^0(\vartheta|\tau, y_\tau^*(\cdot))$, $j = \overline{0, p}$, $\vartheta \in T(\tau)$, и подадим в систему управления соответствующее им управляющее воздействие $u^0(t|\tau, y_\tau^*(\cdot))$, $t \in [\tau + s(\tau), \tau + h + s(\tau + h)]$.

Реализацию в текущий момент τ нового принципа управления начнем с «очистки» сигнала $y^*(t)$, $t \in T_h(\tau)$, от вклада в него построенного управляющего воздействия $u^*(t)$, $t \in [t_*, \tau]$, и известного вектора x_0 :

$$y_0^{i*}(\theta) = y^{i*}(\theta) - \int_{\theta-h}^{\theta} (\theta - \mu)^i d'(\mu) \zeta_0^*(\mu) d\mu, \quad \theta \in T_h(\tau).$$

Здесь $\zeta_0^*(t)$, $t \in [t_*, \tau]$, — траектория измерительного устройства $\dot{z} = G(t)z + C(t)x_0^*(t)$, соответствующая траектории $x_0^*(t)$, $t \in [t_*, \tau]$, детерминированной системы $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ с начальным состоянием $x(t_*) = x_0$ и управляющим воздействием $u(t) = u^*(t)$, $t \in [t_*, \tau]$.

Сигнал $y_{0\tau}^*(\cdot)$ совпадает с сигналом, который записало бы к моменту τ измерительное устройство (2.2)–(2.4) для системы

$$\dot{x} = A(t)x + M(t)w, \quad x(t_*) = \Omega s. \quad (8.1)$$

Следуя [4] и имея в виду аналогию с вероятностными распределениями, множества S, V назовем априорными распределениями параметров начального состояния и возмущения, множество $\Gamma = S \times V = (\gamma = (s, v) : s \in S, v \in V)$ — априорным распределением неизвестных параметров системы (7.1). Сигнал $y_{0\tau}^*(\cdot)$ содержит дополнительную информацию о реализовавшемся параметре γ^* , что позволяет ввести понятие апостериорного распределения параметра γ .

Определение 2. Множество $\hat{\Gamma}(\tau) = \hat{\Gamma}(\tau; y_{0\tau}^*(\cdot))$ называется апостериорным распределением параметра γ системы (8.1) (или (7.1)), соответствующим позиции $(\tau; y_{0\tau}^*(\cdot))$, если оно состоит из тех и только тех векторов $\gamma = (z, v) \in \Gamma$, которым соответствуют начальные состояния $x(t_*) = \Omega s$ и возмущения $w(t) = \Lambda(t)v$, $t \in [t_*, \tau]$, способные вместе с некоторыми возможными ошибками измерения $\xi(t)$, $t \in T_h(\tau)$, породить сигнал $y_{0\tau}^*(\cdot)$.

Апостериорное распределение $\hat{\Gamma}(\tau)$ содержит всю информацию о неизвестных параметрах системы (8.1), соответствующую априорной информации Γ и измерениям $y_{0\tau}^*(\cdot)$, полученным к моменту τ . Покажем, что для задачи управления § 7 достаточно иметь лишь некоторые оценки множества $\hat{\Gamma}(\tau)$.

Управляющее воздействие $u^\tau(\cdot) = (u(t), t \in [\tau, t^*])$ назовем программой, если оно вместе с $u_\tau^*(\cdot) = (u^*(t), t \in [t_*, \tau])$ переводит систему (7.1) в момент t^* на терминальное множество X^* при всех $\gamma \in \hat{\Gamma}(\tau)$.

Терминальное ограничение $h'_{(i)}x(t^*) \leq g_i^*$ ($h_{(i)}$ — i -я строка матрицы H , g_i^* — i -я компонента вектора g^* , $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$) будет выполняться при всех $\gamma \in \hat{\Gamma}(\tau)$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\max_{\gamma \in \hat{\Gamma}(\tau)} \left(h'_{(i)}F(t^*)s + h'_{(i)}P(t^*)v \right) + \phi'_{(i)}(\tau)x_0^*(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} \phi'_{(i)}(\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta \leq g_i^*, \quad (8.2)$$

где $F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n_z}$, $t \in T$, — решение уравнения $\dot{F} = A(t)F$, $F(t_*) = \Omega$; $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n_v}$, $t \in T$, — решение уравнения $\dot{P} = A(t)P + M(t)\Lambda(t)$, $P(t_*) = 0$; $\phi_{(i)}(t)$ — i -я строка матрицы $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $t \in T$:

$$\dot{\Phi} = -\Phi A(t), \quad \Phi(t^*) = H.$$

Введем обозначения $p'_{xi} = h'_{(i)}F(t^*)$, $p'_{wi} = h'_{(i)}P(t^*)$, $g_i^*(\tau) = g_i^* - \chi_i^*(\tau)$,

$$\chi_i^*(\tau) = \chi_i^*(\tau, y_\tau^*(\cdot)) = \max(p'_{xi}s + p'_{wi}v), \quad (s, v) \in \hat{\Gamma}(\tau). \quad (8.3)$$

Тогда неравенство (8.2) примет вид

$$\phi'_{(i)}(\tau)x_0^*(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} \phi'_{(i)}(\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta \leq g_i^*(\tau).$$

Аналогичные рассуждения для ограничения $g_{i*} \leq h'_{(i)}x(t^*)$ дают

$$g_{i*}(\tau) \leq \phi'_{(i)}(\tau)x_0^*(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} \phi'_{(i)}(\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta,$$

где $g_{i*}(\tau) = g_{*i} - \chi_{*i}(\tau)$,

$$\chi_{*i}(\tau) = \chi_{*i}(\tau, y_\tau^*(\cdot)) = \min(p'_{xi}s + p'_{wi}v), \quad (s, v) \in \hat{\Gamma}(\tau). \quad (8.4)$$

Таким образом, управляющее воздействие $u^\tau(\cdot)$ является программой в позиции $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$g_*(\tau) \leq \Phi(\tau)x_0^*(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} \Phi(\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta \leq g^*(\tau).$$

Из приведенных рассуждений следует, что для построения программы $u^\tau(\cdot)$ нужно вычислить оценки (8.3), (8.4) для каждого $i \in I$. Назовем (8.3), (8.4) задачами оптимального наблюдения, сопровождающими задачу оптимального управления в условиях неопределенности (*сопровождающими задачами оптимального наблюдения*).

Качество программы $u^\tau(\cdot)$ оценим величиной

$$I(u) = \min c'_0 x(t^*), \quad \gamma \in \hat{\Gamma}(\tau).$$

Введем обозначения $c'_x = c'_0 F(t^*)$, $c'_w = c'_0 P(t^*)$, $\chi_0(\tau) = \chi_0(\tau, y_\tau^*(\cdot)) = \min(c'_x s + c'_w v)$, $(s, v) \in \hat{\Gamma}(\tau)$, и пусть $\psi_c(t)$, $t \in T$, — траектория сопряженной системы

$$\dot{\psi}' = -\psi' A(t)$$

с начальным условием $\psi(t^*) = c_0$. Тогда

$$I(u) = \psi'_c(\tau)x_0^*(\tau) + \chi_0(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} \psi'_c(\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta.$$

Следовательно, оптимальная программа $u^0(t|\tau, \chi(\tau))$, $t \in [\tau, t^*]$, для позиции $(\tau, \chi(\tau))$, где $\chi(\tau) = (\chi_{*i}(\tau), \chi_i^*(\tau), i \in I)$, в расширенном пространстве оценок, соответствующей позиции $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$, является решением задачи

$$\begin{aligned} c'_0 x(t^*) &\rightarrow \max, \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = x_0^*(\tau), \\ x(t^*) &\in X^*(\tau), \quad u(t) \in U_N^{pc}, \quad t \in [\tau, t^*], \end{aligned} \quad (8.5)$$

которую назовем детерминированной задачей оптимального управления, сопровождающей задачу оптимального управления системой (7.1) по неточным измерениям выходного сигнала (*сопровождающей задачей оптимального управления*).

Закончим описание реализации принципа оптимального управления в реальном времени, положив

$$\begin{aligned} u^*(t) &= u^0(t|\tau - h, \chi(\tau - h)), \quad t \in [\tau, \tau + s(\tau)]; \\ u^*(t) &= u^0(t|\tau, \chi(\tau)), \quad t \in [\tau + s(\tau), \tau + h]. \end{aligned}$$

Согласно приведенной схеме, для построения управляющего сигнала $u^*(t)$, $t \in [\tau, \tau + h]$, достаточно решить

- 1) $2m$ сопровождающих задач оптимального наблюдения (8.3), (8.4);
- 2) одну сопровождающую задачу оптимального управления (8.5).

Орган, решающий сопровождающую задачу оптимального наблюдения, будем называть оптимальным эстиматором; орган, решающий сопровождающую задачу оптимального управления, — оптимальным регулятором. Пусть $s_{*i}(\tau)$, $s_i^*(\tau)$ — время, за которое i -й и $(m + i)$ -й эстиматоры решают i -ю и $(m + i)$ -ю сопровождающие задачи оптимального наблюдения, $s_0(\tau)$ — время, которое требуется регулятору для решения сопровождающей задачи оптимального управления. Если выполняется неравенство

$$s(\tau) = \max_{i \in I} \{s_{*i}(\tau), s_i^*(\tau)\} + s_0(\tau) < h, \quad (8.6)$$

то оптимальные эстиматоры и регулятор назовем подходящими. В этом случае можно говорить, что оптимальные эстиматоры и регулятор оптимально управляют в реальном времени физической системой управления по неточным измерениям ее выходных сигналов. В [21] приведен алгоритм ОУ в реальном времени для случая, когда (8.6) не выполняется.

При малых h и заметных n для обеспечения неравенства (8.6) требуются очень мощные современные процессоры и большой объем оперативной памяти, если решать задачи (8.3), (8.4), (8.5) известными методами [10] как самостоятельные. Учитывая динамичность процесса управления, разумно перейти к другой схеме управления.

До начала процесса управления оптимальные эстиматоры решают задачи

$$\chi_{*i}(t_* - 0) = \min(p'_{xi}s + p'_{wi}v), \quad \chi_i^*(t_* - 0) = \max(p'_{xi}s + p'_{wi}v), \quad s \in S, v \in V, i \in I; \quad (8.7)$$

а оптимальный регулятор вычисляет упомянутую выше оптимальную программу $u^*(t)$, $t \in T$, решив задачу

$$\begin{aligned} c'_0 x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \\ x(t^*) &\in X^*(t_* - 0), \quad u(t) \in U_N^{pc}, \quad t \in [\tau, t^*]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Задачи (8.7), (8.8) составляются по априорной информации. Затраты времени и объем оперативной памяти на их решение незначительны.

Для решения задач (8.3), (8.4), (8.5) в момент $t_* + h$ и в произвольный момент τ с целью получения оптимального сигнала $v_j^0(\vartheta | \tau, y_\tau^*(\cdot))$, $j = \overline{0, p_c}$, $\vartheta \in T(\tau)$ (см. выше) используются результаты, полученные в предыдущие моменты. Таким образом, согласно этой схеме, проблема оптимального управления в реальном времени сводится к быстрой коррекции решений задач (8.3), (8.4), (8.5) в процессе управления.

Алгоритм работы оптимального эстиматора описан в части I.

Задача оптимального регулятора в момент $\tau \in \bar{T}_h$ состоит в вычислении оптимальной программы сопровождающей задачи оптимального управления (8.5). Соответствующий алгоритм вычисления можно построить на базе алгоритма, приведенного в [7] для более простого случая.

9. ПЕРВАЯ СТАДИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

При большой неопределенности в начальном состоянии и больших возмущениях в системе управления осуществить описанную выше процедуру оптимального управления в реальном времени невозможно, поскольку задача (8.5) не будет иметь допустимых управлений. Для таких задач можно или усложнить, следуя [2], процедуру наблюдения и обратную связь (7.3), или использовать двустадийный процесс управления. В процессе управления априорная неопределенность постоянно уменьшается в результате обработки поступающих измерений. В этой ситуации разумно при $\tau < \tau_*$ (τ_* — момент времени, при котором ограничения задачи (8.5) становятся совместными, правила его вычисления указаны ниже) управляющие воздействия вырабатывать с помощью вспомогательных задач, имеющих допустимые управления.

Реализуем эту идею следующим образом. Работу оптимального регулятора организуем в две стадии. Цель первой стадии — построение допустимых управляющих воздействий; второй — оптимальное управление в реальном времени.

На первой стадии в произвольный текущий момент времени $\tau \in \bar{T}_h$, $\tau < \tau_*$, оптимальный регулятор решает две задачи оптимального управления. Первая задача состоит в отыскании минимального числа ρ , задающего терминальное множество $X_\rho^*(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_*(\tau) - \rho e \leq Hx \leq g^*(\tau) + \rho e\}$, где $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$, на которое можно перевести систему (8.5) с помощью ограниченного управления $u(t) \in U_N^{pc}$, $t \in [\tau, t^*]$. Это эквивалентно решению следующей задачи оптимального управления

$$\begin{aligned} \rho(\tau) = \min \rho, \quad \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = x_0^*(\tau), \\ x(t^*) &\in X_\rho^*, \quad u(t) \in U_N^{pc}, \quad t \in [\tau, t^*]. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Если в процессе решения задачи (9.1) получено неравенство $\rho(\tau) \leq 0$, то $\tau = \tau_*$ и в этот момент осуществляется переход на вторую стадию.

Вторую задачу оптимального управления (при $\rho(\tau) > 0$), которую оптимальный регулятор решает на первой стадии, запишем в виде

$$\begin{aligned} c_0' x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = x_0^*(\tau), \\ x(t^*) &\in X_{\rho+\varepsilon}^*, \quad u(t) \in U_N^{pc}, \quad t \in [\tau, t^*], \end{aligned} \quad (9.2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малое число. Задача (9.2) аналогична исходной задаче (8.5), но имеет расширенное терминальное множество, на которое можно перевести динамическую систему.

Пусть $u_{\rho+\varepsilon}^0(t|\tau)$, $t \in [\tau, t^*]$, — оптимальная программа в задаче (9.2). Тогда на систему (7.1) оптимальный регулятор подает управляющее воздействие

$$u^*(t) = u_{\rho+\varepsilon}^0(t|\tau), \quad t \in [\tau + s(\tau), \tau + h + s(\tau + h)].$$

При $\rho(t^*) > 0$ получается решение задачи о переводе системы управления в минимальную окрестность терминального множества.

10. ПРИМЕР

Для иллюстрации предложенного метода ОУ динамическими системами по неточным измерениям их выходных сигналов рассмотрим задачу ОУ четвертной моделью автомобиля (см. рис. 1, с. 21). Уравнения математической модели имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_1 x_2 + u, \quad m_2 \ddot{x}_2 = k_1 x_1 - (k_1 + k_2)x_2 + k_2 w, \quad (10.1)$$

где $u = u(t)$ — значение управляющего воздействия. Будем интерпретировать его как секундный расход топлива на создание управления в момент времени t , считая что его значение ограничено:

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in T.$$

Нужно перевести с гарантией траектории системы (10.1) на терминальные множества

$$\begin{aligned} (x_1(20), \dot{x}_1(20)) &\in X_1^* = \{(x_1, \dot{x}_1) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 0,5, |\dot{x}_1| \leq 0,5\}, \\ (x_2(20), \dot{x}_2(20)) &\in X_2^* = \{(x_2, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_2| \leq 0,2, |\dot{x}_2| \leq 0,2\} \end{aligned}$$

с минимальным общим расходом топлива:

$$J(u) = \int_0^{20} u(t) dt \rightarrow \min.$$

На рис. 5 изображены проекции на фазовые плоскости $x_1 \dot{x}_1$ и $x_2 \dot{x}_2$ траекторий системы (10.1) при отключенных управлениях. Видно, что они не достигают терминального множества.

Оптимальные управления, полученные при реализации принципа ОУ в реальном времени по неточным измерениям выходных сигналов, представлены на рис. 6.

На рис. 7 изображены проекции оптимальных траекторий на фазовые плоскости $x_1 \dot{x}_1$ и $x_2 \dot{x}_2$.

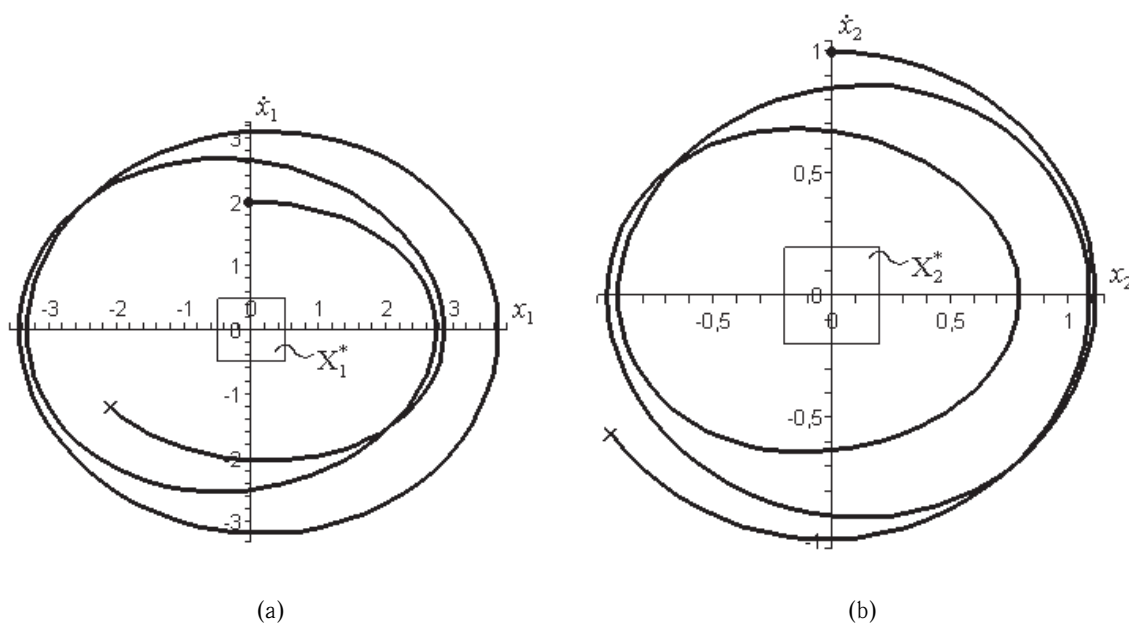


Рис. 5

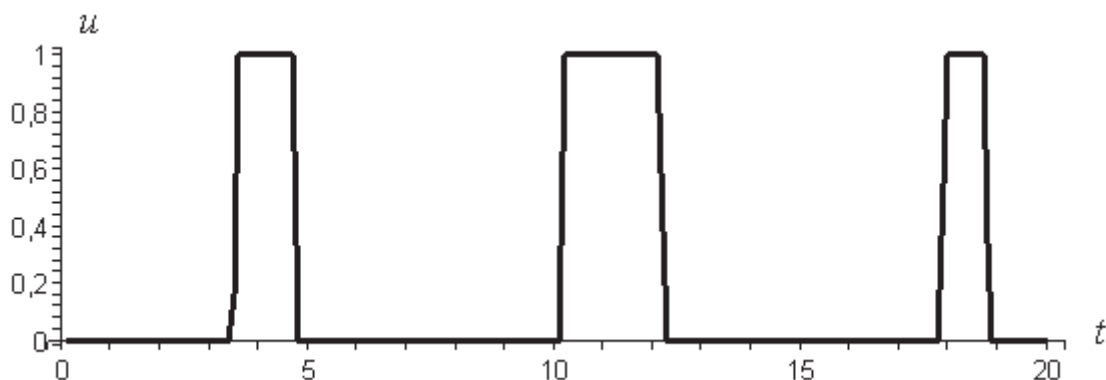


Рис. 6

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2000. — 40, № 6. — С. 838–859.
2. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2004. — 44, № 2. — С. 263–284.
3. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Союзные задачи управления, наблюдения и идентификации// Докл. АН БССР. — 1990. — 34, № 9. — С. 777–780.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принципы оптимального управления// Докл. НАН Беларуси. — 2004. — 1. — С. 15–18.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Дмитрук Н. М. Оптимальное наблюдение за нестационарными динамическими системами// Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2002. — 2. — С. 35–46.
7. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Павленок Н. С. Оптимизация динамических систем в классе дискретных управлений конечной степени// Изв. вузов, сер. мат. — 2003. — 12. — С. 3–30.

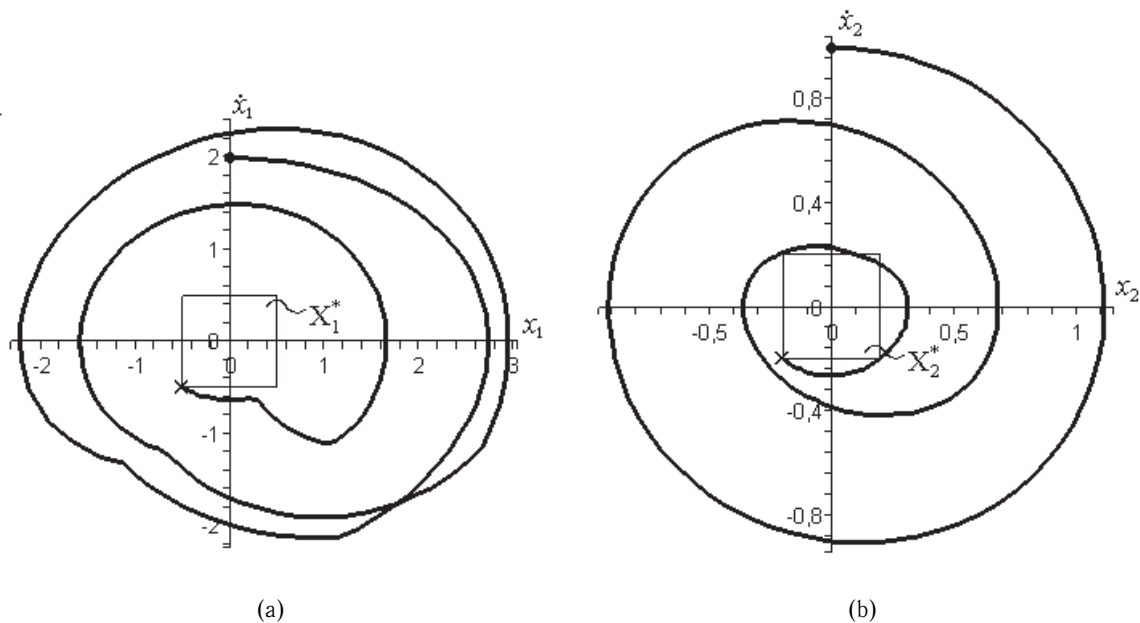


Рис. 7

8. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Павленок Н. С. Оптимизация динамических систем с помощью динамических регуляторов// Автомат. телемех. — 2004. — 5. — С. 8–28.
9. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи. — Минск: Университетское, 1984.
10. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. — М.: Мир, 1985.
11. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. — М.: Прогресс, 1966.
12. Калман Р. Об общей теории систем управления// Тр. I Междунар. конгр. Междунар. федерации по автоматическому управлению (ИФАК)/ М.: Изд-во АН СССР, 1961. — 1. — С. 521–547.
13. Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 1964. — 28, № 1. — С. 3–14.
14. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977.
15. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. I// Автомат. телемех. — 1960. — 21, №4. — С. 661–665.
16. Понтрягин Л. С. Принцип максимума. — М.: Фонд математического образования и просвещения, 1998.
17. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.
18. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
19. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. — М.: Физматгиз, 1969.
20. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — М.: Наука, 1988.
21. Gabasov R., Kirillova F. M. Optimal online control with delays// Mem. Differ. Equations Math. Phys. — 2004. 31. — С. 35–52.
22. Schweppe F. C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs// IEEE Trans. Automat. Control. — 1968. — AC-13, № 1.

E-mail: kirill@nsys.by

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ. ЧАСТЬ I

© 2005 г. П. ВАРАЙЯ, А. Б. КУРЖАНСКИЙ

Аннотация. Статья представляет собой первую часть обзора, посвященного применению эллипсоидальных методов к решению задач управления. В ней рассматриваются системы с исходной линейной структурой.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	34
1. Линейные системы. Эллипсоидальные ограничения	35
2. Задача достижимости	37
3. Эллипсоидальные аппроксимации множеств достижимости	40
4. Рекуррентные соотношения	42
5. Эволюция аппроксимирующих эллипсоидов	47
6. Трубки достижимости	50
7. Пример 1	52
8. Множества достижимости. Внутренние аппроксимации	54
9. Трубки достижимости. Рекуррентные соотношения	57
10. Пример 2	59
11. Достижимость в течение промежутка	61
12. Задача разрешимости. Уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана	63
13. Решение уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана для линейно-выпуклых систем	65
14. Принцип сравнения для уравнений Гамильтона—Якоби—Беллмана. Приближенные оценки решений	67
15. Области разрешимости. Решение задачи синтеза управлений	69
Список литературы	71

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья представляет собой первую часть обзора, посвященного применению эллипсоидальных методов к решению задач управления. В ней рассматриваются системы с исходной линейной структурой. Теория таких систем хорошо известна и подробно разработана (см, например, [6, 17, 23]). Однако среди важных вопросов, порождаемых при ее рассмотрении, следует выделить проблему решения задач до конца путем реализации эффективных вычислительных процедур. Последнее в особенности относится к задачам, решение которых требует рассмотрения *многозначных функций и трубок траекторий*. Таковыми являются задачи о построении областей достижимости, об управлении в условиях неопределенности, о гарантированном оценивании при возмущениях, не имеющих статистического описания и управлении в условиях неполной информации. Немало мотиваций подает и рассмотрение новых классов сложных систем. При этом особенно важны методы, позволяющие за ограниченное время рассматривать *системы высокой размерности*. В связи со сказанным к решению проблем применимы не любые подходы, а методы, допускающие эффективно реализуемую алгоритмизацию, распараллеливание и т. д.

Среди средств, претендующих на успешное использование в перечисленных областях, следует выделить эллипсоидальные методы, нашедшие различные воплощения и сравнительно широкое внимание [8, 16, 18, 24, 27, 35]. В настоящей первой части предлагаемого обзора рассматриваются системы, функционирующие в отсутствие неопределенности. Приводятся методы представления трубок траекторий управляемых систем при помощи параметризованных семейств эллипсоидальных трубок, позволяющих получить сколь угодно точные внешние и внутренние аппроксимации искомым многозначным функциям соответственно за счет использования пересечений и объединений конечного числа таких трубок. Устремляя подходящим образом число аппроксимирующих эллипсоидальных трубок к бесконечности, удастся достичь точных решений. В данной части обзора рассматривается построение прямых и попятных многозначных траекторий областей достижимости (взятых для заданных моментов времени или вычисленных в течение предписанных интервалов). Указаны пути построения внешних и внутренних эллипсоидальных аппроксимаций в прямом и попятном времени. Предложенные алгоритмы являются рекуррентными. Они не требуют пересчета заново для каждого нового момента времени. Структура предлагаемых решений также допускает их естественное распараллеливание. Данная часть опирается на [27, 29].

1. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. ЭЛЛИпсоиДАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Рассмотрим модель, описываемую *линейной управляемой системой*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + f(t), \quad (1.1)$$

где вектор $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $u \in \mathbb{R}^p$ — *управление*, $f(t) \in \mathbb{R}^n$ — *возмущение*, обусловленное влиянием внешних факторов. Матричные функции $A(t)$ размерности $n \times n$ и $B(t)$ размерности $n \times p$ полагаются непрерывными на всем рассматриваемом промежутке времени $T = \{t \in \mathbb{R} : t_0 \leq t \leq t_1\}$, вектор-функции $u(t)$, $f(t)$ *интегрируемы по Лебегу* при $t \in T$. Отмеченные условия гарантируют существование и единственность решения системы (1.1) для каждой *начальной позиции* $\{t_0, x^0\}$, $x(t_0) = x^0$.

Значения вектора управления $u(t)$ стеснены *жесткими (геометрическими) ограничениями* для почти всех моментов времени $t \in T$, а именно

$$u \in Q(t), \quad (1.2)$$

где $Q(t) : T \rightarrow \text{conv } \mathbb{R}^n$ — непрерывная многозначная функция. Здесь и далее символ $\text{conv } \mathbb{R}^n$ означает *замкнутое ограниченное (компактное) множество*, символ $\text{comp } \mathbb{R}^n$ — *выпуклое компактное множество* в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрев всевозможные функции времени $u(t)$, $t \in T$, — *программные управления*, удовлетворяющие ограничениям (1.2), придем к *дифференциальному включению*

$$\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + B(t)Q(t) + f(t) \quad (1.3)$$

при начальном условии

$$x^0 = x(t_0) \in X^0,$$

где $X^0 \in \text{comp } \mathbb{R}^n$.

Класс программных управлений — функций $u(\cdot) = u(t)$, $t \in T$, измеримых по Лебегу при $t \in T$ и стесненных ограничениями (1.2), — будем обозначать через U_Q^O .

Условия существования и представление решений системы дифференциальных уравнений (1.1) и дифференциального включения (1.3) хорошо известны (см. [5, 10, 11]).

Как известно, решение системы (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ может быть представлено в виде

$$x(t) = G(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t G(t, s)(B(s)u(s) + f(s))ds, \quad (1.4)$$

где $G(t, s)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения (1.1). Матрица $G(t, s)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial s} G(t, s) = -G(t, s)A(s), \quad G(t, t) = I, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, s) = A(t)G(t, s), \quad G(s, s) = I. \quad (1.6)$$

Формула (1.4) может быть проверена прямой подстановкой.

Систему уравнений (1.1) и дифференциальное включение (1.3) можно упростить, применяя преобразование

$$z(t) = G(t_1, t)x(t). \quad (1.7)$$

Подставляя $z(t)$ в (1.1) вместо $x(t)$, получим уравнение

$$\dot{z}(t) = G(t_1, t)B(t)u(t) + G(t_1, t)f(t) \quad (1.8)$$

с начальным условием

$$z^0 = z(t_0) = G(t_1, t_0)x^0. \quad (1.9)$$

Аналогично, подставляя $z(t)$ вместо $x(t)$ в (1.3), получим уравнение

$$\dot{z}(t) \in G(t_1, t)B(t)\mathcal{Q}(t) + G(t_1, t)C(t)f(t) \quad (1.10)$$

с тем же начальным условием (1.9).

Очевидно, что между решениями $x(t)$ и $z(t)$ уравнений (1.1) и (1.3) с начальным условием (1.9) имеет место взаимно однозначное соответствие (1.7).

Следовательно, вместо систем (1.1) и (1.3) с ограничением (1.2) и начальным условием (1.9) можно рассматривать систему уравнений

$$\dot{z}(t) = B(t)w(t) + h(t), \quad z(t_0) = G(t_1, t_0)x^0 \quad (1.11)$$

с ограничением

$$w(t) \in \mathcal{Q}_0(t), \quad (1.12)$$

а также дифференциальное включение

$$\dot{z}(t) \in \mathcal{Q}_0(t) + h(t), \quad (1.13)$$

где

$$w(t) = G(t_1, t)u(t), \quad h(t) = G(t_1, t)f(t), \quad \mathcal{Q}_0(t) = G(t_1, t)\mathcal{Q}(t),$$

многозначная функция $\mathcal{Q}_0(t)$ полагается непрерывной. Следовательно, без потери общности, далее можно перейти от системы (1.1)–(1.2) к системе (1.11)–(1.12). При этом функция $\mathcal{Q}_0(t)$ будет зависеть от времени. Другими словами, без потери общности, можно рассматривать систему (1.1)–(1.2) с $A(t) \equiv 0$.

Следует подчеркнуть, что подстановка (1.9) позволяет рассматривать систему при $A(t) \equiv 0$ лишь в случае $t \leq t_1$. Аналогичные результаты могут быть получены также подстановкой

$$z(t) = G(t_0, t)x(t).$$

Тогда рассматриваемая система может быть без потери общности снова взята с матрицей $A(t) \equiv 0$, но в этом случае следует ограничиться промежутком $t \geq t_0$.

Ниже, в отдельных случаях, будем рассматривать системы при $A(t) \equiv 0$, имея целью продемонстрировать основные приемы, не перегружая текст громоздкими выражениями.

Читатель может заметить, что существует преобразование, переводящее заданную линейную однородную систему уравнений

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1.14)$$

в любую другую линейную систему

$$\dot{z} = A^0(t)z \quad (1.15)$$

с заранее заданной матрицей $A^0(t)$ из того же класса, что и $A(t)$.

Далее будем предполагать, что ограничения на управление u и начальное условие x^0 представляют собой эллипсоиды. Положим

$$\mathcal{E}(q(t), Q(t)) = \{u : (u - q(t), Q^{-1}(t)(u - q(t))) \leq 1\}, \quad (1.16)$$

$$\mathcal{X}^0 = \{x : (x - x^0, (X^0)^{-1}(x - x^0)) \leq 1\}, \quad (1.17)$$

где непрерывная функция $q(t)$, вектор x^0 , а также положительно определенные матрицы $Q'(t) = Q(t) > 0$ и $X^{0'} = X^0 > 0$ заданы. Здесь соответствующие эллипсоиды полагаются *невыврожденными*.

Тогда в терминах включений имеем

$$u \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)) = \mathcal{Q}(t), \quad (1.18)$$

$$x(t_0) = x^{(0)} \in \mathcal{E}(x^0, X^0) = \mathcal{X}^0, \quad (1.19)$$

или, используя понятие *опорной функции* $\rho(l|\mathcal{Q}) = \max\{(l, u) | u \in \mathcal{Q}\}$,

$$(l, u) \leq (l, q(t)) + (l, Q(t)l)^{1/2} = \rho(l|\mathcal{E}(q, Q)), \quad (1.20)$$

$$(l, x^0) \leq (l, x^0) + (l, X^0 l)^{1/2} = \rho(l|\mathcal{X}^0) \quad (1.21)$$

для всех $l \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что ограничения в форме (1.20), (1.21) допускают случай *вырожденных* матриц $Q(t) \geq 0$, $X^0 \geq 0$ (см. [2]). В этом случае эллипсоиды $\mathcal{E}(q(t), Q(t))$ или $\mathcal{E}(x^0, X^0)$ превращаются в *эллиптические цилиндры*.

Перейдем к обсуждению задачи о достижимости: описанию множества состояний, которые могут быть достигнуты за конечное время в силу системы (1.1), (1.2) или (1.3), за счет выбора всех возможных управлений (см. [7, 22, 31, 32]). Поскольку принято $q(t) \neq 0$, в данной части полагаем $f(t) \equiv 0$. Случай ненулевой функции $f(t)$ будет важен далее, при рассмотрении неопределенных возмущений.

2. ЗАДАЧА ДОСТИЖИМОСТИ

В этом разделе будем полагать, что многозначная функция $\mathcal{Q}(t)$ и начальное множество $\mathcal{X}^0$ суть невырожденные эллипсоиды, а именно,

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad \mathcal{X}^0 = \mathcal{E}(x^0, X^0).$$

Определение 2.1. Пусть дана начальная позиция $\{t_0, x^{(0)}\}$. Множеством достижимости $\mathcal{X}(\tau, t_0, x^{(0)})$ в момент времени $\tau > t_0$ из позиции $\{t_0, x^{(0)}\}$ называют совокупность

$$\mathcal{X}[\tau] = \mathcal{X}(\tau, t_0, x^{(0)}) = \{x[\tau]\}$$

всех состояний $x[\tau]$, которых может достичь при $t = \tau$ траектория $x[t] = x(t, t_0, x^{(0)})$ системы (1.1), выпущенная из начальной позиции $\{t_0, x^{(0)}\}$, при всех возможных управлениях u , удовлетворяющих условию (1.2).

Многозначную функцию $\tau \mapsto \mathcal{X}[\tau] = \mathcal{X}(\tau, t_0, x^{(0)})$ называют *трубкой достижимости*.

Множество достижимости $\mathcal{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0)$ в момент времени τ из начального множества $\mathcal{X}^0 = \mathcal{X}(t_0)$ есть объединение

$$\mathcal{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0) = \bigcup \{\mathcal{X}(\tau, t_0, x^{(0)}) \mid x^{(0)} \in \mathcal{X}^0\}.$$

Многозначную функцию $\tau \mapsto \mathcal{X}[\tau] = \mathcal{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0)$, $\tau \geq t_0$, называют *трубкой достижимости из начального множества $\mathcal{X}^0$* .

Следующие свойства могут быть проверены непосредственно.

Лемма 2.1 (см. [9]). Многозначное отображение $\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}^0)$ удовлетворяет полугрупповому свойству

$$\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}^0) = \mathcal{X}(t, \tau, \mathcal{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0)). \quad (2.1)$$

Очевидно, множество $\mathcal{X}[\tau]$ может быть получено как сечение $\mathcal{X}[\tau] = \mathcal{X}(\tau, t_0, \mathcal{E}(x^0, X^0))$ в момент $t = \tau$ трубки достижимости $\mathcal{X}(\cdot) = \{\mathcal{X}[t] : t \geq t_0\}$ дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + \mathcal{E}(q(t), B(t)Q(t)B'(t)), \quad x^0 \in \mathcal{E}(x^0, X^0). \quad (2.2)$$

Множество достижимости $\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{E}(x^0, X^0))$ может быть также представлено при помощи многозначного «интеграла Ауманна» [13].

Лемма 2.2. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{E}(x^0, X^0)) = x^*(t) + G(t, t_0)\mathcal{E}(0, X^0) + \int_{t_0}^t G(t, s)\mathcal{E}(0, B(s)Q(s)B'(s))ds, \quad (2.3)$$

где

$$x^*(t) = G(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t G(t, s)B(s)q(s)ds. \quad (2.4)$$

Применяя стандартные преобразования, можно проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 2.3. *Опорная функция множества $\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{E}(x^0, X^0))$ представима в виде*

$$\begin{aligned} \rho(l|\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{E}(x^0, X^0))) &= (l, x^*(t)) + (l, G(t, t_0)X^0G'(t, t_0)l)^{1/2} + \\ &+ \int_{t_0}^t (l, G(t, s)B(s)Q(s)B'(s)G'(t, s)l)^{1/2}ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Прямым следствием последнего утверждения является следующий факт.

Лемма 2.4. *Множество достижимости $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{E}(x^0, X^0))$ есть выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, изменяющийся непрерывно во времени.*

Указанное свойство множества $\mathcal{X}[t]$ понимается здесь как непрерывность по времени его опорной функции $\rho(l|\mathcal{X}[t])$, равномерную по l : $(l, l) \leq 1$. Для любой эллипсоидальнозначной функции $\mathcal{E}(q(t), Q(t))$ непрерывность по времени означает, что вектор центра $q(t)$ и «матрица конфигурации» эллипсоида $Q(t)$ непрерывны.

Определение 2.2. Систему (1.1) с неограниченным управлением $u(t)$ называют *вполне управляемой* (см. [6, 23, 31]), если для любых двух векторов $x^{(0)}, x^{(1)}$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и любых двух чисел σ, τ при $\sigma < \tau$ существует программное управление $u(\cdot)$, переводящее систему из $x^{(0)} = x(\sigma)$ в $x^{(1)} = x(\tau)$.

Хорошо известно следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Система (1.1) вполне управляема в том и только том случае, когда квадратичная форма*

$$W(\tau, \sigma) = \int_{\sigma}^{\tau} (l, G(\tau, s)B(s)B'(s)G'(\tau, s)l)ds, \quad l \in \mathbb{R}^n,$$

положительно определена для любых $\tau > \sigma$.

Граница $\partial\mathcal{X}[\tau]$ множества $\mathcal{X}[\tau]$ может быть определена как $\partial\mathcal{X}[\tau] = \mathcal{X}[\tau] \setminus \text{int } \mathcal{X}[\tau]$. В случае, когда условие управляемости выполнено, множество $\mathcal{X}[\tau]$ имеет непустую внутренность $\text{int } \mathcal{X}[\tau] \neq \emptyset$ для любого $\tau > t_0$.

Далее принято следующее естественное допущение.

Предположение 2.1. *Система (1.1) является вполне управляемой.*

Точки на границе множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ обладают важными свойствами. Именно, пусть $x^* \in \partial\mathcal{X}[\tau]$. В этом случае существует такой *опорный вектор* l^* , что

$$(l^*, x^*) = \rho(l^* | \mathcal{X}[\tau]) = \max\{(l^*, x) \mid x \in \mathcal{X}[\tau]\}. \quad (2.6)$$

Обозначим через $u = u^*(t)$ управление, переводящее систему (1.1) из начального состояния $x(t_0) = x^{(0)}$ в $x(\tau) = x^*$.

Справедлива следующая теорема (см. [6, 12, 31]).

Теорема 2.2. Пусть задано состояние $x(\tau) = x^*$, удовлетворяющее условию $x^* \in \partial\mathcal{X}[\tau]$, причем l^* — опорный вектор ко множеству $\mathcal{X}[\tau]$ в точке x^* . Тогда управление $u = u^*(t)$ и начальное состояние $x(t_0) = x^{(0)}$, определяющие единственную траекторию $x^*(t)$, соединяющую точки $x^{(0)} = x(t_0)$ и $x^* = x^*(\tau)$, при условии (2.6), удовлетворяют следующему «принципу максимума» для управления:

$$\begin{aligned} (l^*, G(\tau, t)B(t)u^*(t)) &= \max \left\{ (l^*, G(\tau, t)B(t)u) \mid u \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \right\} = \\ &= (l^*, G(\tau, t)B(t)q(t)) + (l^*, G(\tau, t)B(t)Q(t)B'(t)G'(\tau, t)l^*)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

при почти всех $t \in [t_0, \tau]$, и «условию максимума» для начального состояния:

$$\begin{aligned} (l^*, G(\tau, t_0)x^{(0)}) &= \max \left\{ (l^*, x) \mid x \in G(\tau, t_0)\mathcal{E}(x^0, X^0) \right\} = \\ &= (l^*, G(\tau, t_0)x^0) + (l^*, G(\tau, t_0)X^0G(\tau, t_0)l^*)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Произведение $l'G'(\tau, t) = s[t] = s(t, \tau, l)$ может быть представлено как попятное решение «сопряженной системы»

$$\dot{s} = -sA(t), \quad s[\tau] = l',$$

где s — вектор-строка.

Замечание 2.1. Из эллипсоидальности ограничений на $u(t)$, x_0 вытекает единственность оптимального управления $u^*(t)$ и траектории $x^*(t)$.

Более сложным является следующее образование.

Определение 2.3. Множеством достижимости $\mathbf{X}(\beta, \alpha, t_0, \mathcal{X}^0)$ из начальной позиции $\{t_0, \mathcal{X}^0\}$ в течение интервала времени $[\alpha, \beta]$, $\alpha \geq t_0$, $\beta \leq t_1$, называется объединение

$$\mathbf{X}(\beta, \alpha, t_0, \mathcal{X}^0) = \bigcup \{X(t, t_0, \mathcal{X}^0) \mid t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Таким образом, $\mathbf{X}(\beta, \alpha, t_0, \mathcal{X}^0)$ — множество точек, достижимых из заданной позиции $\{t_0, \mathcal{X}^0\}$, $x^0 \in \mathcal{X}^0$, в некоторый момент времени $\tau \in [\alpha, \beta]$ под действием некоторого управления $u(t)$, удовлетворяющего ограничению (1.2).

Среди подобных образований часто приходится иметь дело со множествами вида $\mathbf{X}(\tau, t_0, t_0, \mathcal{X}^0) = \mathbf{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0) = \mathbf{X}[\tau]$, являющимися объединением множеств достижимости $\mathcal{X}[t]$ по всем $t \in [t_0, \tau]$.

В условиях рассматриваемой задачи множества $\mathcal{X}[\tau]$, $\mathbf{X}[\tau]$ являются *компактами*, а трубки

$$\text{graph } X[\cdot] = \{t, x : x \in X[t], t \in [t_0, \tau]\}, \quad \text{graph } \mathbf{X}[\cdot] = \{t, x : x \in \mathbf{X}[t], t \in [t_0, \tau]\}$$

— ограниченными.

Можно непосредственно проверить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.5. Многозначное отображение $\mathbf{X}(t, t_0, \mathcal{X}^0)$ удовлетворяет полугрупповому свойству

$$\mathbf{X}(t, t_0, \mathcal{X}^0) = \mathbf{X}(t, \tau, \mathbf{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0)), \quad (2.9)$$

где $t_0 \leq \tau \leq t$.

Лемма 2.6. Для автономной системы (1.1) множество $\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}^0) = \mathcal{X}(t - t_0, \mathcal{X}^0)$ зависит лишь от $t - t_0$.

Точное вычисление множеств достижимости, особенно в случае больших размерностей, оказывается весьма громоздким. Среди эффективных методов решения подобных задач следует выделить те, которые опираются на эллипсоидальные приближения.

3. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ

Заметим, что хотя ограничения на начальное множество $\mathcal{X}^0 = \mathcal{E}(x^0, X^0)$ и управление $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{E}(q(t), Q(t))$ эллипсоидальны, множество достижимости $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{E}(x^0, X^0))$ в общем случае не будет эллипсоидом, так как уже сумма двух эллипсоидов $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, в общем случае эллипсоидом не является.

Как отмечено в [27], множество достижимости $\mathcal{X}[t]$ можно аппроксимировать эллипсоидами как снаружи, так и изнутри, построив эллипсоиды $\mathcal{E}_-$ и $\mathcal{E}_+$ так, что $\mathcal{E}_- \subseteq \mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{E}_+$.

Определение 3.1. Внешняя аппроксимация $\mathcal{E}_+$ множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ называется *тугой*, если существует такой вектор $l \in \mathbb{R}^n$, что

$$\rho(\pm l | \mathcal{E}_+) = \rho(\pm l | \mathcal{X}[t]).$$

Последнее определение выполнено для множеств достижимости, рассматриваемых в настоящей статье, а именно, для выпуклых компактов, симметричных относительно центра $x^*(t)$ (см. уравнение (3.1) ниже). Однако оно не позволяет выделить единственный тугий эллипсоид при заданном направлении l . Можно получить более точное определение тугих эллипсоидов, если выбирать их не из всех возможных, а из некоторого класса эллипсоидальных множеств, не совпадающего со всеми возможными.

Определение 3.2. Назовем эллипсоид $\mathcal{E}_+$ *тугим* в классе $\mathbf{E}_+$, если для любого эллипсоида из этого класса $\mathcal{E} \in \mathbf{E}_+$ включение $\mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_+$ влечет совпадение $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+$.

Сначала рассмотрим внешнюю оценку. Класс внешних аппроксимирующих эллипсоидов $\mathbf{E} = \{\mathcal{E}_+\}$ определим следующим образом.

Определение 3.3. Класс $\mathbf{E}_+ = \{\mathcal{E}_+\}$ состоит из всех эллипсоидов, представимых в виде $\mathcal{E}_+[t] = \mathcal{E}(x^*, X_+[t])$, где $x^*(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\dot{x}^* = A(t)x^* + B(t)q(t), \quad x^*(t_0) = x^0, \quad t \geq t_0, \quad (3.1)$$

и

$$X_+[t] = X_+(t|p(\cdot)) = \left(\int_{t_0}^t p(s)ds + p_0(t) \right) \times \\ \times \left(\int_{t_0}^t p^{-1}(s)G(t,s)B(s)Q(s)B(s)G'(t,s)ds + p_0^{-1}(t)X(t,t_0)X^0X'(t,t_0) \right), \quad (3.2)$$

где X^0 , $Q(s)$ — положительно определенные матрицы, $s \in [t_0, t]$, причем функции $Q(s)$ и $q(t)$ непрерывны, $p(s) > 0$ интегрируема и $p_0(t) > 0$.

В частности, это означает, что если эллипсоид $\mathcal{E}(p^0, P^0) \supseteq \mathcal{X}[t]$ тугий в классе $\mathbf{E}_+$, то не существует других эллипсоидов вида $\mathcal{E}(p^0, kP^0)$, $k < 1$, для которых справедливо включение $\mathcal{X}[t] \subset \mathcal{E}(p^0, kP^0) \subset \mathcal{E}(p^0, P^0)$ (эллипсоид $\mathcal{E}(p^0, P^0)$ *касается* множества $\mathcal{X}[t]$).

Определение 3.4. Будем говорить, что внешний эллипсоид *тугой*, если он тугий в классе $\mathbf{E}_+$.

Далее нам фактически придется рассматривать эллипсоиды $\mathcal{E}_+$ лишь из класса $\mathbf{E}_+$. Заметим сразу, что для задач текущего раздела определение 3.1 вытекает из определения 3.2, которое на самом деле повторяет определение 3.1, но лишь в классе $\mathbf{E}_+$. Однако теперь в классе $\mathbf{E}_+$ при заданном направлении l тугий эллипсоид будет уже единственным.

Класс $\mathbf{E}_+$, хотя и не включает всех возможных эллипсоидов, оказывается достаточно богатым, чтобы построить эффективную аппроксимирующую схему. В частности, все схемы построения

внешних эллипсоидальных оценок, рассматриваемые в [18, 27], не выходят за рамки класса $\mathbf{E}_+$. Рассмотрение класса $\mathbf{E}_+$ оправдывается следующим утверждением.

Теорема 3.1. *Справедливо включение*

$$\mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t|p(\cdot))) \quad \forall p(s) > 0, \quad t_0 \leq s \leq t. \quad (3.3)$$

Более того, имеет место равенство

$$\mathcal{X}[t] = \bigcap \left\{ \mathcal{E}(x^*(t), X_+(t|p(\cdot))|p(s)) > 0, \quad s \in [t_0, t] \right\}. \quad (3.4)$$

Соотношения (3.3), (3.4) справедливы для всех непрерывных положительных функций $p(s)$. Эти свойства вытекают из результатов [27, пп. 2.1, 2.7], содержащих элементы *эллипсоидального исчисления*. Отсюда вытекает, в частности, следующее характеристическое свойство тугих эллипсоидов.

Теорема 3.2. *Пусть момент τ фиксирован. Тогда для тугих внешних эллипсоидов $\mathcal{E}_+[\tau] = \mathcal{E}(x^*(\tau), X_+[\tau])$ из класса $\mathcal{E}_+[\tau] \in \mathbf{E}_+$ функции p и p_0 могут быть представлены в виде*

$$p(s) = (l, G(\tau, s)B(s)Q(s)B'(s)G'(\tau, s)l)^{1/2}, \quad t_0 \leq s \leq \tau, \quad (3.5)$$

$$p_0(\tau) = (l, G(\tau, t_0)X^0G(\tau, t_0)l)^{1/2}, \quad (3.6)$$

где l — заданный вектор. Каждый эллипсоид $\mathcal{E}_+[\tau]$ касается $\mathcal{X}[\tau]$ в точке

$$\{x^* : (l, x^*) = \rho(l|\mathcal{X}[\tau])\},$$

так что

$$\rho(l|\mathcal{X}[\tau]) = (l, x^*(\tau)) + (l, X_+[\tau]l)^{1/2} = \rho(l|\mathcal{E}(x^*(\tau), X_+[\tau])).$$

Заметим, что для использования предыдущих результатов необходимо оценить интеграл в (3.2) для каждого момента времени τ и каждого вектора l . Если вычислительную нагрузку (объем вычислений) для каждой такой оценки (3.2) принять за C и если оценивать трубку достижимости согласно (3.3) для N моментов времени τ и L векторов l , то суммарная вычислительная нагрузка составит CNL . Решение следующей задачи позволит понизить эту нагрузку до CL .

Задача 3.1. Пусть дана непрерывно дифференцируемая векторная функция $l^*(t)$ такая, что $(l^*(t), l^*(t)) = 1$. Требуется найти внешний эллипсоид $\mathcal{E}_+^*[t] \supseteq \mathcal{X}[t]$, который для любого $t \geq t_0$ обеспечил бы равенство

$$\rho(l^*(t)|\mathcal{X}[t]) = \rho(l^*(t)|\mathcal{E}_+^*[t]) = (l^*(t), x^*(t)), \quad (3.7)$$

чтобы опорная гиперплоскость ко множеству $\mathcal{X}[t]$ в направлении $l^*(t)$, а именно, плоскость $(x - x^*(t), l^*(t)) = 0$, опорная к $\mathcal{X}[t]$ в точке $x^*(t)$, была бы также опорной и для эллипсоида $\mathcal{E}_+^*[t]$, касаясь его в той же точке.

Данная задача разрешима в классе $\mathbf{E}_+$. Для того, чтобы ее решить, используем сначала теорему 3.1. Заметим сразу, что функция p , используемая в качестве параметризатора (3.5), (3.6) в (3.2), теперь будет зависеть двух переменных s, t , так как соотношения (3.7) требуется соблюсти для всех $t \geq t_0$.

Теорема 3.3. *При заданном векторе $l(t) = l^*(t)$ решение задачи 3.1 представляет собой эллипсоид $\mathcal{E}_+^*[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X_+^*[t])$, где*

$$\begin{aligned} X_+^*[t] = & \left(\int_{t_0}^t p_t^*(s) ds + p_0^*(t) \right) \times \\ & \times \left(\int_{t_0}^t (p_t^*(s))^{-1} G(t, s)B(s)Q(s)B'(s)G'(t, s) ds + p_0^{*-1}(t)G(t, t_0)X^0G'(t, t_0) \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

и

$$\begin{aligned} p_t^*(s) &= (l^*(t), G(t, s)B(s)Q(s)B'(s)G'(t, s)l^*(t))^{1/2}, \\ p_0^*(t) &= (l^*(t_0), G(t, t_0)X^0G'(t, t_0)l^*(t_0))^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Сформулированное утверждение доказывается непосредственной проверкой (а именно, подстановкой (3.9) в (3.8) и сравнением с результатами (2.5), (3.7)). При этом соотношения (3.8), (3.9) придется пересчитывать заново для каждого нового t . С вычислительной точки зрения может оказаться более удобным использовать для (3.8), (3.9) рекуррентные соотношения, описываемые дифференциальными уравнениями.

Отметим, что во всех эллипсоидальных оценках, рассматриваемых в настоящей работе, аппроксимирующие эллипсоиды имеют одинаковые центры $x^*(t)$ из формулы (3.1). Поэтому приводимые далее рассуждения будут касаться только матриц $X_+[t]$, $X_+^*[t]$ этих эллипсоидов.

4. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Начнем с частного случая.

Предположение 4.1. Функция $l^*(t)$ имеет вид $l^*(t) = G'(t_0, t)l$, где вектор $l \in \mathbb{R}^n$ задан. Для автономного случая $l^*(t) = e^{-A'(t-t_0)}l$.

Такие кривые $l(t)$ в дальнейшем будут называться «хорошими». При выполнении последнего предположения вектор $l^*(t)$ может быть представлен как решение уравнения

$$\dot{l}^* = -A'(t)l^*, \quad l^*(t_0) = l,$$

сопряженного к однородной части уравнения (1.1).

Тогда $p_t^*(s)$, $p_0^*(t)$, $X_+^*[t]$ из (3.8), (3.9) преобразуются к виду

$$p_t^*(s) = (l, G(t_0, s)B(s)Q(s)B'(s)G'(t_0, s)l)^{1/2} = p^*(s), \quad p_0^*(t) = (l, X^0l)^{1/2} = p_0^*, \quad (4.1)$$

$$X_+^*[t] = G(t, t_0)X_+(t)G'(t, t_0), \quad (4.2)$$

$$X_+[t] = \left(\int_{t_0}^t p^*(s)ds + p_0^* \right) \Psi(t), \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \int_{t_0}^t (l, G(t_0, s)B(s)Q(s)B'(s)G'(t_0, s)l)^{-1/2} G(t_0, s)B(s)Q(s)B'(s)G'(t_0, s)ds + \\ &\quad + (l, X^0l)^{-1/2} X^0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В этом частном случае $p_t^*(s)$ не зависит от t ($p_{t'}^*(s) = p_{t''}^*(s)$ для $t' \neq t''$), и нижний индекс t может быть опущен.

Прямое дифференцирование $X_+[t]$ дает

$$\dot{X}_+[t] = \pi^*(t)X_+[t] + (\pi^*)^{-1}(t)G(t_0, t)B(t)Q(t)B'(t)G'(t_0, t), \quad X_+[t_0] = X^0, \quad (4.5)$$

где

$$\pi^*(t) = p^*(t) \left(\int_{t_0}^t p^*(s)ds + p_0^* \right)^{-1}.$$

Вычисляя

$$(l, X_+[t]l) = \left(\int_{t_0}^t p^*(s)ds + p_0^* \right) (l, \Psi(t)l) = \left(\int_{t_0}^t p^*(s)ds + p_0^* \right)^2,$$

находим

$$\begin{aligned}\pi^*(t) &= (l, G(t_0, t)B(t)Q(t)B'(t)G'(t_0, t)l)^{1/2} (l, X_+[t]l)^{-1/2} = \\ &= (l(t), B(t)Q(t)B'(t)G'(t_0, t)l)^{1/2} (L, X_+[t]l)^{-1/2}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Для того чтобы перейти к матричной функции $X_+^*[t]$, используем (4.2). Получим

$$\dot{X}_+^*[t] = A(t)G(t, t_0)X_+[t]G'(t, t_0) + G(t, t_0)X_+[t]G'(t, t_0)A'(t) + G(t, t_0)\dot{X}_+[t]G'(t, t_0).$$

После подстановки из (4.5) будем иметь

$$\dot{X}_+^* = A(t)X_+^* + X_+^*A'(t) + \pi^*(t)X_+^* + \pi^{*-1}(t)B(t)Q(t)B'(t), \quad X^*(t_0) = X^0. \quad (4.7)$$

Далее обозначим эллипсоид, построенный при помощи матрицы $X_+^*(t)$, полученной из уравнений (4.7), (4.6), через $E(x^*(t), X_+^*(t))$.

Суммируя последние результаты, приходим к следующему выводу.

Теорема 4.1. При выполнении предположения 4.1 решение задачи 3.1 дается эллипсоидом $E_+[t] = E(x^*(t), X_+^*[t])$, где $x^*(t)$ удовлетворяет уравнению (3.1), $X_+^*[t]$ — решение уравнений (4.7), (4.6).

Так как множество $X_+^*[t]$ зависит от вектора $l \in \mathbb{R}^n$, примем далее второе обозначение $X_+^*[t] = X_+^{(l)*}[t]$, используя его в тех местах, где следует подчеркнуть зависимость от l .

Теорема 4.2. Для любого $t \geq t_0$ множество достижимости $\mathcal{X}[t]$ может быть описано как пересечение

$$\mathcal{X}[t] = \bigcap \{E(x^*, X_+^*[t]_l) \mid l : (l, l) = 1\}, \quad (4.8)$$

которое здесь берется по множеству конечномерных параметров l .

Это является прямым следствием теоремы 3.1 и выбора хороших кривых для представления решений. Дифференцируя $\pi^*(t)$, по формуле (4.6), приходим к следующему результату.

Следствие 4.1. Если функция $\pi^*(t)$ дифференцируема, то она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\pi}^* = f(t)\pi^* - \pi^{*2}, \quad \pi^*(t_0) = 1, \quad (4.9)$$

где

$$f(t) = \frac{(l, G(t_0, t)(-A(t)Q(t) - Q(t)A'(t) + \dot{Q}(t))G'(t_0, t)l)}{2(l, G(t_0, t)Q(t)G'(t_0, t)l)^{1/2}}.$$

Следствие 4.2. Если $A = \text{const}$, $Q = \text{const}$ и l является собственным вектором A' с действительным собственным значением λ (т.е. $A'l = \lambda l$), то функция $f(t)$ принимает вид

$$f(t) = -\lambda(l, e^{A(t_0-t)}Q(t)e^{A'(t_0-t)}l)^{1/2}.$$

Таким образом, если $l^*(t)$ удовлетворяет предположению 4.1, то объем вычисления тугой внешней эллипсоидальной аппроксимации множества достижимости для всех t будет таким же, как и при решении дифференциального уравнения (4.7).

В общем случае, дифференцируя соотношение (3.8) для $X_+^*[t]$, получим выражение

$$\begin{aligned}\dot{X}_+^*[t] &= \left(p_t^*(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial p_t^*(s)}{\partial t} ds + \dot{p}_0^*\right) \left(\int_{t_0}^t p_t^{*-1}(s)G(t, s)Q(s)G'(t, s)ds + (p_0^*(t))^{01}G(t, t_0)X^0G'(t, t_0)\right) \\ &+ \left(\int_{t_0}^t p_t^*(s)ds + p_0^*(t)\right) \left((p_t^*(t))^{-1}Q(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial((p_t^*(s))^{-1}G(t, s)Q(s)G'(t, s))}{\partial t} ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d(G(t, t_0)p_0^*(t)G'(t, t_0))}{dt}\right),\end{aligned}$$

которое, используя обозначения

$$X_+^*[t] = \left(\int_{t_0}^t p_t^*(s) ds + p_0^*(t) \right) \left(\int_{t_0}^t (p_t^*(s))^{-1} G(t, s) Q(s) G'(t, s) ds + (p_0^*(t))^{-1} G(t, t_0) X^0 G'(t, t_0) \right),$$

$$\pi^*(t) = p_t^*(t) \left(\int_{t_0}^t p_t^*(s) ds + p_0^*(t) \right), \quad (4.10)$$

можно представить в виде

$$\dot{X}_+^* = A(t)X_+^* + X_+^*A'(t) + \pi^*(t)X_+^* + (\pi^*(t))^{-1}B(t)Q(t)B'(t) + G(t, t_0)\phi(t, l(t), B(\cdot)Q(\cdot))B'(\cdot)G'(t, t_0), \quad X_+^*(t_0) = X^0, \quad (4.11)$$

где

$$\phi(t, l(t), Q(\cdot)) = \left(\int_{t_0}^t \frac{\partial p_t^*(s)}{\partial t} ds + \dot{p}_0^*(t) \right) \left(\int_{t_0}^t (p_t^*(s))^{-1} P(t_0, s) ds + (p_0^*(t))^{-1} P_0 \right) - \left(\int_{t_0}^t p_t^*(s) ds + p_0^*(t) \right) \left(\int_{t_0}^t \frac{\partial (p_t^*(s))^{-1}}{\partial t} P(t_0, s) ds + \frac{d(p_0^*(t))^{-1}}{dt} P_0 \right),$$

$$P(t_0, s) = G(t_0, s)B(s)Q(s)B'(s)G'(t_0, s), \quad P_0 = X^0.$$

Важно заметить, что при выполнении предположения 4.1 ($l^*(t) = G'(t_0, t)l$) члены $\frac{\partial p_t^*(s)}{\partial t} = 0$, $\dot{p}_0^*(t) = 0$, так что $\phi(t, l(t), B(\cdot)Q(\cdot))B'(\cdot)G'(t, t_0) = 0$.

Напомним, что эллипсоид, построенный в общем случае с матрицей $X_+^*(t)$, взятой из уравнений (4.11), (4.10), (3.9), обозначается через $\mathcal{E}^*(x^*(t), X^*(t))$, в отличие от эллипсоида, построенного с матрицей $X_+^*(t)$, взятой из уравнений (4.7), (4.6) и обозначенного ранее $E^*[t]$.

Теорема 4.3. *Решение $\mathcal{E}^*[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X^*(t))$ задачи 3.1 дается вектор-функцией $x^*(t)$ из (3.1) и матричной функцией $X_+^*(t)$, которая удовлетворяет уравнению (4.11) с $\pi^*(t)$ из (4.10) и $p_t^*(s), p_0^*(t)$ из (3.9). При выполнении предположения 4.1 в уравнении (4.11) имеем $\phi \equiv 0$.*

В предыдущем обсуждении было отмечено, что при выполнении предположения 4.1 тугая внешняя эллипсоидальная аппроксимация $\mathcal{E}(x^*, X_+^*(t))$ определяется сравнительно несложными обыкновенными дифференциальными уравнениями (4.7). Более того, в этом случае опорные точки $x^*(t)$ для гиперплоскостей, порождаемых вектором $l(t)$, пробегает вдоль *траектории системы* (1.1), порождаемой управлением, удовлетворяющим принципу максимума (2.7) и соотношением (2.8) теоремы 2.2.

В связи со сказанным возникает следующий вопрос.

Задача 4.1. Пусть дана кривая $l(t)$, для которой опорная гиперплоскость, порождаемая векторами $l(t)$, касается множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ вдоль опорных точек $x_l(t)$, при каждом $t \geq t_0$. Какова должна быть кривая $l(t)$, чтобы $x_l(t)$ была траекторией системы (1.1), порожденной некоторым управлением $u(t)$?

Исследуем этот вопрос. Предположим, что кривая $l(t)$ такова, что вектор

$$x_l(t) = G(t, t_0)x_t^{(0)} + \int_{t_0}^t G(t, \tau)u_t(\tau)d\tau \quad (4.12)$$

порожден парой $\{x_t^{(0)}, u_t(\cdot)\}$. Для того чтобы $x_l(t)$ был опорным вектором к опорной гиперплоскости, порожденной $l(t)$, необходимо и достаточно, чтобы эта пара удовлетворяла к каждый момент

времени t принципу максимума (2.7), (2.8) и условию (2.6) при ограничениях

$$x_t^0 \in \mathcal{E}(0, X^0), \quad u_t(\tau) \in \mathcal{E}(0, Q(\tau)).$$

Отсюда следуют формулы

$$u_t(\tau) = \frac{Q(\tau)G'(t, \tau)l(t)}{(l(t), G(t, \tau)Q(\tau)G'(t, \tau)l(t))^{1/2}}, \quad t_0 \leq \tau \leq t, \quad (4.13)$$

$$x_t^0 = \frac{X^0 G'(t, t_0)l(t)}{(l(t), G(t, t_0)X^0 G'(t, t_0)l(t))^{1/2}}. \quad (4.14)$$

Заметим, что так как $x_l(t)$ изменяется по t , то переменные $x_t^0, u_t(\tau)$ должны в общем случае зависеть от t .

Теперь вопрос состоит в том, какова должна быть функция $l(t)$, чтобы кривая $x_l(t)$ из (4.12)–(4.14) являлась траекторией системы (1.1).

Дифференцируя (4.12), приходим к выражению

$$\dot{x}_l(t) = A(t) \left(X(t, t_0)x_t^0 + \int_{t_0}^t G(t, \tau)B(\tau)u_t(\tau)d\tau \right) + B(t)u_t(t) + Y(t), \quad (4.15)$$

где

$$Y(t) = G(t, t_0)\frac{\partial x_t^0}{\partial t} + \int_{t_0}^t G(t, \tau)B(\tau)\frac{\partial u_t(\tau)}{\partial t}d\tau. \quad (4.16)$$

Для того чтобы $x_l(t)$ была траекторией системы (1.1), необходимо и достаточно, чтобы $Y(t) \equiv 0$. Здесь управление в момент времени t есть $u_t(t)$, начальная позиция есть $x_{t_0}^0$.

Найдем класс функций $l(t)$, для которых $Y(t) = Y_l(t) \equiv 0$. Так как мы собираемся менять параметры задачи в зависимости от выбора $l(\cdot)$, то в дальнейшем используем обозначения $Y(t) = Y_l(t)$, $p_t(\tau) = p_t(\tau, l)$, $p_0(t) = p_0(t, l)$.

Для любого t имеем

$$Y_l(t) = G(t, t_0)\frac{\partial(X^0 G'(t, t_0)l(t)(p_0(t))^{-1})}{\partial t} + \int_{t_0}^t G(t, \tau)B(\tau)\frac{\partial(Q(\tau)G'(t, \tau)l(t)(p_t(\tau))^{-1})}{\partial t}d\tau, \quad (4.17)$$

где в соответствии с (3.9) следует подставить

$$\begin{aligned} p_t(s, l(t)) &= (l(t), G(t, s)Q(s)G'(t, s)l(t))^{1/2}, \\ p_0(t, l(t)) &= (l(t), G(t, t_0)X^0 G'(t, t_0)l(t))^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Продолжая вычисление $Y_l(t)$, после несложных преобразований приходим к формуле

$$Y_l(t) = \Phi_0(t, t_0, l(t))(p_0(t, l(t)))^{-3} + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau, l(t))(p_t(\tau, l(t)))^{-3}d\tau, \quad (4.19)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(t, t_0, l) &= P_0(t, t_0)(A(t)l + \dot{l}) \left(l' G(t, t_0)X^0 G'(t, t_0)l \right) - P_0(t, t_0)l \left((l' A(t) + \dot{l}') P_0(t, t_0)l \right), \\ \Phi(t, \tau, l) &= P(t, \tau)(A(t)'l + \dot{l}) \left(l, P(t, \tau)l \right) - P(t, \tau)l \left((l' A(t) + \dot{l}') P(t, \tau)l \right). \end{aligned}$$

Здесь в соответствии с предыдущими обозначениями

$$P_0(t, t_0) = G(t, t_0)X^0 G'(t, t_0), \quad P(t, \tau) = G(t, \tau)B(\tau)Q(\tau)B'(\tau)G'(t, \tau).$$

Предположим теперь, что $l(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{l} + A(t)l = k(t)l(t), \quad (4.20)$$

где $k(t)$ — непрерывная скалярная функция. Тогда с помощью прямой постановки убеждаемся в том, что $Y_l(t) = 0$.

С другой стороны, предположим, что $Y_l(t) \equiv 0$. Докажем, что тогда $l(t)$ удовлетворяет уравнению (4.20). Предположим противное, а именно, что функция $l_0(t)$ дает условие $Y_{l_0}(t) \equiv 0$, но не удовлетворяет (4.20) ни при каком $k(t)$ (включая $k(t) \equiv 0$). Тогда должно быть

$$(l'_0(t)A(t) + \dot{l}_0(t))Y_{l_0}(t) \equiv 0,$$

так что выражение

$$\begin{aligned} & (l'_0(t)A(t) + \dot{l}_0(t)) \left(\Phi_0(t, t_0, l_0(t)) (p_0(t, l_0(t)))^{-3} + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau, l_0(t)) (p_t(\tau, l_0(t)))^{-3} d\tau \right) = \\ & = \left((l'_0(t)A(t) + \dot{l}_0(t))P(t, t_0)(A'(t)l_0(t) + \dot{l}_0(t))(l_0(t), P_0(t, t_0)l_0(t)) - \right. \\ & \quad \left. - l'_0(t)P_0(t, t_0)(A'(t)l_0(t) + \dot{l}_0(t))^2 \right) (p_0(t, l_0(t)))^{-3} + \\ & \quad + \int_{t_0}^t \left((l'_0(t)A(t) + \dot{l}_0(t))P(t, \tau)(A(t)l_0(t) + \dot{l}_0(t))(l_0(t), P(t, \tau)l_0(t)) - \right. \\ & \quad \left. - ((l'_0(t)A(t) + \dot{l}_0(t))P(t, \tau)l)^2 \right) (p_t(\tau, l_0(t)))^{-3} d\tau \end{aligned}$$

должно обращаться в нуль. Однако вследствие неравенства Гельдера (примененного в конечно-мерном варианте к первому члену и в бесконечномерном варианте — к интегральному члену) обнаруживаем, что последнее выражение равно нулю тогда и только тогда, когда $l_0(t)$ удовлетворяет соотношению (4.20) для некоторой функции $k(t)$, т.е. вектор $(A'(t)l_0 + \dot{l}_0(t))$ коллинеарен¹ $l_0(t)$. Последнее противоречит нашему допущению, доказывая следующие результаты.

Теорема 4.4. Пусть дана непрерывно дифференцируемая кривая $l(t)$. Тогда функция $x_l(t)$ из (4.12)–(4.14), сформированная из опорных векторов к гиперплоскости, порожденной $l(t)$, есть траектория системы (1.1) в том и только том случае, когда $l(t)$ — решение дифференциального уравнения (4.20).

При помощи аналогичных вычислений может быть доказано следующее утверждение.

Теорема 4.5. Для того чтобы выполнялось соотношение $G(t, t_0)\phi(t, l(t), Q(\cdot))G'(t, t_0) \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $l(t)$ удовлетворяла уравнению (4.20).

Таким образом, необходимые и достаточные условия разрешимости задачи состоят в том, что функция $l(t)$ должна удовлетворять уравнению (4.20) при некотором $k(t)$. Это уравнение может быть интерпретировано следующим образом. Рассмотрим преобразование

$$l_n(t) = \exp \left(- \int_{t_0}^t k(s) ds \right) l(t). \quad (4.21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{l}_n(t) &= \exp \left(- \int_{t_0}^t k(s) ds \right) \dot{l}(t) - k(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t k(s) ds \right) l(t) = \\ &= (-A'(t) + k(t)I) \exp \left(- \int_{t_0}^t k(s) ds \right) l(t) - k(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t k(s) ds \right) l(t) = -A'(t)l_n(t). \end{aligned}$$

¹Здесь также учитываем, что выражение $(l'(t)A(t) + \dot{l}(t))Y_l(t)$ почти всюду ограничено при $p_0(t) > 0$ и $p_t(\tau) > 0$ вследствие предположения 2.1 о полной управляемости системы (1.1).

Последнее означает, что $l_n(t)$ снова есть решение сопряженного уравнения $\dot{l} = -A(t)l$, но уже в новой шкале переменных. При этом смысл преобразования (4.21) в том, что $l_n(t) = \gamma(t)l(t)$, $\gamma > 0$.

Лемма 4.1. Решения $l_k(t)$ уравнения (4.20) порождают одни и те же опорные гиперплоскости ко множеству достижимости $\mathcal{X}[t]$ и те же самые опорные точки $x_{l_k}(t)$, каковы бы ни были функции $k(t)$ (при условии, что у всех этих решений одно и то же начальное условие $l_k(t_0) = l_0$).

В частности, при $k(t) \equiv 0$ приходим к функциям $l(t)$ предположения 4.1, а при $A'l = kl$ (здесь l — собственный вектор постоянной матрицы A' , $k(t) \equiv k$) — к уравнению $\dot{l} = 0$ и к условию $l(t) = l = \text{const}$.

В общем случае, функция $l(t)$ предположения 4.1 не нормирована, $(l(t), l(t)) \neq 1$. Для того чтобы получить функцию $l_u(t)$ с векторами $l_u(t)$ единичной длины, следует сделать подстановку $l_u(t) = l(t)(l(t), l(t))^{-1/2}$, где $\dot{l} + A'(t)l = 0$. Прямое вычисление приводит к следующему результату.

Лемма 4.2. Предположим, что функция $l_u(t)$ удовлетворяет уравнению (4.20) при

$$k(t) = \frac{(l(t), A(t)l(t))}{(l(t), l(t))},$$

где $l(t)$ удовлетворяет предположению 4.1. Тогда $(l_u(t), l_u(t)) \equiv 1$.

Замечание 4.1. Леммы 4.1, 4.2 показывают, что необходимые и достаточные условия разрешимости задачи 4.1 не выводят за класс функций, удовлетворяющих предположению 4.1.

Соотношения (4.11), (3.1), полученные выше, описывают эволюцию основных параметров $x^*(t)$, $X_+^*[t]$ эллипсоидов $\mathcal{E}^*[t]$. Сказанное позволяет перейти к следующему вопросу.

5. ЭВОЛЮЦИЯ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ЭЛЛИПСОИДОВ

Известно, что эволюция множества достижимости $\mathcal{X}[t]$, $\mathcal{X}[t_0] = \mathcal{E}^0 = \mathcal{E}(x^0, X^0)$, может быть описана эволюционным уравнением для «интегральной воронки» дифференциального включения (1.3). Иными словами, многозначная функция $\mathcal{X}[t]$ удовлетворяет при почти всех t соотношению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} h(\mathcal{X}[t + \varepsilon], (I + \varepsilon A(t))\mathcal{X}[t] + \varepsilon \mathcal{E}(q(t), Q(t))) = 0 \quad (5.1)$$

с начальным условием $\mathcal{X}[t_0] = \mathcal{E}^0$ (см. [26]). Здесь $h(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ обозначает хаусдорфово расстояние между множествами $\mathcal{Q}$, $\mathcal{M}$, определяемое следующим образом:

$$h(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = \max \{h_+(\mathcal{Q}, \mathcal{M}), h_-(\mathcal{Q}, \mathcal{M})\}, \quad h_+(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = h_-(\mathcal{M}, \mathcal{Q}),$$

где хаусдорфово полурасстояние есть

$$h_-(\mathcal{M}, \mathcal{Q}) = \max_x \min_z \{(x - z, x - z)^{1/2} \mid x \in \mathcal{Q}, z \in \mathcal{M}\}.$$

Уравнение (5.1) с заданным начальным условием имеет единственное решение.

Идея построения внешних эллипсоидальных оценок для $\mathcal{X}[t]$ также отражена в решениях эволюционного уравнения с эллипсоидальнозначными решениями

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} h_-(\mathcal{E}[t + \varepsilon], (I + \varepsilon A(t))\mathcal{E}[t] + \varepsilon \mathcal{E}(q(t), Q(t))) = 0 \quad (5.2)$$

и начальным условием $\mathcal{E}[t_0] = \mathcal{E}(x^0, X^0) = \mathcal{E}^0$.

Определение 5.1. Многозначная функция $\mathcal{E}_+[t]$ называется решением уравнения (5.2) если она

- (i) удовлетворяет (5.2),
- (ii) является эллипсоидальнозначной и $\mathcal{E}_+[t] \in \mathbf{E}_+$.

Решение уравнения (5.2) называется минимальным в $\mathbf{E}_+$, если вместе с условиями (i), (ii) оно удовлетворяет следующему условию:

- (iii) $\mathcal{E}_+[t]$ является минимальным по включению в $\mathbf{E}_+$ решением уравнения (5.2).

Условие (iii) означает, что не существует другого эллипсоида $\mathcal{E}[t] \neq \mathcal{E}_+[t]$, $\mathcal{E}[t] \in \mathbf{E}_+$, удовлетворяющего уравнению (5.2) и включениям $\mathcal{E}_+[t] \supseteq \mathcal{E}[t] \supseteq \mathcal{X}[t]$.

Это также означает, что среди минимальных решений $\mathcal{E}_+[t]$ уравнения (5.2) существуют недоминируемые (тугие) эллипсоидальные трубки $\mathcal{E}_+[t]$, содержащие $\mathcal{X}[t]$. Для фиксированного начального состояния $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}[t_0]$ решения уравнения (5.2), так же как и минимальные решения, не единственны.

Замечание 5.1. Отметим, что уравнение (5.2) записано в терминах хаусдорфова *полурасстояния* h_- в отличие от хаусдорфова расстояния h в (5.1).

Обозначим эллипсоидозначную трубку $E[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X[t])$, которая стартует из $\{t_0, \mathcal{E}^0\}$, $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}(x^0, X^0)$, и определяется заданными функциями $x^*(t)$, $X[t]$ (матрица $X[t] = X'[t] > 0$) как

$$E[t] = E(t|t_0, \mathcal{E}^0) = \mathcal{E}(x^*(t), X[t]).$$

Эволюционное уравнение (5.2) определяет обобщенную динамическую систему в следующем смысле.

Лемма 5.1. Каждое решение $E(t|t_0, \mathcal{E}^0) = E[t]$ уравнения (5.2) в смысле определения 5.1 определяет отображение с полугрупповым свойством

$$E(t|t_0, \mathcal{E}^0) = E(t|E(\tau, |t_0, \mathcal{E}^0)), \quad t_0 \leq \tau \leq t. \quad (5.3)$$

Из определения 5.1 вытекает следующее. Уравнение (5.2) гарантирует, что его решение $E[t]$ удовлетворяет включению

$$E[t + \varepsilon] + o(\varepsilon)\mathcal{B}(0) \supseteq (I + \varepsilon A(t))E[t] + \varepsilon \mathcal{E}(q(t), Q(t)),$$

где $\varepsilon^{-1}o(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\mathcal{B}(0)$ — единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}(0) = \{x : (x, x) \leq 1\}$.

Зафиксируем непрерывно дифференцируемую функцию $l(t)$, $t \geq t_0$. Предположив, что решение $E[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X[t])$ определено вплоть до момента времени t , рассмотрим внешнюю эллипсоидальную оценку $E[t + \varepsilon]$ суммы

$$Z(t + \varepsilon) = (I + \varepsilon A(t))\mathcal{E}(x^*(t), X[t]) + \varepsilon \mathcal{E}(q(t), Q(t)),$$

касающуюся этой суммы $Z(t + \varepsilon)$ (которая, вообще говоря, не является эллипсоидом) согласно соотношению

$$\rho(l(t + \varepsilon)|E[t + \varepsilon]) = \rho(l(t + \varepsilon)|Z(t + \varepsilon)). \quad (5.4)$$

Здесь $z(t + \varepsilon)$ являются точками касания $Z(t + \varepsilon)$ и его опорной гиперплоскости, соответствующей вектору $l(t + \varepsilon)$, а именно,

$$\begin{aligned} \left\{ z(t, \varepsilon) : (l(t + \varepsilon), z(t, \varepsilon)) &= (l(t + \varepsilon), x^*(t + \varepsilon)) + (l(t + \varepsilon), X[t + \varepsilon]l(t + \varepsilon))^{1/2} = \right. \\ &= (l(t + \varepsilon), x^*(t + \varepsilon)) + (l(t + \varepsilon), I + \varepsilon A(t))X[t](I + \varepsilon A(t))'(l(t + \varepsilon))^{1/2} + \\ &\quad \left. + \varepsilon(l(t + \varepsilon), Q(t)l(t + \varepsilon))^{1/2} + o_1(\varepsilon) \right\}. \end{aligned}$$

В последнем случае согласно определениям тугих эллипсоидов $E[t + \varepsilon]$ является тугей внешней оценкой для $Z(t + \varepsilon)$ (с точностью до членов порядков выше ε)¹.

Перечисленные требования выполнены, если $E[t + \varepsilon]$ оценивает извне сумму

$$\mathcal{Z}(t + \varepsilon) = G(t + \varepsilon, t)\mathcal{E}(x^*(t), X[t]) + \int_t^{t+\varepsilon} G(t + \varepsilon, s)\mathcal{E}(q(s), Q(s))ds$$

с тем же критерием (5.4), что и в предыдущем случае. Рассмотрим выражение

$$X[t + \varepsilon] = (1 + p^{-1}(t + \varepsilon))G(t + \varepsilon, t)X[t]G'(t + \varepsilon, t) + \varepsilon^2(1 + p(t + \varepsilon))X(t + \varepsilon, t)Q(t)X(t + \varepsilon, t), \quad (5.5)$$

¹Здесь и далее термины типа $o_i(\varepsilon)$ означают, что $o_i(\varepsilon)\varepsilon^{-1} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

где

$$p(t + \varepsilon) = \frac{(l(t + \varepsilon), G(t + \varepsilon, t)X[t]G'(t + \varepsilon, t)l(t + \varepsilon)^{1/2})}{\varepsilon(l(t + \varepsilon), G(t + \varepsilon, t)Q(t)G'(t + \varepsilon, t)l(t + \varepsilon))^{1/2}}. \quad (5.6)$$

Действительно, прямая подстановка $p(t + \varepsilon)$ в (5.5), выбранная согласно (5.6), дает

$$\begin{aligned} (l(t + \varepsilon), X[t + \varepsilon]l(t + \varepsilon)) &= (l(t + \varepsilon), G(t + \varepsilon, t)X[t]G'(t + \varepsilon, t)l(t + \varepsilon))^{1/2} + \\ &+ \varepsilon(l(t + \varepsilon), G(t + \varepsilon, t)Q(t)G'(t + \varepsilon, t)l(t + \varepsilon))^{1/2})^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Оценивая хаусдорфово расстояние

$$R(t, \varepsilon) = h \left(\int_t^{t+\varepsilon} G(t + \varepsilon, s) \mathcal{E}(0, Q(s)) ds, \varepsilon^2 G(t + \varepsilon, t) Q(t) G'(t + \varepsilon, t) \right)$$

прямым вычислением, можно получить следующий результат.

Лемма 5.2. *Справедлива оценка*

$$R(t, \varepsilon) \leq K\varepsilon^2, \quad K > 0. \quad (5.8)$$

Учитывая (5.6), лемму 5.2 и тот факт, что $X(t + \varepsilon, t) = X[t] + \varepsilon A(t) + o_2(\varepsilon)$, получаем следующий результат.

Лемма 5.3. *Если выбрать $p(t, \varepsilon)$ согласно (5.6), то соотношениям (5.5)–(5.8) будут соответствовать равенства*

$$\rho(l(t + \varepsilon) | \mathcal{E}(0, X[t + \varepsilon])) = \rho(l(t + \varepsilon) | \mathcal{Z}[t + \varepsilon]) + o_3(\varepsilon) = \rho(l(t + \varepsilon) | Z(t + \varepsilon)) + o_4(\varepsilon). \quad (5.9)$$

Лемма 5.3 влечет соотношение

$$\begin{aligned} X[t + \varepsilon] &= (1 + p^{-1}(t + \varepsilon))(I + \varepsilon A(t))X[t](I + \varepsilon A(t))' + \\ &+ \varepsilon^2(1 + p(t + \varepsilon))(I + \varepsilon A(t))'Q(t)(I + \varepsilon A(t)) + o_5(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Подставляя $p(t + \varepsilon)$ из (5.6) в (5.10), обозначая $\varepsilon p(t + \varepsilon) = \pi(t + \varepsilon)$ и продолжая $X[t + \varepsilon]$, $G(t + \varepsilon, s)$, $\pi(t + \varepsilon)$ по ε , получим условие

$$X[t + \varepsilon] = X[t] + \varepsilon A(t)X[t] + \varepsilon X[t]A(t) + \pi(t)X[t] + \pi^{-1}(t)Q(t) + o_6(\varepsilon). \quad (5.11)$$

Переписав последнее выражение, разделив его на ε и устремляя ε к нулю, далее получаем

$$\dot{X} = A(t)X + XA'(t) + \pi(t)X + \pi^{-1}(t)Q(t), \quad (5.12)$$

где

$$\pi(t) = \frac{(l(t), Q(t)l(t))^{1/2}}{(l(t), X[t]l(t))^{1/2}}. \quad (5.13)$$

Начиная построение $E[t]$ из начального состояния $E[t_0] = \mathcal{E}^0$, как решение (5.2) с эволюцией, определяемой условиями (5.4), (5.7), (5.9), приходим к системе уравнений (5.12), (5.13), $X[t_0] = X^0$. Таким образом, получена внешняя аппроксимация. Вследствие этого в обозначении $X[t]$ впредь добавим нижний индекс $+$, полагая далее $X[t] = X_+[t]$.

Если $\phi = 0$, то уравнение (5.12) очевидным образом совпадает с (4.11). Тем не менее, как указано в разделах 3, 4, эллипсоид $E[t]$, построенный согласно уравнению (4.11), $\phi = 0$, касается множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ в точках, определяемых опорным вектором $l(t) = l^*(t)$, в том и только том случае, когда $l^*(t) = G'(t_0, t)l$ для любого заданного $l \in \mathbb{R}^n$. Тогда $E[t]$ удовлетворяет для любых $t \geq t_0$ даже требованию (iii) определения 5.1. С другой стороны, как только что было показано, эллипсоидальная трубка $E[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X[t])$ эволюционирует согласно уравнению (5.2) лишь в том случае, если она удовлетворяет уравнениям (5.12), (5.13). Следовательно, эллипсоид $E[t]$, удовлетворяющий определению 5.1. может касаться точной трубки достижимости только вдоль хороших кривых $l(t)$.

Описанные свойства приводят к следующему результату.

Теорема 5.1. *Эллипсоид $E[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X[t])$ является минимальным решением эволюционного уравнения (5.2) лишь в том случае, если он построен согласно уравнениям (3.1), (5.12), (5.13) при $X[t_0] = X^0$, где кривая $l(t) = G(t_0, t)l$ для некоторого $l \in \mathbb{R}^n$ (это хорошая кривая).*

Заметим, что теорема, обратная к предыдущей, также имеет место.

Теорема 5.2. *Для того чтобы эллипсоид $\mathcal{E}(x^*[t], X_+^*[t])$ описывался уравнениями (3.1), (5.12), (5.13), необходимо и достаточно чтобы $l(t)$ удовлетворяла уравнению (4.20) с некоторым $k(t)$. В этом случае эллипсоид $\mathcal{E}(x^*[t], X_+^*[t])$ будет тугим в $\mathbf{E}_+$.*

Таким образом, решение, которое дает данная теорема, является *тугим* в том смысле, что не существует другого эллипсоида в $\mathbf{E}_+$ который можно было бы вставить между $\mathcal{E}(x^*(t), X_+^*[t])$ и $\mathcal{X}[t]$.

Из теорем 5.1, 5.2 и леммы 5.1 следует, что отображение $E[t] = E(t|t_0, X^0)$, построенное согласно теореме 5.1, с $X[t] = X_+^*[t]$, удовлетворяет полугрупповому свойству (5.3). Это может быть проверено прямыми вычислениями с помощью (4.1)–(4.4).

Замечание 5.2. Эллипсоид $E[t]$ в теореме 5.1 решает задачу 3.1 для любой (ненормированной) кривой $l(t)$. Чтобы получить решение для нормированной кривой, у которой $(l(t), l(t)) = 1$, необходимо применить леммы 4.1, 4.2.

В общем случае эллипсоидальная трубка $\mathcal{E}^*[t] = \mathcal{E}(x^*, X_+^*[t])$ может касаться $\mathcal{X}[t]$ вдоль произвольной кривой согласно требованию задачи 3.1. Но эта кривая может не быть хорошей. В таком случае уравнения для $X_+^*[t]$ будут отличаться от (5.12). Они будут совпадать с (4.11) при $\phi \neq 0$. При этом $\mathcal{E}^*[t]$ не будет удовлетворять полугрупповому свойству. Примером такого случая является кривая, «нарисованная» на границе точной трубки достижимости внешними минимальными по объему эллипсоидами. Соответствующая касательная кривая здесь не будет хорошей. Неумение отличить хорошие кривые от любых привело к замешательству и противоречивым результатам в публикациях, посвященных минимальными по объему внешними эллипсоидальными оценками в 1980-х гг.

Что произойдет, если уравнения (3.1), (5.12) будут все же использованы для оценки точного множества достижимости? В этом случае эллипсоид $\mathcal{E}_+[t]$ все равно останется внешней оценкой точного множества достижимости, а именно, будет справедливо включение $\mathcal{X}[t] \subseteq \mathcal{E}_+[t]$, но этот эллипсоид $\mathcal{E}_+[t]$, вообще говоря, уже не будет тугим.

6. ТРУБКИ ДОСТИЖИМОСТИ

Теперь можно обобщить изложенные ранее результаты, акцентируя внимание на том, что они скорее направлены на вычисление *трубок* достижимости, нежели множеств достижимости для фиксированного момента времени. Из теорем 4.2–4.4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Решение задачи 4.1 допускает следующие выводы.*

- (i) *Эллипсоид $\mathcal{E}^*[t] = \mathcal{E}^*(x^*(t), X_+^*(t))$, построенный согласно равенствам (3.8), (3.9) для любой фиксированной функции $l^*(t) = l(t)$ и множества $X_+^*(t_0) = X^0$, является решением задачи 3.1, причем $X_+^*(t)$ удовлетворяет «общему» уравнению (4.10).*
- (ii) *Эллипсоид $E[t] = E(x^*(t), X_+^*(t))$, построенный согласно уравнениям (4.7), (4.6) (или (5.12), (5.13)), является внешней оценкой для решения $\mathcal{E}_+^*[t] = \mathcal{E}^*(x^*(t), X_+^*(t))$ задачи 3.1, причем для любой фиксированной функции $l(t)$ справедливо неравенство*

$$\rho(l^*(t)|E(x^*(t), X_+^*(t))) \geq \rho(l^*(t)|\mathcal{E}(x^*(t), X_+^*(t))), \quad (6.1)$$

которое обращается в равенство при всех $t \geq t_0$, если $l(t)$ выбирается согласно предположению 4.1.

- (iii) *Для того чтобы эллипсоид $\mathcal{E}(x^*(t), X_+^*(t))$ допускал описание при помощи уравнений (4.7), (4.6), необходимо и достаточно, чтобы функция $l(t)$ удовлетворяла уравнению (4.11) при некоторой функции $k(t)$.*

Решения задачи 3.1, указанные в последней теореме, являются *тугами* в смысле определений 3.1, 3.2. Полезно также заметить следующее.

Лемма 6.1. *Каждая эллипсоидальная трубка типа $E(t|t_0, \mathcal{E}^0) = E[t]$, полученная как решение уравнений (4.7), (4.6), определяет отображение с полугрупповым свойством*

$$E(t|t_0, \mathcal{E}^0) = E(t|E(\tau|t_0, \mathcal{E}^0)), \quad t_0 \leq \tau \leq t. \quad (6.2)$$

Покажем, как вычислять трубки достижимости, используя приведенные выше результаты.

Из теоремы 2.1 в условиях предположения 2.1 вытекает следующее заключение.

Теорема 6.2. *Пусть выполнено предположение 2.1. Тогда опорные точки $x^*(t)$ для вектора $l^*(t)$, а именно те, для которых выполнены равенства*

$$(l^*(t), x^*(t)) = \rho(l^*(t)|\mathcal{X}[t]) = \rho(l^*(t)|E(x^*(t), X_+^*[t])) \quad (6.3)$$

для всех $t \geq t_0$, достижимы из начального состояния $x(t_0) = x^0$ при помощи управления $u = u^*(t)$, удовлетворяющего принципу максимума (2.6), (2.7) и условию максимума (2.8) в следующей форме $(l^*(t) = G'(t_0, t)l)$:

$$(l, G(s, t_0)B(s)u^*(s)) = \max \{ (l, G(s, t_0)B(s)u) \mid u \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \}, \quad t \geq t_0, \quad (6.4)$$

$$(l, x^0) = \max \{ (l, x) \mid x \in \mathcal{E}(x^0, X^0) \}. \quad (6.5)$$

При всех $s \geq t_0$ управление $u^*(s)$, $s \in [t_0, t]$, может быть взято одним и тем же, какими бы ни были значения t .

С помощью принципа максимума (теорема 2.2) можно непосредственно вычислить оптимальное управление

$$u^*(s) = \frac{Q(s)B'(s)G'(s, t_0)l}{(l, G(s, t_0)B(s)Q(s)B'(s)G'(s, t_0)l)^{1/2}}, \quad t_0 \leq s \leq t, \quad (6.6)$$

и оптимальную траекторию

$$x^*(t) = x^*(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{G(s, t_0)B(s)Q(s)B'(s)G'(s, t_0)l}{(l, G(s, t_0)B(s)Q(s)B'(s)G'(s, t_0)l)^{1/2}} ds, \quad t \geq t_0, \quad (6.7)$$

где

$$x^*(t_0) = \frac{X^0 l}{(l, X^0 l)^{1/2}} + x^0. \quad (6.8)$$

Вместе с тем, согласно (6.4), траектория $x^*(t)$ из теоремы 6.1 удовлетворяет также следующему «эллипсоидальному» принципу максимума.

Теорема 6.3. *Справедливо условие*

$$(l^*(t), x^*(t)) = \max \{ (l^*(t), x) \mid x \in E(x^*, X_+^*[t]) \}, \quad (6.9)$$

которое достигается на векторе

$$x^*(t) = x^*(t_0) + X_+^*[t]l^*(t_0)(l^*(t_0), X_+^*[t]l^*(t_0))^{-1/2}, \quad (6.10)$$

где $l^*(t) = G'(t_0, t)l$, причем

$$X[t_0] = X^0, \quad x^*(t_0) = x^0 + X^0 l (l, X^0 l)^{-1/2}. \quad (6.11)$$

Здесь $X_+^*[t]$ можно вычислить при помощи уравнения (4.8) с явно заданными параметрами

$$\pi^*(t) = (l(t), B(t)Q(t)B'(t)l(t))^{1/2} (l(t), X^*[t]l(t))^{-1/2}, \quad (6.12)$$

вычисленными в силу формулы (4.6).

Таким образом, «прием» состоит в том, чтобы заменить в каждой точке границы множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ «оригинальный» принцип максимума (2.7) из теоремы 2.2 на «эллипсоидальный» принцип максимума (6.9), рассматриваемый на туге внешнем эллипсоиде $E(x^*, X_+^*[t])$, касающемся $\mathcal{X}[t]$ в точке $x^*(t)$, с опорным вектором $l^*(t)$.

Теорема 6.4. Траектория $x^*(t)$, бегущая по границе $\partial\mathcal{X}[t]$ множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ и касающаяся $\mathcal{X}[t]$ в опорных точках вектора $l^*(t) = G'(t, t_0)l$, задается равенствами (6.11), (6.10), где $X_+^*[t]$ — решение уравнения (4.8), (4.6) (или, что то же самое, уравнения (5.12), (5.13)).

Пользуясь леммой 4.1, последнюю теорему можно дополнить следующим выводом.

Следствие 6.1. Пусть задан вектор $l^0 = l^*(t_0)$. Тогда соответствующие эллипсоид $E(x^*, X_+^*[t])$ и вектор $x^*(t) \in \partial\mathcal{X}[t]$, порожденные функцией $l^*(t)$ из уравнения (4.11), не будут зависеть от выбора функции $k(t)$ в этом уравнении.

Обозначив $x^*(t) = x[t, l]$, приходим к двухпараметрической поверхности $x[t, l]$, которая определяет границу $\partial\mathcal{X}$ трубки достижимости $\mathcal{X} = \bigcup\{X[t], t \geq t_0\}$. При фиксированном $t = t'$ и меняющемся $l \in \mathbf{S}$ вектор $x[t', l]$ здесь пробегает по границе $\partial\mathcal{X}[t']$. С другой стороны, при фиксированном $l = l'$ и меняющемся t вектор $x[t, l']$ движется вдоль одной из траекторий $x^*(t)$, касающихся множества достижимости $\mathcal{X}[t]$, соответствующего системе (1.1) с управлением $u^*(t)$ из (6.6) и начальным условием x^0 из (6.7). Тогда

$$\bigcup\{x[t, l] \mid l \in \mathbf{S}\} = \partial\mathcal{X}[t], \quad \bigcup\{x[t, l] \mid l \in \mathbf{S}, t \geq t_0\} = \partial\mathcal{X}.$$

Замечание 6.1. Соотношение (6.10) приведено в рекуррентной форме. При этом вычисление кривых $x^*[t]$ и поверхности $x[t, l]$ не требует вычисления соответствующих управлений $u^*(t)$.

Замечание 6.2. Данное замечание относится к вопросу об оптимальности внешних эллипсоидов. Предположим, что для каждого момента времени t построен глобально оптимальный по объему эллипсоид $\mathcal{E}(x^*(t), X_v(t))$. Он будет, очевидно, касаться множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ в каждый момент t , определяя таким образом определенную кривую $x_v(t)$, лежащую на границе $\partial\mathcal{X}[t]$ трубки достижимости $\mathcal{X}[\cdot]$. Однако пример 2.7.1 из [27] показывает, что оптимальный по объему эллипсоид может не существовать в классе $\mathbf{E}_+$. Из этого следует, что, вообще говоря, оптимальная по объему кривая $x_v(t)$ не является «хорошей» в смысле предположения 4.1. Но тогда не следует ожидать, что матрица $X_v(t)$ оптимального по объему эллипсоида будет описываться уравнением (4.7) (или (5.12)), как утверждают некоторые авторы.

С другой стороны, тугие эллипсоиды, описанные в разделе 4, удовлетворяют определению 3.1. Это влечет условие

$$d[l] = \rho(l|\mathcal{X}[t]) + \rho(-l|\mathcal{X}[t]) = \rho(l|E(x^*(t), X_{+l}^*(t))) + \rho(-l|E(x^*(t), X_{+l}^*(t))) = 2(l, X_{+l}^*(t)l)^{1/2},$$

где $d[l]$ — длина точной проекции множества $\mathcal{X}[t]$ на направление l . Здесь матрица $X^{(l)*}(t)$ вычисляется согласно (4.7), (4.6) для фиксированного вектора $l \in \mathbb{R}^n$.

7. ПРИМЕР 1

Для иллюстрации результатов рассмотрим следующую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad x_2(0) = x_2; \quad |u| \leq \mu, \quad \mu > 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь

$$x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t + \int_0^t (t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad x_2(t) = x_2^0 + \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Опорная функция

$$\rho(l|\mathcal{X}[t]) = \max \{(l, x(t)) \mid |u| \leq \mu\}$$

может быть вычислена непосредственно по формуле

$$\rho(l|\mathcal{X}[t]) = l_1 x_1^0 + x_2^0 t + \int_0^t |l_1(t - \tau) + l_2| d\tau.$$

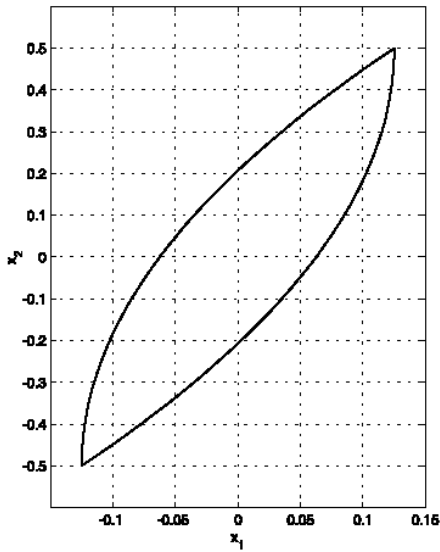


Рис. 1. Множество достижимости

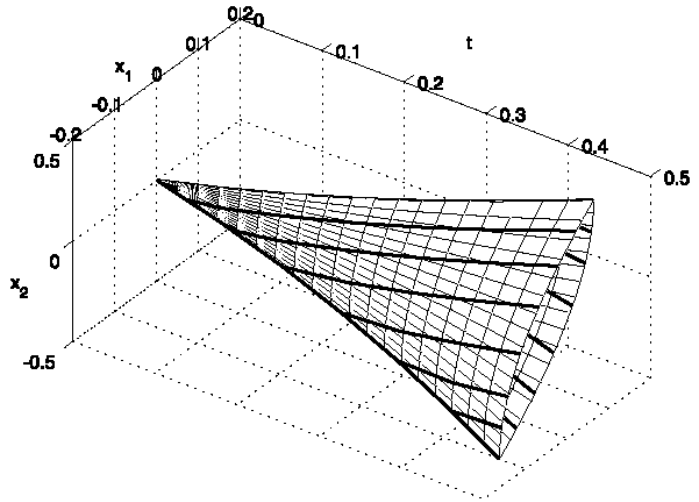


Рис. 2. Трубка достижимости

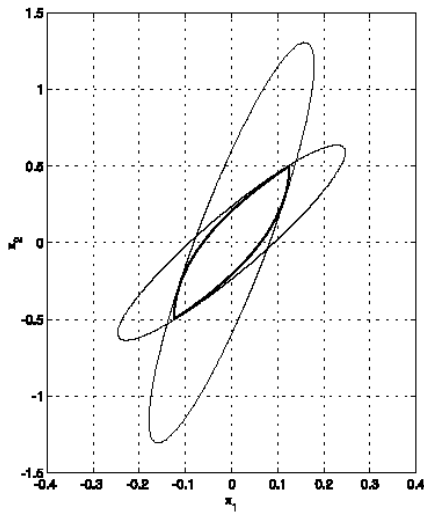


Рис. 3. Два тугих эллипсоида

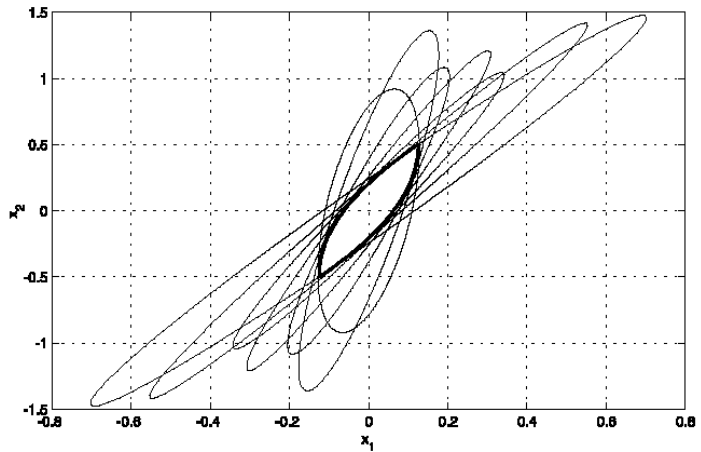


Рис. 4. Много тугих эллипсоидов

Граница множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ может быть вычислена по следующей формуле (см. [27]):

$$\min_l \{ \rho(l|\mathcal{X}[t]) - l_1 x_1 - l_2 x_2 \mid (l, l) = 1 \} = 0. \quad (7.2)$$

Далее прямым вычислением минимума в последней задаче получаем параметрическое представление границы $\partial\mathcal{X}[t]$ путем введения параметра $\sigma = l_2^0/l_1^0$, где l_1^0, l_2^0 — минимизаторы в (6.2). Отсюда получаются две кривые

$$x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t + \mu(t^2/2 - \sigma^2), \quad x_2(t) = x_2^0 + 2\mu\sigma + \mu t, \quad (7.3)$$

$$x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t - \mu(t^2/2 - \sigma^2), \quad x_2(t) = x_2^0 - 2\mu\sigma - \mu t \quad (7.4)$$

для $\sigma \leq 0$. Заметим, что для произведения $l_1 l_2 > 0$ имеем $\sigma > 0$. Для таких векторов опорные точки $x_i[t]$ будут располагаться в каждой из вершин множества $\mathcal{X}[t]$.

Эти кривые (параметризованные по σ) формируют верхние и нижние границы $\mathcal{X}[t]$ с фиксированным параметром t (см. рис. 1). Увеличивая t можно нарисовать трубку достижимости $\mathcal{X}[t]$ как многозначную функцию времени t (см. рис. 2).

Формула $l(t) = e^{-A^*t}l$ предположения 4.1 трансформируется в $(l_1(t) = l_1; l_2(t) = l_2 - tl_1)$. Это позволяет записать соотношения для опорных точек к гиперплоскости, определяемой вектором $l(t)$. Подстановка в (6.3), (6.4), дает

$$x_{1l}(t) = x_1^0 + x_2^0 t + \mu(t^2/2 - (tl_1 - l_2/l_1)^2), \quad x_{2l}(t) = x_2^0 + 2\mu(l_2 - tl_1)/l_1 + \mu t, \quad (7.5)$$

$$x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t - \mu(t^2/2 - (tl_1 - l_2/l_1)^2), \quad x_2(t) = x_2^0 - 2\mu(l_2 - tl_1)/l_1 - \mu t. \quad (7.6)$$

При фиксированном векторе $l \in \mathbb{R}^2$ последние формулы дают параметрическое семейство кривых $x_l(t)$, покрывающих поверхность трубки достижимости $\mathcal{X}[\cdot]$, а также опорные точки к гиперплоскостям, определяемым векторами $l \in \mathbb{R}^2$ по формуле $l(t) = (l_1, -tl_1 + l_2)$. Эти кривые показаны жирными линиями на рис. 2.

Рассмотрим две пары векторов $l \in \mathbb{R}^2$, например,

$$l^* = (-10, -4), \quad l^* = (10, 4); \quad l^{**} = (-4, 0), \quad l^{**} = (4, 0).$$

Каждая из этих пар порождает тугие эллипсоиды $\mathcal{E}^*[t]$ и $\mathcal{E}^{**}[t]$ согласно уравнениям (4.7), где элементы $x_{i,j}^*$ из X^* удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11}^* &= x_{12}^* + x_{21}^* + \pi(t)x_{11}^*, & \dot{x}_{12}^* &= x_{22}^* + \pi x_{12}^*, \\ \dot{x}_{21}^* &= x_{22}^* + \pi(t)x_{21}^*, & \dot{x}_{22}^* &= \pi(t)x_{22}^* + (\pi(t))^{-1} \end{aligned}$$

при $X^*(0) = 0$ и $\pi(t) = f_1(t)/f_2(t)$, и где

$$f_1(t) = \mu|l_2 - tl_1|, \quad f_2(t) = (x_{11}^* l_1^2 + 2x_{12}^* l_1(l_2 - tl_1) + x_{22}^*(l_2 - tl_1)^2)^{1/2}.$$

Эллипсоид $\mathcal{E}^{**}[t]$ вычисляется аналогично.

Здесь $\mathcal{E}^*[t]$ касается множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ в точках $x_l^*(t)$, определяемых вектором l^* по формулам (6.4), (6.6), а $\mathcal{E}^{**}[t]$ касается его в точках $x_l^{**}(t)$, определяемых вектором l^{**} по формулам (6.3), (6.5) (см. пересечения на рис. 3 для $t = 0.5$).

Для фиксированного момента t пересечение $\mathcal{E}^*[t] \cap \mathcal{E}^{**}[t] \supset \mathcal{X}[t]$ дает лучшую оценку множества $\mathcal{X}[t]$, чем четыре опорных гиперплоскости, которые соответствуют опорным точкам эллипсоидов. В то же время, если взять большее количество эллипсоидов с другими значениями l , то можно достичь более точной оценки множества $\mathcal{X}[t]$ (см. рис. 4 для семи эллипсоидов), стремящейся к точному множеству при стремлении количества выбранных соответствующим образом эллипсоидов к бесконечности.

8. Множества достижимости. Внутренние аппроксимации

В предыдущем разделе было введено семейство внешних эллипсоидальных аппроксимаций множеств достижимости и указаны его основные свойства. Далее покажем, что аналогичные свойства справедливы и для внутренних аппроксимаций, которые зачастую необходимы для решения задач гарантированного управления. Однако здесь имеет место, пожалуй, несколько более трудный случай по сравнению с внешними аппроксимациями.

Заметим сразу, что внутренний эллипсоид, оптимальный по объему, был изучен в [18]. Специальные типы внутренних эллипсоидальных аппроксимаций были предложены в [16]. Вместе с тем, в [27] было показано, что возможно точное представление множеств и трубок достижимости как объединения семейства внутренних эллипсоидов. Последние вычислялись посредством пошаговой процедуры, основанной на построении последовательности внутренних аппроксимаций сумм двух эллипсоидов [27]. Однако оставался открытым важный вопрос о том, каким образом можно эффективно вычислить внутреннюю аппроксимацию суммы любого числа эллипсоидов, а тем более вычислить внутренние эллипсоиды для интеграла от эллипсоидозначной функции. Кроме того, было необходимо, как и в случае внешней аппроксимации, выделять семейства тугих внутренних аппроксимаций трубок достижимости или их окрестностей, чтобы получить эллипсоидозначные функции, касающиеся границы трубки достижимости изнутри в любой точке этой границы. В последующих разделах дается ответ на поставленные вопросы.

Пусть, как и прежде, задана система (1.1) либо дифференциальное включение (1.3). Необходимо аппроксимировать соответствующие множества и трубки достижимости изнутри при помощи подходящих тугих семейств эллипсоидов и эллипсоидальнозначных трубок.

Изложение настоящего раздела основывается на построениях, описанных ранее в [27, 29].

Рассмотрим внутреннюю аппроксимацию суммы

$$\mathcal{E}(x^0, X^0) + \int_{t_0}^t \mathcal{E}(B(s)q(s), B(s)Q(s)B'(s))ds$$

n -мерного эллипсоида $\mathcal{E}(x^0, X^0)$ и многозначного интеграла эллипсоидозначной функции $\mathcal{E}(q(s), B(s)Q(s)B'(s))$ с симметричной $(p \times p)$ -матричной функцией $Q(s) > 0$, непрерывной на промежутке $[t_0, t]$.

Теорема 8.1. (i) *Имеет место включение*

$$\mathcal{E}(x^0, X^-(t)) \subseteq x(t) + \mathcal{E}(0, X^0) + \int_{t_0}^t \mathcal{E}(0, B(\tau)Q(\tau)B'(\tau))d\tau,$$

где

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t B(s)q(s)ds, \quad Q_B(\tau) = B(\tau)Q(\tau)B'(\tau),$$

какой бы ни была матрица

$$X^-(t) = \left(S_0 X_0^{1/2} + \int_{t_0}^t S(\tau)Q_B \tau^{1/2} d\tau \right)' \left(S_0 X_0^{1/2} + \int_{t_0}^t S(\tau)Q_B(\tau)^{1/2} d\tau \right), \quad (8.1)$$

где $S_0 S_0' = I$, $S'(\tau)S(\tau) \equiv I$ и $S(\tau)$ — ортогональные матрицы, $S(\tau)$ непрерывна по времени, $X^0 = (X^0)' > 0$, $Q(\tau) = Q'(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, — произвольные положительно определенные $(p \times p)$ -матрицы и $Q(\tau)$ непрерывна.

(ii) Для данного вектора $l \in \mathbb{R}^n$ соотношение

$$(l, x(t)) + \rho(l|\mathcal{E}(0, X^-(t))) \leq \rho(l|\mathcal{E}(0, X^0)) + \int_{t_0}^t \rho(l|\mathcal{E}(0, Q_B(\tau)))d\tau, \quad l \in \mathbb{R}^n, \quad (8.2)$$

выполняется в виде равенства тогда и только тогда, когда матрицы S_0 , $S(\tau)$ могут быть выбраны из того условия, что существует скалярная функция $\lambda(\tau)$, обеспечивающая равенство

$$S(\tau)Q_B^{1/2}(\tau)l = \lambda(\tau)S_0(X^0)^{1/2}l \quad (8.3)$$

при всех $\tau \in [t_0, t]$.

Перейдем к определению внутренних тугих эллипсоидов.

Определение 8.1. Внутренняя аппроксимация $\mathcal{E}_-$ множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ называется *тугой*, если существует такой вектор $l \in \mathbb{R}^n$, что

$$\rho(\pm l|\mathcal{E}_-) = \rho(\pm l|\mathcal{X}[t]).$$

Данное определение может быть применено ко множествам достижимости настоящей работы. Однако соответствующие эллипсоиды могут не быть единственными. Более общее определение выглядит следующим образом.

Определение 8.2. Внутренняя аппроксимация $\mathcal{E}_-$ называется *тугой* в классе $\mathbf{E}_-$, если для любого эллипсоида $\mathcal{E} \in \mathbf{E}_-$ из включения $\mathcal{X}[t] \supseteq \mathcal{E} \supseteq \mathcal{E}_-$ следует равенство $\mathcal{E} = \mathcal{E}_-$.

В данной работе предполагается, что класс $\mathbf{E}_- = \{\mathcal{E}_-\}$ характеризуется следующим определением.

Определение 8.3. Класс $\mathbf{E}_- = \{\mathcal{E}_-\}$ состоит из эллипсоидов вида $\mathcal{E}_-[t] = \mathcal{E}(x^*(t), X^-(t))$, где функция $x^*(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}^* = A(t)x^* + B(t)q(t), \quad x^*(t_0) = x^0, \quad t \geq t_0,$$

$X^-(t)$ имеет вид (8.1) и $q(t) \in \mathbb{R}^p$ — измеримая по Лебегу функция.

Последнее, в частности, означает, что если эллипсоид $\mathcal{E}(x, X) \subseteq \mathcal{X}[t]$ является тугим в $\mathbf{E}_-$, то не существует эллипсоида вида $\mathcal{E}(x, kX)$, $k > 1$, удовлетворяющего включениям

$$\mathcal{X}[t] \supseteq \mathcal{E}(x, kX) \supseteq \mathcal{E}(x, X)$$

(эллипсоид $\mathcal{E}(x, X)$ касается множества $\mathcal{X}[t]$ изнутри).

Определение 8.4. Далее будем говорить, что внутренний эллипсоид *тугой*, если он тугой в классе $\mathbf{E}_-$.

Далее нам фактически придется рассматривать лишь эллипсоиды $\mathcal{E}_- \in \mathbf{E}_-$. Для задач данной работы условия определения 8.1 будут обеспечиваться условиями определения 8.3. Однако в указанном случае, при заданном l , тугой эллипсоид будет уже единственным.

Класс $\mathbf{E}_-$ достаточно широк для построения эффективных вычислительных схем, хотя он и не охватывает множества всех возможных эллипсоидов. Оправданием использованию этого класса служат утверждения теоремы 8.1, в которой также приводятся условия того, чтобы внутренние эллипсоиды $\mathcal{E}(0, X^-(\tau))$ были тугими в предыдущем смысле.

Вернемся к уравнению

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (8.4)$$

(см. (1.1)). Теперь задача будет состоять в отыскании внутреннего эллипсоида $\mathcal{E}(x^*(t), X^-(t))$ для множества достижимости

$$\mathcal{X}[t] = G(t, t_0)\mathcal{E}(x^0, X^0) + \int_{t_0}^t G(t, \tau)B(\tau)\mathcal{E}(q(\tau), Q(\tau))d\tau.$$

Поскольку для матричных отображений справедливо соотношение

$$B\mathcal{E}(q, Q) = \mathcal{E}(Bq, BQB') = \mathcal{E}(Bq, Q_B),$$

то формула для $X^-(t)$ из теоремы 8.1 примет вид

$$\begin{aligned} X^-(t) = G(t, t_0) \left(X^0 S_0'(t_0) + \int_{t_0}^t G(t_0, \tau) Q_B^{1/2}(\tau) S'(\tau) d\tau \right) \times \\ \times \left(S_0(t_0) X^0 + \int_{t_0}^t S(\tau) Q_B^{1/2}(\tau) G'(t_0, \tau) \right) G'(t, t_0) \quad (8.5) \end{aligned}$$

и

$$x^*(t) = G(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t G(t, \tau)B(\tau)q(\tau)d\tau. \quad (8.6)$$

Теорема 8.1 теперь принимает следующий вид.

Теорема 8.2. *Внутренние эллипсоиды для множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ удовлетворяют включению*

$$\mathcal{E}(x^*(t), X^-(t)) \subseteq \mathcal{E}(G(t, t_0)x^0, G(t, t_0)X^0G'(t, t_0)) + \\ + \mathcal{E}\left(\int_{t_0}^t G(t, \tau)B(\tau)q(\tau)d\tau, \int_{t_0}^t G(t, \tau)Q_B(\tau)G'(t, \tau)d\tau\right) = \mathcal{X}[t], \quad (8.7)$$

где $X^-(t_0)$, $x^*(t_0)$ определены в (8.5), (8.6), причем S_0 , $S(\tau)$ — любые ортогональные матрицы, а $S(\tau)$ непрерывна по времени.

Условия, приводящее а тугим эллипсоидам, теперь записываются следующим образом.

Теорема 8.3. *Для заданного момента времени t внутренний эллипсоид $\mathcal{E}(x^*(t), X^-(t))$ будет тугим, касаясь $\mathcal{X}[t]$ в опорной точке x^* его касательной плоскости, порожденной заданным вектором l^* , а именно,*

$$\rho(l^*|\mathcal{X}[t]) = (l^*, x^*(t)) + \int_{t_0}^t (l^*, G(t, \tau)Q_B(\tau)G'(t, \tau)l^*)^{1/2}d\tau = \\ = \rho(l^*|\mathcal{E}(x^T\star(t), X^-(t))) = (l^*, x^*(t)) + (l^*, X^-(t)l^*)^{1/2} = (l^*, x^*), \quad (8.8)$$

тогда и только тогда, когда S_0 , $S(\tau)$ удовлетворяют соотношению

$$S(\tau)Q_B^{1/2}(\tau)G'(t, \tau)l^* = \lambda(\tau)S_0Q_B^{1/2}G'(t, t_0)l^*, \quad t_0 \leq \tau \leq t, \quad (8.9)$$

для некоторой функции $\lambda(\tau) \neq 0$.

Непосредственными вычислениями легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 8.1. *Функция $\lambda(\tau)$ из теоремы 8.3 определяется формулой*

$$\lambda(\tau) = (l^*, G(t, \tau)Q_B(\tau)G'(t, \tau)l^*)^{1/2}(l^*, G(t, t_0)X^0G'(t, t_0)l^*)^{-1/2}, \quad t_0 \leq \tau \leq t. \quad (8.10)$$

Теоремы 8.2, 8.3 были сформулированы для фиксированного момента времени t и фиксированного опорного вектора l^* . Представляется важным выяснить, что будет происходить при изменении l^* во времени.

9. ТРУБКИ ДОСТИЖИМОСТИ. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Начнем с задачи, аналогичной задаче 3.1, но сформулированной на этот раз для внутренних аппроксимаций.

Задача 9.1. *Для заданной вектор-функции $l^*(t)$, непрерывно дифференцируемой по t , требуется найти внутренний эллипсоид $\mathcal{E}(q_-(t), Q_-(t)) \subseteq \mathcal{X}[t]$, гарантирующий для всех $t \geq t_0$ равенство*

$$\rho(l^*(t)|\mathcal{X}[t]) = \rho(l^*(t)|\mathcal{E}(q_-(t), Q_-(t))) = (l^*(t), x^*(t)), \quad (9.1)$$

так что опорная гиперплоскость к $\mathcal{X}[t]$ в направлении $l^*(t)$, а именно, гиперплоскость $(x - x^*(t), l^*(t)) = 0$, касающаяся $\mathcal{X}[t]$ в точке $x^*(t)$, была бы одновременно опорной гиперплоскостью и для $\mathcal{E}(q_-(t), Q_-(t))$, касаясь этого множества в той же самой точке.

Указанная задача разрешима в классе $\mathbf{E}_-$. Чтобы решить эту задачу, обратимся к теоремам 8.2, 8.3. Однако заметим, что теперь функции $S(\tau)$ и $\lambda(\tau)$, использованные для параметризации в (8.5), (8.9), должны зависеть от двух переменных, а именно, от τ и t . (Соотношение (9.1) должно теперь выполняться для всех $t \geq t_0$ и, как следствие, S_0 также должно зависеть от t .) Таким образом, в теоремах 8.1, 8.3 параметры S_0 , $S(\tau)$, $\lambda(\tau)$ следует заменить на S_{0t} , $S_t(\tau)$, $\lambda_t(\tau)$.

Теорема 9.1. При заданном $l = l^*(t)$ решение задачи 9.1 есть эллипсоид $\mathcal{E}(q_-(t), Q_-(t))$, где

$$X^-(t) = G(t, t_0) \left((X^0)^{1/2} S'_{0t}(t_0) + \int_{t_0}^t G(t_0, \tau) Q_B^{1/2}(\tau) S'_t(\tau) d\tau \right) \times \\ \times \left(S_{0t}(t_0) Q^{01/2} + \int_{t_0}^t S_t(\tau) Q_B^{1/2}(\tau) G'(t_0, \tau) \right) G'(t, t_0), \quad (9.2)$$

причем $S_0, S_t(\tau)$ удовлетворяют соотношениям

$$S_t(\tau) Q_B^{1/2}(\tau) G'(t, \tau) l^*(t) = \lambda_t(\tau) S_{0t}(X^0)^{1/2} G'(t, t_0) l^*(t), \quad (9.3)$$

$S'_{0t} S_{0t} = I$, $S'_t(\tau) S_t(\tau) \equiv I$ при всех $t \geq t_0$, $\tau \in [t_0, t]$, где

$$\lambda_t(\tau) = (l^*(t), G(t, \tau) Q_B(\tau) G'(t, \tau) l^*(t))^{1/2} (l^*(t), G(t, t_0) Q^0 G'(t, t_0) l^*(t))^{-1/2}. \quad (9.4)$$

Доказательство осуществляется непосредственной подстановкой. Соответствующие соотношения приведены здесь в статической форме, и теорема 9.1 указывает, что вычисление функциональных параметров S_{0t} , $S_t(\tau)$, $\lambda_t(\tau)$ должно производиться заново для каждого нового момента времени t . Далее будет исследован вопрос о том, возможно ли производить вычисления рекуррентным способом, не прибегая к дополнительным повторным вычислениям.

Во всех эллипсоидальных аппроксимациях, рассмотренных в данной работе, центр аппроксимирующего эллипсоида всегда один и тот же, заданный как $x^*(t)$ из (8.6). Следовательно, обсуждение далее коснется лишь соотношений для $X_-(t)$.

Замечание 9.1. Результаты разделов 8, 9 справедливы и для вырожденных эллипсоидов $\mathcal{E}(x^0, X^0)$, $\mathcal{E}(q(t), Q(t))$. Это позволит далее применить эллипсоидальные методы к системам с ограничениями в виде параллелотопов.

Перейдем теперь к внутренним аппроксимациям трубок достижимости. Начнем с «хорошей» функции $l^*(t)$, а именно, с той, которая удовлетворяет предположению 4.1. Последнее требует, чтобы вектор $l^*(t)$ выбирался в виде $l^*(t) = G'(t_0, t)l$.

Подставляя $l^*(t)$ в (9.5), (9.6), замечаем, что соотношения для вычисления $S_t(\tau)$, $\lambda_t(\tau)$ преобразуются в следующие:

$$S_t(\tau) Q^{1/2}(\tau) G'(t_0, \tau) l = \lambda_t(\tau) S_{0t} Q_0^{1/2} l, \quad S'_0 S_0 = I, \quad S'(\tau) S(\tau) \equiv I, \quad (9.5)$$

$$\lambda_t(\tau) = (l, G(t_0, \tau) Q(\tau) G'(t_0, \tau) l)^{1/2} (l, Q_0 l)^{-1/2}. \quad (9.6)$$

Здесь известные функции, использованные для вычисления $S_t(\tau)$, $\lambda_t(\tau)$, не зависят от t . Однако тогда неизвестные функции $S_t(\tau)$, $\lambda_t(\tau)$ также не зависят от t , каким бы ни был интервал $[t_0, t]$. Следовательно, в рассматриваемой ситуации нижний индекс t в S_{0t} , S_t и λ_t может быть опущен.

Дифференцируя (9.2) и принимая во внимание предыдущее замечание, получаем

$$\dot{X}^- = A(t)X^- + X^- A'(t) + (\dot{X}_*^-)' X_*^- + (X_*^-)' \dot{X}_*^-, \quad (9.7)$$

где

$$X_*^-(t) = S_0 (X^0)^{1/2} G'(t, t_0) + \int_{t_0}^t S(\tau) Q_B^{1/2}(\tau) G'(t, \tau) d\tau, \\ \dot{X}_*^-(t) = S(t) Q_B^{1/2}(t), \quad X_*^-(t_0) = S_0 Q_0.$$

Используя обозначение

$$H(t) = (X_*^-)^{-1}(t) S(t) Q_B^{1/2}(t) = (X_*^-)^{-1}(t) \dot{X}_*^-(t), \quad (9.8)$$

приходим к уравнению

$$\dot{X}^- = A(t)X^- + X^- A'(t) + H'(t)X^-(t) + Q^-(t)H(t), \quad X^-(t_0) = X^0. \quad (9.9)$$

Дифференцирование (8.6) также дает

$$\dot{x}^* = A(t)x^* + B(t)q(t), \quad x^*(t_0) = x^{*0}. \quad (9.10)$$

В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 9.2. В условиях предположения 4.1 решение задачи 9.1 дается эллипсоидом $\mathcal{E}(x^*(t), X_-(t))$, где $X_-(t)$, $x^*(t)$ заданы уравнениями (9.9), (9.10), и функции $S(t)$, $\lambda(t)$, использованные при вычислении $H(t)$, удовлетворяют вместе с S_0 соотношениям (9.5), (9.6), где нижние индексы t в S_{0t} , S_t , λ_t могут быть опущены.

Лемма 9.1. Функция $H(t) = Q_*^{-1}(t)S(t)Q_B^{1/2}(t)$ в (9.9) может быть также выражена через уравнение

$$\dot{X}_*^- = X_*^- A'(t) + S(t)Q_B^{1/2}(t), \quad X_*^-(t_0) = S_0(X^0)^{1/2}. \quad (9.11)$$

Это дает следующий результат.

Лемма 9.2. Эллипсоид $\mathcal{E}(x^*(t), X_-(t))$ в теореме 9.1, заданный уравнениями (9.8)–(9.11), зависит от выбора ортогональной матричной функции $S(t)$, и для каждой такой функции $S(t)$ верно включение

$$\mathcal{E}(x^*(t), X_-(t)) \subseteq \mathcal{X}[t], \quad t \geq t_0.$$

При этом равенство (9.1) достигается при условиях (9.5), (9.6).

Предположим теперь, что в задаче 9.1 непрерывная вектор-функция $l(t)$ составлена из опорных векторов к поверхности $\mathcal{X}[t]$, построенных вдоль произвольной непрерывной кривой на этой поверхности. Тогда следует использовать формулу (9.2), имея в виду, что S_{0t} , $S_t(\tau)$ зависят от t . Продифференцировав (9.2) по t , замечаем, что (9.10) преобразуется в

$$\dot{X}^- = A(t)X^- + X^- A'(t) + H'(t)X^-(t) + X^-(t)H(t) + \Psi(t, \cdot), \quad X^-(t_0) = X^0, \quad (9.12)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(t, \cdot) = G(t, t_0) & \left((X^0)^{1/2} \frac{\partial S'_{0t}(t_0)}{\partial t} + \int_{t_0}^t G(t_0, \tau) Q_B^{1/2}(\tau) \frac{\partial S'_t(\tau)}{\partial t} d\tau \right)' \times \\ & \times \left(\frac{\partial S_{0t}(t_0)}{\partial t} (X^0)^{1/2} + \int_{t_0}^t \frac{\partial S_t(\tau)}{\partial t} Q_B^{1/2}(\tau) G'(t_0, \tau) d\tau \right) G'(t, t_0). \end{aligned}$$

Лемма 9.3. В условиях предположения 4.1 имеем $\Psi(t, \cdot) \equiv 0$.

Аналогично разделам 4, 5 приходим к следующему утверждению.

Теорема 9.3. Пусть $l(t)$ порождает кривую $x^*(t)$ соответствующих опорных точек на поверхности множества $\mathcal{X}[t]$, являющуюся траекторией системы (8.4) при некотором управлении $u(t)$. Тогда выполнено предположение 4.1, $l(t)$ является «хорошей» кривой и $\Psi(t, \cdot) \equiv 0$.

Проиллюстрируем полученные результаты на примере.

10. ПРИМЕР 2

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0; \quad |u| \leq \mu, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Здесь

$$x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t + \int_0^t (t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad x_2(t) = x_2^0 + \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Пусть $X^0 = \mathcal{B}_\varepsilon(0) = \{x : (x, x) \leq \varepsilon^2\}$. Опорная функция

$$\rho(l|\mathcal{X}[t]) = \max \{ (l, x(t)) \mid |u| \leq \mu, x^0 \in X^0 \}$$

множества достижимости $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t, 0, X^0)$ может быть найдена прямыми вычислениями и равна

$$\rho(l|\mathcal{X}[t]) = \varepsilon(l_1^2 + (l_1 t + l_2)^2)^{1/2} + \int_0^t |l_1(t - \tau) + l_2| d\tau.$$

Граница $\partial\mathcal{X}[t]$ множества достижимости $\mathcal{X}[t]$ представляет собой совокупность таких векторов, что

$$\min_l \{ \rho(l|\mathcal{X}[t]) - l_1 x_1 - l_2 x_2 \mid (l, l) = 1 \} = 0. \quad (10.2)$$

Последнее уравнение задает следующее параметрическое представление границы $\partial\mathcal{X}[t]$ при помощи двух ограничивающих кривых

$$x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t \pm \mu(t^2/2 - \sigma^2), \quad x_2(t) = x_2^0 \pm 2\mu\sigma - \mu t, \quad (10.3)$$

рассматриваемых при значениях параметра $\sigma < 0$. Значения $\sigma \geq 0$ соответствуют двум точкам, а именно, двум вершинам $\mathcal{X}[t]$. Здесь $\sigma = l_2^0/l_1^0$, где l_1^0, l_2^0 — минимизаторы в задаче (10.2).

Решая аналогичную задачу для всех $t > 0$, положим $l^0 = l(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \varepsilon l_1(t) (l_1^2(t) + (l_1(t)t + l_2(t))^2)^{-1/2} \pm \mu(t^2/2 - (tl_1(t) - l_2(t))^2/l_1^2(t)), \\ x_2(t) &= \varepsilon (l_1(t)t + l_2(t)) (l_1(t)^2 + (l_1(t)t + l_2(t))^2)^{-1/2} \pm 2\mu(l_2 - tl_1(t))/l_1(t) \pm \mu t, \end{aligned} \quad (10.4)$$

где $l \in \mathbb{R}^2, t \geq 0$.

Здесь для каждого $t, l^0 = l(t)$ — опорный вектор к $\mathcal{X}[t]$ в точке $x(t) \in \partial\mathcal{X}[t]$. Более того, при фиксированном t и при $x = x(t)$, пробегающем вдоль границы $\partial\mathcal{X}[t]$ (являющейся замкнутой кривой в $\mathbb{R}^2$ для данного t), опорный вектор $l^0 = l(t)$ выметет все направления в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, рассматривая любую функцию $l(t)$ от t при $t \geq t_0$, можем быть уверены в существовании соответствующей траектории $x(t) \in \partial\mathcal{X}[t]$ для $t \geq t_0$.

Далее выберем функцию $l(t)$, удовлетворяющую предположению 4.1, а именно, $l(t) = e^{-A't}l^*$. Последнее преобразуется в $l_1(t) = l_1^*, l_2(t) = l_2^* - tl_1^*$ и (10.4) упрощается до

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \varepsilon l_1(t) (l_1^{*2} + l_2^{*2})^{-1/2} \pm \mu(t^2/2 - (tl_1^* - l_2^{*2}(t))^2/l_1^{*2}(t)), \\ x_2(t) &= \varepsilon l_2(t) (l_1^{*2} + l_2^{*2})^{-1/2} \pm 2\mu(l_2^* - tl_1^*)/l_1^* \pm \mu t. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Эти соотношения зависят только от двумерного вектора l^* . Они порождают параметрическое семейство кривых $\{x_1(t), x_2(t)\}$, покрывающее всю поверхность трубки достижимости $\mathcal{X}[t]$, так что векторы $x(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$ будут опорными точками для гиперплоскостей, порожденных векторами $l(t) = \{l_1^*, -tl_1^* + l_2^*\}$. Трубка достижимости, выпущенная из $X^0 \neq 0$, показана на рис. 5 с хорошими кривыми на поверхности.

Теперь построим тугую внутреннюю эллипсоидальную аппроксимацию $\mathcal{X}[t]$, касающуюся границы $\partial\mathcal{X}[t]$ изнутри в опорных точках, полученных при данном векторе $l = l^*$.

Опорная функция $\rho(\mathcal{X}[t])$ точного множества достижимости может быть записана в виде

$$\rho(\mathcal{X}[t]) = \varepsilon(l^*, Il^*)^{1/2} + \mu \int_0^t (l^*, Q_B(\tau)l^*)^{1/2} d\tau, \quad (10.6)$$

где

$$B' = (0, 1), \quad Q_B(\tau) = \begin{pmatrix} \tau^2 & -\tau \\ -\tau & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_B^{1/2}(\tau) = Q_B(\tau)(1 + \tau^2)^{-1/2}.$$

В соответствии с (9.2), принимая во внимание предположение 4.1, имеем (полагая $S_0 = I$)

$$X^-(\tau) = \left(\varepsilon I + \int_0^t Q_B^{1/2}(\tau) S'(\tau) d\tau \right) \left(\varepsilon I + \int_0^t S(\tau) Q_B^{1/2}(\tau) d\tau \right), \quad (10.7)$$

где матрица $S(\tau)$ должна удовлетворять условиям

$$S'(\tau)S(\tau) = I, \quad S(\tau)Q_B^{1/2}(\tau)l^* = \varepsilon\lambda(\tau)l^*, \quad \tau \geq 0, \quad (10.8)$$

для некоторой функции $\lambda(\tau)$. После вычислений получаем

$$\varepsilon\lambda^2(\tau) = (l^*, Q_B(\tau)l^*)(l^*, l^*)^{-1} = (l_1^*\tau - l_2^*)^2(l_1^{*2} + l_2^{*2})^{-1}. \quad (10.9)$$

Введем обозначение

$$p(\tau) = Q_B^{1/2}(\tau)l^* = \begin{pmatrix} \tau^2 l_1^* - \tau l_2^* \\ -\tau l_1^* + l_2^* \end{pmatrix} (1 + \tau^2)^{-1/2} = r_p (1 + \tau^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} \cos \phi_p(\tau) \\ \sin \phi_p(\tau) \end{pmatrix},$$

где

$$r_p(\tau) = |l_1^*\tau - l_2^*|(1 + \tau^2)^{1/2}, \quad \phi_p(\tau) = \pm \arccos \frac{\tau^2 l_1^* - \tau l_2^*}{r_p} = \arccos \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^{1/2}},$$

$$l^* = (l^*, l^*)^{1/2} \begin{pmatrix} \cos \phi_l(\tau) \\ \sin \phi_l(\tau) \end{pmatrix}, \quad \phi_l = \pm \arccos \frac{l_1^*}{(l_1^{*2} + l_2^{*2})^{1/2}}.$$

Выбирая ортогональную матричную функцию $S(\tau)$ в виде

$$S(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(\tau) & -\sin \alpha(\tau) \\ \sin \alpha(\tau) & \cos \alpha(\tau) \end{pmatrix},$$

можем записать второе соотношение (10.8) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi_p(\tau) + \alpha(\tau)) \\ \sin(\phi_p(\tau) + \alpha(\tau)) \end{pmatrix} r_p(\tau)(1 + \tau^2)^{1/2} = \varepsilon\lambda(\tau)(l_1^{*2} + l_2^{*2})^{1/2} \begin{pmatrix} \cos \phi_l(\tau) \\ \sin \phi_l(\tau) \end{pmatrix}, \quad (10.10)$$

где $\tau \in [t_0, t]$. Здесь функция $\alpha(\tau)$ должна выбираться из условия

$$\phi_p(\tau) + \alpha(\tau) = \phi_l(\tau), \quad \tau \in [t_0, t], \quad (10.11)$$

а $\lambda(\tau)$ определяется соотношением (10.9).

В уравнениях (10.10), (10.11) не требуется повторных вычислений для новых значений t .

Таким образом, мы нашли ортогональную матричную функцию

$$S(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\phi_l(\tau) - \phi_p(\tau)) & -\sin(\phi_l(\tau) - \phi_p(\tau)) \\ \sin(\phi_l(\tau) - \phi_p(\tau)) & \cos(\phi_l(\tau) - \phi_p(\tau)) \end{pmatrix}, \quad (10.12)$$

которая зависит от l^* , непрерывна по τ и удовлетворяет (10.10).

Теперь матрица $X^-(t)$ может быть вычислена в соответствии с уравнениями

$$\dot{X}^- = (\dot{Q}_*^-)'(t)Q_*^-(t) + Q_*^-(t)\dot{Q}_*^-(t), \quad Q^-(0) = \varepsilon^2 I, \quad (10.13)$$

где

$$\dot{Q}_*^- = S'(t)Q_B^{1/2}(t), \quad X^-(0) = \varepsilon I.$$

Внутренние эллипсоиды для множества достижимости $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t, 0, X^0)$ показаны на рис. 6–8 для $X^0 = \mathcal{E}(0, \varepsilon I)$, при следующих значениях параметра ε : $\varepsilon = 0$ (рис. 6), $\varepsilon = 0.175$ (рис. 7) и $\varepsilon = 1$ (рис. 8). Трубка на рис. 5 соответствует значению параметра на рис. 7. Можно заметить, что точные области достижимости $\mathcal{X}(t, 0, 0)$, вычисленные при $\varepsilon = 0$, лежат внутри множеств $\mathcal{X}(t, 0, X^0) = \mathcal{X}[t]$, вычисленных при $\varepsilon \neq 0$ (см. рис. 7, 8).

11. ДОСТИЖИМОСТЬ В ТЕЧЕНИЕ ПРОМЕЖУТКА

Вычислим теперь множества достижимости в течение промежутка времени в соответствии с определением 3.1. Начиная с интервала $[\alpha, \beta]$ при $\alpha = t_0$, $\beta = \tau$, будем искать множество $\mathbf{X}[\tau] = \mathbf{X}(\tau, t_0, X^0)$.

Поступим следующим образом. Искомое множество $\mathbf{X}[\tau]$ представляет собой объединение

$$\mathbf{X}[\tau] = \bigcup \{ \mathcal{X}(t, t_0, X^0) \mid t \in [t_0, \tau] \}, \quad (11.1)$$

где согласно (4.8)

$$\mathcal{X}(t, t_0, X^0) = \bigcap \{ \mathcal{E}(x^*, X_-^{(l)*}(t)) \mid (l, l) \leq 1 \}. \quad (11.2)$$

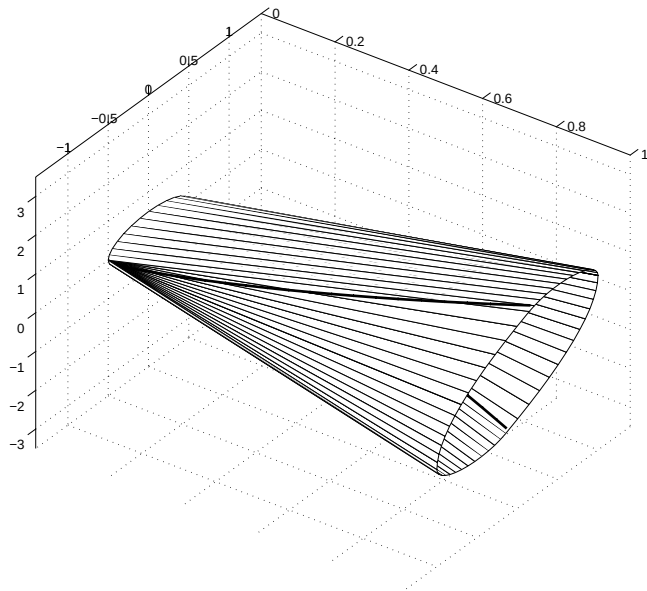


Рис. 5. Внутренняя трубка.

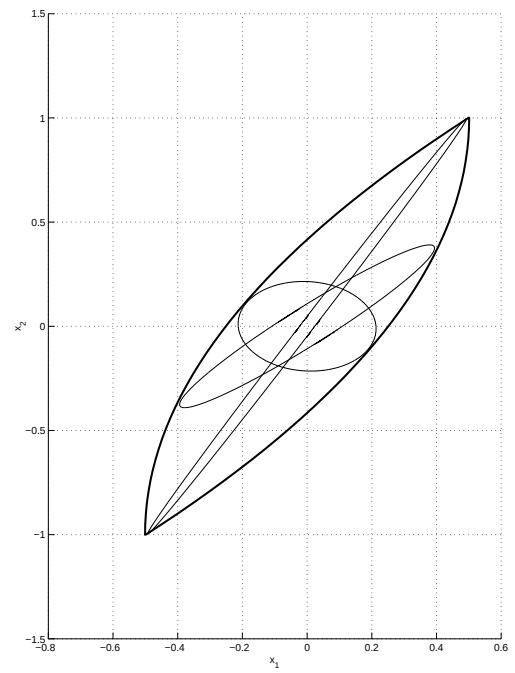
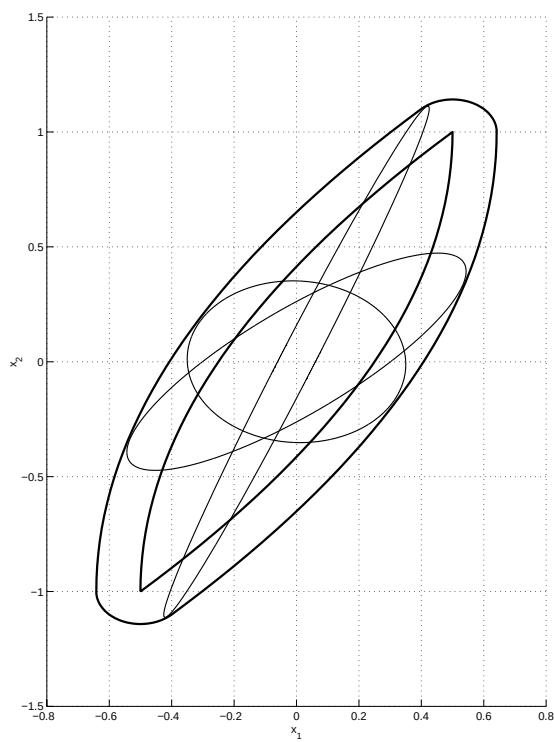
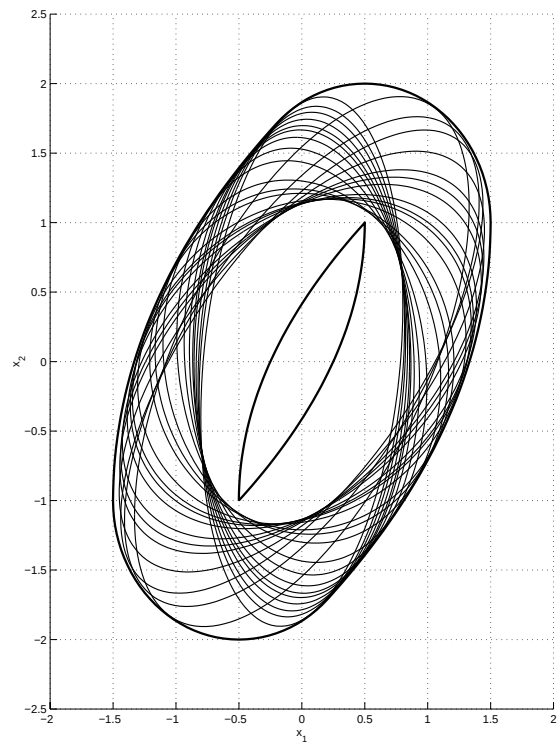


Рис. 6. Внутренние эллипсоиды к области достижимости.

Рис. 7. Внутренние эллипсоиды к окрестности ОД при $\varepsilon \neq 0$.Рис. 8. Много внутренних эллипсоидов к окрестности ОД при $\varepsilon \neq 0$.

Эллипсоиды имеют вид

$$\mathcal{E}(x^*, X_+^{(l)*}(t)) = \{x : V_+^{(l)}(t, x) \leq 1\},$$

где

$$V_+^{(l)}(t, x) = \{x : (x - x^*(t), (X_+^{(l)*})^{-1}(t)(x - x^*(t)))\}$$

и матрица $(X_+^{(l)*})^{-1}(t)$ изменяется в соответствии с уравнением (4.7) (или, что то же, с уравнением (5.12)), где $l(t)$ — «хорошие» кривые.

Соотношение (11.2) может быть записано в виде

$$\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}^0) = \{x : V_+(t, x) \leq 0\},$$

где

$$V_+(t, x) = \max_l \{V_+^{(l)}(t, x) \mid (l, l) \leq 1\}.$$

Тогда искомым множеством будет

$$\mathbf{X}[\tau] = \{\mathcal{V}_+(x) \leq 1\} \quad (11.3)$$

при

$$\mathcal{V}_+(x) = \min_t \{V_+^{(l)}(t, x) \mid t \in [t_0, \tau]\}.$$

Теорема 11.1. *Множество достижимости $\mathbf{X}[\tau]$ в течение промежутка времени $t \in [t_0, \tau]$ является множеством уровня*

$$\mathbf{X}[\tau] = \{x : \mathcal{V}_+(t, x) \leq 0\}.$$

Оно также может быть представлено в виде

$$\mathbf{X}[\tau] = \bigcup_t \bigcap_l \{\mathcal{E}(x^*, X_+(l)* (t)) \mid t \in [t_0, \tau], (l, l) \leq 1\}.$$

В общем случае $\mathbf{X}[\tau]$ не является выпуклым множеством.

Другой набор соотношений для того же множества $\mathbf{X}[\tau]$ может быть получен через внутренние эллипсоиды. В самом деле, согласно разделам 8, 9

$$\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}^0) = \bigcup \{\mathcal{E}(x^*, X_-^{(l)*}(t)) \mid (l, l) \leq 1\}, \quad (11.4)$$

где

$$\mathcal{E}(x^*, X_-^{(l)*}(t)) = \{x : V_-^{(l)}(t, x) \leq 1\},$$

$$V_-^{(l)}(t, x) = \{x : (x - x^*(t), (X_-^{(l)*})^{-1}(t)(x - x^*(t)))\}$$

и матрица $X_-^{(l)*}(t)$ изменяется в соответствии с уравнением (9.9).

Соотношения для множества достижимости $\mathbf{X}(\beta, \alpha, t_0, \mathcal{X}^0)$ в течение промежутка $t \in [\alpha, \beta]$ при $t_0 \leq \alpha \leq \beta \leq \tau$ выводятся аналогично.

12. ЗАДАЧА РАЗРЕШИМОСТИ.

УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ—БЕЛЛМАНА

Для заданного замкнутого «целевого» множества $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет смысл поставить задачу о нахождении совокупности всех состояний, из которых, стартуя в заданный момент τ , можно достичь целевого множества $\mathcal{M}$ в предписанный момент t_1 .

Определение 12.1. Пусть задана пара $\{t_1, \mathcal{M}\}$, где t_1 — «терминальный» момент времени, $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное целевое множество. Множеством разрешимости (попятной областью достижимости) $W[\tau] = W(\tau, t_1, \mathcal{M})$ в момент τ называется множество всех состояний $x \in \mathbb{R}^n$, для каждого из которых существует управление $u(t) \in \mathcal{Q}(t)$, переводящее систему (1.1) из позиции $\{\tau, x\}$, $x(\tau) = x$, в позицию $\{t_1, x(t_1)\}$, где $x(t_1) \in \mathcal{M}$. Мнозначная функция $W[t] = W(t, t_1, \mathcal{M})$, $\tau \leq t \leq t_1$, называется трубкой разрешимости на $\{t_1, \mathcal{M}\}$.

Следуя [9, 13], множество $W[\tau] = W(\tau, t_1, \mathcal{M})$ назовем *слабо инвариантным* относительно $\{t_1, \mathcal{M}\}$. Отметим, что множество $\mathbf{W}[\tau]$ называется *сильно инвариантным* относительно $\{t_1, \mathcal{M}\}$, если $X(t_1, \tau, \mathbf{W}[\tau]) \subseteq \mathcal{M}$.

Вычисление множеств разрешимости $W(\tau, t_1, \mathcal{M})$ можно реализовать, решая следующую задачу оптимизации.

Задача S. Найти функцию цены

$$V^0(\tau, x) = \min_u \{d^2(x(t_1), \mathcal{M}) \mid x(\tau) = x\}.$$

Рассмотрим «попятное» уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана

$$V_t^0 + \min_u \{(V_x^0, A(t)x + B(t)u)\} = 0 \quad (12.1)$$

с граничным условием

$$d^2(x(t_1), \mathcal{M}) = V^0(t_1, x). \quad (12.2)$$

Лемма 12.1. Если задача (12.1), (12.2) имеет единственное решение $V^0(t, x)$ (вязкостное или классическое), то $W(\tau, t_1, \mathcal{M})$ является множеством уровня

$$W(\tau, t_1, \mathcal{M}) = \{x : V^0(\tau, x) \leq 0\}.$$

Введем обозначение $V^0(t, x) = V^0(t, x|t_1, V^0(t_1, \cdot))$, подчеркивая зависимость $V^0(t, x)$ от начальных данных $V^0(t_1, x) = d^2(x, \mathcal{M})$.

Теорема 12.1. Многозначное отображение $W(t, t_1, \mathcal{M})$ удовлетворяет полугрупповому свойству

$$W(t, t_1, \mathcal{M}) = W(t, \tau, W(\tau, t_1, \mathcal{M})), \quad t \leq \tau \leq t_1 \quad (12.3)$$

(в попятном времени). Функция цены $V^0(t, x|t_1, V^0(t_1, \cdot))$ удовлетворяет принципу оптимальности в форме

$$V^0(t, x|t_1, V^0(t_1, \cdot)) = V^0(t, x|\tau, V^0(\tau, \cdot|t_1, V^0(t_1, \cdot))), \quad t \leq \tau \leq t_1. \quad (12.4)$$

Можно записать «попятное» эволюционное уравнение и для дифференциального включения (1.3) (см. [27]):

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{-1} h(W[t - \sigma], (I - \sigma A(t))W[t] + \sigma B(t)Q(t)) = 0 \quad (12.5)$$

с граничным условием $W[t_1] = \mathcal{M}$.

Лемма 12.2. Многозначное отображение $W[t] = W(t, t_1, \mathcal{M})$, $W[t_1] = \mathcal{M}$, является единственным решением уравнения (12.5).

Указанную оптимизационную схему, основанную на применении уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана, можно применить и к нахождению областей достижимости, рассмотренных выше.

Вычисление множеств достижимости $\mathcal{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0)$ в момент τ из позиции $\{t_0, \mathcal{X}^0\}$ можно реализовать, решая следующую задачу оптимизации.

Задача R. Найти функцию цены

$$V(\tau, x) = \min_u \{d^2(x(t_0), \mathcal{X}^0) \mid x(\tau) = x\}. \quad (12.6)$$

Рассмотрим «прямое» уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана

$$V_t + \max_u \{(V_x, A(t)x + B(t)u)\} = 0 \quad (12.7)$$

с начальным условием

$$d^2(x(t_0), \mathcal{X}) = V(t_0, x). \quad (12.8)$$

Лемма 12.3. Если уравнение (12.7), (12.8) имеет единственное решение $V(t, x)$ (вязкостное или классическое), то $\mathcal{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0)$ является множеством уровня

$$\mathcal{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0) = \{x : V(\tau, x) \leq 0\}.$$

Обозначим $V(t, x) = V(t, x|t_0, V(t_0, \cdot))$, подчеркивая зависимость $V(t, x)$ от начальных данных $V(t_0, x) = d^2(x, \mathcal{X}^0)$.

Теорема 12.2. Мнозначное отображение $\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}^0)$ удовлетворяет, как и ранее, в лемме 2.1, полугрупповому свойству

$$\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}^0) = \mathcal{X}(t, \tau, \mathcal{X}(\tau, t_0, \mathcal{X}^0)), \quad t \geq \tau \geq t_0$$

(в прямом времени). Функция цены $V(t, x|t_0, V(t_0, \cdot))$ удовлетворяет принципу оптимальности в форме

$$V(t, x|t_0, V(t_0, \cdot)) = V(t, x|\tau, V(\tau, \cdot|t_0, V(t_0, \cdot))), \quad t \geq \tau \geq t_0. \quad (12.9)$$

Для дифференциального включения (1.3) можно записать «прямое» эволюционное уравнение:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{-1} h(\mathcal{X}[t + \sigma], ((I + \sigma A(t))\mathcal{X}[t] + B(t)\mathcal{Q}(t))) = 0 \quad (12.10)$$

с начальным условием $\mathcal{X}[t_0] = \mathcal{X}^0$.

Лемма 12.4. Мнозначное отображение $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}^0)$, $\mathcal{X}[t_0] = \mathcal{X}^0$, является единственным решением уравнения (12.10).

Подход к решению задач управления при помощи уравнений Гамильтона—Якоби—Беллмана составляет основу метода динамического программирования для непрерывных систем [1, 15, 21]. В общем случае он получил распространение благодаря разработанной для этих уравнений в недавние годы теории обобщенных вязкостных решений и их эквивалентов [14, 19, 37], позволяющих справиться с эффектом негладкости. Для задач, рассматриваемых в данной работе, почти все искомые функции цены выпуклы и потому дифференцируемы по направлениям. Последнее обстоятельство позволяет не обращаться к обобщенным решениям.

Решение приведенных выше прямого и попятного уравнений Гамильтона—Якоби—Беллмана в общем случае непросто. Однако эти решения могут быть получены методами выпуклого анализа. Сказанное, в частности, справедливо для линейно-выпуклых систем, т.е. систем, линейных по x , u , с выпуклыми ограничениями на u , x^0 , каковыми являются рассматриваемые в данной части.

13. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ—БЕЛЛМАНА ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛЫХ СИСТЕМ

Вычисление областей достижимости линейных систем посредством формул выпуклого анализа хорошо известно. Ниже остановимся на вычислении решений уравнений типа Гамильтона—Якоби—Беллмана для таких задач.

Рассмотрим систему (1.1)

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

с непрерывными матричными коэффициентами $A(t)$, $B(t)$.

Для данного начального многозначного положения $\{t_0, \mathcal{X}^0\}$, конечного момента τ и условия $x(\tau) = x$, вычислим функцию цены $V(\tau, x)$ из (12.6) — решение уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана (12.7), (12.8), которое теперь имеет вид

$$V_\tau(\tau, x) + (V_x(\tau, x), A(\tau)x) + \rho(B'(\tau)V_x(\tau, x)|\mathcal{Q}(\tau)) = 0, \quad (13.1)$$

где, как и ранее, $\rho(l|\mathcal{Q})$ — опорная функция множества $\mathcal{Q}$. Начальное условие для уравнения (13.1) имеет вид

$$V(t_0, x) = \min_u d^2(x(t_0), \mathcal{X}^0) = \min_z \{(x(t_0) - z, x(t_0) - z) \mid z \in \mathcal{X}^0\}. \quad (13.2)$$

Здесь полезен тот факт, что функция $V(\tau, x)$ может быть вычислена с помощью двойственных методов выпуклого анализа [34] по схеме, приведенной, например, в [27, п. 1.5].

В самом деле, заметив, что сопряженной по x для функции $\phi(\tau, x) = d^2(x, \mathcal{X}^0)$ является $\phi^*(\tau, l) = \rho(l|\mathcal{X}^0) + 1/4(l, l)$, воспользовавшись теоремой о минимаксе [30], можем записать

$$\begin{aligned} V(\tau, x) &= \min_u \{\phi(t_0, x(t_0)) \mid x(\tau) = x\} = \min_u \max_l \left\{ (l, x(t_0)) - \frac{1}{4}(l, l) - \rho(l|\mathcal{X}^0) \right\} \\ &= \max_l \min_u \Psi(\tau, x, l, u(\cdot)), \end{aligned} \quad (13.3)$$

где

$$\Psi(\tau, x, l, u(\cdot)) = s(\tau, t_0, l)x - \int_{t_0}^{\tau} s(t, t_0, l)B(t)u(t)dt - \frac{1}{4}(l, l) - \rho(l|\mathcal{X}^0).$$

Здесь $s[t] = s(t, t_0, l)$ — решение сопряженного уравнения

$$\dot{s} = -sA(t), \quad s(t_0) = l',$$

где s, l' — вектор-строки.

Функция $\Psi(\tau, x, l, u(\cdot))$ вогнута по l и $\Psi(\tau, x, l, u(\cdot)) \rightarrow -\infty$ при $(l, l) \rightarrow \infty$. Она также выпукла по u , причем $u(t)$ ограничено (1.2). Это позволяет нам поменять местами $\min$ и $\max$ в (13.3) (см. [30], а также [27, п. 1.5]) и получить соотношение

$$V(\tau, x) = \max_l \Phi[\tau, x, l], \quad (13.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi[\tau, x, l] &= \min \{ \Psi(\tau, x, l, u(\cdot)) \mid u(t) \in \mathcal{Q}(t), t_0 \leq t \leq \tau \} \\ &= s(\tau, t_0, l)x - \int_{t_0}^{\tau} \rho(s(t, t_0, l)B(t)|\mathcal{Q}(t))dt - \frac{1}{4}(l, l) - \rho(l|\mathcal{X}^0). \end{aligned}$$

Непосредственной подстановкой функции $V(t, x)$ в (13.1) можно проверить, что она удовлетворяет этому уравнению с начальным условием (13.2). Действительно, дифференцируя функцию $V(t, x)$ по соответствующим правилам для функции минимакса [4, 27], находим

$$V_\tau(\tau, x) = -s(\tau, t_0, l^0)A(\tau) - \rho(s(\tau, t_0, l^0)B(\tau)|\mathcal{Q}(\tau)), \quad V_x(\tau, x) = s(\tau, t_0, l^0),$$

где l^0 — единственный максимизатор задачи (13.4), откуда и следует сказанное.

Полученные выше результаты подытожены в следующем утверждении.

Теорема 13.1. *Для линейной системы (1.1) функция цены $V(\tau, x)$ обладает следующими свойствами.*

- (i) Функция $V(\tau, x)$ имеет вид (13.4).
- (ii) Максимизатор $l^0(\tau, x) = \arg \max_l \Phi[\tau, x, l]$ единствен и непрерывен по τ, x .
- (iii) $V(\tau, x)$ — собственная выпуклая функция x , дифференцируемая по направлениям для всех τ, x .
- (iv) $V(\tau, x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби—Беллмана (13.1) для всех τ, x , а также начальному условию (13.2).

Второе утверждение следует из сильной выпуклости $\Phi(\tau, x, l)$ по l (из-за наличия квадратичного слагаемого) и из непрерывности $\Phi(\tau, x, l)$ по τ, x .

Свойство (iii) может быть проверено непосредственно исходя из явной формулы для решений, тогда как (iv) проверяется прямой подстановкой.

Для автономной системы имеем

$$V(\tau, x) = V(\tau, x|t_0, \mathcal{X}^0) = V(\tau - t_0, x|0, \mathcal{X}^0).$$

Аналогичная схема работает и для решения $V^0(\tau, x)$ уравнения (1.12). Опуская вычисления, укажем, что

$$V^0(\tau, x) = \max_l \Phi^0[\tau, x, l], \quad (13.5)$$

где

$$\Phi^0[\tau, x, l] = s(\tau, t_1, l)x - \int_{\tau}^{t_1} \rho(-s(t, t_1, l)B(t)|\mathcal{Q}(t))dt - \frac{1}{4}(l, l) - \rho(l|\mathcal{M}).$$

Замечание 13.1. Формулы вида (13.4), (13.5) могут быть получены и с другими критериями, например, с критерием $d(x(t_0, X^0))$, взятым вместо $d^2(x(t_0, X^0))$ в определениях функций $V(\tau, x)$, $V^0(\tau, x)$. Тогда слагаемое $1/4(l, l)$ должно быть опущено, а максимум нужно взять по единичному шару $(l, l) \leq 1$.

14. ПРИНЦИП СРАВНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ—БЕЛЛМАНА.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ

Как было показано выше, точное описание множеств и трубок достижимости требует решения сравнительно сложных уравнений в частных производных. Однако вместо точных решений иногда возможно удовлетвориться более простыми процедурами, приводящими к приближенным оценкам. В этом случае прибегают к *принципу сравнения* [3, 28]. Укажем на возможность применения этого принципа для получения эллипсоидальных оценок областей достижимости.

Для системы вида (1.1) решение $V^0(t, x)$ уравнения

$$V_t^0 + H_0(t, x, V_x^0) = 0, \quad (14.1)$$

где

$$H_0(t, x, p) = \min\{(p, A(t)x + B(t)u) \mid u \in \mathcal{P}(t)\},$$

дает описание множества $W[t] = W(t, t_1, \mathcal{M})$, поскольку $W[t]$ — множество уровня для $V^0(t, x)$.

Теорема 14.1. Пусть существует функция $H_+(t, x, p)$ и функции $w(t, x) \in C_1$, $\nu(t) \in L_1$, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} H_0(t, x, p) &\geq H_+(t, x, p) \quad \forall \{t, x, p\}, \\ w_t + H_+(t, x, w_x) &\geq \nu(t). \end{aligned}$$

Тогда существует верхняя оценка

$$W_+[\tau] \supseteq W[\tau],$$

где

$$W_+[\tau] = \left\{ x : w(\tau, x) \leq \max_{x \in \mathcal{M}} \{w(t_1, x)\} - \int_{\tau}^{t_1} \nu(s) ds \right\}.$$

Пусть имеются управление $u^*(t) \in \mathcal{Q}(s)$, $t \in [\tau, t_1]$, и вектор x^* , порождающие траекторию $x^*(t)$ системы (1.1), приводящую к включению $x^*(\tau) \in W[\tau]$. Тогда

$$\left. \frac{dw(t, x)}{dt} \right|_{x=x^*(\cdot)} = w_t(t, x^*) + H_0(t, x^*, w_x) \geq w_t(t, x^*) + H_+(t, x^*, w_x) \geq \nu(t).$$

Интегрируя от τ до t_1 и учитывая условия теоремы, получим

$$w(\tau, x^*(\tau)) \leq w(t_1, x^*(t_1)) - \int_{\tau}^{t_1} \nu(s) ds \leq \max \{w(t_1, x^*(t_1)) \mid x^*(t_1) \in \mathcal{M}\} - \int_{\tau}^{t_1} \nu(s) ds.$$

Следовательно, $x^*(t_1) \in W_+[\tau]$.

Аналогичная теорема справедлива и для прямых областей достижимости (см. [28]), а также для внутренних оценок.

Предположим теперь, что ограничение на $u(t)$ и целевое множество $\mathcal{M}$ заданы при помощи эллипсоидов

$$u(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad \mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M). \quad (14.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_0(t, x, p) &= (p, A(t)x) - (p, B(t)Q(t)B'(t)p)^{1/2} + (p, B(t)q(t)) \\ &\geq (p, A(t)x + B(t)q(t)) - \mu(t) - \frac{1}{4\mu(t)1} (p, B(t)Q(t)B'(t)p) = H_+(t, p, x) \end{aligned} \quad (14.3)$$

для любого $\mu(t) > 0$, с условием равенства, достижимым при

$$\mu(t) = \mu_e(t, p) = \frac{1}{2}(p, B(t)Q(t)B'(t)p)^{1/2}.$$

Будем искать $w(t, x)$ в виде квадратичной формы $w(t, x) = (x - x^*(t), P(t)(x - x^*(t)))$, потребовав, чтобы w удовлетворяла уравнению в частных производных

$$w_t + (w_x, A(t)x + B(t)q(t)) - \frac{1}{4\mu(t)}(w_x, B(t)Q(t)B'(t)w_x) = 0 \quad (14.4)$$

с граничным условием

$$w(t_1, x) \equiv (x - m, M^{-1}(x - m)). \quad (14.5)$$

Тогда после интегрирования от τ до t_1 приходим к неравенству

$$w(\tau, x(\tau)) \leq w(t_1, x(t_1)) + \int_{\tau}^{t_1} \mu(s)ds \leq 1 + \int_{\tau}^{t_1} \mu(s)ds. \quad (14.6)$$

Здесь $P(t)$ может быть получено путем решения уравнения Риккати

$$\dot{P} = -A(t)P - PA'(t) - \frac{1}{\mu(t)}(P, B(t)Q(t)P'(t)), \quad (14.7)$$

где $P(t_1) = M^{-1}$, причем

$$\dot{x}^* = A(t)x^* + B(t)q(t), \quad x^*(t_1) = m.$$

Преобразования

$$\dot{P} = -P\dot{P}P, \quad P = P^{-1}, \quad P_+(t) = \left(1 + \int_{\tau}^{t_1} \mu(s)ds\right) P(t)$$

приводят (14.7) к виду

$$\dot{P}_+ = P_+A(t) + A'(t)P_+ - \frac{1}{\gamma(t)}B(t)Q(t)B'(t) - \gamma(t)P_+, \quad P_+(t_1) = M. \quad (14.8)$$

Здесь при заданном τ имеем

$$\gamma(t) = \mu(t) / \left(1 + \int_{t_0}^t \mu(s)ds\right),$$

и уравнение (14.8) совпадает с (4.8), если положить $\gamma(t) = \pi(t)$.

Множества уровня функций $w(t, x) = w_{\gamma}(t, x)$ являются эллипсоидами $\mathcal{E}(x^*(t), P_+(t)) = \mathcal{E}(x^*(t), P_+(t|\gamma))$, зависящими от параметризующей функции $\gamma(\cdot) = \gamma(s)$, $s \in [t_0, t]$, а именно,

$$\{x : w_{\gamma}(t, x) \leq 1\} = \mathcal{E}(0, P_+(t|\gamma)). \quad (14.9)$$

Выбирая различные функции $\gamma_i(\cdot)$, приходим к оценке

$$\mathcal{X}[t] \in \bigcap_i \{\mathcal{E}(x^*(t), P_+(t|\gamma)) \mid 1 \leq i \leq k\}. \quad (14.10)$$

Среди построенных эллипсоидов $\mathcal{E}(x^*(t), P_+(t|\gamma))$ содержатся и тугие. В последнем случае функции $\gamma(\cdot)$ следует выбирать согласно процедурам разделов 8, 9, обеспечивая также свойство рекуррентности полученных оценок.

15. ОБЛАСТИ РАЗРЕШИМОСТИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЙ

Эллипсоидальные оценки для областей разрешимости (попятных областей достижимости) выводятся аналогично оценкам прямых областей достижимости. Приведем соответствующие результаты.

Теорема 15.1. Пусть задана система (1.1) с целевым множеством $\mathcal{E}(m, M)$ и эллипсоидальными ограничениями $u(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t))$.

(i) Справедливы включения

$$\mathcal{E}(x(\tau), X_-^{(l)}(\tau)) \subseteq W[\tau] \subseteq \mathcal{E}(x(\tau), X_+^{(l)}(\tau)), \quad (15.1)$$

где $\mathcal{E}(x(\tau), X_+^{(l)}(\tau))$ и $\mathcal{E}(x(\tau), X_-^{(l)}(\tau))$ — внешние и внутренние эллипсоидальные аппроксимации множества $W[\tau]$.

(ii) Вектор $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)q(t), \quad x(t_1) = m, \quad (15.2)$$

матрица $X_+^{(l)}(t)$ — уравнению

$$\dot{X}_+^{(l)} = A(t)X_+^{(l)} + X_+^{(l)}A(t) - \pi(t)X_+^{(l)} - \pi^{-1}(t)B(t)Q(t)B'(t), \quad (15.3)$$

где

$$\pi(t) = (l(t), Q(t)l(t))(l(t), X_+^{(l)}(t)l(t))^{1/2}, \quad (15.4)$$

причем $l(t) = G'(t - t_0)l$, $l \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Для каждого вектора $l \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\rho(l|\mathcal{E}(x(t), X_+^{(l)}(t))) = \rho(l|\mathcal{X}[t]) \quad (15.5)$$

(эллипсоид $\mathcal{E}(x(t), X_+^{(l)}(t))$ является тугим).

(iv) Матрица $X_-^{(l)}(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{X}_-^{(l)} = A(t)X_-^{(l)} + X_-^{(l)}A'(t) - H^{(l)'}(t)X_-^{(l)}(t) - Q^-(t)H^{(l)}(t), \quad X_-^{(l)}(t_1) = M, \quad (15.6)$$

где

$$\begin{aligned} H^{(l)}(t) &= (X_-^{(l)*})^{-1}(t)S^{(l)}(t)Q_B^{1/2}(t) = (X_-^{(l)*})^{-1}(t)\dot{X}_-^{(l)*}(t), \\ X_-^{(l)*}(t) &= S_m^{(l)}(M)^{1/2}G'(t, t_0) - \int_{t_0}^t S^{(l)}(\tau)Q_B^{1/2}(\tau)G'(t, \tau)d\tau, \end{aligned} \quad (15.7)$$

$$\dot{X}_-^{(l)*}(t) = S^{(l)}(t)Q_B^{1/2}(t), \quad X_-^{(l)*}(t_1) = S_m^{(l)}M^{1/2}.$$

Ортогональные матрицы $S_m^{(l)}, S(\tau)^{(l)}$ удовлетворяют условиям

$$S_m^{(l)'}S_m^{(l)} = I, \quad S^{(l)'}(\tau)S^{(l)}(\tau) \equiv I,$$

$$S^{(l)}(\tau)Q^{1/2}(\tau)G'(t_0, \tau)l = (l, G(t_0, \tau)Q(\tau)G'(t_0, \tau)l)^{1/2}(l, Ml)^{-1/2}$$

и, следовательно, зависят от l .

(v) Для каждого вектора $l \in \mathbb{R}^n$ справедливо условие совпадения значений опорных функций

$$\rho(l|\mathcal{E}(x(t), X_-^{(l)}(t))) = \rho(l|\mathcal{X}[t]) \quad (15.8)$$

(эллипсоид $\mathcal{E}(x(t), X_-^{(l)}(t))$ является тугим).

(vi) Справедливы равенства

$$\bigcup \left\{ \mathcal{E}(x(t), X_-^{(l)}(\tau)) \mid (l, l) \leq 1 \right\} = W[\tau] = \bigcap \left\{ \mathcal{E}(x(t), X_+^{(l)}(\tau)) \mid (l, l) \leq 1 \right\}. \quad (15.9)$$

Данная теорема сформулирована для тугих эллипсоидов, расположенных вдоль хороших кривых вида $l(t) = G'(t_0, t)l$. Равенство (15.9) вытекает из условий (15.8).

Перейдем теперь к построению *стратегии синтеза целевого управления* при помощи эллипсоидальных методов. Не умаляя общности и следуя замечанию в разделе 1, положим $A(t) \equiv 0$. Такой прием позволит избежать громоздких вычислений.

Задача 15.1. Пусть задана система

$$\dot{x} = B(t)u, \quad u(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \quad (15.10)$$

и целевое множество $\mathcal{M} = \mathcal{E}(m, M)$. Требуется найти многозначную синтезирующую стратегию $u = U(t, x)$, переводящую систему (15.10) из любой заданной позиции $\{\tau, x(\tau)\}$, $x(\tau) \in W[\tau]$, в множество $\mathcal{M}$ в момент t_1 . Найденная стратегия $u = U(t, x)$ не должна нарушать свойства существования решения дифференциального включения (15.10).

Решение указанной задачи хорошо известно. Его можно найти, зная трубку разрешимости $W[t]$, $t \in [\tau, t_1]$ (эта трубка известна как «мост Н. Н. Красовского»). Соответствующее решение тогда получается из «правила экстремального прицеливания», подробно изложенного в [7, 25].

Покажем, что решение задачи 9.1 можно получить, оперируя лишь эллипсоидальнозначными функциями.

Пусть задана позиция $\{\tau, x(\tau)\}$, а также параметризованное семейство эллипсоидальных трубок $\mathcal{E}(x(t), X_-^{(l)}(t))$, $t \in [\tau, t_1]$, полученных согласно теореме 15.1. Для заданной позиции решение задачи 15.1 существует лишь в том случае, когда $x \in W[\tau]$. Полагая $x \in W[\tau]$, выберем (за счет выбора конечномерного параметра $l \in \mathbb{R}^n$) внутреннюю эллипсоидальную трубку $\mathcal{E}^{(l)}[\tau] = \mathcal{E}(x(t), X_-^{(l)}(t))$, $t \in [\tau, t_1]$, для которой $x \in \mathcal{E}^{(l)}[\tau]$. Очевидно, что такая трубка существует в силу свойства (vi) предыдущей теоремы. Далее будем работать с выбранной трубкой как с «мостом Красовского» в правиле экстремального прицеливания. Использовать эллипсоидальную трубку удобнее, чем точную трубку разрешимости, так как в эллипсоидальном случае все вспомогательные операции записываются в явном виде.

Итак, пусть трубка $\mathcal{E}(x(t), X_-^{(l)}(t))$, $t \in [\tau, t_1]$, выбрана. Искомую стратегию зададим, начиная с $\tau = t$, в виде

$$\mathcal{U}_-(t, x) = \begin{cases} \mathcal{E}(q(t), Q(t)), & x \in \mathcal{E}(x(t), X_-^{(l)}(t)), \\ q(t) - Q(t)l^0(l^0, Q(t)l^0)^{-1/2}, & x \notin \mathcal{E}(x(t), X_-^{(l)}(t)). \end{cases} \quad (15.11)$$

Здесь $l^0 = l^0(t, x)$ — единичный вектор, решающий задачу

$$d[t, x] = (l^0, x) - \rho(l^0 | \mathcal{E}(x(t), X_-^{(l)}(t))) = \max \{ (l, x) - \rho(l | X_-^{(l)}(t)) \mid (l, Tl) \leq 1 \}, \quad (15.12)$$

матрица $T = T' > 0$,

$$d^2[t, x] = \min \{ (x - z, x - z) \mid z \in \mathcal{E}(x(t), X_-^{(l)}(t)) \}. \quad (15.13)$$

Задача (15.12) решается при помощи стандартных приемов (см. [27, с. 210]). Она решается особенно просто, если положить $T = X_-^{(l)}(t)$. В этом случае максимизатор имеет вид

$$l^0(t, x) = T^{-1}x(x, T^{-1}x)^{1/2}.$$

Покажем теперь, что эллипсоидальнозначная стратегия $\mathcal{U}_-(t, x)$ из (15.11) решает задачу синтеза, если только начальная позиция $x_\tau = x[\tau] \in \mathcal{E}(x(\tau), X_-^{(l)}(\tau)) = \mathcal{E}^{(l)}[\tau]$ при некотором l . В самом деле, пусть $x_\tau \in \mathcal{E}^{(l)}[\tau]$, где $x[t] = x(t, \tau, x_\tau)$, $\tau \leq t \leq t_1$, — соответствующая траектория. Покажем, что любое решение $x[t]$ из (15.10) будет гарантировать включение $x[\tau] \in \mathcal{E}(m, M)$.

Вычисляя

$$d[t] = d[t, x[t]] = \max \{ (l, x[t]) - \rho(l | \mathcal{E}_-[t]) \mid \|l\| \leq 1 \}$$

при $d[t] > 0$, получим

$$\frac{d}{dt}d[t] = \frac{d}{dt}((l^0, x[t]) - \rho(l^0 | \mathcal{E}_-[t]))$$

и, вследствие единственности максимизатора $l^0 \neq 0$,

$$\frac{d}{dt}d[t] = (l^0, \dot{x}[t]) - \frac{\partial}{\partial t} \rho(l^0 | \mathcal{E}_-^{(l)}[t]) = \left(l^0, B(t)u(t) - \frac{d}{dt}((l^0, x(t)) + (l^0, X_-^{(l)}(t)l^0)^{1/2}) \right). \quad (15.14)$$

Далее следует воспользоваться формулами (15.6)–(15.8). В рассматриваемом случае они имеют следующий вид (поскольку вектор l уже выбран, верхний индекс l далее опускаем, чтобы не усложнять обозначения):

$$\begin{aligned} X_-(t) &= X_-^{*'}(t)X_-^*(t), \quad X_-^*(t) = S_m M^{1/2} - \int_t^{t_1} S(\tau) Q_B^{1/2}(\tau) d\tau, \\ S(\tau) Q_B^{1/2}(\tau) l &= \lambda(\tau) S_m M^{1/2} l, \quad \lambda(\tau) = (l, Q_B(\tau) l)^{1/2} (l, M l)^{1/2}, \\ \dot{X}_- &= \dot{X}_-^{*'} X_-^* + X_-^{*'} \dot{X}_-. \end{aligned}$$

Вычисляя

$$\frac{d}{dt}((l^0, x(t)) + (l^0, X_-^{(l)}(t)l^0)^{1/2})$$

с помощью указанных формул и подставляя результаты в (15.14), получим

$$\frac{d}{dt}d[t] = (l^0, u(t)) - (l^0, q(t)) + (l, Q_B(t)l)^{1/2},$$

где $u(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q_B(t))$. Отсюда видно, что стратегия $\mathcal{U}_-(t, x)$ из (15.11) с вектором $l^0 = l^0(t, x)$ из (15.12) обеспечивает неравенство

$$\left. \frac{d}{dt}d[t] \right|_u \leq 0$$

при $u[t] \in \mathcal{U}_-(t, x)$. Отметим, что при $d[t] > 0$ имеем

$$\mathcal{U}_-(t, x) = \arg \min \{ (l^0, u) \mid u \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \}.$$

Интегрируя $dd[t, x[t]]/dt$ от τ до t_1 , получаем

$$d[\tau, x[\tau]] = d[t_1, x[t_1]] = d(x[t_1], \mathcal{E}(m, M)) = 0,$$

что означает включение $x[t_1] \in \mathcal{E}(m, M)$ при $x[\tau] \in \mathcal{E}^{(l)}[\tau] \subseteq W(\tau)$, каково бы ни было решение дифференциального включения (15.12), выпущенного из позиции $\{\tau, x\} \in W[\tau]$.

Теорема 15.2. *Решение задачи 15.1 доставляет «эллипсоидальная» стратегия вида $\mathcal{U}_-(t, x)$.*

Замечание 15.1. В данном обзоре было описано применение эллипсоидальных методов к вычислению трубок траекторий систем управления. Отмечена связь такого подхода с методом динамического программирования. В общем случае решение подобных задач может быть сведено к решению уравнений типа Гамильтона—Якоби—Беллмана. Среди подходов к численному решению последних следует отметить работы [33, 36].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. — М., 1968.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
3. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. — М.: Наука, 1997.
4. Демьянов В. Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям. — Изд-во ЛГУ, 1974.
5. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
7. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970.
8. Куржанский А. Б., Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977.
9. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
10. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1970.
11. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1970.

12. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.
13. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued calculus. — Boston: Birkhäuser, 1990.
14. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. — Boston: Birkhäuser, 1997.
15. Bertsekas D. P. Dynamic programming and optimal control. — Athena Scientific, 1995.
16. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. — SIAM, 1994.
17. Callier F. M., Desoer C. A. Linear system theory. — New York: Springer-Verlag, 1991.
18. Chernousko F. L. State estimation for dynamic systems. — CRC Press, 1994.
19. Crandall M. G., Evans L. C., Lions P.-L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations// Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — 282, № 2. — С. 487–502.
20. Filippov A. F. Differential equations with discontinuous right-hand sides. — Dordrecht, 1988.
21. Fleming W. H., Soner H. M. Controlled Markov processes and viscosity solutions. — New York, 1993.
22. Gayek J. E. A survey of techniques for approximating reachable and controllable sets// Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. — Brighton, 1991. — С. 1724–1729.
23. Kailath T. Linear systems. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1980.
24. Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming// Combinatorica. — 1984. — 4, № 4. — С. 373–395.
25. Krasovski N. N., Subbotin A. N. Game-theoretical control problems. — New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.
26. Kurzhanski A. B., Fillippova T. F. On the theory of trajectory tubes: a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control// Adv. Nonlin. Dynam. Control. Ser. PSCT. — Boston, 1993. — 17. — С. 122–188.
27. Kurzhanski A. B., Valyi I., Ellipsoidal calculus for estimation and control. — Boston: Birkhäuser, 1997.
28. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Dynamic optimization for reachability problems// J. Optim. Theory Appl. — 2001. — 108, № 2. — С. 227–251.
29. Kurzhanski A. B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations. Part II: Internal approximations, Box-valued constraints// Optimization Methods and Software. — 2002. — 17. — С. 177–237.
30. Ky Fan, Minimax theorems// Proc. Natl. Acad. Sci. — 1953. — 39, № 1. — С. 42–47.
31. Lee E. B., Marcus L. Foundations of optimal control theory. — New York: Wiley, 1967.
32. Leitmann G. Optimality and reachability via feedback controls// Dynamic Systems and Mycrophysics/ Blaquièrre A., Leitmann G., eds. — 1982.
33. Osher S., Fedkiw R. Level set methods and dynamic implicit surfaces. — Springer-Verlag, 2003.
34. Rockafellar R. T., Wets R. J. Variational analysis. — New York: Springer-Verlag, 1997.
35. Schweppe F. Uncertain dynamic systems. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1973.
36. Sethian J. A. Level set methods and fast marching methods. — Cambridge Univ. Press, 1999.
37. Subbotin A. I. Generalized solutions of first-order partial differential equations. The dynamical optimization perspective. — Boston: Birkhäuser, 1995.

П. Варайя
 University of California at Berkeley,
 EECS, ERL, Berkeley, CA, 94720-1774, USA
 E-mail: varaiya@eecs.berkeley.edu

А. Б. Куржанский
 Московский государственный университет
 E-mail: kurzhans@mail.ru

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ОДНОГО ВАРИАНТА МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2005 г. **М. С. НИКОЛЬСКИЙ**

Аннотация. Работа посвящена изучению вопроса о сходимости одной из модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления.

1. И. А. Крылов и Ф. Л. Черноусько [4, 5] разработали известный метод последовательных приближений для решения задач оптимального управления. К настоящему времени создано уже несколько модификаций этого метода (см. [6]).

Статья посвящена изучению вопроса о сходимости одной из модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления, принадлежащей А. А. Любушину (см. [7]).

Рассматривается управляемая система (см. [7, 10])

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где величина $T > 0$ фиксирована, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^r$, U — компакт в $\mathbb{R}^r$. Символом $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, обозначается k -мерное арифметическое пространство, элементами которого являются k -мерные наборы из k действительных чисел, записываемые в виде столбцов, со скалярным произведением

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^k a_i b_i,$$

где a_i , b_i — компоненты векторов a , b из $\mathbb{R}^k$. Символом $|a|$ условимся обозначать длину (модуль) вектора a , т.е. $|a| = \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \right)^{1/2}$. Введем обозначение $\Delta = [0, T]$. Допустимые управления $u = u(t) \in U$, $t \in \Delta$ будем рассматривать в классе измеримых по Лебегу функций, а соответствующие решения задачи Коши (1) в классе абсолютно непрерывных функций (см. [10]). На всевозможных допустимых управлениях $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, минимизируется терминальный функционал

$$J(u(\cdot)) = \varphi(x(T)). \quad (2)$$

В дальнейшем предполагается, что выполнены следующие условия:

- 1) функция $f(x, t, u)$ непрерывна по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируема по x на $\mathbb{R}^n \times \Delta \times U$, а функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^n$;
- 2) при $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \Delta$, $u \in U$ выполняется неравенство

$$\langle x, f(x, t, u) \rangle \leq c(1 + |x|^2), \quad (3)$$

где $c > 0$ — константа.

Как известно из теории (см. [10, 11]), при сделанных предположениях при произвольном допустимом управлении $u = u(t) \in U$, $t \in \Delta$, соответствующее решение $x(t)$ задачи Коши (1) существует и единственно на всем отрезке Δ . Более того, для решений $x(t)$ при произвольных допустимых $u(\cdot)$ в силу (3) справедлива следующая равномерная оценка (см. [11]):

$$|x(t)| \leq c_1, \quad t \in \Delta, \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 02-01-00334, 03-01-00474).

где

$$c_1 = e^{cT}(1 + |x_0|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Предположим также, что

- 3) при $|x| \leq c_1$ (см. (4), (5)), $t \in \Delta$, $u \in U$ функции $f(x, t, u)$, $\varphi(x)$ вместе со своими первыми частными производными по x_i удовлетворяют условию Липшица по (x, u) с константой, независимой от $t \in \Delta$.

Пусть $u(t)$ — произвольное допустимое управление на Δ , а $x_u(t)$ — соответствующее решение задачи Коши (1) на отрезке Δ . Пары функций $u(\cdot)$, $x_u(\cdot)$ отвечает единственное решение $\psi_u(t)$ следующей линейной задачи Коши:

$$\dot{\psi} = -f_x^*(x_u(t), t, u(t))\psi, \quad \psi(T) = -\nabla\varphi(x_u(T)),$$

где $*$, ∇ означают транспонирование матрицы и градиент функции по x . Введем обозначения

$$\Delta_u H(t) = M(x_u(t), \psi_u(t), t) - \langle \psi_u(t), f(x_u(t), t, u(t)) \rangle, \quad (6)$$

$$M(x, \psi, t) = \max_{u \in U} \langle \psi, f(x, t, u) \rangle, \quad (7)$$

$$\gamma(u(\cdot)) = \int_0^T \Delta_u H(s) ds. \quad (8)$$

При сделанных выше предположениях модификация метода последовательных приближений из [7] гарантирует, в частности, что для последовательных приближений

$$u^{(k)}(t) \in U, \quad t \in \Delta, \quad k = 0, 1, \dots,$$

которая там строится, выполняется следующее важное соотношение (см. (8)):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(u^{(k)}(\cdot)) = 0. \quad (9)$$

Займемся анализом соотношения (9) и попытаемся выяснить характер сходимости последовательности измеримых функций $u^{(k)}(t)$, $t \in \Delta$, при $k \rightarrow \infty$. Для такого анализа удобно использовать аппарат обобщенных управлений $\mu_t(u)$, $u \in U$, $t \in \Delta$, изложенный в [3] (см. также [1]). Отметим, что при каждом $t \in \Delta$, $\mu_t(u)$ — это вероятностная мера Радона, сосредоточенная на U (подробное изложение теории мер Радона содержится, например, в [13]). В дальнейшем мы будем использовать некоторые обозначения и результаты из [3] без подробных пояснений. Отметим, что обычное измеримое управление $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, можно рассматривать как обобщенное управление $\delta(u(t))$, где $\delta(u(t))$ означает единичную меру Дирака, сосредоточенную в точке $u(t)$. Это обстоятельство позволяет отождествить обычные измеримые управления $u(t)$ с некоторыми обобщенными управлениями $\mu_t(u)$.

Пусть $g(x, t, u)$ — непрерывная (скалярная или векторная) функция, где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \Delta$, $u \in U$, и $\mu_t(u)$, $u \in U$, $t \in \Delta$ — обобщенное управление. Введем обозначение

$$\langle \mu_t, g(x, t, u) \rangle = \int_U g(x, t, u) d\mu_t(u),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега—Стилтьеса (см. [3]).

Данному обобщенному управлению μ_t , $t \in \Delta$, поставим в соответствие (см. [3]) уравнения (см. (1))

$$\dot{x} = \langle \mu_t, f(x, t, u) \rangle, \quad (10)$$

$$\dot{\psi} = -\langle \mu_t, f_x^*(x_\mu(t), t, u) \psi \rangle \quad (11)$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad \psi(T) = -\nabla\varphi(x_\mu(T)), \quad (12)$$

где $*$ означает транспонирование, $x_\mu(t)$ — решение уравнения (10) с начальным условием $x(0) = x_0$. Обозначим через $\psi_\mu(t)$ решение уравнения (11) с краевым условием (12). Условимся отождествлять

обобщенные управления $\mu_t, \nu_t, t \in \Delta$, если они совпадают на Δ почти всюду (такие обобщенные управления $\mu_t, \nu_t, t \in \Delta$ называются эквивалентными).

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество классов эквивалентности обобщенных управлений $\mu_t, t \in \Delta$, для которых почти всюду на Δ выполняется следующее условие (см. (7)):

$$\langle \mu_t, H(x_\mu(t), \psi_\mu(t), t, u) \rangle = M(x_\mu(t), \psi_\mu(t), t), \quad (13)$$

где

$$H(x, \psi, t, u) = \langle \psi, f(x, t, u) \rangle. \quad (14)$$

Обозначим через $\mathfrak{A}_1$ множество обычных измеримых управлений $u(t) \in U, t \in \Delta$, с обычным отождествлением функций, совпадающих почти всюду на Δ , и удовлетворяющих почти всюду на Δ основному соотношению принципа максимума Понтрягина (см. (7), (14)):

$$H(x_u(t), \psi_u(t), t, u(t)) = M(x_u(t), \psi_u(t), t)$$

(обозначения $x_u(t), \psi_u(t)$ введены выше). Элементы $u(\cdot) \in \mathfrak{A}_1$ с помощью функций Дирака $\delta(u(t))$ отождествляются с некоторыми элементами из $\mathfrak{A}$ и потому, как нетрудно видеть, $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$. В общем случае эти множества могут не совпадать. Например, множество $\mathfrak{A}_1$ может оказаться пустым, а множество $\mathfrak{A}$, как выясняется в лемме 1, непусто.

Лемма 1. *Множество $\mathfrak{A}$ непусто.*

Приведем конспективное доказательство этой леммы, использующее идеи Р. В. Гамкрелидзе. Рассмотрим новый управляемый процесс (ср. с (1))

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(y, t, u^i), \quad y(0) = x_0, \quad (15)$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $(n+1)$ -мерный вектор λ с компонентами λ_i принадлежит симплексу $\Lambda \subset \mathbb{R}^{n+1}$, описываемому соотношениями

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,$$

а векторы $u^i, i = 1, \dots, n+1$, принадлежат U . Роль управляющего вектора в (15) играет вектор $v = (\lambda, u^1, \dots, u^{n+1})$, который удовлетворяет ограничению $v \in V$, где множество V описывается в $\mathbb{R}^{n+1} \times \underbrace{\mathbb{R}^r \times \dots \times \mathbb{R}^r}_{n+1 \text{ раз}}$ соотношениями

$$\lambda \in \Lambda, \quad u^i \in U, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Обозначим правую часть уравнения (15) через $F(y, t, v)$. В силу известной теоремы Каратеодори множество $F(y, t, V)$ для любых $y \in \mathbb{R}^n, t \in \Delta$ является непустым выпуклым компактом. Для управляемого объекта (ср. с (1))

$$\dot{y} = F(y, t, v), \quad t \in \Delta, \quad y(0) = x_0, \quad (16)$$

где $y \in \mathbb{R}^n, v \in V, T > 0$ фиксировано, рассмотрим задачу минимизации терминального функционала (см. (2))

$$I(v(\cdot)) = \varphi(y(T)) \quad (17)$$

на множестве измеримых управлений $v(t) \in V, t \in \Delta$. Применяя результаты [11], нетрудно показать, что в новой оптимизационной задаче (16), (17) со свободным концом $y(T)$ существует оптимальное управление

$$\tilde{v}(t) = (\tilde{\lambda}(t), \tilde{u}^1(t), \dots, \tilde{u}^{n+1}(t)), \quad t \in \Delta.$$

Для оптимального управления $\tilde{v}(t)$ выполняется принцип максимума Понтрягина (см., например, [12]). Определим теперь с помощью $\tilde{v}(t)$ обобщенное управление $\tilde{\mu}_t(u)$ по формуле

$$\tilde{\mu}_t(u) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_i(t) \delta(\tilde{u}_i(t)).$$

Из сказанного вытекает, что $\tilde{\mu}_t \in \mathfrak{A}$ и, следовательно, $\mathfrak{A} \neq 0$.

Выше на множестве обобщенных управлений μ_t , $t \in \Delta$, уже было введено понятие эквивалентности. Множество соответствующих классов эквивалентности обозначим $\mathfrak{M}_U$. Согласно [1, п. IV.1.9] на $\mathfrak{M}_U$ с помощью слабой нормы можно ввести функцию расстояния $\rho(\mu_t, \nu_t)$, где μ_t, ν_t — произвольные элементы из $\mathfrak{M}_U$. В дальнейшем нам понадобится понятие слабой сходимости последовательности $\mu_t^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$, на Δ . Напомним (см. [3]), что последовательность обобщенных управлений $\mu_t^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$, называется слабо сходящейся на Δ к обобщенному управлению $\hat{\mu}_t$ при $i \rightarrow \infty$, если для любой скалярной функции $g(t, u)$, непрерывной по (t, u) при $t \in \Delta$, $u \in U$ имеем

$$\int_0^T \langle \mu_s^{(i)}, g(s, u) \rangle ds \rightarrow \int_0^T \langle \hat{\mu}_s, g(s, u) \rangle ds$$

при $i \rightarrow \infty$.

Определим далее функцию расстояния $d(\mu_t, \mathfrak{A})$ для $\mu_t \in \mathfrak{M}_U$ с помощью формулы

$$d(\mu_t, \mathfrak{A}) = \inf_{\nu_t \in \mathfrak{A}} \rho(\mu_t, \nu_t).$$

Теорема 1. Для последовательных приближений

$$u^{(k)} \in U, \quad t \in \Delta, \quad k = 0, 1, \dots,$$

о которой речь шла выше, при $k \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$d(\mu_t^{(k)}, \mathfrak{A}) \rightarrow 0, \quad (18)$$

где

$$\mu_t^{(k)}(u) = \delta(u^{(k)}(t)), \quad t \in \Delta.$$

Доказательство. Допустим, что соотношение (18) не выполняется. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$ и такая бесконечная подпоследовательность индексов k_j , что

$$d(\mu_t^{(k_j)}, \mathfrak{A}) \geq \varepsilon_0 > 0. \quad (19)$$

Так как множество $\mu_t \in \mathfrak{M}_U$ слабо компактно (см. [3]), то, переходя к подпоследовательности и производя соответствующую перенумерацию, можно считать, что

$$\mu_t^{(k_j)} \xrightarrow{\text{слабо}} \tilde{\mu}_t \in \mathfrak{M}_U. \quad (20)$$

Обозначим через $x^{(k_j)}(t)$, $\psi^{(k_j)}(t)$, $t \in \Delta$, решения уравнений (10), (11) при $\mu_t(u) = \mu_t^{(k_j)}(u)$, $t \in \Delta$, и краевых условиях (12). Используя результаты из [3], можно показать, что

$$\|x^{(k_j)}(\cdot) - \tilde{x}(\cdot)\|_c \rightarrow 0, \quad \|\psi^{(k_j)}(\cdot) - \tilde{\psi}(\cdot)\|_c \rightarrow 0 \quad (21)$$

при $k_j \rightarrow \infty$, где норма $\|\cdot\|_c$ для непрерывных n -мерных функций $z(t)$, $t \in \Delta$, определяется формулой

$$\|z(\cdot)\|_c = \max_{t \in \Delta} |z(t)|,$$

через $\tilde{x}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$, $t \in \Delta$, обозначены решения уравнений (10), (11) при $\mu_t(u) = \tilde{\mu}_t(u)$ и краевых условиях (12). Нетрудно далее обосновать, что последовательность непрерывных функций $M(x^{(k_j)}(t), \psi^{(k_j)}(t), t)$ сходится равномерно на Δ к функции $M(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), t)$ (см. (7)). Из (6)–(8) вытекает, что

$$\gamma(u^{(k)}(\cdot)) = \int_0^T \left[M(x^{(k)}(s), \psi^{(k)}(s), s) - \left\langle \psi^{(k)}(s), \int_U f(x^{(k)}(s), s, u) d\mu_s^{(k)}(u) \right\rangle \right] ds, \quad (22)$$

где $k = 0, 1, \dots$. Из сказанного и формул (9), (20)–(22) получаем, что

$$\int_0^T \left[M(\tilde{x}(s), \tilde{\psi}(s), s) - \left\langle \tilde{\psi}(s), \int_U f(\tilde{x}(s), s, u) d\tilde{\mu}_s(u) \right\rangle \right] ds = 0. \quad (23)$$

Из формул (6)–(8), (13), (14), (23) вытекает, что $\tilde{\mu}_t \in \mathfrak{A}$. Мы пришли к противоречию с (19), так как $\rho(\mu_t^{(k_j)}, \tilde{\mu}_t) \rightarrow 0$ при $k_j \rightarrow \infty$, и теорема 1 доказана. $\square$

Общий вывод из теоремы 1 таков: построенная в [7] последовательность приближений $u^{(k)}(\cdot)$ сходится в смысле соответствующей слабой нормы (которая вводится на множестве $\mathfrak{M}_U$) к множеству $\mathfrak{A}$. В случае непустоты множества $\mathfrak{A}_1$ хотелось бы иметь такую же сходимость для последовательности $u^{(k)}(\cdot)$ к множеству $\mathfrak{A}_1$, но в общем случае такой результат нами не доказан (напомним, что $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$). В следующем пункте для более узкого класса управляемых систем мы обоснуем сходимость последовательности $u^{(k)}(\cdot)$ при $k \rightarrow \infty$ к множеству $\mathfrak{A}_1$, используя иной вид слабой сходимости управлений без выхода в множество $\mathfrak{M}_U$.

2. Рассмотрим аффинную по u управляемую систему (ср. с (1))

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u, \quad x(0) = x_0, \quad (24)$$

где $a(x)$ — n -мерная векторная функция, $b(x)$ — матричная функция размерности $n \times r$, $u \in U \subset \mathbb{R}^r$, U — выпуклый компакт. Предположим, что:

- 1) функции $a(x)$, $b(x)$, $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$;
- 2) для функции $f(x, t, u) = a(x) + b(x)u$ выполняется неравенство (3);
- 3) при $|x| \leq c_1$ (см. (4), (5)) функции $a(x)$, $b(x)$, $\varphi(x)$ вместе со своими первыми частными производными по x_i удовлетворяют по x условию Липшица.

На всевозможных допустимых управлениях $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, минимизируется терминальный функционал (2).

В этом пункте при анализе соотношения (9) мы отказываемся от использования обобщенных управлений $\mu_t(u)$. Отметим, что измеримые функции $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, с обычным отождествлением функций, совпадающих почти всюду на Δ , можно рассматривать как элементы гильбертова пространства $L_2^r(\Delta)$ (определение см. в [2]); обозначим это множество $\mathcal{U}$. Так как U — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^r$, то $\mathcal{U}$ — слабо компактное множество в $L_2^r(\Delta)$ (определение слабой сходимости в $L_2^r(\Delta)$ и некоторые ее свойства см. в [2]). Для характеристики слабой сходимости элементов из $\mathcal{U}$ оказывается полезной слабая норма $\|\cdot\|_w$, которая для $u(\cdot) \in L_2^r(\Delta)$ определяется формулой (Р. В. Гамкрелидзе)

$$\|u(\cdot)\|_w = \max_{t \in \Delta} \left| \int_0^t u(s) ds \right|. \quad (25)$$

Для дальнейшего полезны следующие леммы (см. [8, 9]).

Лемма 2. Пусть функции $u_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$, и функция $u_*(\cdot)$ измеримы на Δ и принимают значения в выпуклом компакте U . Утверждается, что последовательность $u_i(\cdot)$ сходится слабо в $L_2^r(\Delta)$ к функции $u_*(\cdot)$ тогда и только тогда, когда

$$\|u_i(\cdot) - u_*(\cdot)\|_w \rightarrow 0$$

при $i \rightarrow \infty$.

Лемма 3. Пусть фиксированы произвольные допустимые управления $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ на Δ . Тогда для соответствующих решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ задачи Коши (24) выполняется неравенство

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_c \leq c_2 \|u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\|_w,$$

где константа $c_2 > 0$ не зависит от конкретных $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, и для непрерывной функции $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \Delta$, норма $\|\cdot\|_c$ определяется соотношением

$$\|y(\cdot)\|_c = \max_{t \in \Delta} |y(t)|. \quad (26)$$

Лемма 4. Пусть $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ — произвольные допустимые управления на Δ и $x_1(t)$, $x_2(t)$ — соответствующие им решения задачи Коши (24). Обозначим через $\psi_i(t)$, $t \in \Delta$, функцию $\psi_{u_i}(t)$, $t \in \Delta$, где $i = 1, 2$. Тогда при $t \in \Delta$ выполняется неравенство (см. (25), (26))

$$\|\psi_1(\cdot) - \psi_2(\cdot)\|_c \leq c_3 \|u_1(\cdot) - u_2(\cdot)\|_w,$$

где константа $c_3 > 0$ не зависит от выбора $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$.

Отметим, что в условиях настоящего пункта множество $\mathfrak{A}_1$ непусто (доказывается, например, с помощью результатов [11]). Более того, из линейности по u уравнения (24) и выпуклости компакта U вытекает, что обычное допустимое управление

$$\hat{u}(t) = \int_U u d\mu_t(u),$$

где $\mu_t(u)$ — некоторое обобщенное управление, порождает ту же пару функций $x_\mu(t)$, $\psi_\mu(t)$ и что из выполнения условия максимума (13) для $\mu_t(u)$ почти всюду на Δ следует выполнение равенства (ср. с (13))

$$H(x_\mu(t), \psi_\mu(t), t, \hat{u}(t)) = M(x_\mu(t), \psi_\mu(t), t).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае элементы из $\mathfrak{A}$ можно отождествить с некоторыми элементами из $\mathfrak{A}_1$ и считать, что $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$.

Определим теперь функцию расстояния $d_1(u(\cdot), \mathfrak{A}_1)$ для $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ следующим образом:

$$d_1(u(\cdot), \mathfrak{A}_1) = \inf_{v(\cdot) \in \mathfrak{A}_1} \|u(\cdot) - v(\cdot)\|_w.$$

Теорема 2. Для последовательности приближений $u^{(k)}(t) \in U$, $t \in \Delta$, $k = 0, 1, \dots$, о которой идет речь в [7], выполняется при $k \rightarrow \infty$ соотношение

$$d_1(u^{(k)}(\cdot), \mathfrak{A}_1) \rightarrow 0.$$

Доказательство этой теоремы проводится с помощью лемм 2–4 по схеме доказательства теоремы 1 с заменой $\mu_t^{(k)}(u)$ на управления $u^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots$, и с использованием слабой сходимости в $L_2^r(\Delta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М., 1977.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. — М., 2002.
3. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси, 1977.
4. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1962. — 2, № 6. — С. 1132–1139.
5. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1972. — 12, № 1. — С. 14–34.
6. Любушин А. А., Черноусько Ф. Л. Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления// Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1983. — 2. — С. 147–159.
7. Любушин А. А. О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1982. — 22, № 1. — С. 30–35.
8. Никольский М. С. О сходимости метода проекции градиента в задачах оптимального управления// В сб.: Нелинейная динамика и управление. — М., Физматлит, 2003. — 3. — С. 139–148.
9. Никольский М. С. О сходимости оптимальных управлений в некоторых оптимизационных задачах// Вестн. МГУ. Сер. вычисл. мат. киберн. — 2004. — 1. — С. 24–30.
10. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.
11. Филиппов А. Ф. Некоторые вопросы теории оптимального регулирования// Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., астрон., физ., хим. — 1959. — 2, № 1. — С. 25–32.
12. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М., 1978.
13. Шварц Л. Анализ. Т. 1. — М., 1972.

М. С. Никольский

E-mail: mni@mi.ras.ru

ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

© 2005 г. **В. С. ПАЦКО**

Аннотация. В работе рассматриваются линейные по динамике задачи конфликтного управления (линейные антагонистические дифференциальные игры) с фиксированным моментом окончания и непрерывной терминальной функцией платы. Описывается способ построения управления обратной связи при помощи поверхностей переключения. Формулируются и доказываются утверждения о достаточных условиях, при которых такой способ гарантирует минимизирующему игроку близкий к оптимальному результат и обладает свойством устойчивости.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	79
1. Постановка задачи и формулировка основных результатов	81
2. Основная лемма	87
3. Множества $\Pi^c(F, t)$	93
4. Показатели независимости и зависимости векторов $B_i^{(3)}(t)$	97
5. Применение основной леммы	102
6. Выбор величин $c_h, \Delta_h, \text{st}^{[h]}$	103
7. Петли вдоль движения	104
8. Доказательство теоремы 1 при $\beta > 0$	106
9. Доказательство теоремы 1 при $\beta = 0$	111
10. Случай скалярного управления первого игрока	116
11. Опыт численного построения поверхностей переключения в дифференциальных играх	119
Список литературы	120

ВВЕДЕНИЕ

В инженерной практике типичны задачи управления движением, в которых компоненты u_i , $i = \overline{1, k}$, векторного управляющего воздействия стеснены независимыми ограничениями $|u_i| \leq \mu_i$. Для таких задач при нахождении управления, оптимизирующего заданный критерий, естественными являются способы, основанные на построении в фазовом пространстве поверхностей переключения. Каждая поверхность соответствует своей компоненте u_i управляющего воздействия и в текущий момент времени t разбивает фазовое пространство на две части: по одну сторону от поверхности переключения компонента $u_i(t)$ принимает значение $-\mu_i$, по другую — значение $+\mu_i$. Важным при этом является вопрос об устойчивости способа управления по отношению к малым погрешностям построения поверхностей переключения.

В работе рассматриваются линейные по динамике задачи конфликтного управления (линейные антагонистические дифференциальные игры) с фиксированным моментом окончания и непрерывной терминальной функцией платы. Векторное управляющее воздействие минимизирующего игрока стеснено независимыми покомпонентными ограничениями $|u_i| \leq \mu_i$. Описывается способ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 03-01-00415, 04-01-96099).

построения управления обратной связи при помощи поверхностей переключения. Формулируются и доказываются утверждения о достаточных условиях, при которых такой способ гарантирует минимизирующему игроку близкий к оптимальному результат и обладает свойством устойчивости.

В заключительной части работы дано краткое описание публикаций, посвященных компьютерному моделированию с использованием предложенного способа управления.

Автор благодарит Л. В. Камневу за внимательное прочтение рукописи и замечания.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- (1) верхний индекс, показывающий, что рассматриваемое множество (матрица, функция и т.д.) относится к исходной дифференциальной игре;
- (2) верхний индекс, показывающий, что рассматриваемое множество (матрица, функция и т.д.) относится к аппроксимирующей дифференциальной игре;
- u векторное управляющее воздействие первого игрока;
- P ограничение на управляющее воздействие первого игрока;
- k число скалярных компонент управляющего воздействия первого игрока;
- μ_i ограничение по модулю на скалярную компоненту с номером i управления первого игрока;
- $\mu = \sum_{i=1}^k \mu_i$;
- v векторное управляющее воздействие второго игрока;
- Q ограничение на управляющее воздействие второго игрока;
- ϑ фиксированный момент окончания игры;
- γ терминальная функция платы;
- λ константа Липшица функции платы в аппроксимирующей игре;
- T промежуток игры;
- $Z = T \times \mathbb{R}^n$ — пространство игры;
- U стратегия первого игрока;
- Δ шаг дискретной схемы управления первого игрока;
- K множество допустимых программных управлений второго игрока;
- Γ гарантия первого игрока в дифференциальной игре;
- $\mathbf{G}$ функция цены дифференциальной игры;
- $V^{(2)}$ u -стабильная функция в аппроксимирующей игре;
- $W_c^{(2)}$ множество уровня функции $V^{(2)}$;
- $\text{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*])$ приращение функции $V^{(2)}$ на промежутке $[t_*, t^*]$;
- $B^{(3)}$ вспомогательная матричная функция, заданная на промежутке T ;
- $B_i^{(3)}(t)$ столбец с номером i матрицы $B^{(3)}(t)$;
- β_i константа Липшица функции $t \mapsto B_i^{(3)}(t)$;
- β максимальное из чисел β_i , $i = \overline{1, k}$;
- σ_i максимум модуля $|B_i^{(3)}(t)|$ на промежутке T ;
- σ максимальное из чисел σ_i , $i = \overline{1, k}$;
- $\chi(t_*, t^*)$ интегральная характеристика различия динамик исходной и аппроксимирующей игр;
- $\Pi(i, t)$ соответствующая моменту t «поверхность» переключения первого игрока для i -й компоненты управляющего воздействия;
- $\Pi_-(i, t)$ часть пространства $\mathbb{R}^n$, расположенная по отрицательную сторону относительно «поверхности» $\Pi(i, t)$;
- $\Pi_+(i, t)$ часть пространства $\mathbb{R}^n$, расположенная по положительную сторону относительно «поверхности» $\Pi(i, t)$;
- $\mathbf{U}$ многозначная стратегия первого игрока, определяемая на основе множеств $\Pi(i, t)$;
- $\Pi^r(i, t)$ геометрическая r -окрестность «поверхности» $\Pi(i, t)$;
- $\mathbf{U}^r$ многозначная стратегия первого игрока, определяемая на основе множеств $\Pi^r(i, t)$;
- $\Pi^c(i, t)$ c -окрестность «поверхности» $\Pi(i, t)$;

G	множество достижимости управляемой системы;
int	символ внутренности множества;
C_k^h	число сочетаний из k по h ;
$\mathcal{G}(\mathcal{B})$	подпространство, натянутое на совокупность $\mathcal{B}$ конечного числа векторов в $\mathbb{R}^n$;
$q(F)$	число элементов конечного набора F .

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

1.1. Предварительное описание задачи. Пусть линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания ϑ описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= B^{(1)}(t)u(t) + C^{(1)}(t)v(t), \\ y(t) &\in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in P^{(1)}, \quad v(t) \in Q^{(1)}; \quad \gamma^{(1)}(y(\vartheta)). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $y(t)$ — фазовый вектор, $u(t)$ и $v(t)$ — управляющие воздействия первого и второго игрока соответственно, матричные функции $B^{(1)}, C^{(1)}$ кусочно непрерывны. Предполагаем, что множество $P^{(1)}$, ограничивающее управляющее воздействие первого игрока, представляет собой «прямоугольный параллелепипед» в пространстве $\mathbb{R}^k$, т.е.

$$P^{(1)} := \{u \in \mathbb{R}^k : |u_i| \leq \mu_i, \quad i = \overline{1, k}\}.$$

При этом

$$\mu := \sum_{i=1}^k \mu_i > 0.$$

Множество $Q^{(1)}$, ограничивающее управляющее воздействие второго игрока, будем считать выпуклым компактом в конечномерном пространстве. Пусть $\gamma^{(1)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция платы. Первый игрок минимизирует значения $\gamma^{(1)}(y(\vartheta))$ функции платы, интересы второго игрока противоположны.

Игру (1.1) будем называть исходной. Относящиеся к ней обозначения снабжаются верхним индексом (1).

Условимся, что начальные моменты t_0 для игры (1.1) принадлежат промежутку $T = [\vartheta_1, \vartheta]$, где $\vartheta_1 < \vartheta$. Пусть $Z := T \times \mathbb{R}^n$ — пространство игры.

Допустимым программным управлением $u(\cdot)$ (соответственно, $v(\cdot)$) первого (соответственно, второго) игрока назовем измеримую функцию времени $t \mapsto u(t)$ (соответственно, $t \mapsto v(t)$), удовлетворяющую при любом t ограничению $u(t) \in P^{(1)}$ (соответственно, $v(t) \in Q^{(1)}$). Пусть $K^{(1)}$ — совокупность всех допустимых программных управлений $v(\cdot)$ второго игрока.

Следуя [30], в качестве допустимых стратегий первого игрока рассмотрим произвольные функции $U : (t, x) \mapsto U(t, x)$, определенные на множестве Z со значениями в $P^{(1)}$. Символом $y^{(1)}(\cdot; t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot))$ обозначим пошаговое движение системы (1.1) из позиции (t_0, x_0) , когда первый игрок применяет стратегию U в дискретной схеме управления [30] с шагом $\Delta > 0$, а для второго игрока реализуется управление $v(\cdot)$. Положим

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) := \sup_{v(\cdot) \in K^{(1)}} \gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta; t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot))). \quad (1.2)$$

Величина $\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta)$ имеет смысл гарантии, которую обеспечивает первому игроку стратегия U для начальной позиции (t_0, x_0) в дискретной схеме управления с шагом Δ . Наилучшая гарантия первого игрока для начальной позиции (t_0, x_0) определяется формулой

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0) := \min_U \overline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta), \quad (1.3)$$

где $\overline{\lim}$ означает верхний предел. В [30] показано, что минимум по U достигается. Отметим, что согласно формулам (1.2), (1.3) не исключается зависимость оптимальной стратегии первого игрока от начальной позиции (t_0, x_0) .

Известно [30, 43], что наилучший гарантированный результат $\Gamma^{(1)}(t_0, x_0)$ совпадает с симметрично определенным наилучшим гарантированным результатом второго игрока. Поэтому величину $\Gamma^{(1)}(t_0, x_0)$ называют также значением функции цены в точке (t_0, x_0) .

В работе будет показано, что при некоторых дополнительных условиях в игре (1.1) существует универсальная оптимальная стратегия U^* первого игрока, устойчивая по отношению к погрешностям ее численного задания.

Универсальность означает, что стратегия U^* является оптимальной для всех начальных позиций $(t_0, x_0) \in Z$. Подчеркнем, что речь идет об универсальности в «жестком» смысле: рассматриваемые стратегии являются функциями лишь от аргументов t, x . В классе стратегий, зависящих дополнительно от некоторого «параметра точности», существование оптимальных универсальных стратегий установлено для широкого класса задач в [29].

Универсальная оптимальная стратегия $(t, x) \mapsto U^*(t, x)$ определяется в работе при помощи «поверхностей переключения». В каждый момент t каждой компоненте u_i , $i = \overline{1, k}$, управляющего воздействия u соответствует своя поверхность переключения. По одну сторону от поверхности переключения управление u_i принимает значение $-\mu_i$, по другую — значение $+\mu_i$. На самой поверхности переключения оптимальное значение управления u_i можно брать любым из промежутка $[-\mu_i, \mu_i]$.

Вопрос о существовании универсальных оптимальных стратегий в дифференциальных играх кратко обсуждался в [30, с. 48] и был заострен после работы [35], в которой приведен пример игровой задачи, где универсальной оптимальной стратегии не существует. В [11, 12] показано, что для линейных дифференциальных игр вида (1.1), но в случае, когда множество $P^{(1)}$ — отрезок (т.е. управляющее воздействие u является скалярным), устойчивая универсальная оптимальная стратегия первого (минимизирующего) игрока существует и может быть задана при помощи изменяющейся во времени поверхности переключения. В [18, 19, 21, 22] установлено, что если множество $Q^{(1)}$ представляет собой отрезок (т.е. фактически управляющее воздействие v является скалярным), то существует универсальная оптимальная стратегия второго (максимизирующего) игрока, и она также может быть задана при помощи поверхности переключения. Однако такая стратегия не обладает свойством устойчивости. Влияние потери устойчивости продемонстрировано при помощи компьютерного моделирования в статье [21].

Предлагаемые в работе конструкции обобщают построения, описанные в [11, 12]. Другой подход к доказательству факта существования универсальной оптимальной стратегии для случая выпуклой функции платы намечен в [2].

Использование поверхностей переключения для построения управления по принципу обратной связи является очень естественным с инженерной точки зрения (применительно к игровым задачам см., например, [25]). Цель работы — выяснить условия, при которых в рассматриваемом классе дифференциальных игр получаем оптимальный и устойчивый способ управления.

Так же, как и в [11, 12], принята следующая схема рассуждений. Ориентируясь на компьютерные построения, подменяем исходную дифференциальную игру удобной аппроксимирующей игрой, для которой можем построить некоторую u -стабильную [30, 43] функцию или даже функцию цены игры. Обработывая такую функцию, получаем поверхности переключения. Применяем найденные поверхности переключения в исходной дифференциальной игре для задания универсальной стратегии первого игрока. Оцениваем гарантию первого игрока, которую он обеспечивает, используя построенную универсальную стратегию. В качестве следствия из такой оценки получаем результат, касающийся универсальной оптимальной устойчивой стратегии в игре (1.1).

Данная работа опубликована ранее в виде препринта [32]. Результат, относящийся к случаю скалярного управления первого игрока, описан в статье [31].

Сделаем замечание о записи динамики линейной дифференциальной игры в виде (1.1). Особенность этой записи в том, что фазовая переменная не входит в правую часть. Пусть линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания ϑ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{C}(t)v(t), \\ \mathbf{y}(t) &\in \mathbb{R}^m, \quad u(t) \in P^{(1)}, \quad v(t) \in Q^{(1)}; \quad \gamma(\mathbf{y}(\vartheta)). \end{aligned}$$

Предположим, что функция платы γ определяется лишь значениями некоторых n координат, $n \leq m$, фазового вектора в момент окончания. Тогда переход к виду (1.1) осуществляется (см. [30, с. 160], [28, с. 354]) при помощи стандартного преобразования

$$y(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{y}(t),$$

где $X_{n,m}(\vartheta, t)$ — матрица размера $n \times m$, составленная из соответствующих n строк фундаментальной матрицы Коши для системы $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t)$. При этом

$$B^{(1)}(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{B}(t), \quad C^{(1)}(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{C}(t), \quad \gamma^{(1)}(y(\vartheta)) = \gamma(\mathbf{y}(\vartheta)).$$

1.2. Аппроксимирующая игра. Наряду с игрой (1.1) рассмотрим еще одну дифференциальную игру

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= B^{(2)}(t)u(t) + C^{(2)}(t)v(t), \\ y(t) &\in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in P^{(2)} = P^{(1)}, \quad v(t) \in Q^{(2)}; \quad \gamma^{(2)}(y(\vartheta)) \end{aligned} \quad (1.4)$$

с фиксированным моментом окончания ϑ . Игру (1.4) будем интерпретировать как удобную для компьютерных вычислений аппроксимацию игры (1.1). Здесь $y(t)$ — фазовый вектор, функции $B^{(2)}$ и $C^{(2)}$ кусочно непрерывны. Множество $P^{(2)} = P^{(1)}$, ограничивающее управляющее воздействие первого игрока, — такое же, как в игре (1.1), множество $Q^{(2)}$ — компакт в конечномерном пространстве. Функцию платы $\gamma^{(2)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ будем считать липшицевой с константой λ и удовлетворяющей условию $\gamma^{(2)}(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$. Первый игрок минимизирует значения $\gamma^{(2)}(y(\vartheta))$, второй — максимизирует.

Принадлежность той или иной величины к аппроксимирующей игре подчеркивается верхним индексом (2). Допустимые программные управления $u(\cdot), v(\cdot)$ первого и второго игроков определим аналогично тому, как это сделано для игры (1.1). Обозначим через $K^{(2)}$ совокупность всех допустимых программных управлений $v(\cdot)$ второго игрока.

Будем считать, что в рамках аппроксимирующей игры (1.4) построена некоторая непрерывная u -стабильная функция $V^{(2)} : Z \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая краевому условию

$$V^{(2)}(\vartheta, x) = \gamma^{(2)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Согласно [30, 43] функцию $V^{(2)}$ называем u -стабильной, если для любой позиции $(t_*, x_*) \in Z$ по любому $t^* \in (t_*, \vartheta]$ и любому $v(\cdot) \in K^{(2)}$ найдется такое допустимое программное управление $u(\cdot)$ первого игрока, что для движения $y^{(2)}(t) = y^{(2)}(t; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ выполнено неравенство $V^{(2)}(t^*, y^{(2)}(t^*)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*)$.

Предположим, что функция $V^{(2)}$ является липшицевой с константой λ . Если $V^{(2)}$ — функция цены игры (1.4), то свойство липшицевости вытекает из условия, наложенного на функцию $\gamma^{(2)}$ [36, с. 110-111].

Пусть $B^{(3)}$ — матричная функция на T , каждый столбец $B_i^{(3)}$, $i = \overline{1, k}$, которой удовлетворяет условию Липшица с константой β_i . Содержательно функцию $B^{(3)}$ можно трактовать как липшицево приближение к функциям $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$. Положим

$$\beta := \max_{i=\overline{1, k}} \beta_i; \quad \sigma_i := \max_{t \in T} |B_i^{(3)}(t)|, \quad i = \overline{1, k}; \quad \sigma := \max_{i=\overline{1, k}} \sigma_i.$$

Считаем, что $\beta \geq 0$, $\sigma > 0$.

1.3. Сформулируем требование на функцию $V^{(2)}$, которое позволит ввести затем поверхности переключения.

Условие 1. При любом $i = \overline{1, k}$ и любом $t \in T$ таком, что $B_i^{(3)}(t) \neq 0$, сужение функции $V^{(2)}(t, \cdot)$ на любую прямую в $\mathbb{R}^n$, параллельную вектору $B_i^{(3)}(t)$, есть функция, множество точек минимума которой представляет собой отрезок (возможно, состоящий из одной точки) и которая является строго монотонной по обе стороны от этого отрезка.

Условие 1 выполнено, в частности, если при любом $t \in T$ функция $V^{(2)}(t, \cdot)$ является выпуклой. В случае, когда $V^{(2)}$ — функция цены аппроксимирующей игры (1.4), для обеспечения выпуклости функций $V^{(2)}(t, \cdot)$, $t \in T$, достаточно потребовать выпуклость функции платы $\gamma^{(2)}$.

1.4. Поверхности переключения. Многозначная функция U^0 . Введем следующие обозначения. Для любых $i = \overline{1, k}$ и $(t, x) \in Z$ положим

$$\mathcal{A}(i, t, x) := \{z \in \mathbb{R}^n : z = x + \alpha B_i^{(3)}(t), \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{V}(i, t, x) := \min_{z \in \mathcal{A}(i, t, x)} V^{(2)}(t, z). \quad (1.6)$$

Если $B_i^{(3)}(t) \neq 0$, то множество $\mathcal{A}(i, t, x)$ — прямая, проходящая в пространстве $\mathbb{R}^n$ через точку x параллельно вектору $B_i^{(3)}(t)$. При этом $\mathcal{V}(i, t, x)$ есть минимальное значение функции $V^{(2)}$ на прямой $\mathcal{A}(i, t, x)$. Минимум достигается в силу непрерывности функции $V^{(2)}(t, \cdot)$ и ее ухода в ∞ при $|x| \rightarrow \infty$. В силу условия 1 множество точек минимума представляет собой отрезок, который может состоять из одной точки. Если $B_i^{(3)}(t) = 0$, то множество $\mathcal{A}(i, t, x)$ является вырожденным и совпадает с точкой x . Значение $\mathcal{V}(i, t, x)$ в этом случае совпадает с $V^{(2)}(t, x)$.

Далее, пусть для всех $i = \overline{1, k}$ и $t \in T$

$$\begin{aligned} \Pi(i, t) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : V^{(2)}(t, x) = \mathcal{V}(i, t, x)\}, \\ \Pi_{-}(i, t) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi(i, t), \forall \alpha \geq 0\}, \\ \Pi_{+}(i, t) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi(i, t), \forall \alpha \leq 0\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Итак, множества $\Pi_{-}(i, t)$, $\Pi(i, t)$, $\Pi_{+}(i, t)$ определены на основе функции $V^{(2)}(t, \cdot)$ и вектора $B_i^{(3)}(t)$. Множества $\Pi_{-}(i, t)$, $\Pi_{+}(i, t)$ расположены в пространстве $\mathbb{R}^n$ по разные стороны относительно множества $\Pi(i, t)$. Из условия 1 следует, что при любом $(t, x) \in Z$ функция $V^{(2)}(t, \cdot)$ монотонно возрастает (монотонно убывает) в направлении вектора $B_i^{(3)}(t)$ на пересечении прямой $\mathcal{A}(i, t, x)$ с множеством $\Pi_{-}(i, t)$ ($\Pi_{+}(i, t)$).

Для каждого $i = \overline{1, k}$ определим на Z скалярную многозначную функцию

$$U_i^0(t, x) := \begin{cases} \{-\mu_i\}, & x \in \Pi_{-}(i, t), \\ \{\mu_i\}, & x \in \Pi_{+}(i, t), \\ [-\mu_i, \mu_i], & x \in \Pi(i, t). \end{cases}$$

Функция $U_i^0(t, \cdot)$ принимает крайние значения из отрезка $[-\mu_i, \mu_i]$ в множествах $\Pi_{-}(i, t)$, $\Pi_{+}(i, t)$ и «переключается» с одного крайнего значения на другое в множестве $\Pi(i, t)$. Хотя множество $\Pi(i, t)$ не всегда является в общепринятом смысле поверхностью в пространстве $\mathbb{R}^n$, будем для наглядности называть его поверхностью переключения для i -й компоненты управляющего воздействия в момент t .

Введем на Z векторную многозначную функцию

$$U^0(t, x) := \begin{pmatrix} U_1^0(t, x) \\ U_2^0(t, x) \\ \vdots \\ U_k^0(t, x) \end{pmatrix}.$$

1.5. Множества $\Pi^r(i, t)$. Многозначная функция U^r . Продолжим введение обозначений для формулировки основного результата работы.

Пусть $r \geq 0$. В случае $B_i^{(3)}(t) \neq 0$ положим

$$\Pi^r(i, t) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = z + \alpha \frac{B_i^{(3)}(t)}{|B_i^{(3)}(t)|}, z \in \Pi(i, t), |\alpha| \leq r \right\}.$$

Множество $\Pi^r(i, t)$ является геометрическим r -расширением множества $\Pi(i, t)$. Расширение происходит с использованием вектора $B_i^{(3)}(t)$. Множество $\Pi^r(i, t)$ будем называть также r -окрестностью поверхности $\Pi(i, t)$. Если $B_i^{(3)}(t) = 0$, то примем $\Pi^r(i, t) = \Pi(i, t) = \mathbb{R}^n$.

Введем множества

$$\begin{aligned}\Pi_-^r(i, t) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi^r(i, t), \forall \alpha \geq 0\}, \\ \Pi_+^r(i, t) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi^r(i, t), \forall \alpha \leq 0\}.\end{aligned}$$

Множество $\Pi_-^r(i, t)$ (соответственно, $\Pi_+^r(i, t)$) представляет собой часть пространства $\mathbb{R}^n$, расположенную относительно $\Pi^r(i, t)$ по (соответственно, противоположно) направлению вектора $B_i^{(3)}(t)$. Очевидно, что

$$\Pi_-^r(i, t) \subset \Pi_-(i, t), \quad \Pi_+^r(i, t) \subset \Pi_+(i, t).$$

При $r = 0$ имеем $\Pi^r(i, t) = \Pi(i, t)$, $\Pi_-^r(i, t) = \Pi_-(i, t)$, $\Pi_+^r(i, t) = \Pi_+(i, t)$. Для каждого $i = \overline{1, k}$ введем на Z скалярную многозначную функцию

$$U_i^r(t, x) := \begin{cases} \{-\mu_i\}, & x \in \Pi_-^r(i, t), \\ \{\mu_i\}, & x \in \Pi_+^r(i, t), \\ [-\mu_i, \mu_i], & x \in \Pi^r(i, t). \end{cases}$$

Далее, определим на Z векторную многозначную функцию

$$U^r(t, x) := \begin{pmatrix} U_1^r(t, x) \\ U_2^r(t, x) \\ \vdots \\ U_k^r(t, x) \end{pmatrix}.$$

1.6. Сформулируем еще одно дополнительное условие.

Пусть I — множество индексов $\overline{1, k}$ и F — произвольное подмножество I . Для любого $(t, x) \in Z$ положим

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(F, t, x) &:= \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = x + \sum_{i \in F} \alpha_i B_i^{(3)}(t), \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathcal{V}(F, t, x) &:= \min_{z \in \mathcal{A}(F, t, x)} V^{(2)}(t, z).\end{aligned}\tag{1.8}$$

Множество $\mathcal{A}(F, t, x)$ представляет собой плоскость в пространстве $\mathbb{R}^n$, проходящую через точку x . Плоскость порождается совокупностью векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, и ее размерность равна числу линейно независимых векторов этой совокупности. В формуле (1.8) минимум достигается в силу свойств функции $V^{(2)}(t, \cdot)$. При этом множество точек минимума — компактное множество.

Для всех $F \subset I$ и $t \in T$ пусть

$$\Pi(F, t) := \{x \in \mathbb{R}^n : V^{(2)}(t, x) = \mathcal{V}(F, t, x)\}.$$

Нетрудно видеть, что если $F_1 \subset F_2$, то $\Pi(F_2, t) \subset \Pi(F_1, t)$. В частности, при любом $i \in F$ имеем $\Pi(F, t) \subset \Pi(i, t)$. Следовательно,

$$\Pi(F, t) \subset \bigcap_{i \in F} \Pi(i, t).$$

Дополнительное предположение о задаче будет состоять в требовании противоположного вложения.

Условие 2. Для любого $t \in T$ и любого подмножества $F \subset I$ имеет место вложение

$$\bigcap_{i \in F} \Pi(i, t) \subset \Pi(F, t).$$

Условие 2 выполнено в случае, когда множество $P^{(1)}$ — отрезок (т.е. в случае скалярного управления первого игрока). В нескаларном случае условие 2 означает, что любая точка, общая для «индивидуальных» поверхностей $\Pi(i, t)$, $i \in F$, должна лежать в множестве $\Pi(F, t)$.

Будем использовать обозначения $\mathcal{A}(F, t, x)$, $\mathcal{V}(F, t, x)$, $\Pi(F, t)$ и для случая $F = \emptyset$. Примем

$$\mathcal{A}(\emptyset, t, x) := x, \quad \mathcal{V}(\emptyset, t, x) := V^{(2)}(t, x), \quad \Pi(\emptyset, t) := \mathbb{R}^n.$$

Содержательное пояснение этому может быть дано следующим образом. Добавим к имеющимся компонентам u_i , $i = \overline{1, k}$, управляющего воздействия компоненту u_{k+1} , но при этом положим

$$B_{k+1}^{(1)}(t) = B_{k+1}^{(2)}(t) = B_{k+1}^{(3)}(t) \equiv 0.$$

Тогда для множества F , состоящего из индекса $k+1$, имеем

$$\mathcal{A}(F, t, x) = x, \quad \mathcal{V}(F, t, x) = V^{(2)}(t, x), \quad \Pi(F, t) = \mathbb{R}^n.$$

Такое множество F в фиктивно расширенном множестве компонент управляющего воздействия равносильно пустому множеству при работе с исходным множеством индексов компонент управляющего воздействия.

1.7. Формулировка основных результатов. Для любых моментов t_* , t^* из промежутка T положим

$$\begin{aligned} \chi(t_*, t^*) := & \sum_{i=1}^k \mu_i \int_{t_*}^{t^*} \left(|B_i^{(1)}(t) - B_i^{(3)}(t)| + |B_i^{(2)}(t) - B_i^{(3)}(t)| \right) dt + \\ & + \int_{t_*}^{t^*} \max_{\substack{\ell \in \mathbb{R}^n \\ |\ell| \leq 1}} \left[\max_{q \in Q^{(1)}} \ell' C^{(1)}(t) q - \max_{q \in Q^{(2)}} \ell' C^{(2)}(t) q \right] dt. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Величина $\chi(t_*, t^*)$ характеризует в интегральном смысле различие функций $B_i^{(1)}$, $B_i^{(2)}$, $B_i^{(3)}$ при каждом $i = \overline{1, k}$, а также функций $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ и множеств $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$. Символ $'$ означает транспонирование.

Предполагая, что начальные позиции системы (1.1) принадлежат некоторому компактному множеству $\mathcal{Y}$ в пространстве игры Z , символом $\mathcal{M}$ обозначим компактное множество в $\mathbb{R}^n$, оценивающее сверху множество возможных состояний системы (1.1) в момент ϑ . Примем

$$\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}} := \max_{x \in \mathcal{M}} |\gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x)|.$$

В работе будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия, наложенные на системы (1.1), (1.4), а также на функции $V^{(2)}$ и $B^{(3)}$, включая условия 1, 2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные числа $r(\varepsilon)$ и $\Delta(\varepsilon)$, что для любой стратегии U первого игрока, представляющей собой однозначную выборку из многозначной функции $\mathbf{U}^{r(\varepsilon)}$, любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$ и любого шага $\Delta \leq \Delta(\varepsilon)$ дискретной схемы управления справедлива оценка

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + \varepsilon + \lambda \chi(t_0, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}. \quad (1.10)$$

Сделаем некоторые пояснения к теореме. Проводя построения в рамках аппроксимирующей игры, мы знаем значение $V^{(2)}(t_0, x_0)$ функции $V^{(2)}$ в начальной позиции (t_0, x_0) . Поэтому в правой части оценки (1.10) стоит $V^{(2)}(t_0, x_0)$. Различие динамик исходной и аппроксимирующей игр, а также отличие функции $B^{(3)}$ от функций $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ учитываются величиной $\chi(t_0, \vartheta)$. Слагаемое $\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}$ характеризует различие функций платы. Множества переключения $\Pi^{r(\varepsilon)}(i, t)$, $i = \overline{1, k}$, $t \in T$, для многозначной функции $\mathbf{U}^{r(\varepsilon)}$ определяются через построения, осуществляемые при помощи функций $V^{(2)}$ и $B^{(3)}$.

В целом правая часть (1.10) оценивает гарантию первого игрока в игре (1.1), когда он использует с шагом Δ произвольную однозначную стратегию U , являющуюся выборкой из многозначной функции $\mathbf{U}^{r(\varepsilon)}$.

Поскольку при любых $i = \overline{1, k}$ и $t \in T$ справедливо вложение $\Pi(i, t) \subset \Pi^{r(\varepsilon)}(i, t)$, то стратегия U совпадает вне множества $\Pi^{r(\varepsilon)}(i, t)$ с функцией U^0 , задаваемой при помощи поверхностей $\Pi(i, t)$. Пусть U^0 — некоторая однозначная выборка многозначной функции U^0 . Из сказанного выше получаем, что действие стратегии U^0 , осуществляемое с покомпонентными ошибками в множествах $\Pi^{r(\varepsilon)}(i, t)$, $i = \overline{1, k}$, $t \in T$, также оценивается правой частью (1.10). Поэтому можно говорить об устойчивости стратегии U^0 по отношению к неточностям построения поверхностей $\Pi(i, t)$ или по отношению к информационным ошибкам замера положения вектора $y(t)$ относительно поверхностей $\Pi(i, t)$.

Допустим, что аппроксимирующая игра совпадает с исходной и функция $B^{(3)}$ совпадает с функцией $B^{(1)}$. Тогда $\chi(t_0, \vartheta) = 0$, $\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}} = 0$. Пусть, кроме того, в качестве u -стабильной функции $V^{(2)}$ используется функция цены $\Gamma^{(1)}$ исходной игры и выполнены условия 1, 2. Получим в результате

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) \leq V^{(1)}(t_0, x_0) + \varepsilon.$$

Это означает, что любая однозначная стратегия U^0 , определяемая при помощи поверхностей $\Pi(i, t)$, является универсальной оптимальной стратегией в игре (1.1) и обладает свойством устойчивости.

Стало быть, если функция $B^{(1)}$ и функция платы $\gamma^{(1)}$ удовлетворяют условию Липшица, поверхности переключения $\Pi(i, t)$, $i = \overline{1, k}$, $t \in T$, строятся в рамках исходной игры (1.1) и выполнены условия 1, 2, то в качестве универсальной оптимальной стратегии U^* можно взять стратегию U^0 .

Доказательству теоремы 1 при $\beta > 0$ посвящены разделы 2–8. Случай $\beta = 0$ анализируется в разделе 9 и использует результаты разделов 2, 3.

Теорема 1 не дает какого-либо рецепта по выбору чисел $r(\varepsilon)$ и $\Delta(\varepsilon)$. Поэтому оценка (1.10) не является конструктивной.

В случае $k = 1$, т.е. когда управляющее воздействие u первого игрока является скалярным с ограничением $|u| \leq \mu$, можно дать явную оценку гарантии первого игрока. В разделе 10 будет доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть при $k = 1$ выполнены условия, наложенные на системы (1.1), (1.4), а также на функции $V^{(2)}$ и $B^{(3)}$, включая условие 1. Пусть $r \geq 0$, $\Delta > 0$. Тогда для любой стратегии U первого игрока, представляющей собой однозначную выборку из многозначной функции U^r , и любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) \leq & V^{(2)}(t_0, x_0) + 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}(\vartheta - t_0) + \\ & + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

2.1. Понятие близости данного вектора к совокупности других векторов. Пусть $\zeta > 0$. Скажем, что вектор $a \in \mathbb{R}^n$ является ζ -близким к совокупности векторов $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, s}$, $s \geq 1$, если проекция вектора a на ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^n$ к линейному подпространству, натянутому на векторы b_i , $i = \overline{1, s}$, не превышает по модулю числа ζ .

Вектор $a \in \mathbb{R}^n$ назовем ζ -малым, если $|a| \leq \zeta$. Таким образом, ζ -малость вектора a означает его ζ -близость к нулевому вектору.

Для $F \subset I$, $\zeta > 0$ и $t \in T$ символом $\mathcal{H}(F, \zeta, t)$ обозначим совокупность всех индексов $j \in I \setminus F$, для каждого из которых вектор $B_j^{(3)}(t)$ является ζ -близким к совокупности векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$. Если $F = \emptyset$, то $\mathcal{H}(F, \zeta, t)$ будет означать совокупность всех $j \in I$, для каждого из которых вектор $B_j^{(3)}(t)$ является ζ -малым.

2.2. Формулировка леммы и комментарий. Для компактных множеств X, Y в $\mathbb{R}^n$ введем хаусдорфово отклонение множества X от множества Y :

$$\hat{d}(X, Y) := \max_{x \in X} \min_{y \in Y} |x - y|.$$

Положим

$$G_v^{(i)}(t_*, t^*) := \bigcup_{v(\cdot) \in K^{(i)}_{t_*}} \int_{t_*}^{t^*} C^{(i)}(t)v(t)dt, \quad i = 1, 2.$$

Множества $G_v^{(1)}(t_*, t^*)$, $G_v^{(2)}(t_*, t^*)$ — выпуклые компакты. Справедлива оценка

$$\hat{d}(G_v^{(1)}(t_*, t^*), G_v^{(2)}(t_*, t^*)) \leq \int_{t_*}^{t^*} \max_{|\ell| \leq 1} \left[\max_{q \in Q^{(1)}} \ell' C^{(1)}(t)q - \max_{q \in Q^{(2)}} \ell' C^{(2)}(t)q \right] dt. \quad (2.1)$$

Символом $G^{(1)}(t, t_*, x_*)$ обозначим множество достижимости системы (1.1) в момент t при начальном состоянии x_* в момент t_* и при переборе всех допустимых программных управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на промежутке $[t_*, t]$.

Аналогично символом $G^{(2)}(t, t_*, x_*)$ обозначим множество достижимости системы (1.4) в момент t . Положим

$$G^{(2)\natural}(t, t_*, x_*) := G^{(2)}(t, t_*, x_*) + B(2(t - t_*)\sigma\mu),$$

где $B(r)$ — шар радиуса r в $\mathbb{R}^n$.

Формулируемую ниже лемму будем называть основной.

Лемма 2.1. Пусть $(t_*, x_*) \in Z$, $\delta > 0$, $t_* + \delta \leq \vartheta$. Зафиксируем набор $F \subset I$ и число $\zeta > 0$. Выберем некоторое множество $H \subset \mathcal{H}(F, \zeta, t_* + \delta)$. Предположим, что для всех $i \in I \setminus (F \cup H)$ и $t \in [t_*, t_* + \delta]$ имеют место соотношения

$$G^{(1)}(t, t_*, x_*) \cap \Pi(i, t) = \emptyset, \quad G^{(2)\natural}(t, t_*, x_*) \cap \Pi(i, t) = \emptyset. \quad (2.2)$$

Зададим число $\omega \in [0, \delta]$. Пусть $y^{(1*)}(\cdot)$ — движение системы (1.1) в силу допустимых программных управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, выходящее в момент t_* из точки x_* , причем для любого $i \in I \setminus (F \cup H)$ и любого $t \in [t_* + \omega, t_* + \delta]$ в случае $x_* \in \Pi_+(i, t_*)$ выполнено равенство $u_i(t) = \mu_i$, а в случае $x_* \in \Pi_-(i, t_*)$ — равенство $u_i(t) = -\mu_i$. Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) &\leq V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\delta^2 \sum_{i=1}^k \beta_i \mu_i \\ &+ 2\lambda\zeta\delta \sum_{i \in H} \mu_i + 2\lambda\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i + \lambda\chi(t_*, t_* + \delta). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Смысл этого утверждения в том, что величина $\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta))$ не слишком возрастает по сравнению со значением функции $V^{(2)}$ в позиции (t_*, x_*) , несмотря на то, что на промежутке $[t_*, t_* + \delta]$ для индексов $i \in F$ действует произвольное допустимое управление $u_i(\cdot)$. Для индексов $j \in H$ управление $u_j(\cdot)$ также является произвольным. В случае $i \notin F \cup H$ предполагается, что на промежутке $[t_* + \omega, t_* + \delta]$ действует постоянное «правильное» управление первого игрока, соответствующее той части пространства относительно поверхности $\Pi(i, t_*)$, где находится точка x_* (т.е. $\Pi_+(i, t_*)$ либо $\Pi_-(i, t_*)$). По условию, движение $y^{(1*)}(t)$, выходя в момент t_* из точки $x_* \notin \Pi(i, t_*)$, $i \notin F \cup H$, не может попасть на $\Pi(i, t)$ ни при каком $t \in [t_*, t_* + \delta]$.

2.3. Доказательство леммы. Символом $W_c^{(2)}$ обозначим множество уровня (множество Лебега) функции $V^{(2)}$, соответствующее числу c . Сечение в момент t обозначим $W_c^{(2)}(t)$.

По заданному в условии леммы управлению $v(\cdot) \in K^{(1)}$ определим в множестве $G_v^{(1)}(t_*, t_* + \delta)$ точку

$$g := \int_{t_*}^{t_* + \delta} C^{(1)}(t)v(t)dt.$$

Пусть $\bar{g}$ — ближайшая к ней точка множества $G_v^{(2)}(t_*, t_* + \delta)$. Выберем $\bar{v}(\cdot) \in K^{(2)}$ так, что

$$\bar{g} = \int_{t_*}^{t_* + \delta} C^{(2)}(t) \bar{v}(t) dt.$$

Положим $c_* := V^{(2)}(t_*, x_*)$.

Используя u -стабильность функции $V^{(2)}$, по управлению $\bar{v}(\cdot)$ найдем такое $\bar{u}(\cdot)$, что для движения $y^{(2*)}(t) := y^{(2*)}(t; t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))$, выходящего в момент t_* из точки x_* , выполнено включение

$$y^{(2*)}(t_* + \delta) \in W_{c_*}^{(2)}(t_* + \delta). \quad (2.4)$$

1. Положим

$$J_1 := \int_{t_*}^{t_* + \delta} B^{(1)}(t) u(t) dt - \int_{t_*}^{t_* + \delta} B^{(2)}(t) \bar{u}(t) dt, \quad J_2 := \int_{t_*}^{t_* + \delta} C^{(1)}(t) v(t) dt - \int_{t_*}^{t_* + \delta} C^{(2)}(t) \bar{v}(t) dt.$$

Тогда

$$y^{(1*)}(t_* + \delta) - y^{(2*)}(t_* + \delta) = J_1 + J_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} J_1 = & \sum_{i=1}^k \int_{t_*}^{t_* + \delta} (B_i^{(1)}(t) - B_i^{(3)}(t)) u_i(t) dt - \sum_{i=1}^k \int_{t_*}^{t_* + \delta} (B_i^{(2)}(t) - B_i^{(3)}(t)) \bar{u}_i(t) dt + \\ & + \sum_{i=1}^k \int_{t_*}^{t_* + \delta} (B_i^{(3)}(t) - B_i^{(3)}(t_* + \delta)) (u_i(t) - \bar{u}_i(t)) dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$+ \sum_{i=1}^k B_i^{(3)}(t_* + \delta) \int_{t_*}^{t_* + \delta} (u_i(t) - \bar{u}_i(t)) dt,$$

$$J_2 = g - \bar{g}. \quad (2.6)$$

2. Для каждого $i \notin F \cup H$ введем на промежутке $[t_*, t_* + \delta]$ вспомогательное постоянное управление $u_{*i}(\cdot)$, равное постоянному значению управления $u_i(\cdot)$ на промежутке $[t_* + \omega, t_* + \delta]$.

Положим

$$\hat{z} := y^{(2*)}(t_* + \delta) + \sum_{i \notin F \cup H} B_i^{(3)}(t_* + \delta) \int_{t_*}^{t_* + \delta} (u_{*i}(t) - \bar{u}_i(t)) dt.$$

Опираясь на оценку (2.1) и предположение о виде управления $u_i(\cdot)$ на промежутке $[t_* + \omega, t_* + \delta]$, $i \in I \setminus (F \cup H)$, докажем, что

$$V^{(2)}(t_* + \delta, \hat{z}) \leq V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(2*)}(t_* + \delta)). \quad (2.7)$$

Действительно, предположение

$$G^{(1)}(t, t_*, x_*) \cap \Pi(i, t) = \emptyset, \quad i \notin F \cup H, \quad t \in [t_*, t_* + \delta],$$

означает, что любое движение системы (1.1) для каждого $i \notin F \cup H$ либо принадлежит $\Pi_+(i, t)$ на всем промежутке $[t_*, t_* + \delta]$, либо принадлежит $\Pi_-(i, t)$ также на всем этом промежутке. Первый случай возникает тогда, когда $x_* \in \Pi_+(i, t_*)$, второй — когда $x_* \in \Pi_-(i, t_*)$. Из условия, наложенного на управляющее воздействие $u_i(t)$, $i \notin F \cup H$, получаем, что $u_{*i}(t) \equiv \mu_i$ в первом случае и $u_{*i}(t) \equiv -\mu_i$ во втором.

Обратимся теперь к условию

$$G^{(2)\natural}(t, t_*, x_*) \cap \Pi(i, t) = \emptyset, \quad i \notin F \cup H, \quad t \in [t_*, t_* + \delta].$$

Из этого условия следует, что для каждого $i \notin F \cup H$ в случае $x_* \in \Pi_+(i, t_*)$ выполнено вложение

$$G^{(2)\natural}(t_* + \delta, t_*, x_*) \subset \Pi_+(i, t_* + \delta),$$

а в случае $x_* \in \Pi_-(i, t_*)$ — вложение

$$G^{(2)\natural}(t_* + \delta, t_*, x_*) \subset \Pi_-(i, t_* + \delta).$$

Пронумеруем в произвольном порядке индексы $i \notin F \cup H$: $i_1, i_2, \dots, i_s$. Возьмем первый индекс i_1 . Предположим, что $x_* \in \Pi_+(i_1, t_*)$. Тогда

$$y^{(2*)}(t_* + \delta) \in \Pi_+(i_1, t_* + \delta),$$

$$z_{i_1} := y^{(2*)}(t_* + \delta) + B_{i_1}^{(3)}(t_* + \delta) \int_{t_*}^{t_* + \delta} (\mu_{i_1} - \bar{u}_{i_1}(t)) dt \in G^{(2)\natural}(t_* + \delta, t_*, x_*) \subset \Pi_+(i_1, t_* + \delta).$$

Поскольку $\mu_{i_1} \geq \bar{u}_{i_1}(t)$, $t \in [t_*, t_* + \delta]$, то отсюда следует, что

$$V^{(2)}(t_* + \delta, z_{i_1}) \leq V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(2*)}(t_* + \delta)).$$

Аналогично рассуждаем в случае $x_* \in \Pi_-(i_1, t_*)$, только теперь воспользуемся неравенством $-\mu_{i_1} \leq \bar{u}_{i_1}(t)$, $t \in [t_*, t_* + \delta]$.

Перейдем ко второму индексу i_2 . Предположим, что $x_* \in \Pi_+(i_2, t_*)$. Тогда

$$z_{i_1} \in \Pi_+(i_2, t_* + \delta),$$

$$z_{i_2} := z_{i_1} + B_{i_2}^{(3)}(t_* + \delta) \int_{t_*}^{t_* + \delta} (\mu_{i_2} - \bar{u}_{i_2}(t)) dt \in G^{(2)\natural}(t_* + \delta, t_*, x_*) \subset \Pi_+(i_2, t_* + \delta).$$

Поскольку $\mu_{i_2} \geq \bar{u}_{i_2}(t)$, $t \in [t_*, t_* + \delta]$, то отсюда следует, что

$$V^{(2)}(t_* + \delta, z_{i_2}) \leq V^{(2)}(t_* + \delta, z_{i_1})$$

и аналогично в случае $x_* \in \Pi_-(i_2, t_*)$.

Продолжая процесс последовательно до последнего индекса i_s , придем к цепочке неравенств

$$V^{(2)}(t_* + \delta, z_{i_s}) \leq V^{(2)}(t_* + \delta, z_{i_{s-1}}) \leq \dots \leq V^{(2)}(t_* + \delta, z_{i_1}) \leq V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(2*)}(t_* + \delta)).$$

Стало быть,

$$V^{(2)}(t_* + \delta, \hat{z}) = V^{(2)}(t_* + \delta, z_{i_s}) \leq V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(2*)}(t_* + \delta)).$$

Неравенство (2.7) доказано.

В силу (2.4) из (2.7) получаем включение

$$\hat{z} \in W_{c_*}^{(2)}(t_* + \delta). \quad (2.8)$$

3. Используя обозначения (2.5) и (2.6), имеем

$$y^{(1*)}(t_* + \delta) - \hat{z} = y^{(1*)}(t_* + \delta) - y^{(2*)}(t_* + \delta) - \sum_{i \notin F \cup H} B_i^{(3)}(t_* + \delta) \int_{t_*}^{t_* + \delta} (u_{*i}(t) - \bar{u}_i(t)) dt =$$

$$= J_1 + J_2 - \sum_{i \notin F \cup H} B_i^{(3)}(t_* + \delta) \int_{t_*}^{t_* + \delta} (u_{*i}(t) - \bar{u}_i(t)) dt.$$

Символом π обозначим оператор ортогонального проектирования пространства $\mathbb{R}^n$ на подпространство, ортогональное подпространству, натянутому на векторы $B_i^{(3)}(t_* + \delta)$, $i \in F$.

Примем во внимание, что управления $u_i(t)$ и $\bar{u}_i(t)$ ограничены по модулю числом μ_i , а каждая из функций $B_i^{(3)}$ удовлетворяет условию Липшица с константой β_i . Учтем также, что $\pi B_i^{(3)}(t_* + \delta) = 0$ при $i \in F$, а любой вектор $B_j^{(3)}(t_* + \delta)$, $j \in H$, является ζ -близким к совокупности векторов $B_i^{(3)}(t_* + \delta)$, $i \in F$.

Получим

$$\begin{aligned} & \left| \pi J_1 - \pi \sum_{i \notin F \cup H} B_i^{(3)}(t_* + \delta) \int_{t_*}^{t_* + \delta} (u_{*i}(t) - \bar{u}_i(t)) dt \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^k \mu_i \int_{t_*}^{t_* + \delta} (|B_i^{(1)}(t) - B_i^{(3)}(t)| + |B_i^{(2)}(t) - B_i^{(3)}(t)|) dt + \\ & + \delta^2 \sum_{i=1}^k \beta_i \mu_i + 2\zeta \delta \sum_{i \in H} \mu_i + \left| \pi \sum_{i \notin F \cup H} B_i^{(3)}(t_* + \delta) \int_{t_*}^{t_* + \delta} (u_i(t) - u_{*i}(t)) dt \right|. \end{aligned}$$

В силу (2.6) и (2.1) имеем

$$|\pi J_2| = |\pi(g - \bar{g})| \leq |g - \bar{g}| \leq \int_{t_*}^{t_* + \delta} \max_{|\ell| \leq 1} \left[\max_{q \in Q^{(1)}} \ell' C^{(1)}(t) q - \max_{q \in Q^{(2)}} \ell' C^{(2)}(t) q \right] dt.$$

Учитывая определение функций $u_{*i}(t)$ на $[t_*, t_* + \delta]$, а также неравенства $|B_i^{(3)}(t_* + \delta)| \leq \sigma_i$, $i \notin F \cup H$, получим

$$\begin{aligned} & \left| \pi \sum_{i \notin F \cup H} B_i^{(3)}(t_* + \delta) \int_{t_*}^{t_* + \delta} (u_i(t) - u_{*i}(t)) dt \right| = \\ & = \left| \pi \sum_{i \notin F \cup H} B_i^{(3)}(t_* + \delta) \int_{t_*}^{t_* + \omega} (u_i(t) - u_{*i}(t)) dt \right| \leq 2\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i. \end{aligned}$$

Окончательно приходим к неравенству

$$|\pi y^{(1*)}(t_* + \delta) - \pi \hat{z}| \leq \delta^2 \sum_{i=1}^k \beta_i \mu_i + 2\zeta \delta \sum_{i \in H} \mu_i + 2\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i + \chi(t_*, t_* + \delta). \quad (2.9)$$

Пусть $\tilde{x}$ — ближайшая к множеству $W_{c_*}^{(2)}(t_* + \delta)$ точка на плоскости $\mathcal{A}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta))$. Из (2.8) и определения оператора π следует, что

$$\hat{d}(\{\tilde{x}\}, W_{c_*}^{(2)}(t_* + \delta)) \leq |\tilde{x} - \hat{z}| \leq |\pi \tilde{x} - \pi \hat{z}| = |\pi y^{(1*)}(t_* + \delta) - \pi \hat{z}|.$$

Поэтому

$$V^{(2)}(t_* + \delta, \tilde{x}) \leq c_* + \lambda |\pi y^{(1*)}(t_* + \delta) - \pi \hat{z}| = V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda |\pi y^{(1*)}(t_* + \delta) - \pi \hat{z}|.$$

С учетом (2.9) требуемое неравенство (2.3) вытекает из того, что

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \leq V^{(2)}(t_* + \delta, \tilde{x}).$$

2.4. Замечания. 1. Рассмотрим вырожденный случай, когда $F = \emptyset$. В этом случае множество H состоит из индексов $i = \overline{1, k}$, для каждого из которых $|B_i^{(3)}(t_* + \delta)| \leq \zeta$. Оценка (2.3) сохраняет прежний вид, но при этом

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) = V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)).$$

Таким образом, в вырожденном случае $F = \emptyset$ имеем

$$\begin{aligned} V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) & \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda \delta^2 \sum_{i=1}^k \beta_i \mu_i + \\ & + 2\lambda \zeta \delta \sum_{i \in H} \mu_i + 2\lambda \omega \sum_{i \notin H} \sigma_i \mu_i + \lambda \chi(t_*, t_* + \delta). \end{aligned} \quad (2.10)$$

2. Пусть множество F таково, что число линейно независимых векторов $B_i^{(3)}(t_* + \delta)$, $i \in F$, равно n , т.е. совпадает с размерностью пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) = \min_{z \in \mathbb{R}^n} V^{(2)}(t_* + \delta, z) \leq \min_{z \in \mathbb{R}^n} V^{(2)}(t_*, z) \leq V^{(2)}(t_*, x_*).$$

Стало быть,

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*).$$

При этом управления $u_i(\cdot)$, $i \notin F$, на промежутке $[t_*, t_* + \delta]$, как и управления $u_i(\cdot)$, $i \in F$, могут быть произвольными.

2.5. Оценка изменения функции $V^{(2)}$ в частном случае. Сформулируем утверждение, вытекающее из оценки (2.10).

Предложение 2.1. Пусть $(t_*, x_*) \in Z$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$. Зададим число $\zeta > 0$ и выберем множество индексов $H \subset I$ так, чтобы при любом $j \in H$ и любом $t \in [t_*, t^*]$ выполнялось неравенство $|B_j^{(3)}(t)| \leq \zeta$. Пусть $0 \leq \omega \leq t^* - t_*$ и вдоль движения $y^{(1*)}(\cdot)$, выходящего в момент t_* из точки x_* , для любого $i \in I \setminus H$ либо $y^{(1*)}(t) \in \Pi_+(i, t)$ на промежутке $[t_*, t^*]$ и при этом $u_i(t) = \mu_i$ на $[t_* + \omega, t^*]$, либо $y^{(1*)}(t) \in \Pi_-(i, t)$ на промежутке $[t_*, t^*]$ и при этом $u_i(t) = -\mu_i$ на $[t_* + \omega, t^*]$. Тогда при любом $t \in [t_*, t^*]$ справедлива оценка

$$V^{(2)}(t, y^{(1*)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\zeta(t - t_*) \sum_{i \in H} \mu_i + 2\lambda\omega \sum_{i \notin H} \sigma_i \mu_i + \lambda\chi(t_*, t). \quad (2.11)$$

Доказательство. Разобьем промежутки $[t_*, t^*]$ моментами t_s , $s = \overline{1, e}$, $t_1 = t_*$, $t_e = t^*$, с шагом δ так, чтобы для любого промежутка $[t_s, t_{s+1}]$, $s = 1, 2, \dots, e - 1$, полученного разбиения при $t \in [t_s, t_{s+1}]$, $i \notin H$, были выполнены условия

$$G^{(1)}(t, t_s, y^{(1*)}(t_s)) \cap \Pi(i, t) = \emptyset, \quad G^{(2)}(t, t_s, y^{(1*)}(t_s)) \cap \Pi(i, t) = \emptyset.$$

Это можно сделать, опираясь на предположение, наложенное на расположение $y^{(1*)}(t)$ относительно поверхностей $\Pi(i, t)$, $i \notin H$.

В силу (2.10) имеем при каждом s , для которого $t_s > t_* + \omega$, соотношение

$$V^{(2)}(t_{s+1}, y^{(1*)}(t_{s+1})) \leq V^{(2)}(t_s, y^{(1*)}(t_s)) + \lambda\delta^2 \sum_{i=1}^n \beta_i \mu_i + 2\lambda\zeta\delta \sum_{i \in H} \mu_i + \lambda\chi(t_s, t_{s+1}). \quad (2.12)$$

Для s таких, что $t_s \in [t_*, t_* + \omega]$, в силу (2.10) получаем

$$V^{(2)}(t_{s+1}, y^{(1*)}(t_{s+1})) \leq V^{(2)}(t_s, y^{(1*)}(t_s)) + \lambda\delta^2 \sum_{i=1}^n \beta_i \mu_i + 2\lambda\zeta\delta \sum_{i \in H} \mu_i + 2\lambda\delta \sum_{i \notin H} \sigma_i \mu_i + \lambda\chi(t_s, t_{s+1}). \quad (2.13)$$

Применяя последовательно оценки (2.12), (2.13) для $s = 1, 2, \dots, e - 1$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} V^{(2)}(t^*, y^{(1*)}(t^*)) &\leq V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda(t^* - t_*)\delta \sum_{i=1}^k \beta_i \mu_i + \\ &\quad + 2\lambda\zeta(t^* - t_*) \sum_{i \in H} \mu_i + 2\lambda(\omega + \delta) \sum_{i \notin H} \sigma_i \mu_i + \lambda\chi(t_*, t^*). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получим оценку (2.11). $\square$

Применим только что доказанное утверждение к случаю, когда все управляющие воздействия $u_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, являются произвольными на $[t_*, t^*]$ и какая-то специально оговоренная малость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i = \overline{1, k}$, $t \in [t_*, t^*]$, не подразумевается. За характеристику малости возьмем величину

$$\zeta = \sigma = \max_{\substack{i=\overline{1, k} \\ t \in T}} |B_i^{(3)}(t)|.$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.2. Пусть $(t_*, x_*) \in Z$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$. Пусть движение $y^{(1*)}(\cdot)$ на $[t_*, t^*]$, выходящее в момент t_* из точки x_* , порождается произвольными допустимыми программными управлениями $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ первого и второго игроков. Тогда при любом $t \in [t_*, t^*]$ справедлива оценка

$$V^{(2)}(t, y^{(1*)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\sigma\mu(t - t_*) + \lambda\chi(t_*, t). \quad (2.14)$$

3. Множества $\Pi^c(F, t)$

3.1. Определение множеств $\Pi^c(F, t)$. Множества $\Pi(i, t)$, введенные формулами (1.5)–(1.7), обладают свойством полунепрерывности сверху по аргументу t . Однако полунепрерывности снизу по t может не быть, причем даже в случае, когда вектор $B_i^{(3)}(t)$, при помощи которого строится множество $\Pi(i, t)$, не обращается в нуль на промежутке T .

Множества $\Pi^r(i, t)$ представляют собой геометрические r -расширения множеств $\Pi(i, t)$, поэтому для них также имеет место полунепрерывность сверху по t , но может отсутствовать полунепрерывность снизу. Таким образом, к сожалению, нельзя говорить о непрерывном изменении множеств $\Pi^r(i, t)$ по аргументу t .

В связи с этим рассмотрим еще один вариант расширения множеств $\Pi(i, t)$, но только при помощи величины c , которая в отличие от r будет означать не расстояние по или против вектора $B_i^{(3)}(t)$, а перепад значений функции $V^{(2)}$. А именно, для всех $i = \overline{1, k}$, $t \in T$ и $c \geq 0$ положим

$$\Pi^c(i, t) := \{x \in \mathbb{R}^n : V^{(2)}(t, x) - \mathcal{V}(i, t, x) \leq c\}. \quad (3.1)$$

При $c = 0$ имеем равенство $\Pi^c(i, t) = \Pi(i, t)$.

Множество $\Pi^c(i, t)$ условимся называть c -окрестностью поверхности $\Pi(i, t)$ и будем отличать его от множества $\Pi^r(i, t)$, т.е. от r -окрестности поверхности $\Pi(i, t)$.

Нам потребуются также множества

$$\Pi^c(F, t) := \{x \in \mathbb{R}^n : V^{(2)}(t, x) - \mathcal{V}(F, t, x) \leq c\}, \quad (3.2)$$

которые будем рассматривать для всех $F \subset I$, $t \in T$ и $c \geq 0$. Формула (3.1) есть частный случай (3.2), когда F состоит из одного элемента.

Если $c_* < c^*$, то

$$\Pi^{c_*}(F, t) \subset \text{int } \Pi^{c^*}(F, t),$$

где int — символ внутренности множества.

Ниже будет показано, что если при любом t из некоторого замкнутого промежутка $\mathcal{T} \subset T$ векторы $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, линейно независимы, то функция $(t, x) \mapsto \mathcal{V}(F, t, x)$ непрерывна на множестве $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$. Будет доказано свойство полунепрерывности сверху множеств $\Pi^c(F, t)$ при $c \geq 0$, $t \in T$. Будет установлено, что если на замкнутом подмножестве $\mathcal{T} \subset T$ вектор $B_i^{(3)}(t)$ не обращается в нуль, то многозначная функция $(c, t) \mapsto \Pi^c(i, t)$ непрерывна на $c > 0$, $t \in T$.

3.2. Непрерывность функций $\mathcal{V}(F, \cdot, \cdot)$. В этом разделе докажем следующее утверждение.

Лемма 3.1. При любом наборе $F \subset I$ справедливо свойство полунепрерывности сверху функции $(t, x) \mapsto \mathcal{V}(F, t, x)$ на множестве Z . Если же для некоторого замкнутого промежутка $\mathcal{T} \subset T$ векторы $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, линейно независимы при любом $t \in \mathcal{T}$, то функция $(t, x) \mapsto \mathcal{V}(F, t, x)$ на множестве $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ будет обладать и свойством полунепрерывности снизу.

Доказательство. Предварительно отметим в качестве очевидного факта полунепрерывность снизу многозначной функции $(t, x) \mapsto \mathcal{A}(F, t, x)$ на множестве $T \times \mathbb{R}^n$ и ее полунепрерывность сверху на множестве $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ при дополнительном предположении о линейной независимости векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, для каждого $t \in \mathcal{T}$.

1. Рассмотрим в множестве Z произвольную последовательность $(t_n, x_n) \rightarrow (t^*, x^*)$. Покажем, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}(F, t_n, x_n) \leq \mathcal{V}(F, t^*, x^*). \quad (3.3)$$

Пусть точка z^* на плоскости $\mathcal{A}(F, t^*, x^*)$ такова, что $V^{(2)}(t^*, z^*) = \mathcal{V}(F, t^*, x^*)$. Из полунепрерывности снизу функции $\mathcal{A}(F, \cdot, \cdot)$ следует существование при каждом $n = 1, 2, \dots$ такого $z_n \in \mathcal{A}(F, t_n, x_n)$, что $z_n \rightarrow z^*$. Например, можно взять

$$z_n = x_n + \sum_{i \in F} b_i^* B_i^{(3)}(t_n),$$

где коэффициенты b_i^* , $i \in F$, удовлетворяют равенству

$$z_* = x_* + \sum_{i \in F} b_i^* B_i^{(3)}(t^*).$$

Поскольку $\mathcal{V}(F, t_n, x_n) \leq V^{(2)}(t_n, z_n)$, то

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}(F, t_n, x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V^{(2)}(t_n, z_n) = V^{(2)}(t^*, z^*) = \mathcal{V}(F, t^*, x^*).$$

Таким образом, соотношение (3.3), выражающее полунепрерывность сверху функции $\mathcal{V}(F, \cdot, \cdot)$, установлено.

2. Предположим теперь линейную независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, при любом t из замкнутого промежутка $\mathcal{T} \subset T$. Выберем произвольную последовательность $(t_n, x_n) \rightarrow (t^*, x^*)$, $(t_n, x_n) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$. Докажем неравенство

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}(F, t_n, x_n) \geq \mathcal{V}(F, t^*, x^*). \quad (3.4)$$

Пусть для каждого $n = 1, 2, \dots$ точка z_n на плоскости $\mathcal{A}(F, t_n, x_n)$ такова, что $V^{(2)}(t_n, z_n) = \mathcal{V}(F, t_n, x_n)$.

А. Сначала установим ограниченность последовательности z_n . Свойство ограниченности есть следствие бесконечного роста $|\gamma^{(2)}(x)| \rightarrow \infty$ функции платы $\gamma^{(2)}$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Имеем $V^{(2)}(t_n, x_n) \rightarrow V^{(2)}(t^*, x^*)$. Задав $\kappa > 0$, выберем номер N так, что при $n \geq N$ выполнено неравенство

$$V^{(2)}(t_n, x_n) \leq V^{(2)}(t^*, x^*) + \kappa.$$

Рассмотрим множество уровня $M_{\kappa^*}^{(2)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma^{(2)}(x) \leq \kappa^*\}$ функции $\gamma^{(2)}$, соответствующее числу $\kappa^* := V^{(2)}(t^*, x^*) + \kappa$. Множество $M_{\kappa^*}^{(2)}$ ограничено. Но тогда равномерно по $t \in T$ ограничено множество $W_{\kappa^*}^{(2)}(t)$. Поскольку $z_n \in W_{\kappa^*}^{(2)}(t_n)$, то последовательность z_n ограничена.

В. Из последовательности z_n выделим сходящуюся подпоследовательность z_k , реализующую нижний предел $\varliminf_{n \rightarrow \infty} V^{(2)}(t_n, z_n)$. Пусть $z_k \rightarrow \bar{z}$. Тогда

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}(F, t_n, x_n) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} V^{(2)}(t_n, z_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} V^{(2)}(t_k, z_k) = V^{(2)}(t^*, \bar{z}). \quad (3.5)$$

В силу предположения о линейной независимости при каждом $t \in \mathcal{T}$ векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, имеем полунепрерывность сверху функции $\mathcal{A}(F, \cdot, \cdot)$ на множестве $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$. Поэтому из условий $z_k \in \mathcal{A}(F, t_k, x_k)$ и $z_k \rightarrow \bar{z}$ вытекает включение $\bar{z} \in \mathcal{A}(F, t^*, x^*)$. Следовательно,

$$V^{(2)}(t^*, \bar{z}) \geq \mathcal{V}(F, t^*, x^*).$$

В итоге с учетом (3.5) имеем

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}(F, t_n, x_n) = V^{(2)}(t^*, \bar{z}) \geq \mathcal{V}(F, t^*, x^*).$$

Таким образом, соотношение (3.4), означающее полунепрерывность снизу функции $\mathcal{V}(F, \cdot, \cdot)$, доказано. $\square$

3.3. Полунепрерывность сверху отображения $(c, t) \mapsto \Pi^c(F, t)$. Непрерывность отображения $(c, t) \mapsto \Pi^c(i, t)$.

Предложение 3.1. При любом наборе $F \subset I$ отображение $(c, t) \mapsto \Pi^c(F, t)$ полунепрерывно сверху на множестве $c \geq 0, t \in T$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $c^* \geq 0, t^* \in T$ и рассмотрим произвольные последовательности $c_n \rightarrow c^*, t_n \rightarrow t^*$. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ выберем $z_n \in \Pi^{c_n}(F, t_n)$ и предположим, что $z_n \rightarrow z^*$. Покажем, что $z^* \in \Pi^{c^*}(F, t^*)$. Это и будет означать полунепрерывность сверху.

Имеем

$$V^{(2)}(t_n, z_n) - \mathcal{V}(F, t_n, z_n) \leq c_n \Rightarrow V^{(2)}(t_n, z_n) \leq c_n + \mathcal{V}(F, t_n, z_n).$$

Отсюда с учетом полунепрерывности сверху функции $\mathcal{V}(F, \cdot, \cdot)$ получаем

$$V^{(2)}(t^*, z^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} V^{(2)}(t_n, z_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}(F, t_n, z_n) \leq c^* + \mathcal{V}(F, t^*, z^*).$$

Таким образом,

$$V^{(2)}(t^*, z^*) - \mathcal{V}(F, t^*, z^*) \leq c^*.$$

Следовательно, $z^* \in \Pi^{c^*}(F, t^*)$. $\square$

Лемма 3.2. Пусть $i \in I$ и на некотором замкнутом промежутке $\mathcal{T} \subset T$ вектор $B_i^{(3)}(t)$ не обращается в нуль. Тогда на множестве $c > 0, t \in \mathcal{T}$ отображение $(c, t) \mapsto \Pi^c(i, t)$ непрерывно.

Доказательство. С учетом предложения 3.1 достаточно установить полунепрерывность снизу отображения $(c, t) \mapsto \Pi^c(i, t)$ на множестве $c > 0, t \in \mathcal{T}$.

Пусть заданы $c^* > 0, t^* \in \mathcal{T}$ и некоторые последовательности $c_n \rightarrow c^*, t_n \rightarrow t^*$, где $t_n \in \mathcal{T}$. Возьмем произвольное $z^* \in \Pi^{c^*}(i, t^*)$. Покажем возможность выбора таких $z_n \in \Pi^{c_n}(i, t_n)$, что $z_n \rightarrow z^*$. Это и будет означать полунепрерывность снизу.

Зададим точку $y^* \in \mathcal{A}(i, t^*, z^*)$ так, что $V^{(2)}(t^*, y^*) = \mathcal{V}(i, t^*, z^*)$. Имеем $V^{(2)}(t^*, y^*) \leq V^{(2)}(t^*, z^*)$.

1. Рассмотрим случай $V^{(2)}(t^*, y^*) < V^{(2)}(t^*, z^*)$. Тогда $y^* \neq z^*$. Отметим, что для любой точки z на прямой, проходящей через y^* и z^* , выполнено равенство $\mathcal{V}(i, t^*, z) = \mathcal{V}(i, t^*, z^*)$.

Зафиксируем положительное $\kappa < c^*$. Используя непрерывность функций $\mathcal{V}(i, \cdot, y^*)$ и $V^{(2)}(\cdot, y^*)$, выберем номер $\tilde{N}$ так, чтобы при любом $n \geq \tilde{N}$ выполнялись неравенства

$$\mathcal{V}(i, t_n, y^*) \geq \mathcal{V}(i, t^*, y^*) - \frac{\kappa}{2}, \quad V^{(2)}(t_n, y^*) \leq V^{(2)}(t^*, y^*) + \frac{\kappa}{2}, \quad c_n \geq \kappa.$$

Тогда при $n \geq \tilde{N}$ имеем

$$V^{(2)}(t_n, y^*) - \mathcal{V}(i, t_n, y^*) \leq V^{(2)}(t^*, y^*) + \frac{\kappa}{2} - \mathcal{V}(i, t^*, y^*) + \frac{\kappa}{2} = \kappa \leq c_n.$$

Таким образом,

$$V^{(2)}(t_n, y^*) - \mathcal{V}(i, t_n, y^*) \leq c_n, \quad n \geq \tilde{N}. \quad (3.6)$$

Далее считаем $n \geq \tilde{N}$.

Рассмотрим на отрезке $[y^*, z^*]$ точки z , для которых

$$V^{(2)}(t_n, z) - \mathcal{V}(i, t_n, z) \leq c_n. \quad (3.7)$$

В силу (3.6) по крайней мере одна такая точка $z = y^*$ существует. Используя непрерывность функций $V^{(2)}(t_n, \cdot)$ и $\mathcal{V}(i, t_n, \cdot)$, выберем среди точек $z \in [y^*, z^*]$, удовлетворяющих (3.7), ближайшую к z^* и обозначим ее z_n . Отметим, что если $z_n \neq z^*$, то в (3.7) для такой точки реализуется равенство.

Покажем, что $z_n \rightarrow z^*$. Предположим противное, т.е. существование подпоследовательности $z_k \rightarrow \hat{z}, \hat{z} \neq z^*$. Считаем, что $z_k \neq z^*$ при любом k . Тогда, используя в (3.7) нижний индекс k вместо индекса n и символ z_k вместо z , получаем равенство. А именно,

$$V^{(2)}(t_k, z_k) - \mathcal{V}(i, t_k, z_k) = c_k. \quad (3.8)$$

Положим

$$\eta := V^{(2)}(t^*, z^*) - V^{(2)}(t^*, \hat{z}).$$

С учетом условия 1 и неравенства $V^{(2)}(t^*, y^*) < V^{(2)}(t^*, z^*)$ имеем $\eta > 0$. Выберем $\bar{N}$ так, чтобы при любом $k \geq \bar{N}$ выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(i, t_k, z_k) &\geq \mathcal{V}(i, t^*, \hat{z}) - \frac{\eta}{4} = \mathcal{V}(i, t^*, z^*) - \frac{\eta}{4}, \\ V^{(2)}(t_k, z_k) &\leq V^{(2)}(t_*, \hat{z}) + \frac{\eta}{4}, \quad c_k \geq c^* - \frac{\eta}{4}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Опираясь на (3.8) и (3.9), получаем

$$\begin{aligned} V^{(2)}(t^*, z^*) - \mathcal{V}(i, t^*, z^*) &= V^{(2)}(t^*, z^*) - V^{(2)}(t_*, \hat{z}) + V^{(2)}(t_*, \hat{z}) - \\ &- V^{(2)}(t_k, z_k) + V^{(2)}(t_k, z_k) - \mathcal{V}(i, t_k, z_k) + \mathcal{V}(i, t_k, z_k) - \mathcal{V}(i, t^*, z^*) \geq \\ &\geq \eta - \frac{\eta}{4} + c_k - \frac{\eta}{4} \geq \eta - \frac{\eta}{4} + c^* - \frac{\eta}{4} - \frac{\eta}{4} = c^* + \frac{\eta}{4}. \end{aligned}$$

Неравенство

$$V^{(2)}(t^*, z^*) - \mathcal{V}(i, t^*, z^*) \geq c^* + \frac{\eta}{4}$$

противоречит включению $z^* \in \Pi^{c^*}(i, t^*)$. Таким образом, доказано, что $z_n \rightarrow z^*$. При этом выполняется включение $z_n \in \Pi^{c_n}(i, t_n)$.

2. Рассмотрим случай $V^{(2)}(t^*, y^*) = V^{(2)}(t^*, z^*)$. Имеем

$$V^{(2)}(t^*, z^*) - \mathcal{V}(i, t^*, z^*) = 0.$$

Используя непрерывность функций $V^{(2)}(\cdot, z^*)$ и $\mathcal{V}(i, \cdot, z^*)$, выберем $\hat{N}$ так, чтобы при любом $n \geq \hat{N}$ выполнялись неравенства

$$V^{(2)}(t_n, z^*) - \mathcal{V}(i, t_n, z^*) \leq \frac{c^*}{2}, \quad c_n \geq \frac{c^*}{2}.$$

Тогда

$$V^{(2)}(t_n, z^*) - \mathcal{V}(i, t_n, z^*) \leq c_n.$$

Последнее неравенство означает, что $z^* \in \Pi^{c_n}(i, t_n)$ при $n \geq \hat{N}$. Поэтому в искомой последовательности можно взять $z_n = z^*$ для $n \geq \hat{N}$. $\square$

3.4. Утверждение о ненулевом расстоянии между частью множества $\Pi^{c^*}(\mathfrak{F}_1, t)$, расположенной вне множества $\Pi^{\bar{c}}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2, t)$, и множеством $\Pi^{c^*}(\mathfrak{F}_2, t)$. Сформулируем следствие из леммы 3.1 и предложения 3.1. При этом символ d будет означать расстояние между множествами:

$$d(A, B) := \inf \{|a - b| : a \in A, b \in B\}.$$

Лемма 3.3. Пусть $F \subset I$ — некоторый набор, состоящий более чем из одного элемента, и $\mathcal{T}$ — замкнутый промежуток из T . Предположим, что совокупность векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, линейно независима при любом $t \in \mathcal{T}$. Зафиксируем число $\bar{c} > 0$. Разложим множество F на непересекающиеся подмножества $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Тогда для любого ограниченного множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ существуют такие положительные числа c_* и e_* , что

$$d\left(\left(\Pi^{c_*}(\mathfrak{F}_1, t) \cap \mathcal{X}\right) \setminus \text{int } \Pi^{\bar{c}}(F, t), \Pi^{c_*}(\mathfrak{F}_2, t)\right) \geq e_*$$

для всех $t \in \mathcal{T}$.

Доказательство. Предполагая противное, выберем последовательности положительных чисел $c_n \rightarrow 0$, $e_n \rightarrow 0$, а затем последовательности моментов времени $t_n \in \mathcal{T}$ и точек

$$z_{1n} \in (\Pi^{c_n}(\mathfrak{F}_1, t_n) \cap \mathcal{X}) \setminus \text{int } \Pi^{\bar{c}}(F, t_n), \quad z_{2n} \in \Pi^{c_n}(\mathfrak{F}_2, t_n)$$

так, что $|z_{1n} - z_{2n}| \leq e_n$. Используя ограниченность множеств $\mathcal{T}$ и $\mathcal{X}$, выделим сходящиеся подпоследовательности $t_k \rightarrow t_*$, $z_{1k} \rightarrow z_*$. Для соответствующей подпоследовательности z_{2k} точек z_{2n} получаем $z_{2k} \rightarrow z_*$.

В силу полунепрерывности сверху отображений $(c, t) \mapsto \Pi^c(\mathfrak{F}_1, t)$, $(c, t) \mapsto \Pi^c(\mathfrak{F}_2, t)$ имеем

$$z_* \in \Pi(\mathfrak{F}_1, t_*), \quad z_* \in \Pi(\mathfrak{F}_2, t_*).$$

Отсюда, опираясь на условие 2, заключаем, что $z_* \in \Pi(F, t_*)$, и, следовательно,

$$V^{(2)}(t_*, z_*) = \mathcal{V}(F, t_*, z_*). \quad (3.10)$$

Используя непрерывность функций $V^{(2)}$ и $\mathcal{V}(F, \cdot, \cdot)$ на $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$, выберем номер N так, чтобы при $k \geq N$ выполнялись неравенства

$$|V^{(2)}(t_k, z_{1k}) - V^{(2)}(t_*, z_*)| \leq \frac{\bar{c}}{4}, \quad (3.11)$$

$$|\mathcal{V}(F, t_k, z_{1k}) - \mathcal{V}(F, t_*, z_*)| \leq \frac{\bar{c}}{4}. \quad (3.12)$$

На основе соотношений (3.10)–(3.12) при $k \geq N$ получаем

$$\begin{aligned} & V^{(2)}(t_k, z_{1k}) - \mathcal{V}(F, t_k, z_{1k}) = \\ & = V^{(2)}(t_k, z_{1k}) - V^{(2)}(t_*, z_*) + \mathcal{V}(F, t_*, z_*) - \mathcal{V}(F, t_k, z_{1k}) \leq \\ & \leq |V^{(2)}(t_k, z_{1k}) - V^{(2)}(t_*, z_*)| + |\mathcal{V}(F, t_*, z_*) - \mathcal{V}(F, t_k, z_{1k})| \leq 2 \cdot \frac{\bar{c}}{4} = \frac{\bar{c}}{2}. \end{aligned}$$

Неравенство

$$V^{(2)}(t_k, z_{1k}) - \mathcal{V}(F, t_k, z_{1k}) \leq \frac{\bar{c}}{2}, \quad k \geq N,$$

означает, что

$$z_{1k} \in \Pi^{\bar{c}/2}(F, t_k), \quad k \geq N.$$

Поскольку $\Pi^{\bar{c}/2}(F, t_k) \subset \text{int } \Pi^{\bar{c}}(F, t_k)$, то получаем противоречие с $z_{1k} \notin \text{int } \Pi^{\bar{c}}(F, t_k)$. $\square$

3.5. Многозначная функция U^c . Положим для $c \geq 0$, $i = \overline{1, k}$, $t \in T$

$$\Pi_-^c(i, t) := \{x \in \mathbb{R}^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi^c(i, t), \quad \forall \alpha \geq 0\},$$

$$\Pi_+^c(i, t) := \{x \in \mathbb{R}^n : x + \alpha B_i^{(3)}(t) \notin \Pi^c(i, t), \quad \forall \alpha \leq 0\}.$$

При каждом $i = \overline{1, k}$ введем на Z скалярную многозначную функцию

$$U_i^c(t, x) := \begin{cases} \{-\mu_i\}, & x \in \Pi_-^c(i, t), \\ \{\mu_i\}, & x \in \Pi_+^c(i, t), \\ [-\mu_i, \mu_i], & x \in \Pi^c(i, t). \end{cases}$$

Определим на Z векторную многозначную функцию

$$U^c(t, x) := \begin{pmatrix} U_1^c(t, x) \\ U_2^c(t, x) \\ \vdots \\ U_k^c(t, x) \end{pmatrix}.$$

4. ПОКАЗАТЕЛИ НЕЗАВИСИМОСТИ И ЗАВИСИМОСТИ ВЕКТОРОВ $B_i^{(3)}(t)$

Как показывают результаты раздела 3, полезным при рассмотрении какой-либо совокупности векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, на промежутке T было бы свойство линейной независимости векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, при любом $t \in T$. Однако у нас нет предположений, гарантирующих такое свойство. Более того, подобные предположения не являются естественными. Например, линейная независимость нарушается, если хотя бы один вектор $B_i^{(3)}(t)$ рассматриваемой совокупности обращается в нуль в некоторый момент $t \in T$. Чтобы различать случаи, близкие к ситуации линейной зависимости, от случаев грубой линейной зависимости, нам потребуется несколько понятий. Сформулируем их для произвольной совокупности векторов в $\mathbb{R}^n$, а применять будем для векторов $B_i^{(3)}(t)$.

4.1. Показатели независимости и зависимости. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ конечную совокупность $\mathcal{B}$ векторов b_i , $i = \overline{1, s}$, $s \geq 1$. Символом $\mathcal{G}(\mathcal{B})$ обозначим подпространство, натянутое на совокупность векторов $\mathcal{B}$. Пусть $\alpha > 0$.

Совокупность $\mathcal{B}$ при $s \geq 2$ назовем независимой с показателем α , если

$$d(b_i, \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus b_i)) \geq \alpha, \quad i = \overline{1, s}.$$

Отметим, что независимость с показателем α влечет за собой обычную линейную независимость. Очевидно также, что любая конечная совокупность линейно независимых векторов является независимой с некоторым показателем $\alpha > 0$.

В случае $s = 1$ под независимостью с показателем α будем понимать условие, что длина рассматриваемого вектора больше или равна α .

Совокупность $\mathcal{B}$ при $s \geq 2$ назовем зависимой с показателем α , если среди векторов данной совокупности найдется такой вектор b_{i_*} , что

$$d(b_{i_*}, \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus b_{i_*})) \leq \alpha,$$

т.е. найдется вектор, являющийся α -ближним к множеству остальных векторов.

При $s = 1$ зависимость с показателем α будет означать, что длина рассматриваемого вектора не превышает α .

Сформулируем утверждение об оценке близости данного вектора к совокупности других.

Лемма 4.1. Пусть дана совокупность $\mathcal{B}$ векторов $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, s}$, являющаяся независимой с показателем α . Добавим еще один вектор $a \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что расширенная совокупность $\mathcal{B} \cup a$ векторов является зависимой с показателем $p < \alpha$. Тогда вектор a является ζ -ближним к совокупности $\mathcal{B}$ с характеристикой $\zeta = (1 + 2D/\alpha)p$, где D — максимум из длин $s + 1$ векторов совокупности $\mathcal{B} \cup a$.

Доказательство. Символом $\hat{\alpha}$ обозначим наибольший показатель независимости векторов совокупности $\mathcal{B}$. Пусть $\hat{p}$ — наименьший показатель зависимости векторов совокупности $\mathcal{B} \cup a$. Наименьшую характеристику близости вектора a к совокупности $\mathcal{B}$ обозначим $\hat{\zeta}$.

В совокупности $\mathcal{B} \cup a$ выделим вектор h , который является $\hat{p}$ -ближним к совокупности $(\mathcal{B} \cup a) \setminus h$ оставшихся векторов.

1. Если в качестве h можно взять вектор a , то получаем

$$\hat{\zeta} = \hat{p} \leq p < \left(1 + \frac{2D}{\alpha}\right)p,$$

и доказательство закончено.

2. Предположим, что вектор a нельзя взять в качестве h .

А. Рассмотрим сначала случай, когда $s = 1$, т.е. совокупность $\mathcal{B}$ состоит из одного вектора, который и следует взять за вектор h . Имеем $\hat{\alpha} = |h|$. Справедливо соотношение $\hat{p}/\hat{\zeta} = |h|/|a|$. Поэтому

$$\hat{\zeta} = \frac{|a|\hat{p}}{|h|} = \frac{|a|\hat{p}}{\hat{\alpha}} \leq \frac{|a|p}{\alpha} < \left(1 + \frac{2D}{\alpha}\right)p.$$

Б. Пусть теперь $s > 1$. Рассмотрим подпространство $\mathcal{G}((\mathcal{B} \cup a) \setminus h)$. Пусть g — ближайший к h элемент этого подпространства. Положим $|hg| := |h - g|$. Имеем $|hg| = \hat{p} \leq p$. Отметим также, что $d(h, \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)) \geq \alpha$.

Предположим, что $g \in \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)$. Тогда $|hg| \geq \alpha$. Отсюда с учетом неравенства $p \geq |hg|$ получаем $p \geq \alpha$, что противоречит условию $p < \alpha$. Следовательно, $g \notin \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)$.

Имеем

$$\begin{aligned} a &\notin \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h), \quad a \in \mathcal{G}((\mathcal{B} \cup a) \setminus h), \\ g &\in \mathcal{G}((\mathcal{B} \cup a) \setminus h), \quad g \notin \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h) \subset \mathcal{G}((\mathcal{B} \cup a) \setminus h). \end{aligned}$$

Рассмотрим прямую A_1 , проведенную через точки g , a . Прямая A_1 либо параллельна подпространству $\mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)$, либо пересекает его.

Если прямая A_1 параллельна подпространству $\mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)$, то $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \leq |hg|$. В самом деле, проведя через точку h прямую A_2 , параллельную A_1 , получим, что она будет параллельна $\mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)$. Следовательно, $A_2 \subset \mathcal{G}(\mathcal{B})$. Поэтому $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \leq d(a, A_2) \leq |hg|$.

Из неравенства $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \leq |hg|$ с учетом соотношения $|hg| = \hat{p}$ получаем $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \leq \hat{p}$, т.е. вектор a является $\hat{p}$ -ближним к совокупности $\mathcal{B}$. Это противоречит тому, что в качестве h нельзя было взять вектор a .

Предположим теперь, что прямая A_1 пересекает подпространство $\mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)$. Пусть e — точка пересечения. Проведем через точки h, e прямую A_3 . Имеем $A_3 \subset \mathcal{G}(\mathcal{B})$. Пусть f — точка на прямой A_3 такая, что fa параллельна hg . Отметим, что $|he| \geq \alpha$.

Рассмотрим варианты расположения точки e на прямой A_1 .

а) Точка e лежит на луче ga с вершиной g дальше точки a (рис. 1). Тогда $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \leq |fa| < |hg| = \hat{p}$, и это противоречит тому, что в качестве h нельзя было взять точку a .

б) Точка e лежит на луче ag с вершиной a дальше точки g (рис. 2). Имеем

$$|he| \geq d(h, \mathcal{G}(\mathcal{B} \setminus h)) \geq \alpha.$$

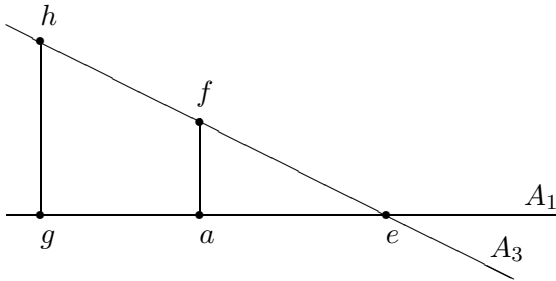


Рис. 1

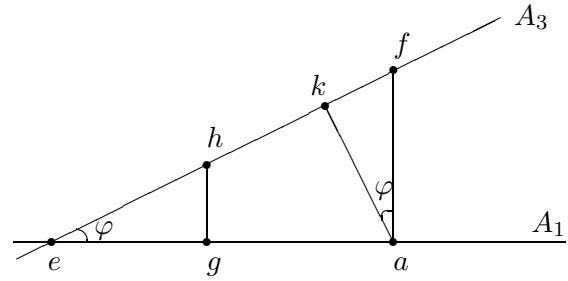


Рис. 2

Обозначим через k точку на луче ef , ближайшую к точке a . Отметим, что $k \in \mathcal{G}(\mathcal{B})$. Следовательно, $d(a, \mathcal{G}(\mathcal{B})) \leq |ka|$. Оценим величину $|ka|$.

Имеем (см. рис. 2) $|ka|/|fa| = \cos \varphi = |eg|/|eh|$. Поэтому

$$|ka| = |fa| |eg| / |eh|. \quad (4.1)$$

Поскольку $|fa|/|hg| = |ea|/|eg|$, то

$$|fa| = \frac{|hg| |ea|}{|eg|} = \frac{|hg| (|eg| + |ga|)}{|eg|} = |hg| \left(1 + \frac{|ga|}{|eg|} \right). \quad (4.2)$$

Используя (4.1) и (4.2), получаем

$$|ka| = |fa| \frac{|eg|}{|eh|} = |hg| \left(1 + \frac{|ga|}{|eg|} \right) \frac{|eg|}{|eh|} = \frac{|hg|}{|eh|} (|eg| + |ga|).$$

Учитывая неравенства $|eg| < |eh|$ и $|ga| < |ha|$, имеем далее

$$|ka| < \frac{|hg|}{|eh|} (|eh| + |ha|).$$

Так как $|hg| \leq p$, $|eh| \geq \alpha$ и $|ha| < 2D$, то

$$|ka| < p \left(1 + \frac{|ha|}{\alpha} \right) < \left(1 + \frac{2D}{\alpha} \right) p.$$

Таким образом, за характеристику близости вектора a к совокупности $\mathcal{B}$ можно взять величину $\zeta = |ka| < (1 + 2D/\alpha)p$.

в) Точка e лежит на луче ag между точками g и a (рис. 3).

Если $|ea| \leq |eg|$, то $|fa| \leq |hg|$, что противоречит тому, что a нельзя взять в качестве h .

Пусть $|ea| > |eg|$. Введем точки g^* и h^* , симметричные точкам g и h относительно e . Пусть k — точка на луче ef , ближайшая к a . Оценим величину $|ka|$.

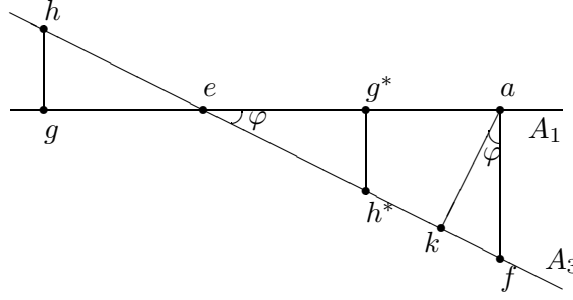


Рис. 3

Рассуждаем, как в случае б), взяв h^* , g^* вместо h , g . Имеем

$$|ka| = |fa| \frac{|eg^*|}{|eh^*|} = \frac{|h^*g^*|}{|eh^*|} (|eg^*| + |g^*a|).$$

Учитывая, что $|hg| = |h^*g^*|$, $|eh| = |eh^*|$ и $|eg^*| + |g^*a| < |ga| < |ha|$, получаем далее

$$|ka| < \frac{|hg|}{|eh|} |ha|.$$

В итоге

$$|ka| < \frac{2Dp}{\alpha}$$

и, следовательно, за характеристику близости вектора a к множеству $\mathcal{B}$ в рассматриваемом случае можно взять величину

$$\zeta = |ka| < \frac{2Dp}{\alpha} < \left(1 + \frac{2D}{\alpha}\right) p.$$

Лемма доказана. $\square$

4.2. Показатели независимости и зависимости векторов $B_i^{(3)}(t)$ на промежутках времени.

Каждая из функций $B_i^{(3)}$, $i = \overline{1, k}$, удовлетворяет условию Липшица на T . Отсюда вытекает следующее свойство.

Пусть $\mathcal{T} \subset T$ — замкнутый промежуток и $F \subset I$. Предположим, что при каждом $t \in \mathcal{T}$ векторы $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, являются линейно независимыми. Пусть $\mathcal{G}^\perp(\{B_i^{(3)}(t)\}_{i \in F})$ — ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^n$ к линейному подпространству $\mathcal{G}(\{B_i^{(3)}(t)\}_{i \in F})$, натянутому на векторы $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$. Тогда при любом $j = \overline{1, k}$ проекция вектора $B_j^{(3)}(t)$ на подпространство $\mathcal{G}^\perp(\{B_i^{(3)}(t)\}_{i \in F})$ удовлетворяет по t условию Липшица на промежутке $\mathcal{T}$.

Из этого свойства в свою очередь вытекает существование оценки снизу длины промежутка, на котором независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, с показателем α уменьшается до независимости с показателем $\alpha/2$. Приведем точную формулировку.

Предложение 4.1. Пусть $F \subset I$. Тогда по любому $\alpha > 0$ найдется такое $\kappa > 0$, что если в некоторый момент $t_* \in T$ векторы $B_i^{(3)}(t)$ независимы с показателем α , то они независимы с показателем $\alpha/2$ при любом $t \in [t_* - \kappa, t_* + \kappa] \cap T$.

Аналогично можно сформулировать утверждение о существовании оценки снизу длины промежутка, где зависимость с показателем α совокупности векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, может измениться до зависимости с показателем 2α .

Предложение 4.2. Пусть $F \subset I$. Тогда для любого $\alpha > 0$ найдется такое $\kappa > 0$, что если в некоторый момент $t_* \in T$ векторы $B_i^{(3)}(t)$ зависимы с показателем α , то они зависимы с показателем 2α при любом $t \in [t_* - \kappa, t_* + \kappa] \cap T$.

4.3. Правило выбора показателей независимости и зависимости векторов $B_i^{(3)}(t)$. Пусть $\beta > 0$, $\xi > 0$, $F \subset I$.

Показатель независимости (зависимости) совокупности векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, вводим лишь тогда, когда число элементов $q(F)$ набора F не превышает n . Величину показателя полагаем равной $\xi^{q(F)}$.

Пусть в некоторый момент $t_* \in T$ для совокупности векторов $B_i^{(3)}(t_*)$, $i \in F$, имеем независимость с показателем $\xi^{q(F)}$. Тогда, опираясь на предложение 4.1, можно оценить снизу длину промежутка $[t_*, \bar{t}] \subset T$, для каждого момента t из которого показатель независимости совокупности векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, не меньше, чем $\xi^{q(F)}/2$. Пусть $\bar{w}(F, \xi)$ — такая оценка снизу. Поскольку общее число наборов F с числом элементов от 1 до $\min\{k, n\}$ конечно, то можно выбрать универсальную оценку

$$\bar{w}(\xi) := \min_F \bar{w}(F, \xi).$$

Будем применять ее для любого набора F .

Пусть в некоторый момент $t_* \in T$ для совокупности векторов $B_i^{(3)}(t_*)$, $i \in F$, имеем зависимость с показателем $\xi^{q(F)}$. Тогда на основе предложения 4.2 можно оценить снизу длину промежутка $[t_*, \hat{t}] \subset T$ для каждого момента t из которого показатель зависимости векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, не больше $2\xi^{q(F)}$. Пусть $\hat{w}(F, \xi)$ — такая оценка. В силу конечности числа наборов F можно выбрать универсальную оценку

$$\hat{w}(\xi) := \min_F \hat{w}(F, \xi).$$

Положим

$$w(\xi) := \min\{\bar{w}(\xi), \hat{w}(\xi)\}.$$

Справедливо следующее свойство: при любом F с числом элементов $q(F)$, не превышающим $\min\{k, n\}$, на промежутке длины $w(\xi)$ гарантируется независимость (зависимость) векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, с показателем $\xi^{q(F)}/2$ (соответственно, $2\xi^{q(F)}$), если в начальный момент промежутка она была с показателем $\xi^{q(F)}$.

При $k > 1$ говорим лишь о существовании оценки $w(\xi)$. В случае $k = 1$ можно использовать явную оценку $w(\xi) = \xi/(2\beta)$.

4.4. Оценка близости при выбранных показателях.

Лемма 4.2. Пусть для некоторого момента $t_* \in T$ набор векторов $B_i^{(3)}(t_*)$, $i \in F$, $q(F) < \min\{k, n\}$, является независимым с показателем $\xi^{q(F)}$, где $\xi \leq 1/4$. Добавим еще один вектор $B_j^{(3)}(t_*)$, $j \notin F$. Для расширенной совокупности предположим, что имеет место зависимость с показателем $\xi^{q(F)+1}$. Тогда при любом $t \in [t_*, t_* + w(\xi)] \cap T$ вектор $B_j^{(3)}(t)$ близок к совокупности $B_i^{(3)}(t_*)$, $i \in F$, с показателем $\zeta = ((1/2) + 8\sigma)\xi$.

Доказательство. Для набора векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, с числом элементов $q(F) < \min\{k, n\}$ имеем на промежутке $[t_*, t_* + w(\xi)] \cap T$ независимость с показателем $\xi^{q(F)}/2$. После добавления вектора $B_j^{(3)}(t)$, $j \notin F$, расширенная совокупность на промежутке $[t_*, t_* + w(\xi)] \cap T$ является зависимой с показателем $2\xi^{q(F)+1}$.

Применим лемму 4.1. Положим

$$\alpha := \frac{\xi^{q(F)}}{2}, \quad p := 2\xi^{q(F)+1}.$$

Неравенство $p < \alpha$ вытекает из того, что $\xi \leq 1/4$. В силу леммы 4.1 получаем, что при любом $t \in [t_*, t_* + w(\xi)] \cap T$ вектор $B_j^{(3)}(t)$ близок к совокупности $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, с показателем

$$\zeta = \left(1 + \frac{2\sigma}{\alpha}\right)p = \left(1 + \frac{4\sigma}{\xi^{q(F)}}\right)2\xi^{q(F)+1} = (2\xi^{q(F)} + 8\sigma)\xi < \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^{q(F)} + 8\sigma\right)\xi \leq \left(\frac{1}{2} + 8\sigma\right)\xi.$$

В последнем неравенстве учтено, что $q(F) \geq 1$. □

5. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ

5.1. Загрубление неравенства (2.3). При фиксированном ξ будем использовать оценку (2.3) на промежутках $[t_*, t^*]$ длины $t^* - t_* \leq w(\xi)$. Величина δ в (2.3) берется из полуинтервала $(0, t^* - t_*]$. Множество индексов F считаем выбранным так, чтобы в каждый момент $t \in [t_*, t^*]$ векторы $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, были независимы с показателем $\xi^{q(F)}/2$. Положим

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2} + 8\sigma, \quad \tilde{\zeta} := \mathcal{L}\xi.$$

Множество $H \subset I \setminus F$ выберем так, что $H \subset \mathcal{H}(F, \tilde{\zeta}, t)$ при всех $t \in [t_*, t^*]$. Таким образом, при любом $j \in H$ и любом $t \in [t_*, t^*]$ вектор $B_j^{(3)}(t)$ является $\tilde{\zeta}$ -близким к совокупности $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$. Соотношения (2.2) полагаем выполненными для $t \in [t_*, t^*]$. Относительно движения $y^{(1*)}(\cdot)$ системы (1.1) в силу некоторых допустимых программных управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ предполагаем, что оно выходит в момент t_* из точки x_* и для любых $i \in I \setminus (F \cup H)$, $t \in [t_* + \omega, t^*]$ в случае $x_* \in \Pi_+(i, t_*)$ выполнено равенство $u_i(t) = \mu_i$, а в случае $x_* \in \Pi_-(i, t_*)$ — равенство $u_i(t) = -\mu_i$.

Перепишем оценку (2.3). Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) &\leq V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda \delta^2 \sum_{i=1}^k \beta_i \mu_i + \\ &+ 2\lambda \mathcal{L} \xi \delta \sum_{i \in H} \mu_i + 2\lambda \omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i + \lambda \chi(t_*, t_* + \delta). \end{aligned} \quad (5.1)$$

В оценке (5.1) загрубим третье и четвертое слагаемые справа:

$$2\lambda \mathcal{L} \xi \delta \sum_{i \in H} \mu_i \leq 2\lambda \mathcal{L} \mu \xi \delta, \quad 2\lambda \omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i \leq 2\lambda \sigma \mu \omega.$$

Получим для любого $\delta \in (0, t^* - t_*]$ неравенство

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda \delta^2 \sum_{i=1}^k \beta_i \mu_i + 2\lambda \mathcal{L} \mu \xi \delta + 2\lambda \sigma \mu \omega + \lambda \chi(t_*, t_* + \delta). \quad (5.2)$$

Правая часть неравенства (5.2) не зависит от F . Это неравенство можно применять в случае, когда на промежутке $[t_*, t^*]$ для $i \in F$ используются произвольные допустимые управления $u_i(\cdot)$, а для любого $j \notin F$ либо на $[t_*, t^*]$ действует правильное управление $u_j(\cdot)$, либо при любом $t \in [t_*, t^*]$ вектор $B_j^{(3)}(t)$ является $\tilde{\zeta}$ -близким к совокупности $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$. Напомним, что управление $u_j(\cdot)$ называется правильным, если при $x_* \in \Pi_+(j, t_*)$ ($x_* \in \Pi_-(j, t_*)$) на $[t_* + \omega, t^*]$ выполнено равенство $u_j(t) = \mu_j$ ($u_j(t) = -\mu_j$).

Ограничим применение неравенства (5.2) лишь случаем, когда $t^* - t_* \leq \mathcal{L}\xi/\beta$. Тогда, заменяя один сомножитель δ во втором слагаемом справа на $\mathcal{L}\xi/\beta$, вместо (5.2) получим оценку

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 3\lambda \mathcal{L} \mu \xi \delta + 2\lambda \sigma \mu \omega + \lambda \chi(t_*, t_* + \delta)$$

или, что то же самое,

$$\mathcal{V}(F, t, y^{(1*)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + \mathbf{kf}(\xi)(t - t_*) + 2\lambda \sigma \mu \omega + \lambda \chi(t_*, t), \quad t \in [t_*, t^*], \quad (5.3)$$

где $\mathbf{kf}(\xi) := 3\lambda \mathcal{L} \mu \xi$.

5.2. Загрубление неравенства (2.11). Неравенство (2.11) будем применять, полагая $\zeta = 2\xi$. При этом в оценке (2.11) загрубим второе и третье слагаемые справа:

$$4\lambda \xi \cdot (t - t_*) \sum_{i \in H} \mu_i \leq 4\lambda \mu \xi \cdot (t - t_*), \quad 2\lambda \omega \sum_{i \notin H} \sigma_i \mu_i \leq 2\lambda \sigma \mu \omega.$$

Оставляя постановочную часть предложения 2.1 прежней, получим при $\zeta = 2\xi$ оценку

$$V^{(2)}(t, y^{(1*)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + \mathbf{kf}^{[*]}(\xi)(t - t_*) + 2\lambda \sigma \mu \omega + \lambda \chi(t_*, t), \quad t \in [t_*, t^*], \quad (5.4)$$

где $\mathbf{kf}^{[*]}(\xi) := 4\lambda\mu\xi$.

6. ВЫБОР ВЕЛИЧИН c_h , Δ_h , $\mathbf{st}^{[h]}$

Положим

$$\mathbf{st}(\xi, \Delta, c) := \frac{2\lambda\sigma\mu\Delta + c}{\mathbf{kf}(\xi)}, \quad \Delta > 0, \quad c \geq 0, \quad \xi > 0.$$

В дальнейшем условимся, что

$$\xi \leq \frac{\sigma}{1 + 16\sigma}.$$

Для таких ξ выполнены соотношения

$$\xi < \sigma, \quad \xi < \frac{1}{4}, \quad \mathbf{st}(\xi, \Delta, c) > \Delta.$$

Рассмотрим множество целых чисел $h \geq 1$, $h \leq \min\{k, n\}$, для каждого из которых существуют набор $F \subset I$ с количеством элементов $q(F) = h$ и момент $t \in T$ такие, что совокупность векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, независима с показателем ξ^h . Такое множество непусто в силу неравенства $\xi < \sigma$. Максимальное из чисел обозначим $h^*(\xi)$.

Считаем значение ξ зафиксированным.

1. Выберем величины $c_{h^*(\xi)} > 0$ и $\Delta_{h^*(\xi)} > 0$ так, что

$$\mathbf{st}(\xi, \Delta_{h^*(\xi)}, c_{h^*(\xi)}) \leq \min \left\{ \frac{\mathcal{L}\xi}{\beta}, w(\xi), \vartheta - \vartheta_1 \right\}.$$

Ниже для сокращения записи условимся опускать аргумент ξ там, где это не приводит к недоразумению.

2. Перейдем к выбору величин c_h и Δ_h для $h = h^* - 1, h^* - 2, \dots, 1$.

Опишем индукционный шаг. Пусть $c_h > 0$ и $\Delta_h > 0$ введены при некотором $h \in \overline{2, h^*}$. Определим величины c_{h-1} , Δ_{h-1} .

А. Зафиксируем набор F_h из h элементов. Выделим произвольное подмножество F_{h-1} , состоящее из $h-1$ элементов, и оставшееся подмножество F_1 , состоящее из одного элемента. Пусть $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1})$ — совокупность моментов времени $t \in T$, для каждого из которых имеет место ξ^h -независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F_h$, и одновременно ξ^{h-1} -независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F_{h-1}$.

В случае $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1}) \neq \emptyset$ каждому моменту из множества $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1})$ поставим в соответствие примыкающий к нему справа замкнутый промежуток длины $w(\xi)$. Если правый край такого промежутка оказывается больше ϑ , то берем промежуток, заканчивающийся в момент ϑ . Объединение по $t \in \mathcal{K}(F_h, F_{h-1})$ указанных промежутков обозначим $\widehat{\mathcal{K}}(F_h, F_{h-1})$. Отметим, что $\widehat{\mathcal{K}}(F_h, F_{h-1})$ — замкнутое ограниченное множество. В любой момент $t \in \widehat{\mathcal{K}}(F_h, F_{h-1})$ имеет место $\xi^h/2$ -независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F_h$, и $\xi^{h-1}/2$ -независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F_{h-1}$. Имеет место также $\xi^h/2$ -независимость вектора $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F_1$.

В случае $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1}) = \emptyset$ пару F_h , F_{h-1} для определения c_{h-1} , Δ_{h-1} не учитываем. Ниже считаем, что $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1}) \neq \emptyset$.

Опираясь на лемму 3.3, выберем $c_{\#} \in (0, c_h]$ так, чтобы равномерно по $t \in \widehat{\mathcal{K}}(F_h, F_{h-1})$ множества $\Pi^{c_{\#}}(F_{h-1}, t)$ и $\Pi^{c_{\#}}(F_1, t)$ вне множества $\text{int } \Pi^{c_h}(F_h, t)$ отстояли друг от друга на конечное расстояние в пределах некоторого ограниченного множества $\mathcal{X}_{\#} \subset \mathbb{R}^n$, оценивающего сверху совокупность состояний, где могут быть движения системы (1.1), начинающиеся в множестве $\mathcal{Y}$.

Пусть $b(\xi, F_h, F_{h-1}, c_h, c)$, где $c \in (0, c_{\#}]$, — равномерная по $\bar{t} \in \widehat{\mathcal{K}}(F_h, F_{h-1})$ оценка снизу времени перехода системы (1.1) с множества $\Pi^c(F_{h-1}, \bar{t}) \cap \mathcal{X}_{\#}$ на множество $\Pi^c(F_1, t)$, $t \in (\bar{t}, \bar{t} + w(\xi)] \cap T$, если в исходный момент $\bar{t}$ система находится на $(\Pi^c(F_{h-1}, \bar{t}) \cap \mathcal{X}_{\#}) \setminus \text{int } \Pi^{c_h}(F_h, \bar{t})$. Такая оценка существует в силу свойства непрерывности изменения по t множества $\Pi^c(F_1, t)$, установленного в лемме 3.2. Очевидно, что зависимость $c \mapsto b(\xi, F_h, F_{h-1}, c_h, c)$ можно выбрать невозрастающей. Например, можно взять $b(\xi, F_h, F_{h-1}, c_h, c) = b(\xi, F_h, F_{h-1}, c_h, c_{\#})$, $c \in (0, c_{\#}]$.

Выберем положительные $c_b \leq c_\#$ и $\Delta_b \leq \Delta_h$ так, чтобы

$$\text{st}(\xi, \Delta_b, c_b) \leq b(\xi, F_h, F_{h-1}, c_h, c_b).$$

В результате получим c_b и Δ_b для заданных F_h, F_{h-1} . Чтобы подчеркнуть зависимость выбранных величин от $\xi, F_h, F_{h-1}, c_h, \Delta_h$, будем писать $c_b(\xi, F_h, F_{h-1}, c_h, \Delta_h)$ и $\Delta_b(\xi, F_h, F_{h-1}, c_h, \Delta_h)$.

Б. Перебираем теперь все наборы F_h из h элементов и для каждого из них все подмножества F_{h-1} из $h-1$ элементов (с соблюдением условия $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1}) \neq \emptyset$). Положим

$$c_{h-1} := \min_{(F_h, F_{h-1})} c_b(\xi, F_h, F_{h-1}, c_h, \Delta_h), \quad \Delta_{h-1} := \min_{(F_h, F_{h-1})} \Delta_b(\xi, F_h, F_{h-1}, c_h, \Delta_h).$$

Если для всех вариантов F_h и F_{h-1} множество $\mathcal{K}(F_h, F_{h-1}) = \emptyset$, то положим $c_{h-1} = c_h$ и $\Delta_{h-1} = \Delta_h$.

Введем обозначение

$$\text{st}^{[h]} := \text{st}(\xi, \Delta_h, c_h), \quad h = \overline{1, h^*}.$$

Величина $\text{st}^{[h]}$ зависит от ξ . Для краткости опускаем скобку аргумента.

7. ПЕТЛИ ВДОЛЬ ДВИЖЕНИЯ

Итак, по заданному ξ введены величины c_h, Δ_h и $\text{st}^{[h]}$, $h = \overline{1, h^*}$.

Рассмотрим движение $y^{(1)}(\cdot)$ системы (1.1) из позиции $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$, $t_0 < \vartheta$, в силу некоторой стратегии $U \in \mathbf{U}^{c_1}$ первого игрока с шагом $\Delta \leq \Delta_1$ и некоторого допустимого программного управления $v(\cdot)$ второго игрока.

Символом $\mathfrak{H}$ обозначим множество целых чисел $h \in \overline{1, h^*}$, для каждого из которых существуют набор $F \subset I$ с количеством элементов $q(F) = h$ и момент $t \in [t_0, \vartheta]$ такие, что $y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_h}(F, t)$ и совокупность векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, независима с показателем ξ^h .

Если $\mathfrak{H} = \emptyset$, то условимся считать весь промежуток $[t_0, \vartheta]$ свободным промежутком уровня 1.

Предположим, что $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. Пусть h^b — максимальное из чисел множества $\mathfrak{H}$.

Выделим вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ «петли», связанные с заходом в множества $\Pi^{c_h}(F, t)$, где $q(F) = h$, $h = \overline{1, h^b}$. Определим также свободные промежутки.

Пусть $\mathfrak{T}^{[h]}$ — совокупность моментов $t \in [t_0, \vartheta]$ таких, что $y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_h}(F, t)$ для некоторого набора F с $q(F) = h$, причем векторы $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, независимы с показателем ξ^h . Указанное F не обязательно единственно. Отвечающую моменту t совокупность наборов F обозначим $\{F^{[h]}(t)\}$.

Если $h^b < h^*$, то считаем $[t_0, \vartheta]$ свободным промежутком уровня $h^b + 1$.

1. Пусть $h = h^b$.

А. Положим

$$\tau_1^{[h^b]} := \min \{t : t \in \mathfrak{T}^{[h^b]}\},$$

$$\tau_{i+1}^{[h^b]} := \min \left\{ t : t \in \mathfrak{T}^{[h^b]} \cap [\tau_i^{[h^b]} + \text{st}^{[h^b]}, \vartheta] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Полученный таким образом набор моментов $\tau_i^{[h^b]}$ обозначим $\{\tau^{[h^b]}\}$.

Каждому моменту $\tau_i^{[h^b]} \in \{\tau^{[h^b]}\}$ поставим в соответствие серию петель. Положим $t_{i,1}^{[h^b]} := \tau_i^{[h^b]}$. Момент $t_{i,1}^{[h^b]}$ назовем моментом начала первой петли (в серии i) уровня h^b . Выберем произвольное $F \in \{F^{[h^b]}(t_{i,1}^{[h^b]})\}$. Момент $t_{i,1+}^{[h^b]}$ окончания первой петли назначаем следующим образом:

$$t_{i,1+}^{[h^b]} := \max \left\{ t : y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_{h^b}}(F, t), \quad t \in [t_{i,1}^{[h^b]}, \tau_i^{[h^b]} + \text{st}^{[h^b]}] \cap [t_0, \vartheta] \right\}.$$

Свойство независимости векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, с показателем ξ^{h^b} не проверяется. Момент $t_{i,1+}^{[h^b]}$, в частности, может совпадать с $t_{i,1}^{[h^b]}$.

В качестве момента $t_{i,2}^{[h^b]}$ начала второй петли (в серии i) уровня h^b возьмем

$$t_{i,2}^{[h^b]} := \min \left\{ t : t \in \mathfrak{T}^{[h^b]} \cap [t_{i,1+}^{[h^b]}, \tau_i^{[h^b]} + \text{st}^{[h^b]}] \right\}.$$

Выберем произвольное $F \in \{F^{[h^b]}(t_{i,2}^{[h^b]})\}$. Отмечаем момент $t_{i,2+}^{[h^b]}$ окончания второй петли:

$$t_{i,2+}^{[h^b]} := \max \left\{ t : y^{(1)}(t) \in \Pi_{h^b}^c(F, t), t \in [t_{i,2}^{[h^b]}, \tau_i^{[h^b]} + \mathbf{st}^{[h^b]}] \cap [t_0, \vartheta] \right\}.$$

Продолжая такой процесс, получим серию петель уровня h^b , отвечающую моменту $\tau_i^{[h^b]}$. Количество петель в серии не более $C_k^{h^b}$.

Пронумеруем петли уровня h^b в сквозной нумерации. Совокупность моментов начала петель уровня h^b обозначим $\{t^{[h^b]}\}$.

Б. Удалим из отрезка $[t_0, \vartheta]$ промежутки построенных петель. Получим упорядоченный набор интервалов. Каждый из них замкнем и назовем свободным промежутком уровня h^b . Начало первого свободного промежутка может совпадать с t_0 , а конец последнего свободного промежутка — с ϑ . Пусть $\Theta_j^{[h^b]}$ — свободный промежуток с номером j в сквозной нумерации.

2. Перейдем к уровням $h^b - 1, h^b - 2, \dots, 1$. Опишем индукционный шаг.

Предположим, что определены петли и свободные промежутки, соответствующие некоторому уровню $h \in \overline{2, h^b}$. Пусть $\Theta_j^{[h]} := [\theta_j^{[h]}, \theta_{j+}^{[h]}]$ — свободный промежуток с номером j в сквозной нумерации на $[t_0, \vartheta]$.

А. Рассмотрим свободный промежуток $\Theta_j^{[h]}$. Положим

$$\begin{aligned} \tau_{j,1}^{[h-1]} &:= \min \{ t : t \in \mathfrak{T}^{[h-1]} \cap \Theta_j^{[h]} \}, \\ \tau_{j,i+1}^{[h-1]} &:= \min \left\{ t : t \in \mathfrak{T}^{[h-1]} \cap [\tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}, \vartheta_{j+}^{[h]}] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Полученный набор моментов $\tau_{j,i}^{[h-1]}$ обозначим $\{\tau_j^{[h-1]}\}$.

Каждому моменту $\tau_{j,i}^{[h-1]} \in \{\tau_j^{[h-1]}\}$ поставим в соответствие серию петель. Положим $t_{j,i,1}^{[h-1]} := \tau_{j,i}^{[h-1]}$. Момент $t_{j,i,1}^{[h-1]}$ назовем моментом начала первой петли (в серии i) уровня $h - 1$ на свободном промежутке $\Theta_j^{[h]}$. Выберем произвольное $F \in \{F^{[h-1]}(t_{j,i,1}^{[h-1]})\}$. Момент $t_{j,i,1+}^{[h-1]}$ окончания первой петли назначаем следующим образом:

$$t_{j,i,1+}^{[h-1]} := \max \left\{ t : y^{(1)}(t) \in \Pi_{h-1}^c(F, t), t \in [t_{j,i,1}^{[h-1]}, \tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}] \cap \Theta_j^{[h]} \right\}.$$

Момент $t_{j,i,1+}^{[h-1]}$, в частности, может совпадать с $t_{j,i,1}^{[h-1]}$. Далее находим момент $t_{j,i,2}^{[h-1]} \in [t_{j,i,1+}^{[h-1]}, \tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}] \cap \Theta_j^{[h]}$ и т. д.

Б. Определим свободные промежутки уровня $h - 1$ на $\Theta_j^{[h]}$. Для этого удалим из отрезка $\Theta_j^{[h]}$ промежутки построенных на нем петель уровня $h - 1$. Каждый из оставшихся интервалов замкнем и назовем свободным промежутком. Начало первого свободного промежутка может совпадать с $\theta_j^{[h]}$, а конец последнего свободного промежутка — с $\theta_{j+}^{[h]}$.

В. Описанным способом введем петли уровня $h - 1$ и свободные промежутки уровня $h - 1$ на каждом свободном промежутке $\Theta_j^{[h]}$ уровня h .

Произведем сквозную нумерацию моментов $\tau_{j,i}^{[h-1]}$, проходя все значения индексов j, i . Полученную совокупность моментов обозначим $\{\tau^{[h-1]}\}$.

Пронумеруем также в сквозной нумерации моменты начала петель уровня $h - 1$. Обозначим такой набор $\{t^{[h-1]}\}$. Введем сквозную нумерацию свободных промежутков. Пусть $\Theta_j^{[h-1]} := [\theta_j^{[h-1]}, \theta_{j+}^{[h-1]}]$ — свободный промежуток с номером j .

Отметим, что свободные промежутки на уровне $h - 1$ могут быть заданы как результат удаления из $[t_0, \vartheta]$ всех петель уровней $h^b, h^b - 1, \dots, h - 1$ и последующего замыкания каждого из полученных интервалов.

Если на уровне $h - 1$ петель нет, то минуя уровень $h - 1$, переходим к формированию петель на уровне $h - 2$. При этом считаем, что свободные промежутки уровня $h - 1$ совпадают со свободными промежутками уровня h .

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 ПРИ $\beta > 0$

В разделе 7 при фиксированном ξ движению $y^{(1)}(\cdot)$ поставлены в соответствие петли и свободные промежутки уровней $1, 2, \dots, h^b$. Совокупность моментов начала петель уровня h обозначена через $\{t^{[h]}\}$.

Для записи изменения функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на промежутке $[t_*, t^*]$ введем обозначение

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*]) := V^{(2)}(t^*, y^{(1)}(t^*)) - V^{(2)}(t_*, y^{(1)}(t_*)).$$

Положим

$$\mathbf{sh}^{[*]} := 2\lambda\sigma\mu\Delta; \quad \mathbf{sh}^{[h]} := 2\lambda\sigma\mu\Delta + c_h, \quad h = \overline{1, h^b}.$$

Величина $\mathbf{sh}^{[*]}$ зависит от Δ , а величина $\mathbf{sh}^{[h]}$ — от ξ и Δ , но мы опускаем скобки аргументов.

Из определения величин $\mathbf{st}^{[h]}$, $\mathbf{sh}^{[h]}$ и условия $\Delta \leq \Delta_h$ вытекает соотношение

$$\mathbf{sh}^{[h]} \leq \mathbf{st}^{[h]} \cdot \mathbf{kf}, \quad h = \overline{1, h^b}.$$

Пусть далее

$$\mathbf{kf}^{[0]} := \max\{\mathbf{kf}, \mathbf{kf}^{[*]}\}; \quad \mathbf{kf}^{[h]} := e(h, k)\mathbf{kf}^{[0]}, \quad h = \overline{1, h^b},$$

где

$$e(1, k) := 2C_k^1 + 1, \quad e(h, k) := e(h-1, k) + C_k^h(1 + e(h-1, k)), \quad h = \overline{2, h^b}.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{sh}^{[*]} &< \mathbf{sh}^{[1]}; \quad \mathbf{sh}^{[h-1]} \leq \mathbf{sh}^{[h]}, \quad h = \overline{2, h^b}, \\ \mathbf{kf}^{[0]} &< \mathbf{kf}^{[1]}; \quad \mathbf{kf}^{[h-1]} < \mathbf{kf}^{[h]}, \quad h = \overline{2, h^b}. \end{aligned}$$

8.1. Приращение функции $V^{(2)}$ на петлях уровня h . Сделаем пояснение о применении неравенства (5.3), вытекающего из основной леммы 2.1, для оценки изменения функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на петлях уровня h .

Любой момент $t_j^{[h]}$ из $\{t^{[h]}\}$ представляет собой момент начала петли h -го уровня, момент окончания петли обозначается $t_{j+}^{[h]}$, при этом $t_{j+}^{[h]} - t_j^{[h]} \leq \mathbf{st}^{[h]}$. Каждой петле уровня h соответствует по построению вполне определенное множество индексов F с числом элементов $q(F) = h$. В момент $t_j^{[h]}$ имеем ξ^h -независимость векторов $B_i^{(3)}(t_j^{[h]})$, $i \in F$. На промежутке $[t_j^{[h]}, t_{j+}^{[h]}]$ независимость с показателем ξ^h может уменьшиться разве лишь до независимости с показателем $\xi^{h/2}$.

Чтобы применить неравенство (5.3) для оценки значения $\mathcal{V}(F, t_{j+}^{[h]}, y^{(1)}(t_{j+}^{[h]}))$, введем, опираясь на лемму 4.2, множество $H(F, \mathcal{L}\xi)$, состоящее из индексов $g \notin F$ векторов $B_g^{(3)}(t)$, являющихся близкими с характеристикой $\mathcal{L}\xi$, $\mathcal{L} = 8\sigma + 1/2$, к совокупности векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F$, при всех t из промежутка $[t_j^{[h]}, t_{j+}^{[h]}]$. Взяв элемент $g \notin F$, отнесем его к множеству $H(F, \mathcal{L}\xi)$, если в момент $t_j^{[h]}$ имеет место ξ^{h+1} -зависимость векторов $B_i^{(3)}(t_j^{[h]})$, $i \in F \cup g$.

Пусть $g \notin F$, $g \notin H(F, \mathcal{L}\xi)$. Для таких элементов имеет место ξ^{h+1} -независимость векторов $B_i^{(3)}(t_j^{[h]})$, $i \in F \cup g$. В этом случае учтем, что согласно определению наборов $\{t^{[h+1]}\}$ и $\{t^{[h]}\}$ момент $t_j^{[h]}$ принадлежит некоторому свободному промежутку уровня $h+1$. Во внутренности этого промежутка нет петель уровня $h+1$. Таким образом,

$$y^{(1)}(t_j^{[h]}) \notin \text{int } \Pi^{c_{h+1}}(F \cup g, t_j^{[h]}).$$

Поскольку $t_{j+}^{[h]} - t_j^{[h]} \leq \mathbf{st}^{[h]}$, то на $[t_j^{[h]}, t_{j+}^{[h]}]$ имеет место независимость векторов $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F \cup g$, с показателем $\xi^{h+1/2}$. Следовательно, опираясь на правило выбора чисел c_{h+1} , c_h , c_1 , описанное в разделе 6 и основанное на лемме 3.3, можно говорить о равномерной оценке снизу расстояния между множествами $(\Pi^{c_h}(F, t) \cap \mathcal{X}_*) \setminus \text{int } \Pi^{c_{h+1}}(F \cup g, t)$ и $\Pi^{c_1}(g, t)$ для моментов $t \in T$, где векторы $B_i^{(3)}(t)$, $i \in F \cup g$, независимы с показателем $\xi^{h+1/2}$. Таким образом, этой оценке удовлетворяет и

расстояние между точкой $y^{(1)}(t_j^{[h]})$ и множеством $\Pi^{c_1}(g, t_j^{[h]})$. Согласно выбору величины $\mathbf{st}^{[h]}$ движение системы (1.1), выходящее в момент $t_j^{[h]}$ из точки $y^{(1)}(t_j^{[h]})$, не может попасть на промежутке $[t_j^{[h]}, t_{j+}^{[h]}]$ на непрерывно изменяющееся в силу леммы 3.2 множество $\Pi^{c_1}(g, t)$.

Кроме того, на $[t_j^{[h]}, t_{j+}^{[h]}]$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ реализуется правильное управление $u_g(\cdot)$, за исключением, возможно, некоторого начального промежутка, примыкающего к моменту $t_j^{[h]}$ и по длине не превосходящего шаг $\Delta \leq \Delta_1$ дискретной схемы.

Таким образом, на промежутке $[t_j^{[h]}, t_{j+}^{[h]}]$ можем применить основную лемму 2.1 и вытекающие из нее неравенства. При этом полагаем $\omega = \Delta$.

Используя неравенство (5.3), запишем оценку сверху значения $\mathcal{V}(F, t_{j+}^{[h]}, y^{(1)}(t_{j+}^{[h]}))$:

$$\mathcal{V}(F, t_{j+}^{[h]}, y^{(1)}(t_{j+}^{[h]})) \leq V^{(2)}(t_j^{[h]}, y^{(1)}(t_j^{[h]})) + \mathbf{kf} \cdot (t_{j+}^{[h]} - t_j^{[h]}) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(t_j^{[h]}, t_{j+}^{[h]}).$$

Поскольку $y^{(1)}(t_{j+}^{[h]}) \in \Pi^{c_h}(F, t_{j+}^{[h]})$, для значения функции $V^{(2)}$ имеем неравенство

$$V^{(2)}(t_{j+}^{[h]}, y^{(1)}(t_{j+}^{[h]})) \leq \mathcal{V}(F, t_{j+}^{[h]}, y^{(1)}(t_{j+}^{[h]})) + c_h.$$

Таким образом,

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_j^{[h]}, t_{j+}^{[h]}]) \leq \mathbf{kf} \cdot (t_{j+}^{[h]} - t_j^{[h]}) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + c_h + \lambda\chi(t_j^{[h]}, t_{j+}^{[h]}).$$

Учитывая, что $\mathbf{sh}^{[h]} = 2\lambda\sigma\mu\Delta + c_h$, получаем

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_j^{[h]}, t_{j+}^{[h]}]) \leq \mathbf{kf} \cdot (t_{j+}^{[h]} - t_j^{[h]}) + \mathbf{sh}^{[h]} + \lambda\chi(t_j^{[h]}, t_{j+}^{[h]}). \quad (8.1)$$

8.2. Вспомогательные промежутки. Определим варианты промежутков времени, используя которые будем оценивать изменение функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$.

Условимся, что каждый из индексов h, p принимает значения $1, 2, \dots, h^b$. Пусть

$E^{[h]}$ — промежуток $[\rho, \eta]$ такой, что на нем имеется хотя бы один момент из множества $\{\tau^{[h]}\}$; на $[\rho, \eta)$ нет точек из множеств $\{t^{[p]}\}$, $p > h$;

$E^{[h]}$ — промежуток $[\rho, \eta]$ такой, что $\rho \in \{\tau^{[h]}\}$; на $[\rho, \eta] \setminus [\rho, \rho + \mathbf{st}^{[h]})$ нет точек из множества $\{\tau^{[h]}\}$; на $[\rho, \eta)$ нет точек из множеств $\{t^{[p]}\}$, $p > h$;

$\mathcal{E}^{[h]}$ — промежуток $[\rho, \eta]$ вида $E^{[h]}$, удовлетворяющий дополнительному условию $\rho + \mathbf{st}^{[h]} \leq \eta$.

Символом $\mathcal{D}$ обозначим промежуток $[\rho, \eta]$, если он является одним из свободных промежутков уровня 1. На (ρ, η) нет моментов из $\{t^{[p]}\}$, $p \geq 1$. Это следует из того, что свободные промежутки уровня 1 получаются удалением из отрезка $[t_0, \vartheta]$ всех петель уровней $h^b, h^b - 1, \dots, 1$ и последующим замыканием каждого из оставшихся интервалов.

На каждом промежутке вида $E^{[h]}$ или $\mathcal{E}^{[h]}$ имеется хотя бы один момент из множества $\{t^{[h]}\}$. Могут присутствовать также моменты из множеств $\{t^{[p]}\}$, $p < h$.

Все начальные моменты h -петель, $h = 1, h^b$, попадающие в конкретный интервал $E^{[h]}$, лежат на промежутке длины не более $\mathbf{st}^{[h]}$. При этом на таком промежутке для каждого F с $q(F) = h$ может находиться не более одного момента начала петли. Таким образом, общее число h -петель на $E^{[h]}$ не превышает C_k^h . Отметим также, что интервалы h -петель, попадающих в $E^{[h]}$, не пересекаются между собой. Следовательно, можно провести независимое суммирование оценки (8.1) по интервалам h -петель, попадающих в $E^{[h]}$, и нам известна оценка числа петель.

8.3. Приращение функции $V^{(2)}$ на вспомогательных промежутках. Оценим изменение функции $V^{(2)}$ на вспомогательных промежутках.

Начнем с промежутка $[\rho, \eta]$ вида $\mathcal{D}$. Отметим следующие факты:

- (i) если на (ρ, η) присутствуют заходы в множества $\Pi^{c_1}(i, t)$, $i = \overline{1, k}$, то в каждый из таких моментов имеет место неравенство $|B_i^{(3)}(t)| < \xi$;
- (ii) возможное увеличение функции $V^{(2)}$ за счет «неправильных» управлений на одном шаге дискретной схемы оценивается сверху в силу предложения 2.2 величиной $\mathbf{sh}^{[*]}$.

Лемма 8.1. Приращение функции $V^{(2)}$ на промежутке $[\rho, \eta]$ вида $\mathcal{D}$ описывается неравенством

$$\text{Var}_{\mathcal{D}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf}^{[*]} \cdot (\eta - \rho) + \mathbf{sh}^{[*]} + \lambda\chi(\rho, \eta). \quad (8.2)$$

Доказательство. Отметим, что

$$\Delta \leq \Delta_1 \leq w(\xi) \leq \frac{\xi}{2\beta}.$$

Выберем $\bar{\delta} := \xi/(2\beta)$. Тогда за время $\bar{\delta}$ величина $|B_i^{(3)}(t)|$, $i = \overline{1, k}$, не может измениться более чем на $\xi/2$. Двигаясь слева направо, разделим промежуток $[\rho, \eta]$ с шагом $\bar{\delta}$ (последний из полученных промежутков может быть длины меньше $\bar{\delta}$). Покажем, что к каждому из $\bar{\delta}$ -промежутков можно применить предложение 2.1 с оценкой (5.4).

Действительно, пусть $[\bar{t}, \tilde{t}]$ — произвольный из $\bar{\delta}$ -промежутков. Согласно выбору числа $\bar{\delta}$ получаем, что при любом $i \in \overline{1, k}$ либо $|B_i^{(3)}(t)| \leq 2\xi$ для всех $t \in [\bar{t}, \tilde{t}]$, либо $|B_i^{(3)}(t)| \geq 3\xi/2$ также для всех $t \in [\bar{t}, \tilde{t}]$.

В первом случае относим i к множеству H индексов малых значений $|B_i^{(3)}(t)|$.

Пусть $i \notin H$. Если $\bar{t} > \rho + \Delta$, то управление $u_i(\cdot)$ является правильным на $[\bar{t}, \tilde{t}]$. В самом деле, на $[\bar{t} - \Delta, \tilde{t}]$ имеем $|B_i^{(3)}(t)| \geq \xi$. Кроме того, на $[\bar{t} - \Delta, \tilde{t}]$ нет моментов из совокупности $\{t^{[1]}\}$, поскольку их нет на $[\rho, \eta]$. Следовательно, на $[\bar{t} - \Delta, \tilde{t}]$ движение $y^{(1)}(t)$ идет по одну сторону от $\Pi^{c1}(i, t)$, причем на $[\bar{t} - \Delta, \tilde{t}]$ имеется момент дискретной схемы. Отсюда следует, что $u_i(\cdot)$ является правильным на $[\bar{t}, \tilde{t}]$. Если $\bar{t} \leq \rho + \Delta$, то правильное управление $u_i(\cdot)$ заведомо действует на $[\rho + \Delta, \tilde{t}]$, а произвольное управление $u_i(\cdot)$ — разве лишь на $[\bar{t}, \min\{\rho + \Delta, \tilde{t}\}]$.

Таким образом, на промежутке $[\bar{t}, \tilde{t}]$ выполнены условия предложения 2.1. При этом в оценке (5.4) полагаем $\omega = 0$ в случае $\bar{t} > \rho + \Delta$ и $\omega = \min\{\rho + \Delta, \tilde{t}\} - \bar{t} \leq \rho + \Delta - \bar{t}$ при $\bar{t} \leq \rho + \Delta$.

Просуммируем оценку (5.4) по $\bar{\delta}$ -промежуткам. Примем во внимание, что общая длина $\bar{\delta}$ -промежутков, для каждого из которых $H \neq \emptyset$, не превышает $\eta - \rho$. Учтем также, что моменты t , для которых $|B_i^{(3)}(t)| \geq \xi$ и управление $u_i(t)$ произвольно, $i \in \overline{1, k}$, могут находиться лишь на начальной части промежутка $[\rho, \eta]$, а именно, на $[\rho, \rho + \Delta]$. В результате получаем оценку (8.2). $\square$

Перейдем к оценке приращения функции $V^{(2)}$ на промежутках вида $E^{[h]}, \mathcal{E}^{[h]}, \mathbf{E}^{[h]}$, где $h = \overline{1, h^b}$.

Лемма 8.2. Приращение функции $V^{(2)}$ на промежутках вида $E^{[h]}, \mathcal{E}^{[h]}, \mathbf{E}^{[h]}$ при любом $h = \overline{1, h^b}$ описывается неравенствами

$$\text{Var}_{E^{[h]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf}^{[h-1]} \cdot (\eta - \rho) + e(h, k)\mathbf{sh}^{[h]} + \lambda\chi(\rho, \eta),$$

$$\text{Var}_{\mathcal{E}^{[h]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - \rho) + \lambda\chi(\rho, \eta),$$

$$\text{Var}_{\mathbf{E}^{[h]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - \rho) + e(h, k)\mathbf{sh}^{[h]} + \lambda\chi(\rho, \eta).$$

Доказательство. 1. Пусть $h = 1$. Опираясь на (8.1), имеем

$$\text{Var}_{E^{[1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf} \cdot |T^{[1]}| + C_k^1 \mathbf{sh}^{[1]} + \lambda\chi(T^{[1]}) + \text{Var}(V^{(2)}, [\rho, \eta] \setminus T^{[1]}).$$

Здесь $T^{[1]}$ — подмножество промежутка $[\rho, \eta]$, заполненное петлями уровня 1, $|T^{[1]}|$ — общая длина множества $T^{[1]}$, C_k^1 — оценка сверху числа петель уровня 1 на $[\rho, \eta]$, $\chi(T^{[1]})$ — интеграл вида (1.9), но вычисленный на множестве $T^{[1]}$. Слагаемое $\text{Var}(V^{(2)}, [\rho, \eta] \setminus T^{[1]})$ оценивает приращение функции $V^{(2)}$ на множестве $[\rho, \eta] \setminus T^{[1]}$.

Множество $[\rho, \eta] \setminus T^{[1]}$ представляет собой совокупность интервалов отрезка $[\rho, \eta]$ вне петель уровня 1. Количество таких интервалов не превышает C_k^1 , а замыкание каждого из них есть промежуток вида $\mathcal{D}$. Поэтому можно использовать оценку (8.2). Получаем

$$\begin{aligned} \text{Var}_{E^{[1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) &\leq \mathbf{kf} \cdot |T^{[1]}| + C_k^1 \mathbf{sh}^{[1]} + \mathbf{kf}^{[*]} \cdot ((\eta - \rho) - |T^{[1]}|) + C_k^1 \mathbf{sh}^{[*]} + \lambda\chi(\rho, \eta) \leq \\ &\leq \mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + 2C_k^1 \mathbf{sh}^{[1]} + \lambda\chi(\rho, \eta). \end{aligned}$$

Оценим $\text{Var}_{\mathcal{E}^{[1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta])$. Учтем соотношение $\mathbf{sh}^{[1]} \leq \mathbf{st}^{[1]} \cdot \mathbf{kf}$. Согласно определению множества вида $\mathcal{E}^{[1]}$ имеем $\mathbf{st}^{[1]} \leq \eta - \rho$. Поэтому

$$\mathbf{sh}^{[1]} \leq \mathbf{kf} \cdot (\eta - \rho).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathcal{E}^{[1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) &= \text{Var}_{E^{[1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + 2C_k^1 \mathbf{sh}^{[1]} + \lambda\chi(\rho, \eta) \leq \\ &\leq \mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + 2C_k^1(\eta - \rho)\mathbf{kf} + \lambda\chi(\rho, \eta) \leq \\ &\leq (2C_k^1 + 1)\mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + \lambda\chi(\rho, \eta) = \mathbf{kf}^{[1]} \cdot (\eta - \rho) + \lambda\chi(\rho, \eta). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь промежутки $[\rho, \eta]$ вида $\mathbf{E}^{[1]}$. Его можно представить составленным из начального промежутка $[\rho, t^\#]$ вида $\mathcal{D}$, конечного числа идущих друг за другом до некоторого момента $t^\diamond$ промежутков вида $\mathcal{E}^{[1]}$ (суммарный промежуток обозначим через $[t^\#, t^\diamond]$) и остаточного промежутка $[t^\diamond, \eta]$ вида $E^{[1]}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbf{E}^{[1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) &\leq \text{Var}_{\mathcal{D}}(V^{(2)}, [\rho, t^\#]) + \mathbf{kf}^{[1]} \cdot (t^\diamond - t^\#) + \lambda\chi(t^\#, t^\diamond) + \text{Var}_{E^{[1]}}(V^{(2)}, [t^\diamond, \eta]) \leq \\ &\leq \mathbf{kf}^{[*]} \cdot (t^\# - \rho) + \mathbf{sh}^{[*]} + \mathbf{kf}^{[1]} \cdot (t^\diamond - t^\#) + \mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - t^\diamond) + 2C_k^1 \mathbf{sh}^{[1]} + \lambda\chi(\rho, \eta) \leq \\ &\leq \mathbf{kf}^{[1]} \cdot (\eta - \rho) + (2C_k^1 + 1)\mathbf{sh}^{[1]} + \lambda\chi(\rho, \eta). \end{aligned}$$

2. Перейдем к оценке приращения $V^{(2)}$ на промежутках вида $E^{[h]}$, $\mathcal{E}^{[h]}$, $\mathbf{E}^{[h]}$ при $h \in \overline{2, h^b}$. Докажем требуемые неравенства по индукции.

Предположим, что для промежутков вида $\mathbf{E}^{[p]}$ при $p \geq 1$, $p \leq h < h^b$ получена следующая оценка приращения функции $V^{(2)}$:

$$\text{Var}_{\mathbf{E}^{[p]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf}^{[p]} \cdot (\eta - \rho) + e(p, k)\mathbf{sh}^{[p]} + \lambda\chi(\rho, \eta). \quad (8.3)$$

Для промежутка вида $E^{[h+1]}$ с использованием (8.1) имеем

$$\text{Var}_{E^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf} \cdot |T^{[h+1]}| + C_k^{h+1} \mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(T^{[h+1]}) + \text{Var}(V^{(2)}, [\rho, \eta] \setminus T^{[h+1]}).$$

Здесь $T^{[h+1]}$ — подмножество промежутка $[\rho, \eta]$, заполненное петлями уровня $h+1$, $|T^{[h+1]}|$ — длина множества $T^{[h+1]}$, C_k^{h+1} — оценка сверху числа петель уровня $h+1$ на $[\rho, \eta]$, $\chi(T^{[h+1]})$ — интеграл вида (1.9), но вычисленный на множестве $T^{[h+1]}$, $\text{Var}(V^{(2)}, [\rho, \eta] \setminus T^{[h+1]})$ — приращение функции $V^{(2)}$ на множестве $[\rho, \eta] \setminus T^{[h+1]}$.

Множество $[\rho, \eta] \setminus T^{[h+1]}$ представляет собой совокупность интервалов отрезка $[\rho, \eta]$ вне петель уровня $h+1$. Количество таких интервалов не превышает C_k^{h+1} , а замыкание каждого из них есть промежуток вида $\mathcal{D}$ или $\mathbf{E}^{[p]}$, где $p \leq h$. Поэтому можем использовать оценки (8.2), (8.3). Получаем

$$\begin{aligned} \text{Var}_{E^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) &\leq \mathbf{kf} \cdot |T^{[h+1]}| + C_k^{h+1} \mathbf{sh}^{[h+1]} + \\ &+ \mathbf{kf}^{[h]} \cdot ((\eta - \rho) - |T^{[h+1]}|) + C_k^{h+1} e(h, k) \mathbf{sh}^{[h]} + \lambda\chi(\rho, \eta) \leq \\ &\leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - \rho) + C_k^{h+1} (1 + e(h, k)) \mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(\rho, \eta). \end{aligned}$$

Оценим $\text{Var}_{\mathcal{E}^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta])$. Учтем соотношение $\mathbf{sh}^{[h+1]} \leq \mathbf{st}^{[h+1]} \cdot \mathbf{kf}$. Согласно определению множества вида $\mathcal{E}^{[h+1]}$ имеем $\mathbf{st}^{[h+1]} \leq \eta - \rho$. Поэтому

$$\mathbf{sh}^{[h+1]} \leq \mathbf{kf} \cdot (\eta - \rho).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathcal{E}^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) &= \text{Var}_{E^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \\ &\leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - \rho) + C_k^{h+1} (1 + e(h, k)) \mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(\rho, \eta) \leq \\ &\leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - \rho) + C_k^{h+1} (1 + e(h, k)) (\eta - \rho) \mathbf{kf} + \lambda\chi(\rho, \eta) \leq \\ &\leq e(h, k) \mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + C_k^{h+1} (1 + e(h, k)) \mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\eta - \rho) + \lambda\chi(\rho, \eta). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{kf}^{[h+1]} = (e(h, k) + C_k^{h+1}(1 + e(h, k)))\mathbf{kf}^{[0]},$$

получаем

$$\text{Var}_{\mathcal{E}^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf}^{[h+1]} \cdot (\eta - \rho) + \lambda\chi(\rho, \eta).$$

Рассмотрим теперь промежуток $[\rho, \eta]$ вида $\mathbf{E}^{[h+1]}$. Его можно представить составленным из начального промежутка $[\rho, t^\#]$ вида $\mathbf{E}^{[h]}$, конечного числа идущих друг за другом до некоторого момента $t^\diamond$ промежутков вида $\mathcal{E}^{[h+1]}$ (суммарный промежуток обозначим через $[\rho, t^\diamond]$) и остаточного промежутка $[t^\diamond, \eta]$ вида $\mathbf{E}^{[h+1]}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbf{E}^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) &\leq \text{Var}_{\mathbf{E}^{[h]}}(V^{(2)}, [\rho, t^\#]) + \mathbf{kf}^{[h+1]} \cdot (t^\diamond - \rho) + \\ &\quad + \lambda\chi(\rho, t^\diamond) + \text{Var}_{\mathbf{E}^{[h+1]}}(V^{(2)}, [t^\diamond, \eta]) \leq \\ &\leq \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (t^\# - \rho) + e(h, k)\mathbf{sh}^{[h]} + \mathbf{kf}^{[h+1]} \cdot (t^\diamond - \rho) + \mathbf{kf}^{[h]} \cdot (\eta - t^\diamond) + \\ &\quad + C_k^{h+1}(1 + e(h, k))\mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(\rho, \eta) \leq \\ &\leq \mathbf{kf}^{[h+1]} \cdot (\eta - \rho) + [e(h, k) + C_k^{h+1}(1 + e(h, k))]\mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(\rho, \eta). \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\text{Var}_{\mathbf{E}^{[h+1]}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \mathbf{kf}^{[h+1]} \cdot (\eta - \rho) + e(h + 1, k)\mathbf{sh}^{[h+1]} + \lambda\chi(\rho, \eta).$$

Лемма доказана. $\square$

8.4. Приращение функции $V^{(2)}$ на всем промежутке игры. Напомним, что h^b — наибольший номер h -петель вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на всем промежутке $[t_0, \vartheta]$. Поскольку $[t_0, \vartheta]$ — промежуток вида $\mathbf{E}^{[h^b]}$, то можно записать оценку для $\text{Var}_{\mathbf{E}^{[h^b]}}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta])$:

$$\text{Var}_{\mathbf{E}^{[h^b]}}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) \leq \mathbf{kf}^{[h^b]} \cdot (\vartheta - t_0) + e(h^b, k)\mathbf{sh}^{[h^b]} + \lambda\chi(t_0, \vartheta).$$

Имеем $\mathbf{st}^{[h^b]} \leq \vartheta - \vartheta_1$. Поэтому

$$\mathbf{sh}^{[h^b]} \leq \mathbf{st}^{[h^b]} \cdot \mathbf{kf} \leq \mathbf{kf} \cdot (\vartheta - \vartheta_1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbf{E}^{[h^b]}}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) &\leq e(h^b, k)\mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\vartheta - t_0) + e(h^b, k)\mathbf{kf} \cdot (\vartheta - \vartheta_1) + \lambda\chi(t_0, \vartheta) \leq \\ &\leq 2e(h^b, k)\mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\vartheta - \vartheta_1) + \lambda\chi(t_0, \vartheta). \end{aligned}$$

Загрубляя $e(h^b, k)$ через $e(k, k)$, окончательно получим

$$\text{Var}_{\mathbf{E}^{[h^b]}}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) \leq 2e(k, k)\mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\vartheta - \vartheta_1) + \lambda\chi(t_0, \vartheta).$$

Заменяя $\text{Var}_{\mathbf{E}^{[h^b]}}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta])$ на $V^{(2)}(\vartheta, y^{(1)}(\vartheta)) - V^{(2)}(t_0, x_0)$ и учитывая, что $\gamma^{(2)}(y^{(1)}(\vartheta)) = V^{(2)}(\vartheta, y^{(1)}(\vartheta))$, имеем

$$\gamma^{(2)}(y^{(1)}(\vartheta)) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + 2e(k, k)\mathbf{kf}^{[0]} \cdot (\vartheta - \vartheta_1) + \lambda\chi(t_0, \vartheta).$$

Поскольку $\mathbf{kf}^{[0]}$ есть максимальная из величин

$$\mathbf{kf} = 3\lambda\mathcal{L}\mu\xi = 3\lambda\left(\frac{1}{2} + 8\sigma\right)\mu\xi, \quad \mathbf{kf}^{[*]} = 4\lambda\mu\xi,$$

то $\mathbf{kf}^{[0]}$ можно оценить сверху величиной $3\lambda(3/2 + 8\sigma)\mu\xi$. Поэтому

$$\gamma^{(2)}(y^{(1)}(\vartheta)) < V^{(2)}(t_0, x_0) + 3e(k, k)\lambda(3 + 16\sigma)\mu\xi \cdot (\vartheta - \vartheta_1) + \lambda\chi(t_0, \vartheta). \quad (8.4)$$

Учитывая различие функций платы $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$, получим в силу (8.4)

$$\gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta)) < V^{(2)}(t_0, x_0) + 3e(k, k)\lambda(3 + 16\sigma)\mu\xi \cdot (\vartheta - \vartheta_1) + \lambda\chi(t_0, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}, \quad (8.5)$$

где

$$e(k, k) = C_k^k + (C_k^k + 1)[C_k^{k-1} + (C_k^{k-1} + 1)[\dots[C_k^1 + (C_k^1 + 1)]\dots]].$$

8.5. Окончательная оценка. При выводе оценки (8.5) значение ξ предполагалось фиксированным. По ξ находились величины c_1 и Δ_1 . Величина c_1 определяет множества $\Pi^{c_1}(i, t)$, $i = \overline{1, k}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, при помощи которых задается многозначная функция $\mathbf{U}^{c_1}$. Ее однозначная выборка U используется как стратегия первого игрока. Стратегия U применяется в дискретной схеме управления с шагом $\Delta \leq \Delta_1$. При выбранных U, Δ движение $y^{(1)}(\cdot)$ соответствует некоторой начальной позиции $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$ и некоторому управлению $v(\cdot)$ второго игрока.

Выбором числа ξ второе слагаемое в правой части (8.5) можно сделать сколь угодно малым. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 8.3. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Выберем $\xi(\varepsilon) \in (0, \sigma/(1 + 16\sigma)]$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$3\varepsilon(k, k)\lambda(3 + 16\sigma)\mu\xi(\varepsilon)(\vartheta - \vartheta_1) \leq \varepsilon.$$

Зададим далее по выбранному $\xi(\varepsilon)$ число $c(\varepsilon) = c_1(\xi(\varepsilon))$ и ограничение $\Delta(\varepsilon) = \Delta_1(\xi(\varepsilon))$ на шаг дискретной схемы управления по рецепту раздела 6. Пусть первый игрок применяет с шагом $\Delta \leq \Delta(\varepsilon)$ произвольную стратегию U , которая является однозначной выборкой из многозначной функции $\mathbf{U}^{c(\varepsilon)}$, построенной на основе множеств $\Pi^{c(\varepsilon)}(i, t)$, $i = \overline{1, k}$, $t \in T$. Тогда первый игрок гарантирует для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$ результат

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + \varepsilon + \lambda\chi(t_0, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}.$$

В лемме 8.3 рассматриваются стратегии, определяемые при помощи c -окрестностей поверхностей переключения $\Pi(i, t)$. Чтобы сформулировать результат, связанный с геометрическими r -окрестностями, зададим число

$$r(\varepsilon) := \frac{c(\varepsilon)}{\lambda}.$$

Тогда $\Pi^{r(\varepsilon)}(i, t) \subset \Pi^{c(\varepsilon)}(i, t)$ при $i = \overline{1, k}$, $t \in T$. Следовательно, для любой стратегии U , вложенной в $\mathbf{U}^{r(\varepsilon)}$, и для любых $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$, $\Delta \leq \Delta(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + \varepsilon + \lambda\chi(t_0, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}},$$

что и означает утверждение теоремы 1.

Замечание. В формулировке леммы 8.3 говорится о выборе величин $c(\varepsilon)$, $\Delta(\varepsilon)$ по рецепту раздела 6. Такой выбор использует непрерывность изменения множеств $\Pi^c(i, t)$, $i = \overline{1, k}$, и не является конструктивным. Для эффективного задания величин $c(\varepsilon)$, $\Delta(\varepsilon)$ дополнительно требуются характеристики скорости изменения по t таких множеств.

9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 ПРИ $\beta = 0$

9.1. Аналоги неравенств (5.2) и (5.4). В случае $\beta = 0$ функции $t \rightarrow B_i^{(3)}(t)$, $i \in I$, являются постоянными; соответствующие константы обозначим $b_i^{(3)}$. Для любого набора $F \subset I$ векторы $b_i^{(3)}$ либо линейно зависимы, либо линейно независимы.

Выберем параметр $\hat{\xi}$ так, чтобы для любого набора F линейная независимость векторов $b_i^{(3)}$, $i \in F$, означала бы независимость с показателем $\hat{\zeta} := \hat{\xi}^{q(F)}/2$.

Пусть $F \subset I$ — некоторый набор с линейно независимыми векторами $b_i^{(3)}$, $i \in F$. Если $\zeta \leq \hat{\zeta}$ и вектор $b_j^{(3)}$, $j \in I \setminus F$, является ζ -близким к совокупности $b_i^{(3)}$, $i \in F$, то $b_j^{(3)} \in \mathcal{G}(\{b_i^{(3)}\}_{i \in F})$. Следовательно, множество $\mathcal{H}(F, \zeta, t)$ одно и то же при всех $\zeta \leq \hat{\zeta}$ и всех $t \in T$.

Для произвольного числа $\xi \leq \hat{\xi}$ и множества $H \subset \mathcal{H}(F, \zeta, t)$, $\zeta = \xi^{q(F)}/2$ запишем неравенство (5.1) при $\beta = 0$. Перейдем к пределу при $\xi \rightarrow 0$. Вместо неравенства (5.1) получим неравенство

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i + \lambda\chi(t_*, t_* + \delta).$$

Используя соотношение

$$2\lambda\omega \sum_{i \notin F \cup H} \sigma_i \mu_i \leq 2\lambda\sigma\mu\omega,$$

приходим к неравенству

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\sigma\mu\omega + \lambda\chi(t_*, t_* + \delta), \quad (9.1)$$

которое заменяет неравенство (5.2) при $\beta = 0$.

Аналогом неравенства (5.4) будет неравенство

$$V^{(2)}(t, y^{(1*)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\sigma\mu\omega + \lambda\chi(t_*, t), \quad t \in [t_*, t^*]. \quad (9.2)$$

9.2. Выбор величин $c_h, \mathbf{st}^{[h]}$. Символом h^* обозначим максимальное число линейно независимых векторов $b_i^{(3)}$, $i \in I$. Величину $c_{h^*} > 0$ задаем произвольно. Положим $\mathbf{st}^{[h^*]} := \vartheta - \vartheta_1$.

Пусть величины $c_h > 0$ и $\mathbf{st}^{[h]}$ введены при некотором $h \in \overline{2, h^*}$. Определим величины $c_{h-1}, \mathbf{st}^{[h-1]}$.

Зафиксируем набор $F_h \subset I$ из h элементов таких, что векторы $b_i^{(3)}$, $i \in F_h$, линейно независимы. Выделим произвольное подмножество F_{h-1} из $h-1$ элементов и оставшееся подмножество F_1 из одного элемента. Опираясь на лемму 3.3, выберем $c_\# \in (0, c_h]$ так, чтобы равномерно по $t \in T$ множества $\Pi^{c_\#}(F_{h-1}, t)$ и $\Pi^{c_\#}(F_1, t)$ вне множества $\text{int } \Pi^{c_h}(F_h, t)$ отстояли друг от друга на конечное расстояние в пределах ограниченного множества $\mathcal{X}_* \subset \mathbb{R}^n$, оценивающего сверху совокупность состояний, где могут быть движения системы (1.1), начинающиеся в множестве $\mathcal{Y}$. Величина $c_\#$ зависит от выбора F_h, F_{h-1} и от значения c_h , т.е. $c_\# = c_\#(F_h, F_{h-1}, c_h)$.

Пусть $b(F_h, F_{h-1}, c_h, c_\#)$ — равномерная по $\bar{t} \in T$ оценка снизу времени перехода системы (1.1) с множества $\Pi^{c_\#}(F_{h-1}, \bar{t}) \cap \mathcal{X}_*$ на множество $\Pi^{c_\#}(F_1, t)$, $t \in (\bar{t}, \vartheta]$, если в исходный момент $\bar{t}$ система находится на $(\Pi^{c_\#}(F_{h-1}, \bar{t}) \cap \mathcal{X}_*) \setminus \text{int } \Pi^{c_h}(F_h, \bar{t})$. Такую оценку можно сделать, опираясь на свойство непрерывности изменения по t множества $\Pi^{c_\#}(F_1, t)$, вытекающее из леммы 3.2.

Переберем теперь все наборы F_h из h элементов, такие, что векторы $b_i^{(3)}$, $i \in F_h$, линейно независимы. Для каждого набора рассмотрим все варианты разбиения множества F_h на подмножество F_{h-1} из $h-1$ элементов и подмножество F_1 из одного элемента. Пусть

$$c_{h-1} := \min_{(F_h, F_{h-1})} c_\#(F_h, F_{h-1}, c_h), \quad \mathbf{st}^{[h-1]} := \min_{(F_h, F_{h-1})} \{\mathbf{st}^{[h]}, b(F_h, F_{h-1}, c_h, c_\#)\}.$$

Отметим, что при $\beta = 0$, вводя последовательно величины c_h , мы не определяем параллельно величины Δ_h , как делалось в случае $\beta > 0$ в разделе 6.

9.3. Формирование петель вдоль движения. Рассмотрим движение $y^{(1)}(\cdot)$ системы (1.1) из позиции $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$, $t_0 < \vartheta$, в силу некоторой стратегии $U \in \mathbf{U}^{c_1}$ первого игрока с шагом $\Delta > 0$ и некоторого допустимого программного управления $v(\cdot)$ второго игрока.

Символом $\mathfrak{H}$ обозначим множество целых чисел $h \in \overline{1, h^*}$, для каждого из которых существуют набор $F \subset I$ с количеством элементов $q(F) = h$ и момент $t \in [t_0, \vartheta]$ такие, что $y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_h}(F, t)$ и совокупность векторов $b_i^{(3)}$, $i \in F$, линейно независима.

Если $\mathfrak{H} = \emptyset$, то условимся считать весь промежуток $[t_0, \vartheta]$ свободным промежутком уровня 1.

Предположим, что $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. Пусть h^b — максимальное из чисел множества $\mathfrak{H}$.

Выделим вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ петли, связанные с заходом в множества $\Pi^{c_h}(F, t)$, где $q(F) = h$, $h = \overline{1, h^b}$. Определим также свободные промежутки.

Пусть $\mathfrak{T}^{[h]}$ — совокупность моментов $t \in [t_0, \vartheta]$ таких, что $y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_h}(F, t)$ для некоторого набора F с $q(F) = h$, причем векторы $b_i^{(3)}$, $i \in F$, линейно независимы. Указанное F не обязательно единственно. Отвечающую моменту t совокупность наборов F обозначим $\{F^{[h]}(t)\}$.

С учетом определения числа h^* получаем, что совокупность $\{F^{[h^*]}(t)\}$ одна и та же при любом $t \in \mathfrak{T}^{[h^*]}$.

1. Если $h^b = h^*$, то положим

$$t_1^{[h^*]} := \min\{t : t \in \mathfrak{T}^{[h^*]}\}, \quad \hat{t}^{[h^*]} := \max\{t : t \in \mathfrak{T}^{[h^*]}\}.$$

Промежуток $[t_1^{[h^*]}, \hat{t}^{[h^*]}]$ назовем петлей уровня h^* . Промежутки $[t_0, t_1^{[h^*]}]$, $[\hat{t}^{[h^*]}, \vartheta]$ назовем свободными промежутками уровня h^* .

Если $h^b < h^*$, то считаем $[t_0, \vartheta]$ свободным промежутком уровня $h^b + 1$.

2. Предположим, что определены петли и свободные промежутки, соответствующие некоторому уровню $h \in \overline{2, h^b}$ при $h^b = h^*$ и уровню $h \in \overline{2, h^b + 1}$ при $h^b < h^*$. Пусть $\Theta_j^{[h]} := [\theta_j^{[h]}, \theta_{j+}^{[h]}]$ — обозначение свободного промежутка с номером j в сквозной нумерации на $[t_0, \vartheta]$.

Рассмотрим свободный промежуток $\Theta_j^{[h]}$. Пусть

$$\begin{aligned}\tau_{j,1}^{[h-1]} &:= \min \{t : t \in \mathfrak{T}^{[h-1]} \cap \Theta_j^{[h]}\}, \\ \tau_{j,i+1}^{[h-1]} &:= \min \left\{t : t \in \mathfrak{T}^{[h-1]} \cap [\tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}, \vartheta_{j+}^{[h]}]\right\}, \quad i = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Полученный таким образом набор моментов $\tau_{j,i}^{[h-1]}$ обозначим $\{\tau_{j,i}^{[h-1]}\}$.

С каждым моментом $\tau_{j,i}^{[h-1]}$ свяжем петлю уровня $h - 1$. Выберем произвольное множество $F \in \{F^{[h-1]}(t_{j,i}^{[h-1]})\}$. Положим

$$\begin{aligned}t_{j,i}^{[h-1]} &:= \tau_{j,i}^{[h-1]}, \\ t_{j,i+}^{[h-1]} &:= \max \left\{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^{c_{h-1}}(F, t), \quad t \in [\tau_{j,i}^{[h-1]}, \tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}] \cap \Theta_j^{[h]}\right\}.\end{aligned}$$

Предложение 9.1. На промежутке $(t_{j,i+}^{[h-1]}, \tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}) \cap \Theta_j^{[h]}$ нет моментов из $\mathfrak{T}^{[h-1]}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\hat{t}$ — момент из рассматриваемого промежутка, принадлежащий $\mathfrak{T}^{[h-1]}$. Символом $\hat{F}$ обозначим произвольную совокупность из $\{F^{[h-1]}(\hat{t})\}$. Векторы $b_i^{(3)}$, $i \in \hat{F}$, линейно независимы.

Допустим вначале, что среди векторов $b_i^{(3)}$, $i \in \hat{F}$, имеется хотя бы один вектор $b_i^{(3)}$, не принадлежащий линейной оболочке, натянутой на векторы $b_i^{(3)}$, $i \in F$. Тогда векторы $b_i^{(3)}$, $i \in \tilde{F} = F \cup \{\hat{i}\}$, линейно независимы. Учитывая вложение $[\tau_{j,i}^{[h-1]}, \theta_{j+}^{[h]}] \subset \Theta_j^{[h]}$, получим

$$y^{(1)}(\tau_{j,i}^{[h-1]}) \notin \text{int } \Pi^{c_h}(\tilde{F}, t).$$

При этом

$$y^{(1)}(\tau_{j,i}^{[h-1]}) \in \Pi^{c_{h-1}}(F, t).$$

Следовательно, в силу лемм 3.2 и 3.3 с учетом выбора чисел c_{h-1} и $\mathbf{st}^{[h-1]}$ движение $y^{(1)}(t)$ на $[\tau_{j,i}^{[h-1]}, \tau_{j,i}^{[h-1]} + \mathbf{st}^{[h-1]}) \cap \Theta_j^{[h]}$ не может попасть на $\Pi^{c_{h-1}}(\hat{i}, t)$, а значит, и на $\Pi^{c_{h-1}}(\hat{F}, t)$.

Пусть теперь любой вектор $b_i^{(3)}$, $i \in \hat{F}$, принадлежит линейной оболочке векторов $b_i^{(3)}$, $i \in F$. Поскольку каждая из этих двух совокупностей состоит из $h - 1$ линейно независимых векторов, то $\Pi^{c_{h-1}}(F, t) = \Pi^{c_{h-1}}(\hat{F}, t)$. Следовательно, $y^{(1)}(\hat{t}) \in \Pi^{c_{h-1}}(F, \hat{t})$, что противоречит определению момента $t_{j,i+}^{[h-1]}$. $\square$

Из предложения 9.1 следует, что каждому моменту $\tau_{j,i}^{[h-1]}$ соответствует лишь одна петля уровня $h - 1$, а не серия петель, как в разделе 7 при $\beta > 0$.

Момент $t_{j,i}^{[h-1]} = \tau_{j,i}^{[h-1]}$ назовем моментом начала петли с номером i уровня $h - 1$ на свободном промежутке $\Theta_j^{[h]}$, а момент $t_{j,i+}^{[h-1]}$ — моментом конца этой петли.

Проходя все свободные промежутки уровня h , пронумеруем в сквозной нумерации петли уровня $h - 1$. Пусть $\{t^{[h-1]}\}$ — моменты начала петель уровня $h - 1$.

9.4. Приращение функции $V^{(2)}$. Для оценки приращения функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(t)$ представим промежуток $[t_0, \vartheta]$ составленным из промежутков петель уровней $h = \overline{1, h^b}$ и свободных промежутков уровня 1.

Пусть $[t_*, t^*]$ — промежуток некоторой петли уровня h . Тогда с учетом (9.1) приращение $\text{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*])$ функции $V^{(2)}$ оценивается в виде

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + c_h + \lambda\chi(t_*, t^*).$$

Если $[t_*, t^*]$ — свободный промежуток уровня 1, то в силу (9.2)

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(t_*, t^*).$$

Обозначим

$$\mathbf{sh}^{[*]} := 2\lambda\sigma\mu\Delta; \quad \mathbf{sh}^{[h]} := 2\lambda\sigma\mu\Delta + c_h, \quad h = \overline{1, h^b}. \quad (9.3)$$

Таким образом, для оценки приращения функции $V^{(2)}$ на промежутке петли уровня h будем использовать неравенство

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*]) \leq \mathbf{sh}^{[h]} + \lambda\chi(t_*, t^*), \quad (9.4)$$

а на свободном промежутке уровня 1 — неравенство

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_*, t^*]) \leq \mathbf{sh}^{[*]} + \lambda\chi(t_*, t^*). \quad (9.5)$$

Для каждого $h = \overline{1, h^b}$ символом $a^{[h]}$ обозначим число петель уровня h , символом $m^{[h]}$ — число свободных промежутков уровня h на $[t_0, \vartheta]$. Условимся, что $m^{[h^b+1]} := 1$.

С учетом (9.4) и (9.5), приращение функции $V^{(2)}$ на $[t_0, \vartheta]$ оценивается неравенством

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) \leq \sum_{h=1}^{h^b} a^{[h]} \mathbf{sh}^{[h]} + m^{[1]} \mathbf{sh}^{[*]} + \lambda\chi(t_0, \vartheta). \quad (9.6)$$

1. Оценим сверху возможное число петель и свободных промежутков. Если $h^b = h^*$, то

$$a^{[h^b]} = 1, \quad m^{[h^b]} \leq 2. \quad (9.7)$$

В случае $h^b < h^*$ справедливы оценки

$$a^{[h^b]} \leq \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h^b]} \rrbracket + 1, \quad m^{[h^b]} \leq a^{[h^b]} + 1. \quad (9.8)$$

Здесь двойные квадратные скобки означают целую часть числа.

Для $h \in \overline{1, (h^b - 1)}$ имеем

$$a^{[h]} \leq \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h]} \rrbracket + m^{[h+1]}, \quad m^{[h]} \leq a^{[h]} + m^{[h+1]}. \quad (9.9)$$

А. Покажем, что при любом $h \in \overline{1, h^b}$ выполнено неравенство

$$m^{[h]} \leq \sum_{p=1}^{h^b-h+1} 2^{(p-1)} \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h+p-1]} \rrbracket + 2^{(h^b-h+1)}. \quad (9.10)$$

Если $h = h^b$, то указанное неравенство выполнено. Предположим, что для $h+1$, где $h \in \overline{1, (h^b - 1)}$, неравенство (9.10) установлено, т.е.

$$m^{[h+1]} \leq \sum_{p=1}^{h^b-h} 2^{(p-1)} \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h+p]} \rrbracket + 2^{(h^b-h)}.$$

Тогда, используя (9.7)–(9.9), получим

$$\begin{aligned} m^{[h]} &\leq a^{[h]} + m^{[h+1]} \leq \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h]} \rrbracket + 2m^{[h+1]} \leq \\ &\leq \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h]} \rrbracket + \sum_{p=1}^{h^b-h} 2^p \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h+p]} \rrbracket + 2^{(h^b-h+1)} = \\ &= \sum_{p=1}^{h^b-h+1} 2^{(p-1)} \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h+p-1]} \rrbracket + 2^{(h^b-h+1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (9.10) доказано.

Принимая во внимание, что $\mathbf{st}^{[h]} \leq \mathbf{st}^{[h+1]} \leq \dots \leq \mathbf{st}^{[h^b]}$, из неравенства (9.10) выводим

$$m^{[h]} \leq \left(\sum_{p=1}^{h^b-h+1} 2^{(p-1)} \right) \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h]} \rrbracket + 2^{(h^b-h+1)} = (2^{(h^b-h+1)} - 1) \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h]} \rrbracket + 2^{(h^b-h+1)}. \quad (9.11)$$

В частности, при $h = 1$ имеем

$$m^{[1]} \leq (2^{(h^b)} - 1) \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[1]} \rrbracket + 2^{h^b}. \quad (9.12)$$

Б. Опираясь на (9.7)–(9.9), запишем неравенство

$$\sum_{h=1}^{h^b} a^{[h]} \leq \sum_{h=1}^{h^b} \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h]} \rrbracket + \sum_{h=1}^{h^b} m^{[h+1]}. \quad (9.13)$$

Используя (9.11), получаем

$$\sum_{h=1}^{h^b} m^{[h+1]} = \sum_{h=2}^{h^b} m^{[h]} + 1 \leq \sum_{h=2}^{h^b} (2^{(h^b-h+1)} - 1) \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h]} \rrbracket + \sum_{h=2}^{h^b} 2^{(h^b-h+1)} + 1.$$

Подставляя оценку для $\sum_{h=1}^{h^b} m^{[h+1]}$ в (9.13), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{h^b} a^{[h]} &\leq \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[1]} \rrbracket + \sum_{h=2}^{h^b} 2^{(h^b-h+1)} \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[h]} \rrbracket + \sum_{h=2}^{h^b} 2^{(h^b-h+1)} + 1 \leq \\ &\leq \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[1]} \rrbracket + \left(\sum_{h=2}^{h^b} 2^{(h^b-h+1)} \right) \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[2]} \rrbracket + \sum_{h=2}^{h^b} 2^{(h^b-h+1)} + 1. \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{h=2}^{h^b} 2^{(h^b-h+1)} = 2^{h^b} - 2$$

и $\mathbf{st}^{[1]} \leq \mathbf{st}^{[2]}$, то

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{h^b} a^{[h]} &\leq \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[1]} \rrbracket + 2^{h^b} \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[1]} \rrbracket - 2 \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[1]} \rrbracket + 2^{h^b} - 1 = \\ &= (2^{h^b} - 1) \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[1]} \rrbracket + 2^{h^b} - 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{h=1}^{h^b} a^{[h]} \leq (2^{h^b} - 1) \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[1]} \rrbracket + 2^{h^b} - 1. \quad (9.14)$$

2. Обозначим для краткости

$$\mathcal{X}^b := (2^{h^b} - 1) \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[1]} \rrbracket + 2^{h^b}.$$

Тогда в силу (9.3), (9.6), (9.12) и (9.14) получаем

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) \leq (\mathcal{X}^b - 1) \mathbf{sh}^{[h^b]} + \mathcal{X}^b \mathbf{sh}^{[*]} + \lambda \chi(t_0, \vartheta) = (2\mathcal{X}^b - 1) 2\lambda \sigma \mu \Delta + (\mathcal{X}^b - 1) c_{h^b} + \lambda \chi(t_0, \vartheta).$$

Число h^b связано с движением $y^{(1)}(\cdot)$. Чтобы исключить такую зависимость, оценим h^b через h^* и c_{h^b} через c_{h^*} . Имеем

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) \leq (2\mathcal{X}^* - 1) 2\lambda \sigma \mu \Delta + (\mathcal{X}^* - 1) c_{h^*} + \lambda \chi(t_0, \vartheta), \quad (9.15)$$

где

$$\mathcal{X}^* := (2^{h^*} - 1) \llbracket (\vartheta - t_0) / \mathbf{st}^{[1]} \rrbracket + 2^{h^*}.$$

На основе (9.15) получаем неравенство

$$\gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta)) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + (2\kappa^* - 1)2\lambda\sigma\mu\Delta + (\kappa^* - 1)c_{h^*} + \lambda\chi(t_0, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}. \quad (9.16)$$

Величина $\text{st}^{[1]}$, от которой зависит κ^* , определяется величинами $c_1, c_2, \dots, c_{h^*}$ и не возрастает с их уменьшением. Поэтому второе и третье слагаемые в правой части стремятся к нулю при $\Delta \rightarrow 0$, $c_{h^*} \rightarrow 0$. В целом оценка (9.16) не является конструктивной, поскольку неконструктивно на основе c_{h^*} задаются последовательно величины $c_{h^*-1}, \dots, c_2, c_1$.

Из оценки (9.16) вытекает утверждение теоремы 1 при $\beta = 0$.

10. СЛУЧАЙ СКАЛЯРНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРВОГО ИГРОКА

Теорема 1 справедлива для общего случая $k \geq 1$. В скалярном случае $k = 1$ результат можно усилить.

10.1. Упрощения, возникающие в скалярном случае. При $q(F) = k$, т.е. когда $F = I$, формулировка основной леммы 2.1 существенно упрощается. Становится пустым множество H , лишними являются предположение (2.2) и предположение о правильных управлениях для индексов $i \in I \setminus (F \cup H)$. В оценке (2.3) исчезают третье и четвертое слагаемые справа. Формулировка леммы принимает следующий вид.

Предложение 10.1. *Предположим, что $F = I$ и $(t_*, x_*) \in Z$, $\delta > 0$, $t_* + \delta \leq \vartheta$. Пусть $y^{(1*)}(\cdot)$ — движение системы (1.1) в силу допустимых программных управлений $u(\cdot), v(\cdot)$, выходящее в момент t_* из точки x_* . Тогда справедлива оценка*

$$\mathcal{V}(F, t_* + \delta, y^{(1*)}(t_* + \delta)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\delta^2 \sum_{i=1}^k \beta_i \mu_i + \lambda\chi(t_*, t_* + \delta).$$

Перепишем предложение 2.1 для случая $F = \emptyset$, $H = \emptyset$.

Предложение 10.2. *Пусть $(t_*, x_*) \in Z$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$. Пусть $0 \leq \omega \leq t^* - t_*$ и вдоль движения $y^{(1*)}(\cdot)$, выходящего в момент t_* из точки x_* , для любого $i \in I$ либо $y^{(1*)}(t) \in \Pi_+(i, t)$ на промежутке $[t_* + \omega, t^*]$ и при этом $u_i(t) = \mu_i$, либо $y^{(1*)}(t) \in \Pi_-(i, t)$ и при этом $u_i(t) = -\mu_i$. Тогда при любом $t \in [t_*, t^*]$ справедлива оценка*

$$V^{(2)}(t, y^{(1*)}(t)) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + 2\lambda\omega \sum_{i=1}^k \sigma_i \mu_i + \lambda\chi(t_*, t).$$

Будем использовать предложения 10.1 и 10.2 в случае скалярного управления первого игрока, т.е. при $k = 1$.

Итак, считаем, что управляющее воздействие первого игрока стеснено ограничением $|u| \leq \mu$, матрицы $B^{(1)}(t)$ и $B^{(2)}(t)$ представляют собой столбцы размерности n . При каждом t имеем дело с одной поверхностью переключения, которую, опуская символ F , будем обозначать $\Pi(t)$. Аналогично будем опускать символ F в обозначении r -окрестности поверхности $\Pi(t)$, а также частей пространства $\mathbb{R}^n$, определяемых этими множествами.

В скалярном случае автоматически выполнено условие 2. Нет необходимости в рассмотрении s -окрестностей поверхностей переключения и лишней становится лемма 3.3. Можно обойтись также без введения параметра малости ξ . Появляется возможность получения явной оценки для результата, гарантированного первому игроку стратегией, основанной на поверхностях переключения $\Pi(t)$ и применяемой с произвольным шагом $\Delta > 0$ дискретной схемы управления.

10.2. Доказательство теоремы 2. Зафиксируем число $r \geq 0$. Рассмотрим движение $y^{(1)}(\cdot)$ системы (1.1) из позиции $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}$, $t_0 < \vartheta$, в силу некоторой стратегии $U \in \mathbf{U}^r$ первого игрока с шагом Δ дискретной схемы управления и некоторого $v(\cdot) \in K^{(1)}$.

1. Пусть $\beta > 0$. Положим

$$\text{st} := \sqrt{\frac{2\sigma\mu\Delta + r}{\beta\mu}}. \quad (10.1)$$

А. Выделим вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ петли, связанные с заходом в множества $\Pi^r(t)$. Определим также свободные промежутки.

Положим

$$t_1 := \min \{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t), t \in [t_0, \vartheta]\}.$$

Момент t_1 назовем моментом начала первой петли. Далее отмечаем момент t_{1+} окончания первой петли:

$$t_{1+} := \max \{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t), t \in [t_1, t_1 + \mathbf{st}] \cap [t_0, \vartheta]\}.$$

Момент t_{1+} , в частности, может совпадать с t_1 .

В качестве момента t_2 начала второй петли возьмем момент

$$t_2 := \min \{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t), t \in [t_1 + \mathbf{st}, \vartheta]\}.$$

Затем отмечаем момент t_{2+} окончания второй петли:

$$t_{2+} := \max \{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t), t \in [t_2, t_2 + \mathbf{st}] \cap [t_0, \vartheta]\}.$$

Продолжая процесс, получим набор петель на $[t_0, \vartheta]$.

Удалим из $[t_0, \vartheta]$ внутренность промежутков построенных петель. Получаем упорядоченный набор отрезков. Каждый из них называем свободным промежутком. Свободный промежуток может быть вырожденным, т.е. состоящим из одной точки.

Если на $[t_0, \vartheta]$ петли отсутствуют, то считаем $[t_0, \vartheta]$ свободным промежутком.

Б. Пусть $[\rho, \eta]$ — некоторый свободный промежуток. Покажем, что приращение функции $V^{(2)}$ на нем описывается неравенством

$$\text{Var}_{\mathcal{D}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(\rho, \eta). \quad (10.2)$$

Здесь нижний индекс $\mathcal{D}$ подчеркивает, что изменение функции $V^{(2)}$ подсчитывается на свободном промежутке.

Вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ реализуется некоторое управление $u(\cdot)$. Значение $u(t)$ называем «правильным», если $u(t) = \mu$ ($u(t) = -\mu$) при $y^{(1)}(t) \in \Pi_+(t)$ ($y^{(1)}(t) \in \Pi_-(t)$).

На внутренности свободного промежутка точка $y^{(1)}(t)$ находится вне множества $\Pi^r(t)$, а стало быть, не попадает на множество $\Pi(t)$. Поэтому при $\Delta \leq \eta - \rho$ управление $u(t)$ является правильным на $[\rho + \Delta, \eta]$ и произвольным разве лишь на $[\rho, \rho + \Delta]$. Оценка (10.2) следует непосредственно из предложения 10.2 при $\omega = \Delta$, $t_* = \rho$, $t^* = \eta$.

Если $\Delta > \eta - \rho$, то применим предложение 10.2 при $\omega = \eta - \rho$, $t_* = \rho$, $t^* = \eta$. Вновь получаем оценку (10.2).

В. Будем говорить, что $[\rho, \eta]$ — промежуток вида E , если он составлен из некоторой петли $[t_i, t_{i+}]$ и примыкающего к ней справа свободного промежутка. Промежуток $[\rho, \eta]$ вида E при дополнительном условии $\rho + \mathbf{st} \leq \eta$ будем называть промежутком вида $\mathcal{E}$.

Оценим приращение функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на промежутке вида E .

Рассмотрим промежуток петли $[t_i, t_{i+}]$. Применяя предложение 10.1 при $\delta = t_{i+} - t_i$, имеем

$$\mathcal{V}(t_{i+}, y^{(1)}(t_{i+})) \leq V^{(2)}(t_i, y^{(1)}(t_i)) + \lambda\beta\mu(t_{i+} - t_i)^2 + \lambda\chi(t_i, t_{i+}).$$

Поскольку $t_{i+} - t_i \leq \mathbf{st}$, то

$$\mathcal{V}(t_{i+}, y^{(1)}(t_{i+})) \leq V^{(2)}(t_i, y^{(1)}(t_i)) + \lambda\beta\mu\mathbf{st} \cdot (t_{i+} - t_i) + \lambda\chi(t_i, t_{i+}).$$

Учитывая неравенство

$$V^{(2)}(t_{i+}, y^{(1)}(t_{i+})) \leq \mathcal{V}(t_{i+}, y^{(1)}(t_{i+})) + \lambda r,$$

приходим к соотношению

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_i, t_{i+}]) \leq \lambda\beta\mu\mathbf{st} \cdot (t_{i+} - t_i) + \lambda r + \lambda\chi(t_i, t_{i+}). \quad (10.3)$$

На свободном промежутке $[t_{i+}, \eta]$ в силу (10.2) имеем

$$\text{Var}_{\mathcal{D}}(V^{(2)}, [t_{i+}, \eta]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(t_{i+}, \eta). \quad (10.4)$$

Объединяя (10.3) и (10.4), с учетом неравенства $t_{i+} - t_i \leq \eta - \rho$ получим

$$\text{Var}_E(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq \lambda\beta\mu\mathbf{st} \cdot (\eta - \rho) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(\rho, \eta). \quad (10.5)$$

Нижний индекс E подчеркивает, что подсчет приращения функции $V^{(2)}$ происходит на промежутке вида E .

Перейдем к оценке приращения функции $V^{(2)}$ вдоль движения $y^{(1)}(\cdot)$ на промежутке вида $\mathcal{E}$. Поскольку в этом случае $\eta - \rho \geq \mathbf{st}$, то из (10.1) следует неравенство

$$2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r \leq \lambda\beta\mu\mathbf{st} \cdot (\eta - \rho).$$

Привлекая (10.5), получим

$$\text{Var}_{\mathcal{E}}(V^{(2)}, [\rho, \eta]) \leq 2\lambda\beta\mu\mathbf{st} \cdot (\eta - \rho) + \lambda\chi(\rho, \eta). \quad (10.6)$$

Г. Рассмотрим промежуток $[t_0, \vartheta]$. Представим его составленным из первого свободного промежутка $[t_0, t^\#]$, конечного числа промежутков вида $\mathcal{E}$, идущих друг за другом от момента $t^\#$ до некоторого момента $t^\diamond$ (суммарный промежуток обозначим через $[t^\#, t^\diamond]$), и остаточного промежутка $[t^\diamond, \vartheta]$ вида E . Применяя последовательно оценки (10.2), (10.6) и (10.5), имеем

$$\begin{aligned} \text{Var}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) &= \text{Var}_{\mathcal{D}}(V^{(2)}, [t_0, t^\#]) + \text{Var}(V^{(2)}, [t^\#, t^\diamond]) + \\ &+ \text{Var}_E(V^{(2)}, [t^\diamond, \vartheta]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + 2\lambda\beta\mu\mathbf{st} \cdot (t^\diamond - t^\#) + \lambda\beta\mu\mathbf{st} \cdot (\vartheta - t^\diamond) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta) \leq \\ &\leq 2\lambda\beta\mu\mathbf{st} \cdot (\vartheta - t_0) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta). \end{aligned}$$

Подставляя $\mathbf{st}$ по формуле (10.1), получим

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) \leq 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}(\vartheta - t_0) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta). \quad (10.7)$$

2. Пусть $\beta = 0$. Положим

$$t_1 := \min \{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t), t \in [t_0, \vartheta]\}, \quad \hat{t} := \max \{t : y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t), t \in [t_0, \vartheta]\}.$$

Имеем

$$y^{(1)}(t) \notin \Pi^r(t), \quad t \in [t_0, t_1) \cup (\hat{t}, \vartheta].$$

Для промежутков $[t_0, t_1]$ и $[\hat{t}, \vartheta]$, опираясь на предложение 10.2 (так же, как при выводе неравенства (10.2)), получим

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_0, t_1]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(t_0, t_1), \quad (10.8)$$

$$\text{Var}(V^{(2)}, [\hat{t}, \vartheta]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda\chi(\hat{t}, \vartheta). \quad (10.9)$$

Для промежутка $[t_1, \hat{t}]$, обращаясь к предложению 10.1 при $\beta = 0$, имеем

$$\mathcal{V}(\hat{t}, y^{(1)}(\hat{t})) \leq V^{(2)}(t_1, y^{(1)}(t_1)) + \lambda\chi(t_1, \hat{t})$$

и поэтому, учитывая неравенство

$$V^{(2)}(\hat{t}, y^{(1)}(\hat{t})) \leq \mathcal{V}(\hat{t}, y^{(1)}(\hat{t})) + \lambda r,$$

приходим к оценке

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_1, \hat{t}]) \leq \lambda r + \lambda\chi(t_1, \hat{t}). \quad (10.10)$$

Объединяя (10.8)–(10.10), получим

$$\text{Var}(V^{(2)}, [t_0, \vartheta]) \leq 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta). \quad (10.11)$$

3. Опираясь на (10.7) в случае $\beta > 0$ и на (10.11) в случае $\beta = 0$, находим оценку

$$V^{(2)}(\vartheta, y^{(1)}(\vartheta)) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}(\vartheta - t_0) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta). \quad (10.12)$$

Поскольку

$$\gamma^{(2)}(y^{(1)}(\vartheta)) = V^{(2)}(\vartheta, y^{(1)}(\vartheta)), \quad \gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta)) \leq \gamma^{(2)}(y^{(1)}(\vartheta)) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}$$

и правая часть (10.12) не зависит от выбранного $v(\cdot) \in K^{(1)}$, то

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) &\leq V^{(2)}(t_0, x_0) + 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}(\vartheta - t_0) + \\ &+ 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r + \lambda\chi(t_0, \vartheta) + \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 2. $\square$

11. Опыт численного построения поверхностей переключения в дифференциальных играх

В данной работе не обсуждаются алгоритмы численного построения поверхностей переключения. Ограничимся кратким описанием публикаций, где изложены результаты компьютерного моделирования с использованием поверхностей переключения.

Наиболее простым является случай $n = 2$, т.е. когда значения функции платы в момент окончания игры определяются лишь некоторыми двумя координатами фазового вектора.

Для этого случая в Институте математики и механики УрО РАН в начале 1980-х гг. были разработаны эффективные алгоритмы построения t -сечений множеств уровня функции цены (см. [1, 4, 6, 13, 24, 40, 48]). Построения ведутся в рамках аппроксимирующей игры (1.4) на заданной сетке $\{t_j\}$ моментов времени и на некоторой сетке $\{c_p\}$ значений функции цены. Каждое сечение $W_{c_p}^{(2)}(t_j)$ представляет собой выпуклый многоугольник на плоскости. Переход от построенного сечения $W_{c_p}^{(2)}(t_j)$ к сечению $W_{c_p}^{(2)}(t_{j-1})$, $t_{j-1} < t_j$, осуществляется при помощи специальной попятной процедуры, использующей операцию овыпукления положительно-однородной кусочно линейной функции в пространстве $\mathbb{R}^2$ или же эквивалентную ей операцию пересечения ломаных на плоскости.

Несложная обработка (см. [6, 7, 11, 12, 40]) многоугольников $W_{c_p}^{(2)}(t_j)$, $c \in \{c_p\}$, дает для каждой компоненты u_i , $i = \overline{1, k}$, управляющего воздействия u первого игрока линию переключения, соответствующую моменту t_j . Просчитанные на сетке $\{t_j\}$ линии переключения определяют способ управления по компоненте u_i . Наборы линий переключения хранятся в памяти и используются в дискретной схеме управления.

В [3, 5–9, 14–17, 26, 27, 39, 40, 49] рассмотрена задача о посадке самолета в условиях ветрового возмущения. Исследовался процесс посадки до момента пролета торца взлетно-посадочной полосы. При линеаризации нелинейных уравнений динамики относительно номинального движения по прямолинейной глиссаде снижения получаем линейную систему, распадающуюся на две подсистемы: в одной из них участвуют фазовые переменные и управляющие воздействия, влияющие на вертикальное отклонение от номинала (подсистема продольного канала), в другой — на боковое отклонение (подсистема бокового канала). Соответственно рассматривались две вспомогательные линейные дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания. В первой функция платы зависит от вертикального отклонения в момент окончания и скорости его изменения. Управляющие воздействия — отклонение руля высоты и изменение силы тяги. Во второй плата определяется боковым отклонением и его скоростью. Управляющие воздействия — отклонение элеронов и руля направления.

Для каждой из двух вспомогательных линейных дифференциальных игр просчитывались на заданной сетке моментов времени линии переключения, определяющие близкий к оптимальному (в рамках линейной модели) способ управления первого игрока. Тестирование проводилось в рамках исходной нелинейной системы. Применялись различные варианты задания ветровой помехи: формирование помехи по принципу обратной связи на основе решения вспомогательных линейных дифференциальных игр [9, 14, 16, 17], использование моделей микровзрыва ветра [42, 46, 51], формирование помехи при помощи датчика случайных чисел. Полученные результаты моделирования процесса посадки сравнивались с теми, что дают традиционные способы управления.

Способ управления при помощи наборов линий переключения тестировался также на модельных задачах посадки и взлета, предложенных А. Миеле и его сотрудниками [45–47]. Результаты исследования отражены в работах [17, 23, 37, 38, 50]. Для задачи взлета проведено сравнение с результатами Д. Лейтмана и его сотрудников [41, 44], в которых управление строилось с использованием специально подобранных функций Ляпунова.

В [10] рассмотрена задача разбега самолета по взлетно-посадочной полосе в условиях ветрового возмущения. Исследуемый способ управления был основан на построении линий переключения.

В [33, 34] изучалась в игровой постановке задача о перемещении груза с подвижной точкой подвеса. Были построены линии переключения, определяющие оптимальный способ управления.

Пакет программ для построения поверхностей переключения в случае $n = 3$ описан в [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боткин Н. Д. Численное построение сечений множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре// В сб.: Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр/ Под ред. Субботина А. И., Пацко В. С. — Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР. — 1984. — С. 5–38.
2. Боткин Н. Д. Оптимальная универсальная стратегия в линейной дифференциальной игре// Диффер. уравн. — 1989. — 25, № 9. — С. 1475–1480.
3. Боткин Н. Д., Жуков С. П., Красов А. И. Комбинированный способ управления самолетом на посадке// В сб.: Управление в динамических системах/ Под ред. Субботина А. И. и Ушакова В. Н. — Свердловск: ИММ УрО АН СССР. — 1990. — С. 18–30.
4. Боткин Н. Д., Зарх М. А. Оценка погрешности построения множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре// В сб.: Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр/ Под ред. Субботина А. И. и Пацко В. С. — Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР. — 1984. — С. 39–80.
5. Боткин Н. Д., Зарх М. А., Кейн В. Н., Пацко В. С., Турова В. Л. Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах// Изв. РАН. Техн. киберн. — 1993. — 1. — С. 68–76.
6. Боткин Н. Д., Кейн В. М., Красов А. И., Пацко В. С. Управление боковым движением самолета на посадке в условиях ветрового возмущения/ Рег. в ВИНИТИ, № 81104592, инв. № 02830078880. — Ленинград—Свердловск, 1983.
7. Боткин Н. Д., Кейн В. М., Пацко В. С. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке// Прикл. мат. мех. — 1984. — 48, № 4. — С. 560–567.
8. Боткин Н. Д., Кейн В. М., Пацко В. С. Решение задачи о посадке самолета в минимаксной постановке// В сб.: Оптимизация управления летательными аппаратами и их системами. — М.: МАИ, 1988. — С. 8–15.
9. Боткин Н. Д., Кейн В. М., Пацко В. С. Применение методов теории дифференциальных игр к задаче управления самолетом на посадке// В сб.: Позиционное управление с гарантированным результатом/ Под ред. Субботина А. И. и Тарасьева А. М. — Свердловск: ИММ УрО АН СССР. — 1988. — С. 33–44.
10. Боткин Н. Д., Красов А. И. Позиционное управление в модельной задаче о разбеге самолета// В сб.: Позиционное управление с гарантированным результатом/ Под ред. Субботина А. И. и Тарасьева А. М. — Свердловск: ИММ УрО АН СССР. — 1988. — С. 22–32.
11. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Универсальная стратегия в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания// Пробл. управл. теории информ. — 1982. — 11, № 6. — С. 419–432.
12. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре// Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1983. — 4. — С. 78–85.
13. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Численное решение линейных дифференциальных игр// В кн.: Differential Equations and Applications, I, Rousse, Bulgaria, 1985. I. Dimovski and J. Stoyanov, eds./ Rousse: 'Angel Kancev' Tech. Univ., 1987. — С. 543–546.
14. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Анализ применения методов теории дифференциальных игр для имитации ветровых возмущений/ Рег. в ВИНИТИ, № 188003467, инв. № 02880044271. — Свердловск, 1987. — 46 с.
15. Боткин Н. Д., Пацко В. С., Турова В. Л. Разработка алгоритмов построения экстремальных ветровых возмущений/ Рег. в ВИНИТИ, № 188003467, инв. № 02880054701. — Свердловск, 1987. — 58 с.
16. Боткин Н. Д., Турова В. Л. Разработка пакета прикладных программ синтеза экстремальных ветровых возмущений на этапе посадки/ Рег. в ВИНИТИ, № 188003467, инв. № 02880069889. — Свердловск, 1988. — 39 с.
17. Боткин Н. Д., Турова В. Л., Иванов А. Г. Рекомендации по имитации экстремальных ветровых возмущений/ Рег. в ВИНИТИ, № 188003467, инв. № 02890045178. — Свердловск, 1988. — 51 с.
18. Зарх М. А. Универсальная оптимальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре/ Деп. в ВИНИТИ, № 7438–В–85. — Свердловск, 1985. — 35 с.
19. Зарх М. А. Универсальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре// Прикл. мат. и мех. — 1990. — 54, № 3. — С. 395–400.
20. Зарх М. А. Пакет программ для решения трехмерных дифференциальных игр// В сб.: Анализ и синтез динамических систем в условиях неопределенности. — М.: МАИ, 1990. — С. 35–41.
21. Зарх М. А., Пацко В. С. Позиционное управление второго игрока в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания/ Деп. в ВИНИТИ, № 5756–85. — Свердловск, ИММ УНЦ АН СССР, 1985. — 84 с.

22. *Зарх М. А., Пацко В. С.* Построение управления второго игрока в линейной дифференциальной игре на основе свойства отталкивания// В сб.: Управление с гарантированным результатом/ Под ред. Субботина А. И. и Ушакова В. Н. — Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР. — 1987. — С. 37–70.
23. *Иванов А. Г.* Моделирование движения самолета на этапе посадки// В сб.: Проблемы управления с гарантированным результатом/ Под ред. Субботина А. И. и Брыкалова С. А. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1992. — С. 15–26.
24. *Исакова Е. А., Логунова Г. В., Пацко В. С.* Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания// В сб.: Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр/ Под ред. Субботина А. И. и Пацко В. С. — Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР. — 1984. — С. 127–158.
25. *Кейн В. М.* Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. — М.: Наука, 1985.
26. *Кейн В. М., Пацко В. С., Турова В. Л.* Задача о посадке самолета в условиях сдвига ветра// В сб.: Управление в динамических системах/ Под ред. Субботина А. И. и Ушакова В. Н. — Свердловск: ИММ УрО АН СССР. — 1990. — С. 52–64.
27. *Кейн В. М., Пацко В. С., Турова В. Л.* Управление самолетом при сдвиге ветра/ В кн.: Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации. — М.: Наука, 1990. — С. 53–56.
28. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970.
29. *Красовский Н. Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели// Мат. сб. — 1978. — 107, № 4. — С. 541–571.
30. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
31. *Пацко В. С.* Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания// Прикл. мат. мех. — 2004. — 68, № 4. — С. 653–666.
32. *Пацко В. С.* Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания/ Препринт. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2004. — 80 с.
33. *Соколов Б. Н., Турова В. Л.* Оптимальное управление маятником в условиях неопределенных помех/ Препринт № 336. — М.: ИПМ АН СССР, 1988. — 38 с.
34. *Соколов Б. Н., Турова В. Л.* Синтез оптимального управления маятника при наличии активных помех// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1988. — 23, № 5. — С. 14–23.
35. *Субботина Н. Н.* Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх// Диффер. уравн. — 1983. — 19, № 11. — С. 1890–1896.
36. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981.
37. *Турова В. Л.* Исследование задач взлета и прекращения посадки самолета при помощи численных методов теории дифференциальных игр/ Деп. в ВИНТИ, № 2546–В–92. — Свердловск, 1992, 38 с.
38. *Турова В. Л.* Применение численных методов теории дифференциальных игр к задачам о взлете и прекращении посадки самолета// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 1992. — 2. — С. 188–201.
39. *Botkin N. D., Kein V. M., Patsko V. S., Turova V. L.* Aircraft landing control in the presence of windshear// Probl. Control Inform. Theory. — 1989. — 18, № 4. — С. 223–235.
40. *Botkin N. D., Zarkh M. A., Patsko V. S.* Numerical solution of linear differential games// In: Differential Games. Developments in Modelling and Computation/ Lect. Notes Control Inform. Sci. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1991. — 156. — С. 226–234.
41. *Chen Y. H., Pandey S.* Robust control strategy for take-off performance in a windshear// Optim. Control Appl. Meth. — 1989. — 10, № 1. — С. 65–79.
42. *Ivan M.* A ring-vortex downburst model for real-time flight simulation of severe windshears// AIAA, Flight Simulation Technologies Conf., July 22–24, 1985. — St. Louis, Miss., 1985. — С. 57–61.
43. *Krasovskii N. N., Subbotin A. I.* Game-theoretical control problems. — New York–Berlin: Springer-Verlag, 1988.
44. *Leitmann G., Pandey S.* Aircraft control for flight in an uncertain environment: take-off in windshear// J. Optim. Theory Appl. — 1991. — 70, № 1. — С. 25–55.
45. *Miele A., Wang T., Melvin W. W.* Optimal take-off trajectories in the presence of windshear// J. Optim. Theory Appl. — 1986. — 49, № 1. — С. 1–45.
46. *Miele A., Wang T., Tzeng C. Y., Melvin W. W.* Optimal abort landing trajectories in the presence of windshear// J. Optim. Theory Appl. — 1987. — 55, № 2. — С. 165–202.
47. *Miele A., Wang T., Wang H., Melvin W. W.* Optimal penetration landing trajectories in the presence of windshear// J. Optim. Theory Appl. — 1988. — 57, № 1. — С. 1–40.
48. *Patsko V. S.* Special aspects of convex hull constructing in linear differential games of small dimension/ Proc. 10th IFAC Workshop “Control Applications of Optimization”, December 19–21, 1995. Haifa, Israel. — L.: Pergamon Press, 1996. — С. 19–24.

49. *Patsko V. S., Botkin N. D., Kein V. M., Turova V. L., Zarkh M. A.* Control of an aircraft landing in windshear// J. Optim. Theory Appl. — 1994. — 83, № 2. — С. 237–267.
50. *Turova V. L.* Take-off control in a windshear/ Preprint. — Ekaterinburg: Inst. Math. and Mech., 1991. — 12 p.
51. *Zhu S., Etkin B.* Model of wind field in a downburst// J. Aircraft. — 1985. — 22, № 7. — С. 595–601.

В. С. Пацко

Институт математики и механики УрО РАН,

Екатеринбург, Россия

E-mail: patsko@imm.uran.ru

О ПРОЦЕДУРАХ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

© 2005 г. **А. М. ТАРАСЬЕВ, Т. Б. ТОКМАНЦЕВ, А. А. УСПЕНСКИЙ, В. Н. УШАКОВ**

Аннотация. Многие задачи теории конфликтного управления могут быть сведены к дифференциальным играм сближения-уклонения с некоторым терминальным множеством. Один из основных подходов к решению таких задач — это подход, предложенный Н. Н. Красовским [2], базирующийся на позиционных конструкциях, основу которых составляет принцип экстремального прицеливания на стабильные мосты [2]. В связи с этим важной является задача о построении максимального стабильного моста — множества всех позиций, из которых разрешима задача о наведении на терминальное множество, стоящая перед одним из игроков.

В статье рассматривается дифференциальная игра сближения-уклонения на конечном промежутке времени, в которой первому игроку требуется обеспечить попадание фазового вектора управляемой системы на терминальное множество на этом промежутке, а второму игроку требуется обеспечить уклонение от терминального множества. Основным предмет исследования — максимальный стабильный мост, представляющий собой множество позиционного поглощения в этой игре. Задача о точном построении множества позиционного поглощения поддается решению только в простых случаях, и более реально рассматривать и решать задачу о приближенном построении этого множества.

Предлагаются подходы к приближенному построению множества позиционного поглощения и функции цены дифференциальной игры, основанные на дискретизации временного промежутка игры и технике попятных конструкций, которая развивается в научной школе Н. Н. Красовского начиная с 1980-х гг.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи	123
2. Оператор стабильного поглощения	124
3. Аппроксимирующая система множеств и ее свойства	125
4. Разностный оператор при построении функции цены дифференциальной игры на конечном промежутке времени	137
Список литературы	143

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана конфликтно-управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ ($t_0 < \vartheta < \infty$) описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x_0, \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (1.1)$$

Здесь x — m -мерный фазовый вектор системы, u — управление первого игрока, v — управление второго игрока, P и Q — компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Предполагается, что выполнены следующие условия.

- (А)** Функция $f(t, x, u, v)$ непрерывна по совокупности переменных t, x, u, v , и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ существует постоянная $L = L(D) \in (0, \infty)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00769), гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-791.2003.1).

такая, что

$$\begin{aligned} \|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| &\leq L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \\ (t, x^{(i)}, u, v) &\in D \times P \times Q, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь символ $\|f\|$ означает норму вектора f в евклидовом пространстве.

(В) Существует такая постоянная $\mu \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \mu(1 + \|x\|), \quad (t, x, u, v) \in \mathbb{R}^m \times P \times Q. \quad (1.3)$$

Рассматриваемая здесь дифференциальная игра сближения-уклонения складывается из задачи о сближении и задачи об уклонении [2].

В задаче о сближении, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание фазового вектора $x[t]$ системы (1.1) не позже момента ϑ на ограниченное и замкнутое терминальное множество M в пространстве $\mathbb{R}^m$. Решение задачи требуется обеспечить в классе позиционных стратегий $U(t, x)$ или в классе позиционных процедур управления первого игрока [2].

В задаче об уклонении, стоящей перед вторым игроком, требуется обеспечить уклонение фазового вектора $x[t]$ системы (1.1) от M на всем промежутке времени $[t_0, \vartheta]$. Решение задачи требуется обеспечить в классе контрстратегий $V(t, x, u)$ второго игрока или его контрпозиционных процедур управления поведением [2].

Отметим, что рассматриваемая здесь дифференциальная игра сближения-уклонения на промежутке времени является более сложной, чем дифференциальная игра сближения-уклонения с фиксированным моментом окончания ϑ .

В этой игре, как и в игре с фиксированным моментом окончания, важно уметь вычислять множество позиционного поглощения W^0 , которое представляет собой совокупность всех исходных позиций (t_*, x_*) , для каждой из которых существует позиционная стратегия $U(t, x)$, обеспечивающая при любых допустимых помехах $V(t, x, u)$ второго игрока выполнение включения $x[\tau] \in M$ в некоторый момент $\tau \in [t_*, \vartheta]$. Момент τ , вообще говоря, свой для каждой помехи $V(t, x, u)$.

Однако какое-либо эффективное аналитическое описание множества W^0 , позволяющее вычислять это множество, в общем случае отсутствует. В связи с этим актуальным является вопрос о приближенном построении W^0 . В статье рассматриваются алгоритмы приближенного построения W^0 , базирующиеся на попятных конструкциях и унификации (см. [2–5]).

Работа примыкает к исследованиям, посвященным унификации в дифференциальных играх [2–6] и попятным конструкциям приближенного построения W^0 [5–9]. Исследуются вопросы, связанные с вычислительными аспектами построения W^0 . В разделе 2 определен оператор стабильного поглощения. Его конструкция представляет собой достаточно общую схему и лежит в основе определения множества W^0 . В разделе 3 приводятся условия, при которых дискретная аппроксимация множества W^0 сходится к нему, когда шаг дискретизации стремится к нулю. Выписаны соотношения, на основе которых разработан алгоритм приближенного вычисления W^0 для некоторых классов управляемых систем на плоскости. В разделе 4 предлагается разностный оператор для построения функции цены дифференциальной игры. При его построении используется дискретная аппроксимация стабильного моста для расширенной динамической системы. Полученный результат продолжает цикл работ [1, 10–12, 15]. Приведены примеры.

2. ОПЕРАТОР СТАБИЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ

В силу условий, наложенных на управляемую систему (1.1), можно выбрать настолько большую ограниченную и замкнутую область $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, что все рассматриваемые ниже конструкции (стабильные мосты, движения, окрестности терминального множества M) содержатся в D . Ниже будем рассматривать именно такую область D .

Рассмотрим определение u -стабильного моста — множества позиций, на котором можно сохранять движение выбором управления u . Это унификационное определение восходит к работам Н. Н. Красовского [3, 4]. Важную роль в этом определении играет гамильтониан системы (1.1), т.е. скалярная функция

$$H(t, x, l) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle, \quad l \in \mathbb{R}^m,$$

где $\langle l, f \rangle$ — скалярное произведение векторов l и f .

Пусть $\Phi = \{f \in \mathbb{R}^m : \|f\| \leq K < \infty\}$ — шар в $\mathbb{R}^m$, $(t, x) \in D$.

Пусть задано некоторое множество Ψ элементов ψ , а также семейство отображений $\{F_\psi : D \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}\}$, отвечающее множеству Ψ и удовлетворяющее следующим условиям:

(A1) для любых $(t, x, \psi) \in D \times \Psi$ множество $F_\psi(t, x)$ выпукло, замкнуто и $F_\psi(t, x) \subset \Phi$;

(A2) для любых $(t, x, l) \in D \times S$ выполняется равенство

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t, x)}(l) = H(t, x, l),$$

где $h_F(l) = \sup_{f \in F} \langle l, f \rangle$ при $F \subset \mathbb{R}^m$, $S = \{l \in \mathbb{R}^m : \|l\| = 1\}$;

(A3) существует такая функция $\omega^*(\delta)$ ($\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), что

$$d(F_\psi(t^*, x^*), F_\psi(t_*, x_*)) \leq \omega^*(|t^* - t_*| + \|x^* - x_*\|), \\ (t^*, x^*), (t_*, x_*) \in D, \psi \in \Psi,$$

где $d(F^*, F_*)$ — хаусдорфово расстояние между F^* и F_* в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Таким образом, множества $F_\psi(t, x)$, $\psi \in \Psi$, при каждом фиксированном $(t, x) \in D$ представляют собой систему выпуклых компактов, содержащихся в шаре Φ пространства $\mathbb{R}^m$, можно сказать, «плавающих» в шаре Φ , но «плавающих» не произвольно, вне всяких ограничений, а подчиненных условию связи с гамильтонианом $H(t, x, l)$ из **(A2)**. Подчеркнем, что в этом условии связь компактов $F_\psi(t, x)$, $\psi \in \Psi$, и гамильтониана $H(t, x, l)$ учитывает все направления $l \in S$.

Полагая $H \subset \mathbb{R}^m$, введем обозначения: $X_\psi(t; t_*, x_*)$ — множество всех точек $x^* \in \mathbb{R}^m$, в которые в момент $t \in [t_*, t^*]$ приходят решения $x(\cdot) = (x(\tau) : t_* \leq \tau \leq t^*)$, $x(t_*) = x_*$, дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(t, x)$,

$$M_t(H) = \begin{cases} M, & t \in [t_*, t^*), \\ M \cup H, & t = t^*; \end{cases}$$

$$X_\psi^{-1}(t_*; t, M_t(H)) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X_\psi(t; t_*, x_*) \cap M_t(H) \neq \emptyset\}.$$

Приведем определение оператора стабильного поглощения π в задаче сближения с M к фиксированному моменту ϑ (см. [7, 8]).

Определение 2.1. Оператором стабильного поглощения π в задаче сближения с M к моменту ϑ назовем отображение $\pi : \Xi \times 2^{\mathbb{R}^m} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное соотношением

$$\pi(t_*; t^*, H) = \bigcap_{\psi \in \Psi} \bigcup_{t \in [t_*, t^*]} X_\psi^{-1}(t_*; t, M_t(H)),$$

где $\Xi = \{(t_*, t^*) \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta] : t_* \leq t^*\}$.

Определение 2.2. Замкнутое множество $W \subset D$ назовем u -стабильным мостом в задаче сближения с M к моменту ϑ , если

$$W(\vartheta) \subset M, \quad W(t_*) \subset \pi(t_*; t^*, W(t^*))$$

для любых $(t_*, t^*) \in \Xi$, где $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in W\}$.

Можно показать, что семейства $\{F_\psi : D \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}\}$, отвечающие различным множествам Ψ и удовлетворяющие условиям **(A1)–(A3)**, эквивалентны в том смысле, что соответствующие операторы выделяют одни и те же u -стабильные мосты W в D .

3. АППРОКСИМИРУЮЩАЯ СИСТЕМА МНОЖЕСТВ И ЕЕ СВОЙСТВА

Пусть задано некоторое семейство $\{F_\psi : D \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}\}$, $\psi \in \Psi$, удовлетворяющее условиям **(A1)–(A3)**.

Предположим, что это семейство удовлетворяет следующему условию.

(A4) Существует число $\lambda \in (0, \infty)$ такое, что

$$d(F_\psi(t, x_*), F_\psi(t, x^*)) \leq \lambda \|x_* - x^*\|, \quad \psi \in \Psi, (t, x_*), (t, x^*) \in D.$$

Символом W^0 обозначим объединение всех u -стабильных мостов W , представляющее собой максимальный u -стабильный мост. Известно, что W^0 является множеством позиционного поглощения в рассматриваемой задаче.

В связи с вопросом приближенного построения множества W^0 сформулируем определение аппроксимирующей системы множеств. Понятие аппроксимирующей системы множеств связано с подменой непрерывного времени $t \in [t_0, \vartheta]$ разбиением $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_N = \vartheta\}$ и с заменой множеств достижимости $X_\psi(t; t_*, x_*)$ из определения 2.1 множествами

$$x_* + (t - t_*)F_\psi(t_*, x_*) = \left\{ x^* \in \mathbb{R}^m : x^* = x_* + (t - t_*)f, f \in F_\psi(t_*, x_*) \right\}.$$

Определение 3.1. Аппроксимирующим оператором стабильного поглощения π^ε в задаче сближения с M к моменту ϑ назовем отображение $\pi^\varepsilon : \Xi \times 2^{\mathbb{R}^m} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное соотношением

$$\pi^\varepsilon(t_*, t^*, H) = \bigcap_{\psi \in \Psi} \bigcup_{t \in [t_*, t^*]} \tilde{X}_\psi^{-1}(t_*; t, M_t^\varepsilon(H)), \quad \varepsilon > 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\psi^{-1}(t_*; t, M_t^\varepsilon(H)) &= \left\{ x_* \in \mathbb{R}^m : M_t^\varepsilon(H) \cap \tilde{X}_\psi(t; t_*, x_*) \neq \emptyset \right\}, \\ \tilde{X}_\psi(t; t_*, x_*) &= x_* + (t - t_*)F_\psi(t_*, x_*), \quad t \in [t_*, t^*], \\ M_t^\varepsilon(H) &= \begin{cases} M_\varepsilon, & t \in [t_*, t^*), \\ M_\varepsilon \cup H, & t = t^*, \end{cases} \end{aligned}$$

где M_ε — ε -окрестность множества M , H — множество из $\mathbb{R}^m$.

Будем говорить, что вещественная скалярная функция $\eta(\cdot) = (\eta(\Delta), \Delta > 0)$ есть бесконечно малая величина (б.м.в.), если она неотрицательна, монотонно убывает к нулю при $\Delta \downarrow 0$ и $\lim_{\Delta \downarrow 0} \Delta^{-1}\eta(\Delta) = 0$.

Пусть задано разбиение $\Gamma_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{N(n)} = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ и б.м.в. $\eta(\cdot)$.

Положим

$$\begin{aligned} \eta^0(\Delta) &\equiv 0, \quad \omega(\Delta) = \Delta\omega^*((1+K)\Delta), \quad \Delta \geq 0, \\ \Delta_i &= t_{i+1} - t_i, \quad \Delta^{(n)} = \max_{0 \leq i \leq N(n)-1} \Delta_i, \\ \varepsilon_0 &= \varepsilon_0^0 = 0, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i(\eta(\cdot)) = \omega(\Delta_{i-1}) + \eta(\Delta_{i-1}) + (1 + \lambda\Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}, \\ \varepsilon_i^0 &= \varepsilon_i(\eta^0(\cdot)) = \omega(\Delta_{i-1}) + (1 + \lambda\Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}^0, \quad i = 1, \dots, N(n) - 1. \end{aligned}$$

Определение 3.2. η -Аппроксимирующей системой множеств $\{\eta\widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ назовем систему множеств, заданную рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \eta\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}) &= M_{\varepsilon_{N(n)}}, \quad \eta\widetilde{W}^{(n)}(t_i) = \pi^{\varepsilon_{i+1}}(t_i; t_{i+1}, \eta\widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1})), \\ i &= N(n) - 1, N(n) - 2, \dots, 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь отметим, что выполняются вложения $M_{\varepsilon_{i+1}} \subset \eta\widetilde{W}^{(n)}(t_i)$, $i = N(n) - 1, N(n) - 2, \dots, 0$.

Замечание 3.1. Введенная в определении 3.2 система множеств зависит от величины $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i+1}(\eta(\cdot))$ и, следовательно, зависит от б.м.в. $\eta(\cdot)$ как от параметра. Эта зависимость отражена в обозначении $\eta\widetilde{W}^{(n)}(t_i)$, хотя более аккуратно следовало бы писать $\eta(\cdot)\widetilde{W}^{(n)}(t_i)$ (мы не делаем этого, стремясь избежать слишком громоздких обозначений).

Рассмотрим произвольную последовательность $\{\Gamma_n\}$ разбиений отрезка $[t_0, \vartheta]$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(n)} = 0$.

Определение 3.3. Символом ${}_{\eta}W^0$ обозначим множество всех $(t_*, x_*) \in D$, для которых существует последовательность

$$\left\{ (\tau_n, x_n) : \tau_n = t_n(t_*) \in [t_0, \vartheta], x_n \in {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(\tau_n), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_* \right\},$$

$$t_n(t_*) = \begin{cases} \min_{\substack{t_i \in \Gamma_n \\ t_i > t_*}} t_i, & t_* < \vartheta, \\ t_*, & t_* = \vartheta. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. При выполнении условий **(A1)–(A4)** множества W^0 и ${}_{\eta}W^0$ совпадают, какова бы ни была б.м.в. $\eta(\cdot)$.

Доказательство. Сначала докажем включение ${}_{\eta}W^0 \subset W^0$. Фиксируем произвольные $(t_*, x_*) \in {}_{\eta}W^0$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$, $\psi \in \Psi$. Существует последовательность

$$\left\{ (\tau_n, x_n) : \tau_n = t_n(t_*) > t_*, \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = t^*, x_n \in {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(\tau_n), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_* \right\}.$$

Согласно определению 3.2 система множеств

$$\left\{ {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_n(t_*) \leq t_i \leq t_n(t^*), t_i \in \Gamma_n \right\}$$

такова, что для точки x_n существует абсолютно непрерывная вектор-функция $\tilde{x}^{(n)} = \tilde{x}^{(n)}[t]$ на $[t_n(t_*), t_n(t^*)]$, удовлетворяющая дифференциальному включению

$$\dot{\tilde{x}}^{(n)}[t] \in F_{\psi}(t_i, \tilde{x}^{(n)}[t_i])$$

почти всюду на $[t_i, t_{i+1})$, $\tilde{x}^{(n)}[t_n(t_*)] = x_n$, $t_n(t_*) \leq t_i \leq t_n(t^*)$, и хотя бы одному из включений

$$\tilde{x}^{(n)}[t_n(t^*)] \in {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_n(t^*)), \quad \tilde{x}^{(n)}[\hat{t}_n] \in M_{\varepsilon_{i^*+1}} \quad (3.2)$$

для некоторого $\hat{t}_n$ из некоторого отрезка $[t_{i^*}, t_{i^*+1}]$ разбиения Γ_n .

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что существует равномерный на $[t_*, t^*]$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(n)}[t]$.

Введем обозначение $\tilde{x}[t] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(n)}[t]$. Учитывая (3.2), компактность множества M и предельное соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq N(n)} \varepsilon_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{N(n)} = 0$, получим, что вектор-функция $\tilde{x}[t]$, $t \in [t_*, t^*]$, удовлетворяет включению $\dot{\tilde{x}} \in F_{\psi}(t, \tilde{x})$ почти всюду на $[t_*, t^*]$ и краевым условиям

$$\tilde{x}[t_*] = x_* \in {}_{\eta}W^0(t_*), \quad \tilde{x}[t^*] = x^* \in {}_{\eta}W^0(t^*),$$

или условиям

$$\tilde{x}[t_*] = x_* \in {}_{\eta}W^0(t_*), \quad \tilde{x}[\hat{t}] \in M,$$

где $\hat{t}$ — некоторый момент из $[t_*, t^*]$.

Учитывая, что приведенные рассуждения верны при произвольном $\psi \in \Psi$, получаем, что (t_*, x_*) удовлетворяют включению

$$x_* \in \bigcap_{\psi \in \Psi} X_{\psi}^{-1}(t_*; t(\psi), \Phi_{t(\psi)}), \quad (3.3)$$

где $t(\psi)$ — некоторый элемент из $[t_*, t^*]$, а $\Phi_{t(\psi)}$ определяется равенством

$$\Phi_{t(\psi)} = \begin{cases} M, & t(\psi) \in [t_*, t^*), \\ M \cup {}_{\eta}W^0(t^*), & t(\psi) = t^*. \end{cases}$$

Из того факта, что точка x_* выбрана в ${}_{\eta}W^0(t_*)$ произвольно, и из включения (3.3) следует

$${}_{\eta}W^0(t_*) \subset \pi(t_*; t^*, {}_{\eta}W^0(t^*)). \quad (3.4)$$

Учитывая также соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{N(n)} = 0$, получаем ${}_{\eta}W^0(\vartheta) \subset M$. Тем самым показано, что ${}_{\eta}W^0$ есть u -стабильный мост и, следовательно, ${}_{\eta}W^0 \subset W^0$, так как W^0 — максимальный u -стабильный мост.

Докажем обратное включение $W^0 \subset {}_{\eta}W^0$. В разбиении Γ_n выберем произвольный момент $t_i < \vartheta$ и рассмотрим множества $W^0(t_i)$ и $W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$. Покажем, что эта пара множеств $W^0(t_i)$, $W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$ такова, что для любой точки $x[t_i] \in W^0(t_i)$ и любого $\psi \in \Psi$ выполняется хотя бы одно из соотношений

$$W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)} \cap \tilde{X}_{\psi}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \neq \emptyset, \quad (3.5)$$

$$M_{\omega(\Delta_i)} \cap \tilde{X}_{\psi}(\hat{t}; t_i, x[t_i]) \neq \emptyset \quad \text{при некотором } \hat{t} \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (3.6)$$

Для этого фиксируем произвольную точку $x[t_i] \in W^0(t_i)$ и $\psi \in \Psi$. Каждая точка $x_{\psi}[t]$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, является значением в момент t некоторого решения $x_{\psi}[\tau]$, $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$, дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_{\psi}(\tau, x), \quad \tau \in [t_i, t_{i+1}],$$

с начальным условием $x_{\psi}[t_i] = x[t_i]$.

Справедливо равенство

$$x_{\psi}[t] = x[t_i] + \int_{t_i}^t f_{\psi}(\tau) d\tau,$$

где $f_{\psi}(\tau) \in F_{\psi}(\tau, x_{\psi}[\tau])$ почти всюду на $[t_i, t_{i+1}]$.

Выполняется также соотношение

$$x_{\psi}[t] \in x[t_i] + (t - t_i)F_{\psi}(t_i, x[t_i])_{\omega^*((1+K)(t-t_i))} = \tilde{X}_{\psi}(t; t_i, x[t_i])_{\omega(t-t_i)}. \quad (3.7)$$

Из того факта, что (3.7) выполняется для любых $\psi \in \Psi$ и $x_{\psi}[t] \in X_{\psi}(t; t_i, x[t_i])$, вытекает включение

$$X_{\psi}(t; t_i, x[t_i]) \subset \tilde{X}_{\psi}(t; t_i, x[t_i])_{\omega(t-t_i)} \quad \text{при любых } \psi \in \Psi, t \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (3.8)$$

Из включения $x[t_i] \in W^0(t_i)$ согласно свойству u -стабильности множества W^0 получаем, что выполняется хотя бы одно из условий

$$\begin{aligned} W^0(t_{i+1}) \cap X_{\psi}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) &\neq \emptyset, \\ M \cap X_{\psi}(\hat{t}; t_i, x[t_i]) &\neq \emptyset \quad \text{при некотором } \hat{t} \in [t_i, t_{i+1}]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из включения (3.8) и соотношений (3.9) вытекает справедливость (3.5) или (3.6). Показано, что для любых $x[t_i] \in W^0(t_i)$, $\psi \in \Psi$, выполняется хотя бы одно из соотношений (3.5), (3.6).

Принимая это во внимание, построим систему множеств $\{{}_{\eta}\widehat{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$, обладающую свойством

$${}_{\eta}\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \pi^{\varepsilon_{i+1}}(t_i; t_{i+1}, {}_{\eta}\widehat{W}^{(n)}(t_{i+1})), \quad t_0 \leq t_i < \vartheta, \quad t_i \in \Gamma_n, \quad (3.10)$$

и удовлетворяющую включениям $W^0(t_i) \subset {}_{\eta}\widehat{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in \Gamma_n$. А именно, положим ${}_{\eta}\widehat{W}^{(n)}(t_i) = W^0(t_i)_{\varepsilon_i}$, $i \in \overline{0, N(n)}$.

Покажем, что ${}_{\eta}\widehat{W}^{(n)}(t_i)$, ${}_{\eta}\widehat{W}^{(n)}(t_{i+1})$ удовлетворяют включению (3.10). Для этого выберем произвольные $x[t_i] \in {}_{\eta}\widehat{W}^{(n)}(t_i)$ и $\psi \in \Psi$. Пусть $x^*[t_i]$ — точка множества $W^0(t_i)$, ближайшая к точке $x[t_i]$. Справедливо неравенство $\|x^*[t_i] - x[t_i]\| \leq \varepsilon_i$. Из включения $x^*[t_i] \in W^0(t_i)$ и того факта, что для любой точки множества $W^0(t_i)$ и любого $\psi \in \Psi$ выполняется хотя бы одно из соотношений (3.5), (3.6), вытекает, что или существует такая точка $x^*[t_{i+1}] = x^*[t_i] + \Delta_i f^*[t_i]$, $f^*[t_i] \in F_{\psi}(t_i, x^*[t_i])$, что

$$x^*[t_{i+1}] \in W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}, \quad (3.11)$$

или существует такая точка $x^*[\hat{t}] = x^*[t_i] + (\hat{t} - t_i)f^*[t_i]$, $f^*[t_i] \in F_{\psi}(t_i, x^*[t_i])$, что

$$x^*[\hat{t}] \in M_{\omega(\Delta_i)}. \quad (3.12)$$

Принимая во внимание условие **(A4)**, выберем вектор $f[t_i] \in F_\psi(t_i, x[t_i])$, удовлетворяющий неравенству

$$\|f[t_i] - f^*[t_i]\| \leq \lambda \|x[t_i] - x^*[t_i]\| \leq \lambda \varepsilon_i$$

или неравенству

$$\|f[t_i] - f_*[t_i]\| \leq \lambda \|x[t_i] - x^*[t_i]\| \leq \lambda \varepsilon_i$$

в зависимости от того, какое из соотношений (3.11), (3.12) выполняется.

Тогда оказывается, что точка $x[t_{i+1}] = x[t_i] + \Delta_i f[t_i]$ отстоит от точки $x^*[t_{i+1}] = x^*[t_i] + \Delta_i f^*[t_i]$ в случае выполнения включения (3.11) не более, чем на величину

$$\|x[t_i] - x^*[t_i]\| + \Delta_i \|f[t_i] - f^*[t_i]\| \leq (1 + \lambda \Delta_i) \varepsilon_i,$$

и в случае выполнения включения (3.12) не более, чем на величину

$$\|x[t_i] - x^*[t_i]\| + \Delta_i \|f[t_i] - f_*[t_i]\| \leq (1 + \lambda \Delta_i) \varepsilon_i.$$

Таким образом, если $x[t_i] \in {}_\eta \widehat{W}^{(n)}(t_i)$, то при любом $\psi \in \Psi$ выполняется либо соотношение

$$W^0(t_{i+1})_{(\omega(\Delta_i) + (1 + \lambda \Delta_i) \varepsilon_{i+1})} \cap \widetilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \neq \emptyset,$$

либо соотношение

$$M_{\varepsilon_{i+1}} \cap \widetilde{X}_\psi(\hat{t}; t_i, x[t_i]) \neq \emptyset \quad \text{при некотором } \hat{t} \in [t_i, t_{i+1}].$$

Тем самым доказано, что система множеств $\{{}_\eta \widehat{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ удовлетворяет включению (3.10). Из определения систем множеств

$$\{{}_\eta \widehat{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}, \quad \{{}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$$

вытекают соотношения

$${}_\eta \widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_i), \quad t_i \in \Gamma_n. \quad (3.13)$$

Докажем, что из соотношений (3.13) следует включение $W^0 \subset {}_\eta W^0$. Для этого зафиксируем произвольную точку $(t_*, x_*) \in W^0$ и $\psi \in \Psi$. В случае $t_* = \vartheta$ выполняется включение $W^0(t_*) \subset {}_\eta W^0(t_*)$.

Рассмотрим случай $t_* < \vartheta$. Тогда верно неравенство $t_* < t_n(t_*) \leq t_* + \Delta^{(n)}$. Из включения $x_* \in W^0(t_*)$ следует, что могут представиться две возможности:

(1) существует бесконечная последовательность $\{t_n(t_*)\}$, для которой

$$W^0(t_n(t_*)) \cap X_\psi(t_n(t_*); t_*, x_*) \neq \emptyset; \quad (3.14)$$

(2) существует лишь конечное число моментов $t_n(t_*)$, для которых выполняется (3.14).

Пусть для точки (t_*, x_*) реализовалась возможность (1). В этом случае существует бесконечная последовательность $\{x[t_n(t_*)]\}$ точек $x[t_n(t_*)]$, удовлетворяющих соотношениям

$$x[t_n(t_*)] \in W^0(t_n(t_*)), \quad \|x[t_n(t_*)] - x_*\| \leq K(t_n(t_*) - t_*).$$

Учитывая равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n(t_*) - t_*) = 0$, получаем, что существует последовательность $\{(t_n(t_*), x[t_n(t_*)])\}$ точек $(t_n(t_*), x[t_n(t_*)])$, удовлетворяющих соотношениям

$$x[t_n(t_*)] \in W^0(t_n(t_*)) \subset {}_\eta \widehat{W}^{(n)}(t_n(t_*)) \subset {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_n(t_*)), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n(t_*), x[t_n(t_*)]) = (t_*, x_*).$$

Тем самым доказано включение $(t_*, x_*) \in {}_\eta W^0$ в случае $t_* < \vartheta$, когда реализовалась возможность (1).

Пусть для точки (t_*, x_*) , $t_* < \vartheta$, реализовалась возможность (2). В этом случае существует бесконечная последовательность $\{x[t^{(n)}]\}$, $t^{(n)} \in [t_*, t_n(t_*)]$, $n = 1, 2, \dots$, точек $x[t^{(n)}]$, удовлетворяющих соотношениям

$$x[t^{(n)}] \in M, \quad \|x[t^{(n)}] - x_*\| \leq K(t^{(n)} - t_*).$$

Учитывая равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} (t^{(n)} - t_*) = 0$ и замкнутость множества M , а также включения $x[t^{(n)}] \in M$, $n = 1, 2, \dots$, получаем $x_* \in M$. Очевидно, что если взять в качестве последовательности $\{x[t_n(t_*)]\}$ стационарную последовательность $\{x[t_n(t_*)] = x_*\}$, то получим

$$x[t_n(t_*)] \in M \subset W^0(t_n(t_*)) \subset {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_n(t_*)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тем самым доказано включение $(t_*, x_*) \in {}_\eta W^0$ в случае $t_* < \vartheta$, когда реализовалась возможность (2). Вместе с тем установлено включение $W^0 \subset {}_\eta W^0$. Теорема 3.1 доказана. $\square$

В теореме 3.1 утверждается, что какова бы ни была б.м.в. $\eta(\cdot)$, предел, который дают аппроксимирующие системы множеств $\{{}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$, — один и тот же, множество W^0 . Здесь предел понимается в смысле определения 3.3.

Полагаем $0 = \eta^0(\Delta) \equiv 0$, $\Delta \geq 0$.

Нетрудно видеть, что две аппроксимирующие системы

$$\{{}_0 \widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}, \quad \{{}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\},$$

отвечающие разбиению Γ_n и функциям $0 = \eta^0(\cdot)$, $\eta = \eta(\cdot)$, связаны соотношением

$${}_0 \widetilde{W}^{(n)}(t_i) \subset {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_i), \quad t_i \in \Gamma_n. \quad (3.15)$$

Однако обе эти аппроксимирующие системы множеств неудобны для вычислений, поскольку для вычисления, например, множества $\{{}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_i)\}$ в $\mathbb{R}^m$ необходимо вычислить несчетное число множеств $\widetilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t, M_t^{\varepsilon_{i+1}}({}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1})))$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $\psi \in \Psi$.

Рассмотрим вопрос о конструировании таких систем множеств $\{\overline{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$, которые достаточно эффективно вычисляются и аппроксимируют мост W^0 , т.е. в пределе при $n \rightarrow \infty$, $\Delta^{(n)} \rightarrow 0$ дают множество W^0 . Эти множества будем строить так, чтобы они удовлетворяли включениям

$${}_0 \widetilde{W}^{(n)}(t_i) \subset \overline{W}^{(n)}(t_i) \subset {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_i), \quad t_i \in \Gamma_n. \quad (3.16)$$

Учитывая включения (3.16) и теорему 3.1, получаем, что система множеств $\{\overline{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ в пределе при $n \rightarrow \infty$, $\Delta^{(n)} \rightarrow 0$ также дает множество W^0 . Здесь предел понимается в том же смысле, что и для системы множеств $\{{}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_i), t_i \in \Gamma_n\}$.

Следуя [8], сначала исследуем один случай задачи о сближении, который характеризуется тем, что терминальное множество M представимо в виде объединения замкнутых шаров различных, вообще говоря, радиусов, ограниченных снизу некоторым положительным числом R_* .

Случай I. Пусть M — компакт в $\mathbb{R}^m$, представимый в виде $M = \bigcup_{x_0 \in X_0} O_{R(x_0)}(x_0)$, $R(x_0) \geq R_*$, $X_0 \subset \mathbb{R}^m$, где $O_{R(x_0)}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| \leq R(x_0)\}$.

Рассмотрим задачу построения множества $\widetilde{W}^{(n)}(t_i)$, считая, что множество $\widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1})$ уже построено. Здесь для простоты введено обозначение $\widetilde{W}^{(n)}(t_i) = {}_0 \widetilde{W}^{(n)}(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, N(n)$.

Согласно определению 3.2 включение $x[t_i] \in \widetilde{W}^{(n)}(t_i)$ справедливо тогда и только тогда, когда для любого $\psi \in \Psi$

$$\widetilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \cap \widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1}) \neq \emptyset \quad (3.17)$$

или

$$\widetilde{X}_\psi(t^*; t_i, x[t_i]) \cap M_{\varepsilon_{i+1}}^0 \neq \emptyset \quad \text{при некотором } t^* \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (3.18)$$

Допустим, что при некотором $\psi \in \Psi$ выполняется (3.18). Относительно момента t^* , входящего в условие (3.18), представляются три возможности:

- (1) $t^* = t_i$, т.е. $x[t_i] \in M_{\varepsilon_{i+1}}^0$;
- (2) $t^* \neq t_i$, $t^* = t_{i+1}$, т.е. $x[t_i] \notin M_{\varepsilon_{i+1}}^0$, $\widetilde{X}_\psi(t_{i+1}, t_i, x[t_i]) \cap M_{\varepsilon_{i+1}}^0 \neq \emptyset$;
- (3) $t^* \neq t_i$, $t^* \neq t_{i+1}$, т.е. $x[t_i] \notin M_{\varepsilon_{i+1}}^0$, $\widetilde{X}_\psi(t_{i+1}, t_i, x[t_i]) \cap M_{\varepsilon_{i+1}}^0 = \emptyset$.

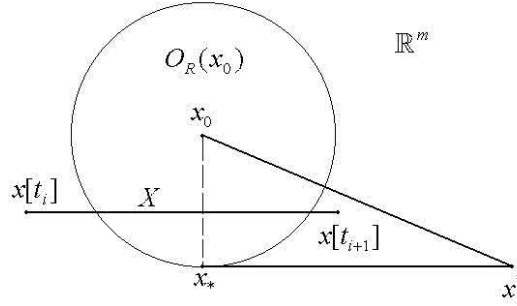


Рис. 1

В случае, когда реализовалась возможность (3), найдется точка $x[t_{i+1}] \in \tilde{X}_\psi(t_{i+1}, t_i, x[t_i])$ такая, что отрезок $X = [x[t_i], x[t_{i+1}]]$ пересекается с $M_{\varepsilon_{i+1}^0}$ в точке $x[t^*] = x[t_i] + (t^* - t_i)f^0$, где f^0 — некоторый вектор из $F_\psi(t_i, x[t_i])$. Отсюда следует, что существует такая точка $x_0 \in X_0$, что $x[t^*] \in O_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| \leq R\}$, где $R = R(x_0) + \varepsilon_{i+1}^0$.

Таким образом, найдется замкнутый шар $O_R(x_0) \subset M_{\varepsilon_{i+1}^0}$ радиуса $R = R(x_0) + \varepsilon_{i+1}^0 \geq R_* + \varepsilon_{i+1}^0 > 0$ с центром в некоторой точке $x_0 \in X_0 \subset \mathbb{R}^m$, пересекающийся с отрезком X и не содержащий крайних точек $x[t_i], x[t_{i+1}]$ этого отрезка (см. рис. 1).

Из центра x_0 шара $O_R(x_0)$ проведем луч в сторону отрезка X , перпендикулярный этому отрезку. Из точки x_* пересечения этого луча с границей шара $O_R(x_0)$ проведем в сторону точки $x[t_{i+1}]$ отрезок $[x_*, x^*]$, конгруэнтный отрезку X , так что $x^* - x_* = x[t_{i+1}] - x[t_i]$.

Нетрудно видеть, что $\|x_0 - x[t_{i+1}]\| \leq \|x_0 - x^*\|$ и, следовательно,

$$\rho(x[t_{i+1}], M_{\varepsilon_{i+1}^0}) \leq \rho(x[t_{i+1}], O_R(x_0)) \leq \rho(x^*, O_R(x_0)), \quad (3.19)$$

где $\rho(x, U)$ — расстояние в пространстве $\mathbb{R}^m$ от x до множества U .

Оценим сверху величину $\rho(x^*, O_R(x_0))$. Учитывая соотношения

$$\rho(x^*, O_R(x_0)) = (R^2 + \|x_* - x^*\|^2)^{1/2} - R, \quad \|x_* - x^*\| \leq K\Delta_i,$$

получаем для величины $\rho(x^*, O_R(x_0))$ оценку сверху:

$$\rho(x^*, O_R(x_0)) \leq (R^2 + K^2\Delta_i^2)^{1/2} - R \leq \frac{1}{2R}K^2\Delta_i^2.$$

Учитывая эту оценку, из неравенства (3.19) находим

$$\rho(x[t_{i+1}], M_{\varepsilon_{i+1}^0}) \leq \frac{K^2}{2R}\Delta_i^2. \quad (3.20)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\eta = \eta(\Delta) = \frac{K^2}{2R}\Delta^2, \quad \Delta > 0. \quad (3.21)$$

Таким образом, при выполнении для некоторого $\psi \in \Psi$ соотношения (3.18) в случае реализации возможности (3) найдется точка $x[t_{i+1}] \in \tilde{X}_\psi(t_{i+1}, t_i, x[t_i])$, удовлетворяющая неравенству $\rho(x[t_{i+1}], M_{\varepsilon_{i+1}^0}) \leq \eta(\Delta_i)$.

Отсюда вытекает, что выполнение при некотором $\psi \in \Psi$ соотношения (3.18) в случае реализации возможности (3) влечет соотношение

$$M_{\varepsilon_{i+1}^0 + \eta(\Delta_i)} \cap \tilde{X}_\psi(t_{i+1}, t_i, x[t_i]) \neq \emptyset. \quad (3.22)$$

Заметим теперь, что

$$\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^0 = \eta(\Delta_i) + (1 + \lambda\Delta_{i-1})(\varepsilon_i - \varepsilon_i^0), \quad i = 0, 1, \dots, N(n) - 1,$$

причем $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^0 = 0$.

Отсюда следует, что при любом $i = 0, 1, \dots, N(n) - 1$ выполняется неравенство $\varepsilon_i - \varepsilon_i^0 \geq 0$. Принимая во внимание это неравенство, получаем

$$\varepsilon_{i+1}^0 + \eta(\Delta_i) \leq \varepsilon_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N(n) - 1.$$

Из (3.22) и предыдущего неравенства следует

$$M_{\varepsilon_{i+1}} \cap \tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \neq \emptyset. \quad (3.23)$$

Итак, если при некотором $\psi \in \Psi$ выполняется (3.18), то выполняется $x[t_i] \in M_{\varepsilon_{i+1}}$ или $\tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \cap M_{\varepsilon_{i+1}} \neq \emptyset$.

Окончательно получаем, что если $x[t_i] \in \widetilde{W}^{(n)}(t_i)$, то

$$x[t_i] \in M_{\varepsilon_{i+1}^0} \subset M_{\varepsilon_{i+1}} \quad (3.24)$$

или

$$(\widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1}) \cup M_{\varepsilon_{i+1}}) \cap \tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \neq \emptyset \quad (3.25)$$

для любого $\psi \in \Psi$. Здесь в выражение $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i+1}(\eta(\cdot))$ подставлена функция $\eta(\cdot)$, определяемая равенством (3.21).

Зададим теперь систему множеств $\{\overline{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)}) &= {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}), \\ \overline{W}^{(n)}(t_i) &= M_{\varepsilon_{i+1}} \cup \tilde{\pi}(t_i; t_{i+1}, \overline{W}^{(n)}(t_{i+1}) \cup M_{\varepsilon_{i+1}}), \quad i = 0, 1, \dots, N(n) - 1, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где

$$\tilde{\pi}(t_i; t_{i+1}, W) = \left\{ x[t_i] \in \mathbb{R}^m : W \cap \tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \neq \emptyset, \psi \in \Psi \right\}.$$

Нетрудно видеть, что справедливы включения

$$\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \subset \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \subset {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}). \quad (3.27)$$

Докажем, что справедливы включения

$$\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}) \subset \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}) \subset {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}). \quad (3.28)$$

Действительно, пусть $x[t_{N(n)-1}] \in \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})$. Тогда на основании соотношений (3.24), (3.25), в которых принято $i = N(n) - 1$, получаем

$$x[t_{N(n)-1}] \in M_{\varepsilon_{N(n)}}$$

или

$$x[t_{N(n)-1}] \in \tilde{\pi}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)}}).$$

Значит, из включения $x[t_{N(n)-1}] \in \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})$ следует

$$x[t_{N(n)-1}] \in M_{\varepsilon_{N(n)}} \quad (3.29)$$

или

$$x[t_{N(n)-1}] \in \tilde{\pi}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)}}). \quad (3.30)$$

Включение $\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}) \subset \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})$ тем самым установлено.

Пусть теперь $x[t_{N(n)-1}] \in \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})$. Тогда выполняется (3.29) или (3.30).

Если $x[t_{N(n)-1}] \in M_{\varepsilon_{N(n)}}$, то на основании включения $M_{\varepsilon_{N(n)}} \subset {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})$ получаем $x[t_{N(n)-1}] \in {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})$.

Если $x[t_{N(n)-1}] \in \tilde{\pi}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)}})$, то, учитывая включение

$$\tilde{\pi}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)}}) \subset \pi^{\varepsilon_{N(n)}}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)}})$$

и равенство

$$\overline{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)}} = {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)}} = {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}),$$

получаем

$$x[t_{N(n)-1}] \in \pi^{\varepsilon_{N(n)}}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)})) = {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}).$$

Включение $\overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}) \subset {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})$ вместе с тем установлено. Включения (3.28) доказаны. Теперь докажем включения

$$\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2}) \subset \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-2}) \subset {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2}). \quad (3.31)$$

Действительно, пусть $x[t_{N(n)-2}] \in \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2})$. Тогда

$$x[t_{N(n)-2}] \in M_{\varepsilon_{N(n)-1}}$$

или

$$x[t_{N(n)-2}] \in \widetilde{\pi}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)-1}}).$$

Отсюда, учитывая (3.28), получаем, что если $x[t_{N(n)-2}] \in \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2})$, то

$$x[t_{N(n)-2}] \in M_{\varepsilon_{N(n)-1}} \quad (3.32)$$

или

$$x[t_{N(n)-2}] \in \widetilde{\pi}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)-1}}). \quad (3.33)$$

Включение $\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2}) \subset \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-2})$ установлено.

Пусть теперь $x[t_{N(n)-2}] \in \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-2})$. Тогда выполняется (3.32) или (3.33).

Если $x[t_{N(n)-2}] \in M_{\varepsilon_{N(n)-1}}$, то на основании включения $M_{\varepsilon_{N(n)-1}} \subset {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2})$ получаем $x[t_{N(n)-2}] \in {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2})$.

Если $x[t_{N(n)-2}] \in \widetilde{\pi}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)-1}})$, то, учитывая включения

$$\begin{aligned} & \widetilde{\pi}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)-1}}) \subset \widetilde{\pi}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}) \cup M_{\varepsilon_{N(n)-1}}) \\ & \subset \widetilde{\pi}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})) \subset \pi^{\varepsilon_{N(n)-1}}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})) = {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2}), \end{aligned}$$

получаем $x[t_{N(n)-2}] \in {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2})$.

Включение $\overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-2}) \subset {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2})$ вместе с тем доказано. Включения (3.31) доказаны.

Применяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, нетрудно установить, что если при некотором $i \in \overline{1, N(n)-3}$ выполняются включения

$$\widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1}) \subset \overline{W}^{(n)}(t_{i+1}) \subset {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1}),$$

то

$$\widetilde{W}^{(n)}(t_i) \subset \overline{W}^{(n)}(t_i) \subset {}_{\eta}\widetilde{W}^{(n)}(t_i). \quad (3.34)$$

Тогда, принимая во внимание последнее утверждение и включения (3.27), (3.28), (3.31), получаем, что (3.34) выполняется для всех $i \in \overline{0, N(n)}$.

Система множеств $\{\overline{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$, определяемая равенствами (3.26), дает в пределе при $n \rightarrow \infty$, $\Delta^{(n)} \rightarrow 0$ множество W^0 .

Из соотношений (3.26) следует, что

$$M_{\varepsilon_i} \subset \overline{W}^{(n)}(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N(n) - 1,$$

и, кроме того, согласно определению множества $\overline{W}^{(n)}(t_{N(n)})$, имеет место равенство $M_{\varepsilon_{N(n)}} = \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)})$. Поэтому справедливы равенства

$$\overline{W}^{(n)}(t_{i+1}) \cup M_{\varepsilon_{i+1}} = \overline{W}^{(n)}(t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N(n) - 1,$$

с помощью которых можно переписать соотношения (3.26) в более простом виде:

$$\begin{aligned}\overline{W}^{(n)}(t_{N(n)}) &= \eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}), \\ \overline{W}^{(n)}(t_i) &= M_{\varepsilon_{i+1}} \cup \widetilde{\pi}(t_i; t_{i+1}, \overline{W}^{(n)}(t_{i+1})), \quad i = 0, 1, \dots, N(n) - 1.\end{aligned}$$

Каждое из множеств $\overline{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in \Gamma_n$, представляет собой объединение некоторой окрестности $M_{\varepsilon_{i+1}}$ терминального множества M и множества стабильного поглощения $\widetilde{\pi}(t_i; t_{i+1}, \overline{W}^{(n)}(t_{i+1}))$ в аппроксимационной игре сближения-уклонения на $[t_i, t_{i+1}]$ с целью $\overline{W}^{(n)}(t_{i+1})$. Это важное обстоятельство значительно упрощает приближенное вычисление моста W^0 . В рассмотренном случае I вычисление множеств $\overline{W}^{(n)}(t_i)$ можно осуществить приближенно достаточно эффективно на ЭВМ для некоторых классов конфликтно-управляемых систем на плоскости, в частности, — для систем вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + B(t, x)u + C(t, x)v, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

где $u \in P$, $v \in Q$, P и Q — выпуклые многоугольники в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим теперь случай, когда множество Ψ конечно, а терминальное множество M не стеснено какими-либо ограничениями, кроме компактности.

Случай II. M — произвольный компакт в $\mathbb{R}^m$. Полагаем, что задано некоторое семейство отображений $\{F_\psi : D \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}\}$, отвечающее некоторому конечному множеству $\Psi = \{\psi^\alpha : \alpha = 1, \dots, \rho\}$ и удовлетворяющее условиям **(A1)–(A4)**.

Предположим, что выбрано некоторое разбиение $\Gamma_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{N(n)} = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$. Как и в случае I, будем обозначать конструируемые множества символом $\overline{W}^{(n)}(t_i)$, $i = 0, N(n)$.

Зафиксируем некоторый отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения Γ_n .

Считая, что множество $\overline{W}^{(n)}(t_{i+1})$ уже построено, осуществим разбиение $\Gamma_n^{(i)}$ отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ моментами $t_i^0 = t_i$, $t_i^1, \dots, t_i^{N(n)} = t_{i+1}$ таким образом, чтобы диаметр $\Delta_i^{(n)}$ разбиения $\Gamma_n^{(i)}$ удовлетворял равенствам

$$\Delta_i^{(n)} = t_i^{k+1} - t_i^k = \frac{t_{i+1} - t_i}{N(n)}, \quad (3.35)$$

где $k = 0, 1, \dots, N(n) - 1$, $N(n)$ — число отрезков разбиения Γ_n . Таким образом, $\Gamma_n^{(i)}$ — разбиение отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ на равные промежутки времени.

При всех $i \in 0, N(n) - 1$ выполняется неравенство

$$\Delta_i^{(n)} \leq \frac{t_{i+1} - t_i}{\vartheta - t_0} \Delta^{(n)}. \quad (3.36)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\eta = \eta(\Delta) = \frac{K \Delta^{(n)}}{\vartheta - t_0} \Delta, \quad \Delta \geq 0, \quad (3.37)$$

а также множество

$$\Psi \times \widehat{\Gamma}_n^{(i)} = \left\{ (\psi^\alpha, t_i^k) : \alpha = 1, 2, \dots, \rho; k = 0, 1, \dots, N(n) - 1 \right\}.$$

Постоянная K определена в разделе 1. Функция $\eta = \eta(\Delta)$, $\Delta \geq 0$, такова, что функция $\eta(\Delta^{(n)}) = \frac{K \Delta^{(n)^2}}{\vartheta - t_0}$ есть бесконечно малая величина по сравнению с $\Delta^{(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Полагаем при этом

$$W^{\alpha, k}(t_i) = \begin{cases} \widetilde{X}_{\psi^\alpha}^{-1}(t_i; t_i^k, M_{\varepsilon_{i+1}}), & (\psi^\alpha, t_i^k) \in \Psi \times \widehat{\Gamma}_n^{(i)}, \\ \widetilde{X}_{\psi^\alpha}^{-1}(t_i; t_i^k, M_{\varepsilon_{i+1}} \cup \overline{W}^{(n)}(t_{i+1})), & \alpha = 1, 2, \dots, \rho, k = N(n). \end{cases}$$

Здесь в выражение $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i+1}(\eta(\cdot))$ подставлена функция, определяемая равенством (3.37).

Зададим систему множеств $\{\overline{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ рекуррентными соотношениями

$$\overline{W}^{(n)}(t_{N(n)}) = M_{\varepsilon_{N(n)}^0}, \quad \overline{W}^{(n)}(t_i) = \bigcap_{1 \leq \alpha \leq \rho} \bigcup_{0 \leq k \leq N(n)-1} W^{\alpha, k}(t_i). \quad (3.38)$$

Докажем, что выполняются включения

$$\pi_{\varepsilon_{i+1}^0}(t_i; t_{i+1}, \overline{W}^{(n)}(t_{i+1})) \subset \overline{W}^{(n)}(t_i) \subset \pi^{\varepsilon_{i+1}}(t_i; t_{i+1}, \overline{W}^{(n)}(t_{i+1})). \quad (3.39)$$

Допустим, что $x[t_i] \in \pi^{\varepsilon_{i+1}^0}(t_i; t_{i+1}, \overline{W}^{(n)}(t_{i+1}))$. Тогда согласно определению множества $\pi^{\varepsilon_{i+1}^0}(t_i; t_{i+1}, \overline{W}^{(n)}(t_{i+1}))$ для любого $\psi^\alpha \in \Psi$ выполняется

$$\tilde{X}_{\psi^\alpha}(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \cap \overline{W}^{(n)}(t_{i+1}) \neq \emptyset \quad (3.40)$$

или

$$\tilde{X}_{\psi^\alpha}(t^\alpha; t_i, x[t_i]) \cap M_{\varepsilon_{i+1}^0} \neq \emptyset \quad (3.41)$$

при некотором $t^\alpha \in [t_i, t_{i+1}]$.

Рассмотрим случай, когда для точки $x[t_i]$ выполняется соотношение (3.41). Полагаем, что $[t_i^k, t_i^{k+1}]$ — тот отрезок разбиения $\Gamma_n^{(i)}$, которому принадлежит t^α .

В силу (3.41) найдется вектор $f_{\psi^\alpha} \in F_{\psi^\alpha}(t_i, x[t_i])$ такой, что

$$x[t_i] + (t^\alpha - t_i)f_{\psi^\alpha} \in M_{\varepsilon_{i+1}^0}. \quad (3.42)$$

Поскольку вектор $x[t_i] + (t^\alpha - t_i)f_{\psi^\alpha}$ удовлетворяет (3.42), то вектор

$$x[t_i] + (t_i^{k+1} - t_i)f_{\psi^\alpha} = x[t_i] + (t^\alpha - t_i)f_{\psi^\alpha} + (t_i^{k+1} - t^\alpha)f_{\psi^\alpha}$$

удовлетворяет включению

$$x[t_i] + (t_i^{k+1} - t_i)f_{\psi^\alpha} \in M_{(\varepsilon_{i+1}^0 + K(t_i^{k+1} - t^\alpha))} \subset M_{(\varepsilon_{i+1}^0 + K(t_i^{k+1} - t_i^k))} \subset M_{(\varepsilon_{i+1}^0 + K\Delta_i^{(n)})}.$$

Учитывая, что

$$K\Delta_i^{(n)} \leq \frac{K\Delta^{(n)}}{\vartheta - t_0} \Delta_i = \eta(\Delta_i),$$

получаем окончательное включение

$$x[t_i] + (t_i^{k+1} - t_i)f_{\psi^\alpha} \in M_{(\varepsilon_{i+1}^0 + \eta(\Delta_i))}. \quad (3.43)$$

Так же как и в случае I, выполняется неравенство

$$\varepsilon_{i+1}^0 + \eta(\Delta_i) \leq \varepsilon_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N(n) - 1.$$

Из (3.43) и этого неравенства следует

$$x[t_i] + (t_i^{k+1} - t_i)f_{\psi^\alpha} \in M_{\varepsilon_{i+1}},$$

т.е.

$$\tilde{X}_{\psi^\alpha}(t_i^{k_\alpha}; t_i, x[t_i]) \cap M_{\varepsilon_{i+1}} \neq \emptyset, \quad (3.44)$$

где введено обозначение $k_\alpha = k + 1$.

Таким образом, если

$$x[t_i] \in \pi^{\varepsilon_{i+1}^0}(t_i; t_{i+1}, \overline{W}^{(n)}(t_{i+1})),$$

то для любого $\psi^\alpha \in \Psi$ выполняется

$$x[t_i] \in \tilde{X}_{\psi^\alpha}^{-1}(t_i; t_{i+1}, \overline{W}^{(n)}(t_{i+1})) \quad \text{или} \quad x[t_i] \in \tilde{X}_{\psi^\alpha}^{-1}(t_i; t_i^{k_\alpha}, M_{\varepsilon_{i+1}}) \quad (3.45)$$

при некотором $k_\alpha \in \overline{0, N(n)}$.

Отсюда следует, что если

$$x[t_i] \in \pi^{\varepsilon_{i+1}^0}(t_i; t_{i+1}, \overline{W}^{(n)}(t_{i+1})),$$

то $x[t_i] \in \overline{W}^{(n)}(t_i)$.

С другой стороны, согласно определению множества $\overline{W}^{(n)}(t_i)$ справедливо включение

$$\overline{W}^{(n)}(t_i) \subset \pi^{\varepsilon_{i+1}}(t_i; t_{i+1}, \overline{W}^{(n)}(t_{i+1})). \quad (3.46)$$

Таким образом, включения (3.39) доказаны.

Докажем теперь справедливость включений

$$\widetilde{W}^{(n)}(t_i) \subset \overline{W}^{(n)}(t_i) \subset {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_i), \quad t_i \in \Gamma_n. \quad (3.47)$$

Действительно, выполняются включения

$$\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \subset \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \subset {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}). \quad (3.48)$$

Отсюда, учитывая (3.39) при $i = N(n) - 1$, получаем соотношения

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}) &= \pi^{\varepsilon_{N(n)}}^{(0)}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)})) \subset \\ &\subset \pi^{\varepsilon_{N(n)}}^{(0)}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)})) \subset \\ &\subset \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}) \subset \pi^{\varepsilon_{N(n)}}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)})) \subset \\ &\subset \pi^{\varepsilon_{N(n)}}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)})) = {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Итак, при $i = N(n) - 1$ включения (3.47) установлены. Докажем, что они выполняются при $i = N(n) - 2$. Действительно, из (3.39), (3.49) следует

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2}) &= \pi^{\varepsilon_{N(n)-1}}^{(0)}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})) \subset \\ &\subset \pi^{\varepsilon_{N(n)-1}}^{(0)}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})) \subset \\ &\subset \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-2}) \subset \pi^{\varepsilon_{N(n)-1}}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, \overline{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})) \subset \\ &\subset \pi^{\varepsilon_{N(n)-1}}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-1})) = {}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)-2}). \end{aligned}$$

Включения (3.47) установлены для $i = N(n) - 2$.

Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем, что если соотношения (3.47) выполняются при некотором $i \in \overline{1, N(n) - 2}$, то они выполняются при значении i , меньшем на единицу. Тогда, применяя метод математической индукции, заключаем, что соотношения (3.47) выполняются при любом $i \in \overline{0, N(n) - 1}$.

Рассмотрим величину $\sigma(n) = \max_{i \in \overline{0, N(n)}} \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\eta(\cdot))$. Для нее справедлива следующая оценка сверху:

$$\begin{aligned} \sigma(n) = \varepsilon_{N(n)} &\leq e^{\lambda(\vartheta - t_0)} \sum_{i=0}^{N(n)-1} (\omega(\Delta_i) + \eta(\Delta_i)) \leq \\ &\leq e^{\lambda(\vartheta - t_0)} \sum_{i=0}^{N(n)-1} (\Delta_i \omega^*((1+K)\Delta^{(n)}) + \frac{K\Delta^{(n)}}{\vartheta - t_0} \Delta_i) = \\ &= e^{\lambda(\vartheta - t_0)} (\vartheta - t_0) \left\{ \omega^*((1+K)\Delta^{(n)}) + \frac{K\Delta^{(n)}}{\vartheta - t_0} \right\}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание эту оценку и теорему 3.1, получаем, что система множеств $\{{}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ в пределе при $n \rightarrow \infty$, $\Delta^{(n)} \rightarrow 0$ дает, так же как и система $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$, мост W^0 .

Из соотношений (3.47) и сходимости систем множеств $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ и $\{{}_\eta \widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ к W^0 при $n \rightarrow \infty$, $\Delta^{(n)} \rightarrow 0$ получаем, что $\{\overline{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ сходится к W^0 .

Так же как и система множеств $\{\overline{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$, построенная в случае I, эта система может быть использована при приближенных вычислениях множества W^0 .

4. РАЗНОСТНЫЙ ОПЕРАТОР ПРИ ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

Изложим вывод разностного оператора, применяемого для приближенного построения функции цены дифференциальной игры сближения-уклонения на конечном промежутке времени.

Пусть поведение конфликтно-управляемой системы на отрезке времени описывается дифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= g(t, x) + A(t, x)u + B(t, x)v, \\ x \in \mathbb{R}^m, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь управляющий вектор u выбирается из выпуклого компакта P , управляющий вектор v — из выпуклого компакта Q . На правую часть $f \equiv g(t, x) + A(t, x)u + B(t, x)v$ дифференциального уравнения (на вектор-функцию g и матрицы A и B), как и прежде, накладываются условия **(А)** и **(В)**, обеспечивающие существование решения $x = x[t]$, $t \in [t_0, \vartheta]$, динамической системы. Качество управляемого процесса оценивается функционалом

$$\gamma(x[\cdot]) = \min_{t \in [t_0, \vartheta]} \rho(x[t]), \quad (4.2)$$

где $\rho = \rho(x)$ — функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица.

Игрок, распоряжающийся управлением u , стремится минимизировать функционал, второй игрок, распоряжающийся управлением v , стремится его максимизировать. Дифференциальная игра (4.1), (4.2) считается решенной, если построена ее функция цены $\phi = \phi(t, x)$, $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ (см. [2]).

Указанная здесь постановка игровой задачи является естественным обобщением и расширением постановки задачи, изложенной в разделе 1. Построение множества позиционного поглощения W^0 в задаче сближения с терминальным множеством M для динамической системы (4.1) означает построение множества уровня (множества Лебега) функции цены дифференциальной игры со специальным образом подобранной терминальной функцией $\rho = \rho(x)$. Следует отметить и другую важную зависимость. Задача построения надграфика

$$\text{epi } \phi = \{(t, x, \alpha) \in \mathbb{R}^{m+2} : (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m, \alpha \geq \phi(t, x)\}$$

эквивалентна задаче построения множества позиционного поглощения $W^0 \subset \mathbb{R}^{m+2}$ в игровой задаче сближения не позже момента $t = \vartheta$ с целевым множеством $M = \text{epi } \rho$, т.е. с надграфиком терминальной функции, для расширенной динамической системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= g(t, x) + A(t, x)u + B(t, x)v, \quad \frac{dx_{m+1}}{dt} = 0, \\ x \in \mathbb{R}^m, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь множества P и Q те же, что и в дифференциальной игре (4.1), (4.2). Нельзя обойти вниманием и тот факт, что функция цены $\phi = \phi(t, x)$ дифференциальной игры (4.1), (4.2) является минимаксным решением уравнения в частных производных первого порядка типа Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H^0(t, x, \nabla \phi) = 0,$$

удовлетворяющим неравенству $\phi(t, x) \leq \rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$. Здесь

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_m} \right)$$

— градиент функции $\phi = \phi(t, x)$ по фазовым переменным,

$$H^0(t, x, l) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle l, g(t, x) + A(t, x)u + B(t, x)v \rangle$$

— гамильтониан динамической системы (4.1), записанный для удобства дальнейших рассуждений в минимаксной форме. Подробно взаимосвязь конструкции теории позиционных дифференциальных игр и теории обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка изложена в [13].

Рассмотрим задачу построения надграфика функции цены дифференциальной игры (4.1), (4.2), или, что то же самое, задачу о построении множества позиционного поглощения для дифференциальной игры сближения-уклонения на отрезке $[t_0, \vartheta]$ с целевым множеством $M = \text{epi } \rho$ для расширенной динамической системы (4.3). Для того чтобы удовлетворить условиям теоремы 3.1 о сходимости последовательности множеств, определяемой с помощью аппроксимирующего оператора стабильного поглощения, приведенного в разделе 3, к множеству позиционного поглощения в задаче сближения для расширенной динамической системы (4.3), локализуем элементы разрешающей конструкции.

Пусть произвольно взяты и зафиксированы $\hat{x} \in \mathbb{R}^m$, $\hat{r} > 0$. Шар $O_{\hat{r}}(\hat{x}) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - \hat{x}\| \leq \hat{r}\}$ примем в качестве целевого множества в задаче сближения-уклонения не позже момента ϑ , когда динамика игры определяется дифференциальным уравнением (4.1). Множество позиционного поглощения для этой задачи обозначим D , $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$. Будем полагать, что число $\hat{r}$ выбрано настолько большим, что сечение $D(t)$ множества D в начальный момент $t = t_0$ не пусто. Построение множества D можно осуществить, опираясь на теорему 3.1, но в данном случае важен сам факт существования непустого компактного множества D из $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$. В дальнейшем сосредоточимся на построении надграфика

$$\text{epi } \phi_D = \{(t, x, \alpha) \in \mathbb{R}^{m+2} : (t, x) \in D, \alpha \geq \phi(t, x)\}$$

сужения функции цены на множество D . Заметим, что $\text{epi } \phi_D$ является множеством позиционного поглощения для расширенной динамической системы (4.3), когда целевое множество представляет собой надграфик

$$M = \text{epi } \rho_{O_{\hat{r}}(\hat{x})} = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in O_{\hat{r}}(\hat{x}), \alpha \geq \rho(x)\} \quad (4.4)$$

сужения целевой функции ρ на шар $O_{\hat{r}}(\hat{x})$.

Приняв $\Phi = O_K(0) \subset \mathbb{R}^m$, где

$$K = 2 \sup \left\{ \|g(t, x) + A(t, x)u + B(t, x)v\| : (t, x) \in D, u \in P, v \in Q \right\},$$

введем в рассмотрение многозначное отображение

$$(t, x, s) \rightarrow F_b(t, x, s) : D \times S \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}, \quad (4.5)$$

где $F_b(t, x, s) = \{f \in \Phi : \langle s, f \rangle \geq H^0(t, x, s)\}$ — сегменты шара Φ .

Указанное отображение удовлетворяет условиям **(A1b)–(A4b)**, которые аналогичны условиям **(A1)–(A4)**:

(A1b) для любых $(t, x, s) \in D \times S$ множество $F_b(t, x, s)$ выпукло, замкнуто и вложено в Φ ;

(A2b) для любых $(t, x, s) \in D \times S$ выполняется равенство

$$\max_{q \in S} \min_{f \in F_b(t, x, s)} \langle s, f \rangle = H^0(t, x, s);$$

(A3b) существует такая функция $\omega^*(\delta)$ ($\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), что

$$d(F_b(t^*, x^*, s), F_b(t_*, x_*, s)) \leq \omega^*(|t^* - t_*| + \|x^* - x_*\|),$$

где $(t^*, x^*), (t_*, x_*) \in D$, $s \in S$;

(A4b) существует константа $\lambda_F > 0$ такая, что

$$d(F_b(t, x^*, s), F_b(t, x_*, s)) \leq \lambda_F \|x^* - x_*\|$$

для любых $(t, x^*), (t, x_*) \in D$ и любого $s \in S$.

Аппроксимирующий оператор стабильного поглощения, отвечающий этому отображению, построенный по правилам, изложенным в разделе 3, порождает систему множеств, аппроксимирующую множество позиционного поглощения в задаче сближения к моменту $t = \vartheta$ с замкнутым терминальным множеством M , когда динамика игры определяется уравнением (4.1).

Введем корректные (с точки зрения согласованности с имеющимися в теории позиционных дифференциальных игр теоремами) формы оператора стабильного поглощения для расширенной динамической системы (4.3).

Пусть

$$\begin{aligned} z &= (x, x_{m+1}), & \text{где } x \in \mathbb{R}^m, x_{m+1} \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{f}(t, z, u, v) &= (f(t, x, u, v), 0), & \text{где } f(t, x, u, v) = g(t, x) + A(t, x)u + B(t, x)v. \end{aligned}$$

В принятых обозначениях дифференциальную игру (4.3), (4.4) запишем в краткой форме:

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{f}(t, z, u, v), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q, \quad (4.6)$$

$$M = \text{epi } \rho_{O_{\hat{x}}(\hat{x})}. \quad (4.7)$$

Введем следующие обозначения:

$$S_{m+1} = \{l \in \mathbb{R}^{m+1} : \|l\| = 1\}, \quad \Phi^c = \Phi \times [-c, c], \quad \text{параметр } c \geq 0.$$

По построению $\Phi^c \subset \mathbb{R}^{m+1}$ представляет собой m -мерный шар радиуса K в частном случае, когда параметр $c = 0$. В общем же случае, когда $c > 0$, Φ^c — цилиндр высоты $2c$, в основании которого лежит m -мерный шар радиуса K .

В пространстве переменных (t, z) выделим область $D^* = D \times \mathbb{R}$, априори содержащую $\text{epi } \phi_D$. Введем в рассмотрение параметризованную (по $c \geq 0$) совокупность многозначных отображений

$$(t, z, l) \rightarrow \mathbf{F}_b^c(t, z, l) : D^* \times S_{m+1} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^{m+1}}, \quad (4.8)$$

где

$$\mathbf{F}_b^c(t, z, l) = \left\{ \mathbf{f} \in \Phi^c : \langle l, \mathbf{f} \rangle \geq \mathbf{H}(t, z, l) \right\},$$

$\mathbf{H}(t, z, l) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle l, \mathbf{f}(t, z, u, v) \rangle$ — гамильтониан расширенной системы (4.6).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \text{pr } z &= x, & \text{если } z = (x, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, \\ \text{pr } l &= s, & \text{если } l = (s, s_{m+1}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$(t, z, l) \rightarrow \vec{F}_b(t, \text{pr } z, \text{pr } l) : D^* \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}, \quad (4.9)$$

где

$$\vec{F}_b(t, \text{pr } z, \text{pr } l) = \{f \in \Phi : (f, 0) \in \mathbf{F}_b^c(t, z, l)\}.$$

Нетрудно видеть, что отображение (4.9) не зависит от параметра $c \geq 0$ и при этом

$$\vec{F}_b(t, \text{pr } z, \text{pr } l) = \{f \in \Phi : \langle s, f \rangle \geq H^0(t, \text{pr } z, \text{pr } l)\}.$$

Приняв $x = \text{pr } z$, $\hat{s} = \text{pr } l$, учитывая положительную однородность гамильтониана по третьей переменной, получим

$$\vec{F}_b(t, \text{pr } z, \text{pr } l) = \begin{cases} \Phi, & \|\hat{s}\| = 0, \\ F_b(t, x, s), & \|\hat{s}\| \neq 0, \end{cases}$$

где $s = \hat{s}/\|\hat{s}\|$.

Таким образом, отображение (4.9) является полунепрерывным сверху продолжением по третьей переменной s отображения (4.5). Вследствие этого свойства любое многозначное отображение параметризованной совокупности (4.8) наследует условия вида **(A1b)**–**(A4b)** и, стало быть, индуцирует оператор стабильного поглощения. Именно, для любого значения параметра выполняются следующие условия:

(A1bc) для любых $(t, z, l) \in D^* \times S_{m+1}$ множество $\mathbf{F}_b^c(t, z, l)$ выпукло, замкнуто и вложено в Φ^c ;

(A2bc) для любых $(t, z, l) \in D^* \times S_{m+1}$ выполняется равенство

$$\max_{q \in S_{m+1}} \min_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}_b^c(t, z, q)} \langle l, \mathbf{f} \rangle = \mathbf{H}(t, z, l);$$

(A3bc) существует такая функция $\omega_c^*(\delta)$ ($\omega_c^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), что

$$d(\mathbf{F}_b^c(t^*, z^*, l), \mathbf{F}_b^c(t_*, z_*, l)) \leq \omega_c^*(|t^* - t_*| + \|\text{pr } z^* - \text{pr } z_*\|)$$

при всех $(t^*, z^*), (t_*, z_*) \in D^*$ и любом $l \in S_{m+1}$;

(A4bc) существует константа $\lambda(c) > 0$ такая, что

$$d(\mathbf{F}_b^c(t, z^*, l), \mathbf{F}_b^c(t, z_*, l)) \leq \lambda(c) \| \text{pr } z_* - \text{pr } z^* \|,$$

где $(t, z^*), (t, z_*) \in D^*$, $l \in S_{m+1}$.

Полагая $Z \subset \mathbb{R}^{m+1}$, введем следующие обозначения: $Z_l^c(t; t_*, z_*)$ — множество всех точек $z^* \in \mathbb{R}^{m+1}$, в которые в момент $t \in [t_*, t^*]$ приходят решения $z = z(\tau)$, $\tau \in [t_*, t^*]$, $z(t_*) = z_*$, дифференциального включения $\dot{z} \in \mathbf{F}_b^c(t, z, l)$;

$$M_t(Z) = \begin{cases} \text{epi } \rho_{O_{\hat{r}}}(\hat{x}), & t \in [t_*, t^*), \\ \text{epi } \rho_{O_{\hat{r}}}(\hat{x}) \cup Z, & t = t^*; \end{cases}$$

$$(Z_l^c)^{-1}(t_*; t, M_t(Z)) = \left\{ z_* \in \mathbb{R}^{m+1} : Z_l^c(t; t_*, z_*) \cap M_t(Z) \neq \emptyset \right\}.$$

Фиксируем значение параметра $c \geq 0$.

Определение 4.1. Формой оператора стабильного поглощения для расширенной системы (4.6) назовем отображение

$$\pi^c : \Xi \times 2^{\mathbb{R}^{m+1}} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^{m+1}},$$

заданное соотношением

$$\pi^c(t_*; t^*, Z) = \bigcap_{l \in S_{m+1}} \bigcup_{t \in [t_*, t^*]} (Z_l^c)^{-1}(t_*; t, M_t(Z)),$$

где $\Xi = \{(t_*, t^*) \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta] : t_* \leq t^*\}$.

Определение 4.2. Замкнутое множество $W^c \subset D^*$ назовем u -стабильным мостом в задаче (4.6), (4.7), если

$$W^c(\vartheta) \subset \text{epi } \rho_{O_{\hat{r}}}(\hat{x}), \quad W^c(t_*) \subset \pi^c(t_*; t^*, W^c(t^*)), \quad (t_*, t^*) \in \Xi.$$

Поскольку каждое отображение параметризованной совокупности отображений (4.8) удовлетворяет условиям **(A1bc)**–**(A4bc)**, то формы оператора стабильного поглощения π^c , $c \geq 0$, являются инвариантами, т.е. не зависят от параметра c . Введем в рассмотрение понятие аппроксимирующей формы оператора стабильного поглощения.

Определение 4.3. Аппроксимирующей формой оператора стабильного поглощения (АФОСП) в задаче сближения к моменту для расширенной системы (4.6) назовем отображение

$$\pi^{c, \varepsilon} : \Xi \times 2^{\mathbb{R}^{m+1}} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^{m+1}},$$

заданное соотношением

$$\pi^{c, \varepsilon}(t_*; t^*, Z) = \bigcap_{l \in S_{m+1}} \bigcup_{t \in [t_*, t^*]} (\tilde{Z}_l^c)^{-1}(t_*; t, M_t^\varepsilon(Z)),$$

где $c \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$,

$$(\tilde{Z}_l^c)^{-1}(t_*; t, M_t^\varepsilon(Z)) = \left\{ z_* \in \mathbb{R}^{m+1} : \tilde{Z}_l^c(t; t_*, z_*) \cap M_t^\varepsilon(Z) \neq \emptyset \right\},$$

$$\tilde{Z}_l^c(t; t_*, z_*) = z_* + (t - t_*) \mathbf{F}_b^c(t_*, z_*, l), \quad t \in [t_*, t^*],$$

$$M_t^\varepsilon(Z) = \begin{cases} M_\varepsilon, & t \in [t_*, t^*), \\ M_\varepsilon \cup Z, & t = t^*, \end{cases}$$

M_ε — ε -окрестность множества M , $Z \subset \mathbb{R}^{m+1}$.

Пусть задано разбиение $\Gamma_n = \{t_0, \dots, t_{N(n)} = \vartheta\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$ и б.м.в. $\eta(\cdot)$.

Определение 4.4. η -Аппроксимирующей системой множеств $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$, $c \geq 0$, в задаче сближения для расширенной дифференциальной игры (4.6), (4.7) назовем систему множеств, заданную рекуррентно соотношениями

$$\begin{aligned} {}^c\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}) &= \text{epi}(\rho_{O_{\hat{x}}}(x) - \varepsilon_{N(n)}), \\ {}^c\widetilde{W}^{(n)}(t_i) &= \pi^{c,\varepsilon}(t_i, t_{i+1}, {}^c\widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1})), \quad i = N(n) - 1, \dots, 0. \end{aligned}$$

Здесь правило вычисления величин ε_i то же, что и в определении 3.2.

Замечание 4.1. Введенная в определении 4.4 система множеств зависит не только от б.м.в. $\eta(\cdot)$, но и от значения параметра $c \geq 0$. В общем случае при прочих одинаковых условиях разным значениям параметра c отвечают различные η -аппроксимирующие системы множеств. Важно отметить, что поскольку при всех $c \geq 0$ выполняются условия **(A1bc)**–**(A4bc)**, аналогичные условиям **(A1)**–**(A4)**, то в силу теоремы 3.1 множество ${}^c\widetilde{W}^{(n)}$, сконструированное из односторонних пределов (см. определение 3.3), совпадает с множеством позиционного поглощения W в задаче сближения к моменту $t = \vartheta$ для расширенной дифференциальной игры (4.6), (4.7). Таким образом, $W = \text{epi } \phi_D$. Следовательно, посредством АФОСП $\pi^{c,\varepsilon}$, $c \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$, можно конструировать аппроксимации функции цены дифференциальной игры (4.1), (4.2).

Определим момент времени $t_{00} = \max\left\{t_0, \vartheta - \frac{\hat{r}}{K}\right\}$ и введем в рассмотрение множество

$$\vec{D} = \left\{(t, x) \in D : t \in [t_{00}, \vartheta], x \in \hat{x} + (t - t_{00})\Phi\right\}.$$

По построению $\vec{D}$ — сильно инвариантное множество относительно включения $\dot{x} \in \Phi$, причем его сечения $\vec{D}(t)$ — шары с центром в точке $x = \hat{x}$; здесь $t \in [t_{00}, \vartheta]$.

Совокупности вида $\{{}^c\widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$, где $c \geq 0$, $\eta(\cdot)$ — б.м.в., аппроксимируют надграфик $\text{epi } \phi_D$ сужения функции цены ϕ на множество D . Поэтому нижние (по последней компоненте) огибающие этих множеств являются графиками аппроксимации $\overline{\phi}^c$ функции цены ϕ :

$$\begin{aligned} \overline{\phi}^c(t_{N(n)}, x) &= \rho(x) - \varepsilon_{N(n)}, \quad x \in \vec{D}(t_{N(n)-1}), \\ \overline{\phi}^c(t_i, x) &= \inf \left\{ \alpha : (x, \alpha) \in \pi^{c,\varepsilon}(t_i, t_{i+1}, \text{epi } \rho_{D(t_{i+1})} \cup \text{epi } \overline{\phi}^c_{D(t_{i+1})}(t_i, \cdot)) \right\}, \\ x &\in \vec{D}(t_i), \quad i = N(n) - 1, \dots, 0, \end{aligned}$$

параметр $c > 0$.

Укажем некоторые основные свойства АФОСП (см. [14]). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть:

- 1) Δ — достаточно малое положительное число такое, что $t_{00} < t < t + \Delta < \vartheta$;
- 2) $\mu : \vec{D}(t + \Delta) \rightarrow \mathbb{R}$ — числовая функция, удовлетворяющая условию Липшица с константой $\lambda_\mu > 0$;
- 3) параметр c удовлетворяет неравенству $c \geq 2\lambda_\mu K$, где по-прежнему

$$K = 2 \sup\{\|g(t, x) + A(t, x)u + B(t, x)v\| : (t, x) \in D, u \in P, v \in Q\}.$$

Тогда для любого $x \in \vec{D}(t)$ справедливо двойное равенство

$$\pi^{c,\varepsilon}(t, t + \Delta, \text{epi } \mu_{O_{K\Delta}(x)}) = \pi^{c,\varepsilon}(t, t + \Delta, \text{epi } \text{co } \mu_{O_{K\Delta}(x)}) = \pi^{0,\varepsilon}(t, t + \Delta, \text{epi } \text{co } \mu_{O_{K\Delta}(x)}),$$

где $\text{co } \mu_{O_{K\Delta}(x)}(\cdot)$ — выпуклая оболочка сужения функции μ на шар $O_{K\Delta}(x)$ с центром в точке $x \in \vec{D}(t)$ радиуса $r = K\Delta$:

$$\begin{aligned} \text{co } \mu_{O_{K\Delta}(x)}(y) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \mu(y_i) : \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, m+1; \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1; \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i y_i = y, y_i \in O_{K\Delta}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Рис. 2. $t = 0.95$ Рис. 3. $t = 0.5$

Суть теоремы заключается в следующем. При достаточно больших значениях параметра $c \geq 0$, на любом шаге разбиения, во-первых, результат действия АФОСП на надграфик липшицевой функции и на надграфик ее овыпукления один и тот же, во-вторых, этот же результат получается при применении к овыпуклению функции наиболее простой из АФОСП — той, которая отвечает значению параметра $c = 0$.

Опираясь на эту теорему и применяя конструкции выпуклого анализа, можно показать [14], что для всех значений параметра c , больших порогового значения $c_0 = 2K\lambda_\rho e^{\lambda_F(3K+1)(\vartheta-t_{00})}$, где λ_ρ — константа Липшица целевой функции ρ на шаре $O_{\hat{r}}(\hat{x})$, отвечающие им аппроксимации $\bar{\phi}^c$ функции цены ϕ , формируемые на фиксированном разбиении $\Gamma_n = \{t_0, \dots, t_{N(n)} = \vartheta\}$, совпадают (по крайней мере совпадают на сильно инвариантном множестве $\bar{D}$), причем при $c \geq c_0$ для аппроксимации $\bar{\phi} \equiv \bar{\phi}^c$ справедливо следующее представление:

$$\bar{\phi}(t_i, x) = \max_{l \in S_{m+1}} \min_{f \in \bar{F}(t, x, \text{pr } l)} \text{co } \phi_\rho(t_{i+1}, x + \Delta_i f)$$

или, что тоже самое,

$$\bar{\phi}(t_i, x) = \sup_{y \in O_{K\Delta_i}(x)} \max_{s \in \partial \text{co } \bar{\phi}_\rho(t_{i+1}, y)} \left\{ \Delta H^0(t_i, x, s) + \langle s, x - y \rangle + \text{co } \phi_\rho(t_{i+1}, y) \right\}. \quad (4.10)$$

Здесь $x \in \bar{D}(t_i)$, $t_i \in \Gamma_n$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, $\phi_\rho(y) = \min\{\phi(y), \rho(y)\}$, $y \in O_{K\Delta_i}(x)$, $\text{co } \phi_\rho(t_{i+1}, \cdot)$ — выпуклая оболочка функции $\phi_\rho(t_{i+1}, \cdot) : O_{K\Delta_i}(x) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\partial \text{co } \phi_\rho(t_{i+1}, y)$ — субдифференциал выпуклой функции $\text{co } \phi_\rho(t_{i+1}, \cdot)$, вычисленный в точке $y \in \text{int } O_{K\Delta_i}(x)$.

Представление (4.10) удобно для численных реализаций. Оно лежит в основе сеточных процедур построения функции цены дифференциальной игры (4.1), (4.2). Приведем примеры динамических систем, промоделированных с помощью конечно-разностного аналога оператора (4.10).

Пример 1. Рассматривается дифференциальная игра с линейной динамикой:

$$\frac{dx_1}{dt} = v, \quad \frac{dx_2}{dt} = u,$$

управления $u, v \in [-1, 1]$, $t \in [0, 1]$, функционал $\gamma(x[\cdot]) = \min_{t \in [0, 1]} \rho(x[t])$, где целевая функция

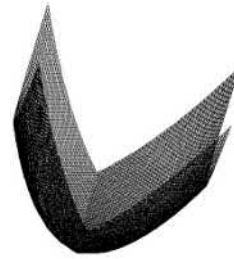
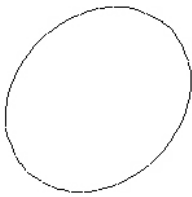
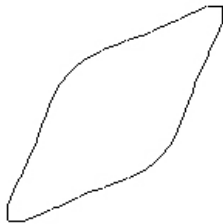
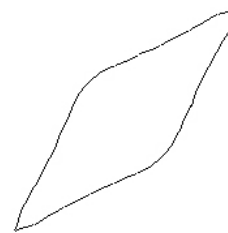
$\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. На рисунках представлены сечения аппроксимации $\bar{\phi}$ функции цены в моменты времени $t = 0.95$, $t = 0.5$, $t = 0.25$ и $t = 0.0$.

Пример 2. Рассматривается дифференциальная игра с нелинейной динамикой:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + u \cos x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + v \sin x_2$$

и управлениями $u, v \in [-1, 1]$, $t \in [0, 1]$, область построения решения в момент $t = 0$ — квадрат $[-1, 1] \times [-1, 1]$, функционал $\gamma(x[\cdot]) = \min_{t \in [0, 1]} \rho(x[t])$, где целевая функция $\rho(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

На рисунках представлены множества уровня функции $\bar{\phi}$, отвечающие значению уровня $c = 0.1$, в различные моменты времени.

Рис. 4. $t = 0.25$ Рис. 5. $t = 0.0$ Рис. 6. $t = 0.9$ Рис. 7. $t = 0.5$ Рис. 8. $t = 0.2$ Рис. 9. $t = 0.0$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьева С. В., Тарасьев А. М., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Конструкции теории дифференциальных игр при решении уравнений Гамильтона—Якоби// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 2. — С. 320–336.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
3. Красовский Н. Н. К задаче унификации дифференциальных игр// Докл. АН СССР. — 1976. — 226, № 6. — С. 1260–1263.
4. Красовский Н. Н. Унификация дифференциальных игр// Игровые задачи управления/ Тр. Ин-та математики и механики. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. — 24. — С. 32–45.
5. Ушаков В. Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения// Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1980. — 4. — С. 29–36.
6. Алексейчик М. И. Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры// Мат. анализ. прилож. — Ростов. гос. ун-т, 1975. — 7. — С. 191–199.
7. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления// Прикл. мат. мех. — 1987. — 51, № 2. — С. 216–222.
8. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н. О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения/ Деп. в ВИНТИ, № 2454-83. — Свердловск, 1983. — 61 с.
9. Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. О приближенном построении решений в игровых задачах управления// Прикл. мат. мех. — 1997. — 61, № 3. — С. 413–421.

10. Тарасьев А. М., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Конечно-разностный метод построения функции оптимального гарантированного результата// Гагаринские научные чтения по космонавтике авиации. 1991. — М.: Наука, 1992. — С. 166–172.
11. Тарасьев А. М., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Аппроксимационные операторы и конечно-разностные схемы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби// Изв. РАН. Техн. киберн. — 1994. — № 3. — С. 173–185.
12. Папаков Г. В., Тарасьев А. М., Успенский А. А. Численные аппроксимации обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби// Прикл. мат. мех. — 1996. — 60, № 4. — С. 570–581.
13. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. — Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 336 с.
14. Успенский А. А. Вычислительные процедуры для построения обобщенных решений уравнения Беллмана—Айзекса/ Дисс. канд. физ.-мат. наук. — Екатеринбург, 1993.
15. Grigorieva S. V., Uspenskii A. A., Ushakov V. N. Solution of differential games and Cauchy problem for Hamilton–Jacobi equation// Proc. 10 IFAC Symp. Dynamic Games And Applications, July 8–11, Saint-Petersburg, Russia, 2002, Vol. 1/ Petrosjan L. A., Zenkevich N. A., eds. — St. Petersburg, 2002, C. 349–352.

E-mail: Uspen@imm.uran.ru

ГЛОБАЛЬНО УПРАВЛЯЕМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

© 2005 г. Е. Л. ТОНКОВ

Аннотация. В статье приведены основные результаты, относящиеся к достаточным и необходимым условиям глобальной управляемости нестационарных линейных систем, полученные в недавнем прошлом, и приведены некоторые обобщения этих результатов.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	145
1. Основные обозначения	146
2. Динамическая система	146
3. Динамическая система сдвигов	148
4. Семейство линейных систем дифференциальных уравнений	149
5. Канонический представитель линейной управляемой системы	151
6. Множество управляемости линейной управляемой системы	153
7. Глобальная управляемость	155
8. Оценки опорной функции	157
9. Доказательство теоремы 12	158
10. Вероятностные характеристики множества управляемости	159
11. Доказательство теоремы 15 и следствия 1	160
Список литературы	164

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных вопросов математической теории управляемых процессов является вопрос о полной, локальной или глобальной управляемости динамической системы, поведение которой описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Впервые на задачу об управляемости как на самостоятельную математическую проблему, представляющую большой интерес в приложениях, обратил внимание Н. Н. Красовский в конце 1950-х гг. Им же получены фундаментальные результаты в этой области [10, 11], относящиеся к линейным нестационарным системам. Примерно в это же время ряд интересных результатов о полной управляемости линейной системы получил Р. Калман [6].

Задачи глобальной управляемости линейных систем при наличии геометрических ограничений на управления начали исследоваться сравнительно недавно. Линейная управляемая система с геометрическими ограничениями на управляющие функции называется глобально управляемой, если ее пространство управляемости совпадает со всем фазовым пространством рассматриваемой системы. Необходимые и достаточные условия глобальной управляемости стационарной линейной системы хорошо известны (см., например, [12, с. 102]). Достаточные условия глобальной управляемости периодической системы получены А. К. Керимовым [8]. К настоящему моменту времени вопрос о необходимых и достаточных условиях глобальной управляемости произвольной нестационарной линейной системы остается открытым. Достаточно подробно исследован вопрос только для рекуррентных и почти периодических систем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03–01–00014) и Конкурсного центра фундаментального естествознания (проект E02–1.0–100).

В этой статье собраны основные результаты, относящиеся к достаточным и необходимым условиям глобальной управляемости нестационарных линейных систем, полученные в недавнем прошлом [4, 5, 16–24], и приведены некоторые обобщения этих результатов.

1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n ; скалярное произведение и норма в $\mathbb{R}^n$ определяются равенствами $x^*y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, $|x| = \sqrt{x^*x}$, где $*$ означает операцию транспонирования. Пространство, сопряженное к $\mathbb{R}^n$, мы отождествляем с $\mathbb{R}^n$ и (если не оговорено иное) векторы-столбцы обозначаем латинскими буквами, а векторы-строки — греческими. Таким образом, запись ξx означает скалярное произведение векторов ξ и x в $\mathbb{R}^n$ (фактически $\mathbb{R}^{n*}$ можно рассматривать как второй экземпляр пространства $\mathbb{R}^n$, точками которого являются векторы-строки). Если $x_1, \dots, x_k$ — произвольный набор векторов в $\mathbb{R}^n$, то $\text{lin}\{x_1, \dots, x_k\}$ — линейная оболочка векторов $x_1, \dots, x_k$.

Замкнутую ε -окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим $O_\varepsilon^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq \varepsilon\}$, $O_\varepsilon^n \doteq O_\varepsilon^n(0)$, единичную сферу — $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Замыкание произвольного множества D в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $\text{cl } D$ либо $\overline{D}$, внутренность (относительно $\mathbb{R}^n$) — $\text{int } D$, границу — ∂D , ε -окрестность — $O_\varepsilon^n(D) = D + O_\varepsilon^n \doteq \{x + y : x \in D, y \in O_\varepsilon^n\}$.

Пространство $\mathbb{M}(n, m)$ линейных операторов из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ будем отождествлять с пространством $(n \times m)$ -матриц (если $n = m$, то пишем $\mathbb{M}(n)$), а оператор A^* , сопряженный к $A \in \mathbb{M}(n, m)$ — с транспонированной матрицей. Если $M \in \mathbb{M}(n, m)$, то $\text{rank } M$ — ранг, $\text{Ker } M$ — ядро, $\text{Im } M$ — область значений матрицы M .

Далее, $|A|$ — норма $A \in \mathbb{M}(n, m)$, согласованная с евклидовой нормой вектора в $\mathbb{R}^n$. Замкнутую ε -окрестность $Q \in \mathbb{M}(n, m)$ обозначим $\mathcal{B}_\varepsilon(Q)$, $\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon(0)$ (индексы m и n в обозначении $\mathcal{B}_\varepsilon(Q)$, а также индекс n у единичной матрицы I_n будем опускать, если ясно, о каком пространстве идет речь).

Введем в рассмотрение пространства $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно, непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$) с метрикой Хаусдорфа

$$\text{dist}(A, B) = \min \{ \alpha : A \subset O_\alpha^n(B), B \subset O_\alpha^n(A) \}.$$

Тогда каждое из пространств $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ является полным сепарабельным метрическим пространством. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ опорная функция $\xi \rightarrow h(\xi, A)$ определяется равенством $h(\xi, A) = \sup_{a \in A} \xi a$ (свойства опорной функции см. в [2]).

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Ниже приводятся необходимые для дальнейшего сведения из теории динамических систем. Подробное изложение см. [1, 7, 15].

Пусть (Σ, f^t) — топологическая динамическая система, т.е. Σ — полное метрическое пространство, на котором задана однопараметрическая группа движений $f^t : \Sigma \rightarrow \Sigma$ (следовательно, $f^t \sigma|_{t=0} = \sigma$, $f^{t+s} = f^t f^s$, $t, s \in \mathbb{R}$ и функция $(t, \sigma) \rightarrow f^t \sigma$ непрерывна на пространстве $\mathbb{R} \times \Sigma$ с метрикой $|t - t_0| + \varrho(\sigma, \sigma_0)$, где ϱ — метрика в Σ). В этом случае Σ называется *фазовым пространством*, $\{f^t\}$ — *поток* на Σ , функция $t \rightarrow f^t \sigma$ — *движением* (точки σ), а множества

$$\text{orb}(\sigma) \doteq \{f^t \sigma : t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{orb}_+(\sigma) \doteq \{f^t \sigma : t \in [0, \infty)\}$$

— соответственно *траекторией* и *положительной полутраекторией* точки σ .

Лемма 1. *Всякое движение топологической динамической системы (Σ, f^t) непрерывно зависит от начальной точки равномерно относительно t на любом конечном отрезке времени: для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $\varrho(\sigma, \sigma_0) \leq \delta$, то $\varrho(f^t \sigma, f^t \sigma_0) \leq \varepsilon$ для всех $|t| \leq \vartheta$.*

Точка σ_0 называется ω -предельной (α -предельной) для точки $\sigma \in \Sigma$, если найдется последовательность $\{t_k\}$ такая, что $t_k \rightarrow \infty$ ($t_k \rightarrow -\infty$) и $f^{t_k} \sigma \rightarrow \sigma_0$. Множество ω -предельных точек,

отвечающих точке σ , обозначим $\Omega(\sigma)$. Далее, множество $M \subset \Sigma$ называется *инвариантным* (относительно потока $\{f^t\}$), если $\text{orb}(\sigma) \subset M$ для каждой точки $\sigma \in M$. Аналогично определяется *положительно инвариантное* множество ($\text{orb}_+(\sigma) \subset M$ для каждой точки $\sigma \in M$). Если M инвариантно, то $f^t M = M$ для всех t .

Теорема 1. *Множество $\Omega(\sigma)$ инвариантно и замкнуто.*

В дальнейшем расстояние $\varrho(\sigma, \Sigma_0)$ от точки σ до компактного множества $\Sigma_0 \subset \Sigma$ означает кратчайшее расстояние:

$$\varrho(\sigma, \Sigma_0) \doteq \min \{ \varrho(\sigma, \sigma_0) : \sigma_0 \in \Sigma_0 \}.$$

Аналогично, расстояние между двумя компактными множествами Σ_0 и Σ_1 определяется равенством

$$\varrho(\Sigma_0, \Sigma_1) = \min \{ \varrho(\sigma_0, \sigma_1) : \sigma_0 \in \Sigma_0, \sigma_1 \in \Sigma_1 \},$$

а замкнутая ε -окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(\Sigma_0)$ компактного множества Σ_0 — равенством

$$\mathcal{O}_\varepsilon(\Sigma_0) = \{ \sigma \in \Sigma : \varrho(\sigma, \Sigma_0) \leq \varepsilon \},$$

поэтому, если $\sigma \in \Sigma_0$, то

$$\varrho(\Sigma_0, \Sigma_1) \leq \varrho(\sigma, \Sigma_1).$$

Теорема 2. *Если замыкание положительной полутраектории $\text{orb}_+(\sigma)$ движения $t \rightarrow f^t \sigma$ компактно, то ω -предельное множество $\Omega(\sigma)$ непусто, компактно, связно и $\varrho(f^t \sigma, \Omega(\sigma)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.*

Напомним, что множество $M \subset \Sigma$ называется *минимальным*, если оно непустое, замкнутое, инвариантное относительно потока $\{f^t\}$ и не содержит собственного подмножества, обладающего этими свойствами.

Теорема 3. *Всякое инвариантное компактное множество содержит компактное минимальное подмножество.*

Определение 1. Движение $t \rightarrow f^t \sigma$ называется *рекуррентным* (по Биркгофу), если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Delta(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon, \sigma) \doteq \{ \tau \in \mathbb{R} : \varrho(f^\tau \sigma, \sigma) \leq \varepsilon \} \quad (2.1)$$

относительно плотно на числовой прямой $\mathbb{R}$, т.е. найдется число $\vartheta = \vartheta(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого $s \in \mathbb{R}$ отрезок $[s, s + \vartheta]$ имеет непустое пересечение с множеством $\Delta(\varepsilon)$. Если движение $t \rightarrow f^t \sigma$ рекуррентно, то точка σ называется *рекуррентной*.

Теорема 4. *Движение $t \rightarrow f^t \sigma$ рекуррентно в том и только том случае, если для любых $\varepsilon > 0$, $\vartheta > 0$ множество*

$$\theta(\varepsilon, \vartheta) = \theta(\varepsilon, \vartheta, \sigma) \doteq \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leq \vartheta} \varrho(f^{t+\tau} \sigma, f^t \sigma) \leq \varepsilon \right\} \quad (2.2)$$

(ε, ϑ) -почти периодов относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$.

Из теоремы 4 следует, что всякая точка, лежащая на траектории рекуррентного движения, тоже рекуррентна. Более того, для каждого $\varepsilon > 0$ множества (2.1) и (2.2) общие для всех точек траектории $\text{orb}(\sigma)$:

$$\Delta(\varepsilon, \sigma) = \Delta(\varepsilon, f^\tau \sigma), \quad \theta(\varepsilon, \vartheta, \sigma) = \theta(\varepsilon, \vartheta, f^\tau \sigma).$$

Лемма 2. *Замыкание траектории рекуррентного движения компактно.*

Теорема 5. *Всякая траектория минимального компактного множества рекуррентна. Далее, если движение $t \rightarrow f^t \sigma$ рекуррентно, то множество $\overline{\text{orb}}(\sigma)$ минимально и $\overline{\text{orb}}(\sigma) = \overline{\text{orb}}_+(\sigma) = \Omega(\sigma)$.*

Определение 2. Движение $t \rightarrow f^t \sigma$ называется *почти периодическим* (по Бору), если для любого $\varepsilon > 0$ множество ε -почти периодов

$$\theta(\varepsilon) \doteq \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_t \varrho(f^{t+\tau} \sigma, f^t \sigma) \leq \varepsilon, t \in \mathbb{R} \right\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$. Будем говорить также, что точка σ почти периодична.

Если σ почти периодична, то (согласно теореме 5) она рекуррентна и поэтому замыкание $\overline{\text{orb}}(\sigma)$ траектории $\text{orb}(\sigma)$ минимально. Следовательно, $\overline{\text{orb}}(\sigma)$ состоит из рекуррентных точек.

Теорема 6. Если движение $t \rightarrow f^t \sigma$ почти периодично и не совпадает с положением равновесия и периодическим движением, то для любой точки $\hat{\sigma} \in \overline{\text{orb}}(\sigma)$ движение $t \rightarrow f^t \hat{\sigma}$ тоже почти периодично.

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА СДВИГОВ

В этом разделе мы опишем динамическую систему сдвигов А. А. Маркова [15, гл. 6, § 9], играющую существенную роль в дальнейших построениях.

Пусть X — линейное конечномерное пространство с нормой $|x|$, $\mathfrak{X}$ — линейное пространство непрерывных функций, определенных на всей числовой прямой и принимающих значения в X . Введем на пространстве $\mathfrak{X}$ метрику

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \min \{ |\varphi(t) - \psi(t)|, |t|^{-1} \}, \quad \varphi, \psi \in \mathfrak{X}. \quad (3.1)$$

Лемма 3. Пространство $\mathfrak{X}$ (с метрикой (3.1)) является полным сепарабельным метрическим пространством. Топология, порождаемая метрикой (3.1), эквивалентна топологии равномерной сходимости на отрезках.

Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}$. Сдвиг функции φ на константу τ обозначим φ_τ : $\varphi_\tau(t) \doteq \varphi(\tau + t)$, где t пробегает всю числовую прямую $\mathbb{R}$. Поток на $\mathfrak{X}$ определим равенством $f^\tau \varphi = \varphi_\tau$.

Лемма 4. Пара $(\mathfrak{X}, f^\tau)$ образует топологическую динамическую систему (динамическую систему сдвигов).

Лемма 5. Для любой ограниченной и равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $\varphi \in \mathfrak{X}$ замыкание $\overline{\text{orb}}(\varphi)$ траектории $\text{orb}(\varphi) \doteq \{f^t \varphi : t \in \mathbb{R}\}$ в метрике (3.1) компактно.

Из этой леммы и теоремы 1 следует, что если функция φ равномерно непрерывна и ограничена на числовой прямой $\mathbb{R}$, то ω -предельное множество $\Omega(\varphi)$ непусто, компактно и связно. Если, кроме того, движение $\tau \rightarrow f^\tau \varphi$ рекуррентно, то, в силу теоремы 5, множество $\overline{\text{orb}}(\varphi)$ минимально и $\Omega(\varphi) = \overline{\text{orb}}(\varphi) = \overline{\text{orb}}_+(\varphi)$.

Если ω -предельное множество $\Omega(\varphi)$, отвечающее функции $\varphi \in \mathfrak{X}$, содержит эту функцию ($\varphi \in \Omega(\varphi)$), то найдется последовательность $\{\tau_i\}$ моментов времени такая, что $\tau_i \rightarrow \infty$ и $\rho(\varphi_{\tau_i}, \varphi) \rightarrow 0$. Последнее означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ и любого t_0 множество

$$\left\{ \tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leq \vartheta} |\varphi_\tau(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon \right\}$$

имеет непустое пересечение с полуинтервалом $[t_0, \infty)$. Функция φ , обладающая этим свойством, называется P^+ -устойчивой (устойчивой по Пуассону вправо). Аналогичным образом вводятся понятия P^- -устойчивости и P -устойчивости. Таким образом, P^+ -устойчивость характеризует некоторое свойство «возвращаемости» траектории $\tau \rightarrow \varphi_\tau$, отвечающей функции φ : существует бесконечно возрастающая последовательности сдвигов φ_{τ_i} , возвращающая эти сдвиги в ε -окрестность φ временной длины 2ϑ . Рекуррентность и почти периодичность демонстрируют более сильные свойства возвращаемости.

Определение 3. Ограниченная и равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $\varphi(t)$ со значениями в конечномерном пространстве X называется *рекуррентной*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ множество

$$\Theta(\varepsilon, \vartheta) \doteq \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leq \vartheta} |\varphi_\tau(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon \right\}$$

(ε, ϑ) -почти периодов относительно плотно на $\mathbb{R}$. Если же для всякого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество

$$\Theta(\varepsilon) \doteq \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_\tau(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon \right\}$$

ε -почти периодов, то функция $\varphi(t)$ называется *почти периодической* (в смысле Бора).

Теорема 7. Пусть функция $\varphi(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Движение $\tau \rightarrow f^\tau \varphi$ рекуррентно (определение 1) в том и только том случае, если функция $\varphi(t)$ рекуррентна. Аналогично, движение $\tau \rightarrow f^\tau \varphi$ почти периодически (определение 2) в том и только том случае, если функция $\varphi(t)$ почти периодична.

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = F(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

с равномерно непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ функцией $t \rightarrow F(t) \in \mathbb{M}(n)$. Как обычно, будем отождествлять систему (3.2) с задающей ее функцией F . Наряду с системой F рассмотрим семейство $\mathfrak{X}(F)$ систем, полученных из F замыканием множества сдвигов F в компактно открытой топологии. Это означает, что $G \in \mathfrak{X}(F)$ в том и только том случае, если найдется последовательность $\{\tau_i\}$ такая, что $\rho(F_{\tau_i}, G) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, или, что эквивалентно, для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ найдется номер последовательности $k_{\varepsilon\vartheta}$ такой, что $\max_{|t| \leq \vartheta} |F_{\tau_i}(t) - G(t)| \leq \varepsilon$ для всех $i \geq k_{\varepsilon\vartheta}$.

Снабдим пространство $\mathfrak{X}(F)$ метрикой (3.1) и определим поток $\{f^\tau\}$ на $\mathfrak{X}(F)$ равенством $f^\tau G = G_\tau$, $G \in \mathfrak{X}(F)$, $\tau \in \mathbb{R}$, где по-прежнему $G_\tau(t) \doteq G(\tau + t)$. Тогда мы имеем возможность изучать семейство систем $\dot{x} = A(f^t G)x$, зависящих от параметра G . Здесь функция $A : \mathfrak{X}(F) \rightarrow \mathbb{M}(n)$ определена равенством $A(G) = G(t)|_{t=0}$. Отметим еще, что в силу условий на A , пространство $\mathfrak{X}(F)$ компактно и инвариантно и поэтому имеет непустые множества α и ω -предельных точек (см. лемму 5 и теоремы 1 и 2). Вводя привычные обозначения $\Sigma = \mathfrak{X}(F)$, $\sigma = G$, $A : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n)$, $A(\sigma) = \sigma(0) = G(0)$, полученное семейство можно записать в виде

$$\dot{x} = A(f^t \sigma)x, \quad \sigma \in \Sigma, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

где σ — параметр, пробегающий пространство Σ . Особенность системы (3.3) состоит в том, что она стационарна относительно потока. Тем самым, рассуждая формально, нестационарной системе (3.2) можно поставить в соответствие «стационарную систему» (3.3), а точнее, семейство систем (с параметром σ) со стационарной относительно сдвигов правой частью.

Можно не фиксировать систему F , а рассматривать пространство $\mathfrak{X}$ всех систем вида (3.2) с непрерывными функциями $t \rightarrow F(t) \in \mathbb{M}(n)$ (n фиксировано). Тогда, проводя аналогичные рассуждения, мы получим динамическую систему $(\mathfrak{X}, f^t)$, содержащую все линейные системы дифференциальных уравнений заданной размерности. Это очень «обширная» динамическая система и несмотря на то, что $\mathfrak{X}$ — полное сепарабельное метрическое пространство, а поток $\{f^t\}$ устроен достаточно просто, надеяться на содержательную математическую теорию в такой ситуации не приходится. Но в $\mathfrak{X}$ есть инвариантные компактные (а следовательно, и минимальные, см. теорему 3) множества. На таких множествах можно вводить дополнительные структуры (например, инвариантные вероятностные меры), и поэтому сужение потока на такие множества уже приводит к содержательным результатам.

4. СЕМЕЙСТВО ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть фиксирована динамическая система (Σ, f^t) . Рассмотрим (стационарную относительно потока $\{f^t\}$) линейную систему дифференциальных уравнений (3.3). Эту систему будем также называть параметризованным (с помощью параметра $\sigma \in \Sigma$) семейством линейных систем. Здесь функция $A : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n)$ непрерывна и ограничена на Σ , а параметр σ пробегает все фазовое пространство Σ динамической системы. Это семейство мы будем отождествлять с парой (A, Σ) , а для фиксированной системы семейства (A, Σ) будем пользоваться обозначением (A, σ) .

Пусть $t \rightarrow x(t, \sigma)$ — произвольное решение системы (A, σ) . Напомним, что для любой фиксированной точки $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ оператором Коши (матрицей Коши) системы (A, σ) называется функция

$X(t, s, \sigma)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$x(t, \sigma) = X(t, s, \sigma)x(s, \sigma). \quad (4.1)$$

Непосредственно из равенства (4.1) следует, что при каждом фиксированном s функция $t \rightarrow X(t, s, \sigma)$ является решением задачи Коши для матричного уравнения

$$\dot{X} = A(f^t \sigma)X, \quad X(s) = I, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

и если σ — стационарная точка потока $\{f^t\}$, т.е. $f^t \sigma = \sigma$, то $X(t, s, \sigma) = \exp[(t - s)A(\sigma)]$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathfrak{A}$, элементами которого являются системы вида (3.3) с непрерывными и ограниченными на Σ функциями $A : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n)$. Метрику в $\mathfrak{A}$ определим равенством

$$r(A, B) = \sup_{\sigma} \{|A(\sigma) - B(\sigma)| : \sigma \in \Sigma\}.$$

Тогда очевидно, что $\mathfrak{A}$ — полное метрическое пространство. Доказательство следующих двух лемм мы опускаем (они легко доказываются с помощью леммы Гронуолла и Беллмана).

Лемма 6. *Функция $\sigma \rightarrow X(t, s, \sigma)$ непрерывна в каждой точке $\sigma_0 \in \Sigma$ равномерно относительно (t, s) на любом компакте в $\mathbb{R}^2$.*

Лемма 7. *Функция $A \rightarrow X_A(t, s, \sigma)$ непрерывна в каждой точке $B \in \mathfrak{A}$ равномерно относительно $((t, s), \sigma)$ на любом множестве $K \times \Sigma$, где K — компакт в $\mathbb{R}^2$.*

Теорема 8. *Для всех t, s, τ имеет место равенство*

$$X(t + \tau, s + \tau, \sigma) = X(t, s, f^\tau \sigma).$$

Поэтому если движение $\tau \rightarrow f^\tau \sigma$ стационарно, или T -периодично, или почти периодически в смысле Бора, или рекуррентно, то функция $\tau \rightarrow X(t + \tau, s + \tau, \sigma)$ переменной τ тоже стационарна, T -периодична, почти периодична в смысле Бора, или рекуррентна равномерно относительно (t, s) на любом компакте в $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. Действительно, $X(t, s, f^\tau \sigma)$ является оператором Коши системы $(A, f^\tau \sigma)$. С другой стороны, непосредственной проверкой убеждаемся (см. (4.2)), что $X(t + \tau, s + \tau, \sigma)$ — тоже оператор Коши системы $(A, f^\tau \sigma)$. Следовательно, в силу единственности оператора Коши, $X(t + \tau, s + \tau, \sigma) = X(t, s, f^\tau \sigma)$.

Пусть движение $\tau \rightarrow f^\tau \sigma$ рекуррентно. Покажем тогда, что функция $\tau \rightarrow X(t, s, f^\tau \sigma)$ рекуррентна равномерно относительно (t, s) на любом компакте в $\mathbb{R}^2$. Действительно, если заданы $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$, то в силу леммы 6 для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^2$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех

$$\tau \in \Delta(\delta, \vartheta, f) \doteq \left\{ \tau : \max_{\eta} \varrho(f^{\tau+\eta} \sigma, f^\eta \sigma) \leq \delta, \quad |\eta| \leq \vartheta \right\}$$

и всех $(t, s) \in K$

$$\max_{\eta} |X(t, s, f^{\tau+\eta} \sigma) - X(t, s, f^\eta \sigma)| \leq \varepsilon, \quad |\eta| \leq \vartheta.$$

Тем самым показано, что если $\tau \in \Delta(\delta, \vartheta, f)$, то τ является (ε, ϑ) -почти периодом функции $\tau \rightarrow X(t, s, f^\tau \sigma)$, общим для всех $(t, s) \in K$. Аналогично доказывается почти периодичность в смысле Бора функции $\tau \rightarrow X(t, s, f^\tau \sigma)$, равномерная по $(t, s) \in K$. $\square$

Напомним, что *показателем* Ляпунова решения $t \rightarrow x(t, \sigma)$ системы (A, σ) называется число

$$\lambda(x, \sigma) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |x(t, \sigma)|}{t}.$$

А. М. Ляпуновым доказано [3, с. 64], что в пространстве решений системы (A, σ) существует так называемый *нормальный* базис $x_1(t, \sigma), \dots, x_n(t, \sigma)$, т.е. такой базис, что $\lambda(x_1, \sigma) \leq \dots \leq \lambda(x_n, \sigma)$ и сумма $\lambda(x_1, \sigma) + \dots + \lambda(x_n, \sigma)$ минимальна относительно других базисов. Показатели минимального базиса называются *показателями системы* (A, σ) и обозначаются $\lambda_1(A, \sigma), \dots, \lambda_n(A, \sigma)$. Будем предполагать далее, что показатели упорядочены по возрастанию: $\lambda_1(A, \sigma) \leq \dots \leq \lambda_n(A, \sigma)$.

Далее, функция $t \rightarrow L(t) \in \mathbb{M}(n)$ называется *преобразованием Ляпунова*, если она абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\sup_t \{|L(t)| + |L^{-1}(t)| + |\dot{L}(t)|\} < \infty$. Система (A, σ) называется *приводимой* [3, § 18] (к системе $\dot{y} = F(\sigma)y$ с постоянной матрицей $F(\sigma)$), если существует преобразование Ляпунова $t \rightarrow L(t, \sigma)$ такое, что

$$F(\sigma) = (\dot{L}(t, \sigma) + L(t, \sigma)A(f^t\sigma))L^{-1}(t, \sigma)$$

для всех $t \geq 0$ (в этом случае пространства $E(A, \sigma)$ и $E(F(\sigma))$ решений систем (A, σ) и $F(\sigma)$ связаны равенством $E(F(\sigma)) = LE(A, \sigma)$ и поэтому показатели Ляпунова этих систем совпадают).

Всякой системе (A, σ) отвечает *сопряженная система* $(-A, \sigma)$ вида $\dot{\psi} = -\psi A(f^t\sigma)$. Показатели сопряженной системы обозначим $\lambda_i(-A, \sigma)$, причем $\lambda_1(-A, \sigma) \leq \dots \leq \lambda_n(-A, \sigma)$. Система (A, σ) называется *правильной*, если $\lambda_i(A, \sigma) + \lambda_{n+1-i}(-A, \sigma) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Всякое приводимое уравнение является правильным [3, § 22], обратное неверно.

5. КАНОНИЧЕСКИЙ ПРЕДСТАВИТЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

В. М. Миллионщиков доказал [13], что всякая линейная система $\dot{x} = A(t)x$ с рекуррентной матрицей $A(t)$ приводима рекуррентным перроновским преобразованием $x = P(t)y$ к верхнетреугольной системе $\dot{y} = F(t)y$ с рекуррентной матрицей $F(t)$. Аналог этой теоремы для управляемой системы $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ получен в [16]: если размерность пространства управляемости рассматриваемой линейной системы равна r , $r \leq n$, и матрицы $A(t)$ и $B(t)$ рекуррентны, то система приводима рекуррентным перроновским преобразованием $x = P(t)y$ к системе $\dot{y} = F(t)y + G(t)u$ с рекуррентными $F(t)$ и $G(t)$, причем $F(t)$ — верхнетреугольная матрица, а последние $n - r$ строк матрицы $G(t)$ равны нулю. Система $\dot{y} = F(t)y + G(t)u$ называется каноническим представителем системы $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$. В данном разделе приведены две теоремы (доказательства см. в [24]) о каноническом представителе для семейства (S, Σ) систем вида

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \quad (5.1)$$

Это семейство мы будем отождествлять с парой (S, Σ) , где $S(\sigma) \doteq (A(\sigma), B(\sigma))$, а фиксированную систему семейств (S, Σ) — с парой (S, σ) . Пространство всех систем (S, σ) с непрерывными и ограниченными на Σ функциями $\sigma \rightarrow S(\sigma)$ обозначим $\mathfrak{S}$. Любой системе (S, σ) и любому $\vartheta > 0$ поставим в соответствие линейное пространство

$$\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) \doteq \int_0^\vartheta X(0, t, \sigma)B(f^t\sigma)\mathbb{R}^m dt$$

в $\mathbb{R}^n$, которое называется *пространством управляемости* системы (S, σ) на отрезке $[0, \vartheta]$. Тогда (см. [6, с. 46]) имеет место равенство $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = \text{Im } W_\vartheta(S, \sigma)$, где

$$W_\vartheta(S, \sigma) \doteq \int_0^\vartheta X(0, t, \sigma)B(f^t\sigma)B^*(f^t\sigma)X^*(0, t, \sigma)dt,$$

и поэтому $\dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = \text{rank } W_\vartheta(S, \sigma)$. Система (S, σ) называется *вполне управляемой*, если найдется такое $\vartheta > 0$, что $\dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = n$.

Определение 4. Семейство (S, Σ) назовем *регулярным*, если найдется $\vartheta_0 > 0$ такое, что для всех $\vartheta \geq \vartheta_0$ размерность $\dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$ пространства $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$ не зависит от ϑ и σ . Далее, регулярное семейство (S, Σ) назовем *каноническим*, если:

- 1) для каждого $k = 1, \dots, n$ и любого $\sigma \in \Sigma$ линейное пространство $L^k \doteq \text{lin}\{e^1, \dots, e^k\}$, где $e^1, \dots, e^k$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, инвариантно относительно системы (A, σ) (т.е. если $x(t)$ — решение (A, σ) и $x(0) \in L^k$, то $x(t) \in L^k$ для всех $t \in \mathbb{R}$);
- 2) найдется $\vartheta_0 > 0$ такое, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ и всех $\vartheta \geq \vartheta_0$ имеет место равенство $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = L^r$, где $r \doteq \dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$.

Из этого определения следует, что семейство (S, Σ) является каноническим в том и только том случае, если для каждого $\sigma \in \Sigma$ матрица $A(\sigma)$ верхне-треугольная и последние $n - \dim \mathcal{L}_\theta(S, \sigma)$ строк матрицы $B(\sigma)$ равны нулю.

Определение 5. Каноническое семейство (C, Σ) , где $C(\sigma) = (F(\sigma), G(\sigma))$, будем называть *каноническим представителем* семейства (S, Σ) , если найдется ортогональная при каждом σ матрица $P(\sigma) \in \mathbb{M}(n)$, непрерывная по σ вместе с производной

$$\dot{P}(\sigma) \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (P(f^\varepsilon \sigma) - P(\sigma))$$

и такая, что при каждом $\sigma \in \Sigma$ преобразование $x = P(f^t \sigma)u$ приводит систему (5.1) к системе (C, σ) :

$$\dot{y} = F(f^t \sigma)y + G(f^t \sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m;$$

в этом случае

$$F(\sigma) = -P^*(\sigma)\dot{P}(\sigma) + P^*(\sigma)A(\sigma)P(\sigma), \quad G(\sigma) = P^*(\sigma)B(\sigma).$$

Преобразование $x = P(f^t \sigma)u$ будем называть *стационарным перроновским преобразованием* системы (A, σ) (в отличие от нестационарного перроновского преобразования $x = P(t, \sigma)u$ оно задается не зависящей от времени t функцией $P : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n)$).

Пусть фиксированы две топологические динамические системы (Ω, g^t) и (Σ, f^t) . Тогда [1, с. 164] система (Ω, g^t) называется *расширением* системы (Σ, f^t) (а система (Σ, f^t) — *фактором* системы (Ω, g^t)), если существует непрерывная проекция p пространства Ω на Σ , сопрягающая потоки, т.е. $p(\Omega) = \Sigma$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{p} & \Sigma \\ g^t \downarrow & & \downarrow f^t \\ \Omega & \xrightarrow{p} & \Sigma \end{array}$$

коммутативна: $pg^t = f^tp$. Простым примером расширения системы (Σ, f^t) служит следующая конструкция. Пусть $(\mathfrak{X}, h^t)$ — еще одна топологическая динамическая система, $\Omega = \Sigma \times \mathfrak{X}$. Поток $\{g^t\}$ на Ω определим равенством $g^t = (f^t, h^t)$, $p(\omega) = \sigma$ — проекция точки $\omega = (\sigma, x) \in \Omega$ на Σ . Тогда система (Ω, g^t) является расширением системы (Σ, f^t) .

Если (Ω, g^t) — расширение динамической системы (Σ, f^t) и задано семейство (S, Σ) , где $S \in \mathfrak{S}$, то для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $\omega \in p^{-1}(\sigma)$ определена непрерывная и ограниченная на Ω функция

$$\omega \rightarrow \mathcal{S}(\omega) \doteq S(p(\omega)) = S(\sigma). \quad (5.2)$$

Построенная так функция $\mathcal{S} \doteq (\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \Omega \rightarrow \mathbb{M}(n, n + m)$ порождает семейство $(\mathcal{S}, \Omega)$ систем $(\mathcal{S}, \omega)$ вида

$$\dot{x} = \mathcal{A}(g^t \omega)x + \mathcal{B}(g^t \omega)u, \quad (t, \omega, x, u) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Это новое семейство $(\mathcal{S}, \Omega)$ (назовем его *псевдорасширением* семейства (S, Σ)) фактически является другой записью семейства (S, Σ) (действительно, в силу определения (5.2), для каждого $\sigma \in \Sigma$ все системы $(\mathcal{S}, \omega)$ на слое $\gamma(\sigma) \doteq \{\omega \in \Omega : p(\omega) = \sigma\}$ совпадают с системой (S, σ)). Поэтому для каждого $\sigma \in \Sigma$ и всех $\omega \in \gamma(\sigma)$ матрица Коши $\mathcal{X}(t, s, \omega)$ системы $(\mathcal{A}, \omega)$ совпадает с матрицей Коши $X(t, s, \sigma)$ системы (A, σ) . Следовательно, для каждого $\sigma \in \Sigma$ и всех $\omega \in \gamma(\sigma)$ имеет место равенство $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \omega) = \mathcal{L}(S, \sigma)$.

Теорема 9. Для всякой топологической динамической системы (Σ, f^t) с компактным фазовым пространством Σ и любого регулярного семейства (S, Σ) , где $S \in \mathfrak{S}$, найдется такое расширение (Ω, g^t) с компактным фазовым пространством Ω , что отвечающее ему псевдорасширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства (S, Σ) обладает каноническим представителем (C, Ω) .

В силу теоремы 9 псевдорасширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства (S, Σ) приводимо стационарным перроновским преобразованием $x = P(g^t \omega)u$ к каноническому семейству (C, Ω) .

Теорема 10. Для всякой топологической динамической системы (Σ, f^t) с минимальным (относительно f^t) компактным фазовым пространством Σ и любого семейства (S, Σ) , где $S \in \mathfrak{S}$, найдется такое расширение (Ω, g^t) с минимальным (относительно g^t) компактным фазовым пространством Ω , что отвечающее ему псевдорасширение (S, Ω) семейства (S, Σ) обладает каноническим представителем $(\mathcal{C}, \Omega)$.

Из теоремы 10 следует, в частности, что если размерность пространства управляемости системы $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, равна r , $r \leq n$, и матрицы $A(t)$ и $B(t)$ рекуррентны, то система приводима рекуррентным перроновским преобразованием $x = P(t)y$ к системе $\dot{y} = F(t)y + G(t)u$ с рекуррентными $F(t)$ и $G(t)$, причем $F(t)$ — верхне-треугольная матрица, а последние $n - r$ строк матрицы $G(t)$ равны нулю.

6. МНОЖЕСТВО УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Пусть заданы динамическая система (Σ, f^t) и непрерывные функции $A : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n)$, $U : \Sigma \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим семейство (S, Σ) линейных управляемых систем

$$\dot{x} = A(f^t \sigma)x + u, \quad u \in U(f^t \sigma), \quad (6.1)$$

где $S \doteq (A, U) : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n) \times \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Далее предполагаем, что выполнены следующие условия:

- 1) функция $A : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n)$ непрерывна и ограничена на Σ ;
- 2) функция $U : \Sigma \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ непрерывна и для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $t \rightarrow U(f^t \sigma)$ измерима (существует счетное семейство $\{u(t, \sigma)\}$ измеримых сечений, аппроксимирующих $U(f^t \sigma)$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$);
- 3) $0 \in U(\sigma)$ для всех $\sigma \in \Sigma$ (не исключается и так называемый критический случай, когда $0 \in \partial U(\sigma)$, возможно при всех $\sigma \in \Sigma$).

Если $U(\sigma) = B(\sigma)U$, где $B : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n, m)$, $U \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, то (6.1) запишется в виде

$$\dot{x} = A(f^t \sigma)x + B(f^t \sigma)u, \quad u \in U.$$

В этом случае мы по-прежнему пользуемся обозначением (S, Σ) , где $S = (A, B)$.

Определение 6. Всякое измеримое по t сечение $u(t, \sigma)$ отображения $U(f^t \sigma)$ называется *допустимым (программным) управлением* системы (S, σ) . *Множество управляемости* $\mathfrak{D}_\vartheta(\tau, \sigma)$ системы (S, σ) на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ состоит из всех точек $x^0 \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых найдутся момент времени $T = T(x^0, \tau, \sigma) \in [0, \vartheta]$ и допустимое управление $t \rightarrow u(t) = u(t, x^0, \tau, \sigma)$ такие, что решение $x(t)$ задачи

$$\dot{x} = A(f^t \sigma)x + u(t, \sigma, x^0), \quad x(\tau) = x^0,$$

обращается в нуль при $t = \tau + T : x(\tau + T) = 0$. Далее, $\mathfrak{D}(\tau, \sigma) \doteq \bigcup_{\vartheta \geq 0} \mathfrak{D}_\vartheta(\tau, \sigma)$ — множество

управляемости системы (S, σ) на полуоси $[\tau, \infty)$, а функция быстродействия $T : \mathbb{R}^{n+1} \times \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ (время быстродействия) системы (S, σ) определяется равенством

$$T(x, \tau, \sigma) = \inf \{ \vartheta \geq 0 : x \in \mathfrak{D}_\vartheta(\tau, \sigma) \}; \quad \text{если } x \notin \mathfrak{D}(\tau, \sigma), \text{ то } T(x, \tau, \sigma) = +\infty.$$

Непосредственно из этого определения вытекает равенство

$$\mathfrak{D}_\vartheta(\tau, \sigma) = - \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} X(\tau, t, \sigma) U(f^t \sigma) dt, \quad \vartheta \geq 0. \quad (6.2)$$

Напомним [1, с. 158], что функция $(t, \sigma) \rightarrow g(t, \sigma)$, определенная на $\mathbb{R} \times \Sigma$ и принимающая значения в метрическом пространстве, называется *стационарной* (относительно потока $\{f^t\}$), если для всех t выполнено равенство $g(t, \sigma) = g(0, f^t \sigma)$. Если g стационарна, то вместо $g(t, \sigma)$ будем писать $g(f^t \sigma)$.

Лемма 8. Функции $(\tau, \sigma) \rightarrow \mathfrak{D}_\vartheta(\tau, \sigma)$, $(\tau, \sigma) \rightarrow \mathfrak{D}(\tau, \sigma)$, $(\tau, \sigma) \rightarrow T(\tau, x, \sigma)$ стационарны относительно потока $\{f^\tau\}$.

Доказательство. Докажем, что $\mathfrak{D}_\vartheta(\tau, \sigma) = \mathfrak{D}_\vartheta(0, f^\tau \sigma)$. Действительно,

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_\vartheta(\tau, \sigma) &= - \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} X(\tau, t, \sigma) U(f^t \sigma) dt = - \int_0^{\vartheta} X(\tau, t + \tau, \sigma) U(f^{t+\tau} \sigma) dt = \\ &= - \int_0^{\vartheta} X(0, t, f^\tau \sigma) U(f^t(f^\tau \sigma)) dt = \mathfrak{D}_\vartheta(0, f^\tau \sigma)\end{aligned}$$

(последнее равенство использует стационарность оператора Коши). Стационарность $\mathfrak{D}(\tau, \sigma)$ и $T(x, \tau, \sigma)$ следует из стационарности $\mathfrak{D}_\vartheta(\tau, \sigma)$ при каждом $\vartheta \geq 0$. $\square$

Непосредственно из определения 6 и (6.2) следует, что при фиксированных $\vartheta \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in \Sigma$ множества $\mathfrak{D}_\vartheta(f^\tau \sigma)$, $\mathfrak{D}(f^\tau \sigma)$ выпуклы, а $\mathfrak{D}_\vartheta(f^\tau \sigma)$ еще и компактно. Далее, для всех $\vartheta \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in \Sigma$ имеют место равенства

$$\mathfrak{D}_\vartheta(f^\tau \sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x, f^\tau \sigma) \leq \vartheta\}, \quad \mathfrak{D}(f^\tau \sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x, f^\tau \sigma) < +\infty\}.$$

Таким образом, для каждого $\sigma \in \Sigma$ множество $\mathfrak{D}_\vartheta(\sigma)$ является множеством уровня функции $x \rightarrow T(x, f^\tau \sigma)$, а множество управляемости $\mathfrak{D}(\tau, \sigma)$ — ее эффективной областью определения. Кроме того, $0 \in \mathfrak{D}_\vartheta(f^\tau \sigma) \subset \mathfrak{D}(f^\tau \sigma)$ для всех $\vartheta \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in \Sigma$, и если $\vartheta_1 < \vartheta_2$, то $\mathfrak{D}_{\vartheta_1}(f^\tau \sigma) \subset \mathfrak{D}_{\vartheta_2}(f^\tau \sigma)$.

Теорема 11. *Функции $(\vartheta, \sigma) \rightarrow \mathfrak{D}_\vartheta(\sigma)$, $(\xi, \sigma) \rightarrow h(\xi, \sigma, \vartheta)$, где h — опорная функция множества $\mathfrak{D}_\vartheta(\sigma)$, непрерывны.*

Доказательство. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для всех (ϑ, σ) , удовлетворяющих неравенству $|\vartheta - \vartheta_0| + \varrho(\sigma, \sigma_0) \leq \delta$ (ϱ — метрика в Σ), выполнено неравенство $\text{dist}(\mathfrak{D}_\vartheta(\sigma), \mathfrak{D}_{\vartheta_0}(\sigma_0)) \leq \varepsilon$, где dist — метрика Хаусдорфа в $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Последнее неравенство равносильно следующим двум условиям:

- 1) для каждого $x \in \mathfrak{D}_\vartheta(\sigma)$ найдется такое $x_0 \in \mathfrak{D}_{\vartheta_0}(\sigma_0)$, что $|x - x_0| \leq \varepsilon$ (свойство полунепрерывности сверху функции $(\vartheta, \sigma) \rightarrow \mathfrak{D}_\vartheta(\sigma)$ в точке (ϑ_0, σ_0));
- 2) для каждого $x_0 \in \mathfrak{D}_{\vartheta_0}(\sigma_0)$ найдется такое $x \in \mathfrak{D}_\vartheta(\sigma)$, что $|x_0 - x| \leq \varepsilon$ (свойство полунепрерывности снизу функции $(\vartheta, \sigma) \rightarrow \mathfrak{D}_\vartheta(\sigma)$ в точке (ϑ_0, σ_0)).

Докажем, что функция $(\vartheta, \sigma) \rightarrow \mathfrak{D}_\vartheta(\sigma)$ полунепрерывна сверху в точке (ϑ_0, σ_0) . Предположим пока, что $\vartheta_0 \leq \vartheta$ (в случае $\vartheta_0 \geq \vartheta$ доказательство аналогично). Для любого $x \in \mathfrak{D}_\vartheta(\sigma)$ найдется допустимое управление $t \rightarrow u(t, \sigma)$, $0 \leq t \leq \vartheta$, такое, что

$$x = - \int_0^{\vartheta} X(0, t, \sigma) u(t, \sigma) dt.$$

Пусть $u(t, \sigma_0)$ — измеримое сечение функции $t \rightarrow U(f^t \sigma_0)$, ближайшее к $u(t, \sigma)$. Тогда

$$|u(t, \sigma) - u(t, \sigma_0)| = \rho(u(t, \sigma), U(f^t \sigma_0)), \quad 0 \leq t \leq \vartheta,$$

$$x_0 \doteq - \int_0^{\vartheta_0} X(0, t, \sigma_0) u(t, \sigma_0) dt \in \mathfrak{D}_{\vartheta_0}(\sigma_0).$$

Имеем далее:

$$\begin{aligned}|x - x_0| &\leq \left| \int_0^{\vartheta} X(0, t, \sigma) u(t, \sigma) dt - \int_0^{\vartheta} X(0, t, \sigma) u(t, \sigma_0) dt \right| + \\ &+ \left| \int_0^{\vartheta} X(0, t, \sigma) u(t, \sigma_0) dt - \int_0^{\vartheta_0} X(0, t, \sigma_0) u(t, \sigma_0) dt \right|.\end{aligned}$$

Поэтому с учетом неравенства $|u(t, \sigma) - u(t, \sigma_0)| \leq \text{dist}(U(f^t \sigma), U(f^t \sigma_0))$ получаем:

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\leq \int_0^{\vartheta} |X(0, t, \sigma)| \text{dist}(U(f^t \sigma), U(f^t \sigma_0)) dt + \\ &+ \int_0^{\vartheta_0} |X(0, t, \sigma) - X(0, t, \sigma_0)| |u(t, \sigma_0)| dt + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} |X(0, t, \sigma)| |u(t, \sigma_0)| dt. \end{aligned} \quad (6.3)$$

В силу непрерывности функций $\sigma \rightarrow U(f^t \sigma)$, $\sigma \rightarrow X(0, t, \sigma)$ (равномерной по $t \in [0, \vartheta]$) каждый из интегралов (6.3) стремится к нулю при $(\vartheta, \sigma) \rightarrow (\vartheta_0, \sigma_0)$.

Докажем, что функция $(\xi, \sigma) \rightarrow h(\xi, \sigma, \vartheta)$ непрерывна. Пусть последовательность $\{(\xi_i, \sigma_i)\}$ сходится к $(\hat{\xi}, \hat{\sigma}) \in \mathbb{S} \times \Sigma$. Тогда в силу ограниченности последовательности управлений $\{u(t, \xi_i, \sigma_i)\}$ из нее можно выделить слабо сходящуюся на $[0, \vartheta]$ подпоследовательность (мы ее снова обозначим $\{u(t, \xi_i, \sigma_i)\}$). Обозначим этот слабый предел $u(t, \hat{\xi}, \hat{\sigma})$. В силу выпуклости множества U последовательность $\xi_i X(0, t, \sigma_i) u(t, \xi_i, \sigma_i)$, где $u(t, \xi_i, \sigma_i)$, находится из условия максимума

$$\max_{u \in U} \xi_i X(0, t, \sigma_i) u = \xi_i X(0, t, \sigma_i) u(t, \xi_i, \sigma_i),$$

слабо сходится к $\hat{\xi} X(0, t, \hat{\sigma}) u(t, \hat{\xi}, \hat{\sigma})$. □

7. ГЛОБАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ

Пусть заданы динамическая система (Σ, f^t) , непрерывные ограниченные функции $A : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n)$, $B : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n, m)$ и множество $U \subset \mathbb{R}^m$.

Определение 7. Система (S, σ) вида

$$\dot{x} = A(f^t \sigma)x + B(f^t \sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times U,$$

где $S = (A, B)$, называется *равномерно локально управляемой*, если найдутся такие $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что $O_\varepsilon^n \subset \mathcal{D}_\vartheta(f^\tau \sigma)$ для всех $\tau \geq 0$, и *глобально управляемой*, если $\mathcal{D}(\sigma) = \mathbb{R}^n$. Семейство (S, Σ) называется *глобально управляемым*, если каждая система (S, σ) семейства (S, Σ) глобально управляема.

Непосредственно из определения равномерной локальной управляемости системы (S, σ) следует, что $O_\varepsilon^n \subset \mathcal{D}_\vartheta(\hat{\sigma})$ для некоторых $\varepsilon > 0$, $\vartheta > 0$ и всех $\hat{\sigma} \in \text{orb}_+(\sigma)$.

Введем в рассмотрение следующее условие:

$$\text{множество } U \text{ компактно, выпукло и } 0 \in \text{int } U. \quad (\mathbb{Q})$$

Лемма 9. Пусть выполнено условие $(\mathbb{Q})$, пространство Σ компактно и $\sigma \in \Sigma$. Семейство $(S, \text{orb}_+(\sigma))$ глобально управляемо в том и только том случае, если для любого $N > 0$ найдется $\vartheta > 0$ такое, что $O_N^n \subset \mathcal{D}_\vartheta(f^\tau \sigma)$ для всех $\tau \geq 0$.

Доказательство. Если выполнено условие леммы, то для всех $\xi \in \mathbb{S}$ и всех $\tau \geq 0$ выполнено неравенство $h(\xi, f^\tau \sigma, \vartheta) \geq N$, где h — опорная функция множества $\mathcal{D}_\vartheta(f^\tau \sigma)$. Так как функция $(\xi, \sigma) \rightarrow h(\xi, \sigma, \vartheta)$ непрерывна на $\mathbb{S} \times \Sigma$ (теорема 11), то $h(\xi, \hat{\sigma}, \vartheta) \geq N$ для всех $(\xi, \hat{\sigma}) \in \mathbb{G} \doteq \mathbb{S} \times \text{orb}_+(\sigma)$. Фиксируем последовательность $\{N_i\}_{i=1}^\infty$, $N_i \rightarrow \infty$, и построим $\vartheta_i > 0$ из следующего условия: $h(\xi, \hat{\sigma}, \vartheta_i) \geq N_i$ при всех $(\xi, \hat{\sigma}) \in \mathbb{G}$. Так как $\mathcal{D}_{\vartheta_i}(\sigma) \subset \mathcal{D}(\sigma)$, то $h(\xi, \hat{\sigma}) = \infty$, где $h(\xi, \sigma)$ — опорная функция множества $\mathcal{D}(\sigma)$.

Если условие леммы не выполнено, то найдется такое N , что для любого $\vartheta > 0$ существуют $\tau > 0$ и $x_0 \in O_N$ такие, что $x_0 \notin \mathcal{D}_\vartheta(f^\tau \sigma)$. Поэтому $h(\xi, f^\tau \sigma, \vartheta) < N$ для некоторого $\xi \in \mathbb{S}$. Фиксируем последовательность $\{\vartheta_i\}_{i=1}^\infty$, $\vartheta_i \rightarrow \infty$, и построим последовательности $\{\tau_i\}$, $\{\xi_i\}$, $\xi_i \in \mathbb{S}$, такие, что $h(\xi_i, \sigma_i, \vartheta_i) < N$, где $\sigma_i = f^{\tau_i} \sigma$. В силу компактности множества $\mathbb{G}$ из последовательности $(\{\xi_i, \sigma_i\})$ выделим сходящуюся к некоторой точке $(\hat{\xi}, \hat{\sigma}) \in \mathbb{G}$ подпоследовательность (обозначим ее снова $\{\xi_i, \sigma_i\}$).

Покажем, что $h(\widehat{\xi}, \widehat{\sigma}) \leq N$. Действительно, если $h(\widehat{\xi}, \widehat{\sigma}) > N$, то поскольку функция $\vartheta \rightarrow h(\widehat{\xi}, \widehat{\sigma}, \vartheta)$ не убывает (в силу монотонности $\mathfrak{D}_\vartheta(\sigma)$ по ϑ), а функция $(\xi, \sigma) \rightarrow h(\xi, \sigma, \vartheta)$ непрерывна, найдется такой номер i_0 , что $h(\xi_i, \sigma_i, \vartheta_i) > N$ при всех $i \geq i_0$. $\square$

Теорема 12. Пусть выполнено условие (Q), пространство Σ компактно, $\sigma \in \Sigma$, система (A, σ) приводима (к системе с постоянной матрицей) и $\lambda_n(A, \sigma) \leq 0$. Если система (S, σ) равномерно локально управляема, то семейство $(S, \text{ogr}_+(\sigma))$ глобально управляемо.

Пример 1. Покажем, что условие приводимости системы (A, σ) нельзя ослабить до требования правильности. Рассмотрим скалярное уравнение $(a, 1): \dot{x} = a(t)x + u$, где $a(t) = \alpha$ при $t \in (-\infty, 0)$, $a(t) = \alpha(t+1)^{-1}$ при $t \in [0, \infty)$ и $\alpha > 1$. Пусть $|u| \leq 1$. Наряду с этим уравнением будем рассматривать семейство уравнений $\{(a, 1)\}_+$, где множество $\{a\}_+$ состоит из всех функций $\widehat{a}$, полученных в результате замыкания множества сдвигов влево функции $t \rightarrow a(t)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\lambda(\widehat{a}) = \lambda(-\widehat{a}) = 0$ при всех $\widehat{a} \in \{a\}_+$. Поэтому всякое уравнение в $\{\widehat{a}\}_+$ правильное. Кроме того, непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение $(a, 1)$ равномерно локально управляемо. С другой стороны, для опорной функции $h(a_\tau)$, где $a_\tau(t) = a(\tau + t)$, $\tau \geq 0$, множества управляемости $\mathfrak{D}(a_\tau)$ уравнения $\{(a_\tau, 1)\}_+$ имеем:

$$h(-1, a_\tau) = (1 + \tau)^\alpha \int_\tau^\infty (t + 1)^{-\alpha} dt < \infty, \quad \tau \geq 0,$$

поэтому семейство $\{(a, 1)\}_+$ не является глобально управляемым.

Доказательству теоремы 12 и формулируемой ниже теоремы 13 посвящены следующие разделы.

Теорема 13. Пусть выполнено условие (Q), пространство Σ компактно и $\sigma \in \Sigma$. Если для всякого нетривиального решения системы (A, σ) выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|x(t)|}{t} < \infty \quad (7.1)$$

и система (S, σ) равномерно локально управляема, то (S, σ) глобально управляема.

Замечание 1. Если система (S, σ) приводима и $\lambda_n(A, \sigma) \leq 0$, то всякое решение $x(t)$ системы (A, σ) размерности $n \geq 1$ удовлетворяет неравенству

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|x(t)|}{t^{n-1}} < \infty. \quad (7.2)$$

Можно предположить, что теорема 13 останется верной, если при $n \geq 2$ неравенство (7.1) заменить на (7.2). Оказывается, что без дополнительного предположения о приводимости системы (S, σ) неравенство (7.2) нельзя ослабить даже до неравенства

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|x(t)|}{t^{1+\varepsilon}} < \infty$$

при любом $\varepsilon > 0$. Действительно, вернемся к уравнению $(a, 1)$ из примера 1. При $\alpha \leq 1$ все условия теоремы 13 выполнены, следовательно, уравнение $(a, 1)$ глобально управляемо, но при любом $\alpha > 1$ уравнение $(a, 1)$ не является глобально управляемым.

Отметим еще, что утверждение теоремы 13 нельзя заменить более сильным: семейство $(S, \text{ogr}_+(\sigma))$ глобально управляемо. Соответствующий пример приведен ниже.

Пусть Σ компактно и μ — нормированная борелевская мера на Σ , инвариантная относительно потока f^t , т.е. μ задана на σ -алгебре борелевских множеств пространства Σ , $\mu(\Sigma) = 1$ и $\mu(V) = \mu(f^t V)$ для всякого μ -измеримого множества $V \subset \Sigma$ и каждого $t \in \mathbb{R}$. Множество инвариантных нормированных мер на Σ обозначим $M(\Sigma)$.

Теорема 14. Пусть выполнено условие (Q), пространство Σ компактно, $\sigma \in \Sigma$ и семейство $(S, \text{ogr}_+(\sigma))$ глобально управляемо. Тогда неравенство $\lambda_n(\widehat{\sigma}) \leq 0$ выполнено для почти всех $\widehat{\sigma} \in \text{ogr}_+(\sigma)$ относительно любой меры $\mu \in M(\text{ogr}_+(\sigma))$. Далее, если система (A, σ) приводима, то $\lambda_n(\widehat{\sigma}) \leq 0$ для всех $\widehat{\sigma} \in \text{ogr}_+(\sigma)$.

Доказательство этой теоремы проводится по схеме, изложенной в работе [19].

8. ОЦЕНКИ ОПОРНОЙ ФУНКЦИИ

Всюду далее мы предполагаем, что выполнено условие $(\mathbb{Q})$. Будем подчеркивать в этом параграфе, зависимость множества управляемости $\mathfrak{D}(\sigma, U)$ и опорной функции $h(\xi, \sigma, U)$ от U . Из определения $\mathfrak{D}(\sigma, U)$ следует равенство

$$\mathfrak{D}(\sigma, U) = - \int_0^\infty X(0, t, \sigma) B(f^t \sigma) U dt,$$

а опорная функция $\xi \rightarrow h(\xi, \sigma, U)$ множества $\mathfrak{D}(\sigma, U)$ имеет вид

$$h(-\xi, \sigma, U) = \int_0^\infty \xi X(0, t, \sigma) B(f^t \sigma) u(t, \sigma) dt,$$

где управление $u(t, \sigma)$ удовлетворяет условию максимума

$$\max_{u \in U} \xi X(0, t, \sigma) B(f^t \sigma) u = \xi X(0, t, \sigma) B(f^t \sigma) u(t, \sigma).$$

Лемма 10. Пусть выполнено условие $(\mathbb{Q})$, Σ компактно и система (S, σ) равномерно локально управляема. Тогда найдется такое $\vartheta_0 > 0$, что для всех $\hat{\sigma} \in \overline{\text{orb}}_+(\sigma)$ и $\vartheta \geq \vartheta_0$ имеем

$$\alpha(\vartheta) \sum_{i=0}^\infty |\xi X(0, i\vartheta, \hat{\sigma})| \leq h(\xi, \hat{\sigma}, U) \leq \beta(\vartheta) \sum_{i=0}^\infty |\xi X(0, i\vartheta, \hat{\sigma})|, \quad (8.1)$$

причем $\alpha(\vartheta)$ и $\beta(\vartheta)$ не зависят от $(\xi, \hat{\sigma}) \in \mathbb{S} \times \overline{\text{orb}}_+(\sigma)$ и $\alpha(\vartheta) \geq \alpha(\vartheta_0) > 0$.

Доказательство. Найдутся такие $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$, что $O_{\varepsilon_1}^m \subset U \subset O_{\varepsilon_2}^m$. Поэтому

$$\mathfrak{D}(\sigma, O_{\varepsilon_1}^m) \subset \mathfrak{D}(\sigma, U) \subset \mathfrak{D}(\sigma, O_{\varepsilon_2}^m),$$

$$\varepsilon_1 \int_0^\infty |\xi X(0, t, \sigma) B(f^t \sigma)| dt \leq h(\xi, \sigma) \leq \varepsilon_2 \int_0^\infty |\xi X(0, t, \sigma) B(f^t \sigma)| dt$$

для всех $(\xi, \sigma) \in \mathbb{S} \times \Sigma$. После несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\xi X(0, t, \sigma) B(f^t \sigma)| dt &= \sum_{i=0}^\infty \int_0^\vartheta |\xi_i X(i\vartheta, i\vartheta + t, \sigma) B(f^{i\vartheta+t} \sigma)| dt = \\ &= \sum_{i=0}^\infty |\xi_i| \int_0^\vartheta |\psi_i X(0, t, \sigma_i) B(f^t \sigma_i)| dt = \sum_{i=0}^\infty |\xi_i| h(\psi_i, \sigma_i, \vartheta, O_1^m), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $\xi_i = \xi X(0, i\vartheta, \sigma)$, $\psi_i = \xi_i / |\xi_i| \in \mathbb{S}$, $\sigma_i = f^{i\vartheta} \sigma$. Из непрерывности функции $h(\psi, \hat{\sigma}, \vartheta, O_1^m)$ по $(\psi, \hat{\sigma}) \in \mathbb{S} \times \Sigma$ следует, что найдутся наименьшее $c_1(\vartheta)$ и наибольшее $c_2(\vartheta)$ значения h на $\mathbb{S} \times \overline{\text{orb}}_+(\sigma)$, причем $c_1(\vartheta)$ и $c_2(\vartheta)$ не убывают по ϑ . Далее, в силу условия равномерной локальной управляемости, $c_1(\vartheta) > 0$ при всех достаточно больших ϑ . Неравенства (8.1) следуют теперь из (8.2) при $\alpha(\vartheta) = \varepsilon_1 c_1(\vartheta)$, $\beta(\vartheta) = \varepsilon_2 c_2(\vartheta)$. $\square$

Лемма 11. Пусть выполнено условие $(\mathbb{Q})$, пространство Σ компактно и система (S, σ) равномерно локально управляема. Тогда найдутся $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 \geq \delta_1$ такие, что

$$\delta_1 \int_0^\infty |\xi X(0, t, \hat{\sigma})| dt \leq h(\xi, \hat{\sigma}, U) \leq \delta_2 \int_0^\infty |\xi X(0, t, \hat{\sigma})| dt, \quad (\xi, \hat{\sigma}) \in \mathbb{S} \times \overline{\text{orb}}_+(\sigma). \quad (8.3)$$

Доказательство. Пусть ϑ таково, что выполнены неравенства (8.1). Далее, пусть d_1 и d_2 — наименьшее и наибольшее значения интеграла

$$I(\xi, \hat{\sigma}) = \int_0^\infty |\xi X(0, t, \hat{\sigma})| dt$$

на $\mathbb{S} \times \overline{\text{orb}}_+(\sigma)$. Очевидно, $d_1 > 0$. Так как

$$I(\xi, \hat{\sigma}) = \sum_{i=0}^\infty \int_0^\vartheta |\xi X(0, i\vartheta + t, \hat{\sigma})| dt = \sum_{i=0}^\infty |\xi_i| \int_0^\vartheta |\psi_i X(0, t, \sigma_i)| dt,$$

где $\xi_i = \xi X(0, i\vartheta, \hat{\sigma})$, $\psi_i = \xi_i / |\xi_i|$, $\sigma_i = f^{i\vartheta} \hat{\sigma}$, то

$$d_1 \sum_{i=0}^\infty |\xi_i| \leq I(\xi, \hat{\sigma}) \leq d_2 \sum_{i=0}^\infty |\xi_i|.$$

Поэтому неравенства (8.3) выполнены при $\delta_1 = \alpha(\vartheta)/d_2$, $\delta_2 = \beta(\vartheta)/d_1$. $\square$

Доказательство теоремы 13. Из равномерной локальной управляемости системы (S, σ) следует неравенство $h(\xi, \sigma) \geq \delta_1 I(\xi, \sigma)$ (лемма 11), а из условия (7.1) — неравенство

$$|X(t, 0, \sigma) \xi^*| \leq c(t+1), \quad \xi \in \mathbb{S}.$$

Поэтому

$$|\xi X(0, t, \sigma)| \geq [c(t+1)]^{-1}, \quad h(\xi, \sigma) \geq \delta_1 I(\xi, \sigma) \geq \delta_1 c^{-1} \int_0^\infty (t+1)^{-1} dt = \infty.$$

Теорема 13 доказана. $\square$

9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12

Лемма 12. Пусть пространство Σ компактно, $\sigma \in \Sigma$ и $L(t, \sigma)$ — преобразование Ляпунова, приводящее систему (A, σ) к системе $\dot{y} = Fy$ с постоянной матрицей F . Тогда для каждого $\hat{\sigma} \in \overline{\text{orb}}_+(\sigma)$ найдется преобразование Ляпунова $L(t, \hat{\sigma})$, приводящее систему $(A, \hat{\sigma})$ к системе F .

Доказательство. Если $L(t, \sigma)$ — преобразование Ляпунова системы (A, σ) , то

$$L_\tau(t, \sigma) \doteq L(t + \tau, \sigma)$$

— преобразование Ляпунова системы $(A, F^\tau \sigma)$. Зафиксируем $\hat{\sigma} \in \overline{\text{orb}}_+(\sigma)$ и такую последовательность $\{\tau_i\}_{i=0}^\infty$, что $f^{\tau_i} \sigma \rightarrow \hat{\sigma}$. Так как последовательности $\{L_{\tau_i}(t, \sigma)\}$, $\{L_{\tau_i}^{-1}(t, \sigma)\}$ ограничены на $\mathbb{R}$ и имеют, в силу равенства

$$\dot{L}(t, \sigma) = FL(t, \sigma) - L(t, \sigma)A(f^t \sigma), \quad t \geq 0, \quad (9.1)$$

ограниченную производную, то они локально компактны. Выделим из этих последовательностей равномерно на каждом отрезке сходящиеся подпоследовательности и сохраним прежние обозначения. С учетом равенства (9.1) и равенств $L_{\tau_i}(t, \sigma)L_{\tau_i}^{-1}(t, \sigma) = I_n$ замечаем, что если $\hat{L}(t, \sigma) = \lim L_{\tau_i}(t, \sigma)$, то $\hat{L}^{-1}(t, \sigma) = \lim L_{\tau_i}^{-1}(t, \sigma)$ и $\hat{L}(t, \sigma)$ ограничена на $\mathbb{R}$ вместе с обратной матрицей и имеет на $\mathbb{R}$ ограниченную производную. Следовательно, $\hat{L}(t, \sigma) = L(t, \hat{\sigma})$. $\square$

Лемма 13. Пусть пространство Σ компактно, $\sigma \in \Sigma$ и $L(t, \sigma)$ — преобразование Ляпунова, приводящее систему (A, σ) к системе $\dot{y} = Fy$ с постоянной матрицей F . Тогда существуют такие константы $d_1 > 0$, $d_2 \geq d_1$, что каждой точке $(\xi, \hat{\sigma})$ пространства $\mathbb{S} \times \overline{\text{orb}}_+(\sigma)$ отвечает $\psi = \psi(\xi, \hat{\sigma}) \in \mathbb{S}$, обеспечивающее неравенства

$$d_1 \int_0^\infty |\xi Y(-t)| dt \leq \int_0^\infty |\xi X(0, t, \sigma)| dt \leq d_2 \int_0^\infty |\xi Y(-t)| dt, \quad Y(t) = \exp(Ft). \quad (9.2)$$

Доказательство. Обозначим

$$I(\xi, A, \sigma) = \int_0^\infty |\xi X(0, t, \sigma)| dt.$$

Тогда из равенства

$$X(t, s, \sigma) = L^{-1}(t, \sigma)Y(t - s)L(s, \sigma)$$

следует равенство

$$I(\xi, A, \hat{\sigma}) = \int_0^\infty |\xi L^{-1}(0, \hat{\sigma})Y(-t)L(t, \hat{\sigma})| dt = |\xi L^{-1}(0, \hat{\sigma})| \int_0^\infty |\psi Y(-t)L(t, \hat{\sigma})| dt,$$

где $\hat{\sigma} \in \overline{\text{orb}}_+(\sigma)$, $\psi = \xi L^{-1}(0, \hat{\sigma})/|\xi L^{-1}(0, \hat{\sigma})| \in \mathbb{S}$. Так как

$$|\psi Y(-t)| |L^{-1}(t, \hat{\sigma})|^{-1} \leq |\psi Y(-t)L(t, \hat{\sigma})| \leq |\psi Y(-t)| |L(t, \hat{\sigma})|,$$

то неравенства (9.2) выполнены при

$$d_1 = \inf_{(\xi, \hat{\sigma}) \in \mathbb{S} \times \Sigma} |\xi L^{-1}(0, \hat{\sigma})| \left(\sup_{t \geq 0} |L^{-1}(t, \hat{\sigma})| \right)^{-1}, \quad d_2 = \sup_{(\xi, \hat{\sigma}) \in \mathbb{S} \times \Sigma} |\xi L^{-1}(0, \hat{\sigma})| \sup_{t \geq 0} |L(t, \hat{\sigma})|.$$

Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 12. Достаточно показать, что $h(\xi, S, \hat{\sigma}) = \infty$ для всех $(\xi, \hat{\sigma}) \in \mathbb{S} \times \overline{\text{orb}}_+(\sigma)$, где $h(\xi, S, \sigma)$ — опорная функция множества управляемости $\mathfrak{D}(S, \sigma)$ системы (S, σ) . В силу равномерной локальной управляемости системы (S, σ) и леммы 11, это эквивалентно равенству $I(\xi, A, \hat{\sigma}) = \infty$ для всех $(\xi, \hat{\sigma}) \in \mathbb{S} \times \overline{\text{orb}}_+(\sigma)$. Так как система (A, σ) приводима к системе с постоянной матрицей F , то в силу леммы 13 семейство $(S, \overline{\text{orb}}_+(\sigma))$ глобально управляемо в том и только в том случае, если $I(\xi, F) = \infty$ для всех $\xi \in \mathbb{S}$.

Можно считать, что F имеет жорданову форму: $F = \text{diag}[Q_1, \dots, Q_p]$, где $Q_1, \dots, Q_p$ — жордановы клетки. Тогда

$$\exp(-tF) = \text{diag}[\exp(-tQ_1), \dots, \exp(-tQ_p)].$$

Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_p$ — действительные части собственных значений матрицы F , $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$; тогда

$$|\xi \exp(-tF)| \geq |\xi_1| \exp(-t\lambda_1) \geq |\xi_1|$$

при $t \geq 0$ ($\lambda_1 \leq 0$ в силу неположительности показателей Ляпунова). Таким образом, если $\xi_1 \neq 0$, то $I(\xi, F) = \infty$. Аналогично доказывается, что если $\xi = (0, \dots, 0, \xi_s, \dots, \xi_n)$ и $\xi_s \neq 0$, то

$$|\xi \exp(-tF)| \geq |\xi_s| \exp(-t\lambda_{j(s)}) \geq |\xi_s|,$$

поэтому $I(\xi, F) = \infty$. $\square$

10. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ

Напомним, что через $M(\Sigma)$ мы обозначаем множество инвариантных вероятностных мер на Σ . Если пространство Σ компактно, то в силу теоремы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (см. [15, с. 514], [9, с. 42]) множество $M(\Sigma)$ не пусто. Далее, для произвольного множества Σ_0 в Σ и любой точки $\sigma \in \Sigma_0$ множество $c(\sigma, \Sigma_0) \doteq \{t \geq 0 : f^t \sigma \in \Sigma_0\}$ называется *относительно измеримым*, если существует предел

$$\omega(\sigma, \Sigma_0) \doteq \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{[0, \vartheta] \cap c(\sigma, \Sigma_0)\}}{\vartheta} \quad (10.1)$$

(здесь mes — мера Лебега на прямой). Предел (10.1) называется *частотой попадания* движения $t \rightarrow f^t \sigma$ в множество Σ_0 .

Мера μ из $M(\Sigma)$ называется *эргодической*, если для всякого инвариантного множества Σ_0 из Σ его мера равна нулю или единице. Если существует эргодическая мера, то динамическая система (Σ, f^t) называется *эргодической*. Система (Σ, f^t) называется *строго эргодической*, если эргодическая мера на Σ единственна. Напомним, что если пространство Σ минимально (в этом случае всякое движение рекуррентно, см. теорему 5), то динамическая система (Σ, f^t) эргодическая, но не

обязательно строго эргодическая. Примером строго эргодической системы служит поток на минимальном множестве, состоящий только из почти периодических движений. В случае эргодической системы для всякой μ -интегрируемой функции $V : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ и почти всех (в смысле меры μ) σ из Σ имеет место равенство (теорема Биркгофа—Хинчина, см. [9, с. 20])

$$\int_{\Sigma} V(\sigma) \mu(d\sigma) = \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} V(f^t \sigma) dt.$$

В частности, если V_{Σ_0} — индикатор множества Σ_0 , то $\mu(\Sigma_0) = \omega(\sigma, \Sigma_0)$ при почти всех σ .

Если (Σ, f^t) — эргодическая динамическая система и (Ω, g^t) — ее расширение (см. раздел 5), то определим на Ω σ -алгебру $\mathfrak{B}$ борелевских множеств равенством $\mathfrak{B} = p(\mathfrak{A})$, где p — проекция Ω на Σ , $\mathfrak{A}$ — σ -алгебра на Σ . Пусть далее, мера ν на $\mathfrak{B}$ определена равенством $\nu(Q) = \mu(p(Q))$ для всякого $Q \in \mathfrak{B}$. Тогда

$$\nu(g^t Q) = \mu(p g^t Q) = \mu(f^t p Q) = \mu(p Q) = \nu(Q)$$

и, следовательно, мера ν инвариантна и эргодична. Таким образом, псевдорасширение эргодического семейства (S, Σ) приводит к эргодическому семейству (S, Ω) . Кроме того, поскольку семейство (A, Σ) также эргодическое, то эргодическим останется и псевдорасширение (A, Ω) . Далее, в силу теоремы 10 канонический представитель (C, Ω) семейства (S, Σ) тоже останется эргодическим.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех таких σ , что система (S, σ) глобально управляема. Тогда $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно относительно потока f^t и поэтому, если динамическая система (Σ, f^t) эргодическая, то мера $\mu(\mathfrak{M})$ равна либо нулю, либо единице. Следовательно, в случае эргодичности либо для почти всех $\sigma \in \Sigma$ система (S, σ) глобально управляема, либо почти всякая система (S, σ) не является глобально управляемой.

Теорема 15. Пусть выполнено условие (Q), пространство Σ минимально и μ — фиксированная эргодическая мера на Σ . Если система (S, σ) равномерно локально управляема и показатели Ляпунова почти всякой (относительно меры μ) системы (A, σ) неположительны, то почти всякая система (S, σ) глобально управляема.

Следствие 1. В условиях теоремы 15 множество $\mathfrak{M}$ систем (S, σ) , не являющихся глобально управляемыми, имеет первую категорию Бэра (т.е. $\mathfrak{M}$ представимо в виде не более чем счетного объединения нигде не плотных множеств).

Напомним [3, с. 116], что верхним центральным показателем системы (S, σ) называется число

$$\Lambda(\sigma) = \inf_{\vartheta > 0} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\vartheta} \sum_{i=1}^k \ln \left| X(\vartheta, 0, f^{(i-1)\vartheta} \sigma) \right| \right).$$

Теорема 16. Пусть выполнено условие (Q), пространство Σ минимально и найдется такое $\sigma \in \Sigma$, что движение $t \rightarrow f^t \sigma$ почти периодически. Тогда почти всякая система семейства (S, Σ) глобально управляема в том и только в том случае, если система (S, σ) вполне управляема и $\Lambda(\sigma) \leq 0$.

Доказательство теоремы 16 опирается на теорему 6 и во многом повторяет рассуждения работы [19].

11. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 15 И СЛЕДСТВИЯ 1

Для произвольной непрерывной функции $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ введем в рассмотрение множество

$$J_{\tau}(\gamma) = \{t \geq \tau : \gamma(t) - \gamma(\tau) \leq 1\}.$$

Лемма 14 (см. [5, лемма 12]). Пусть предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$ существует и неположителен. Тогда для любого $\alpha > 0$ множество $c_{\alpha} \doteq \{\tau \geq 0 : \text{mes } J_{\tau}(\gamma) \leq \alpha\}$ относительно измеримо и его относительная мера $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \text{mes}\{[0, \vartheta] \cap c_{\alpha}\}$ равна нулю.

Доказательство. Если это неверно, то

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{[0, \vartheta] \cap c_\alpha\}}{\vartheta} = \beta > 0.$$

Следовательно, для любого $\vartheta_0 \geq 0$ справедливо равенство

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{[\vartheta_0, \vartheta] \cap c_\alpha\}}{\vartheta - \vartheta_0} = \beta$$

и поэтому найдется такое $\vartheta_1 \geq 2\vartheta_0$, что

$$\frac{\text{mes}\{[\vartheta_0, \vartheta_1] \cap c_\alpha\}}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \geq \frac{\beta}{2}. \quad (11.1)$$

Выберем ϑ_1 таким, что $\vartheta_1 - \vartheta_0 > 8\alpha/\beta$, и на отрезке $[\vartheta_0, \vartheta_1]$ построим промежутки $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ длины $4\alpha/\beta$. Тогда максимальное k не превосходит $\beta(\vartheta_1 - \vartheta_0)/4\alpha$ и промежутков $\Delta_{k+1} \doteq [\vartheta_0, \vartheta_1] \setminus \bigcup_{j=1}^k \Delta_j$ имеет длину $< 4\alpha/\beta$.

Пусть $m_j = \text{mes}(\Delta_j) \cap c_\alpha$. Из (11.1) следует неравенство

$$m_1 + \dots + m_{k+1} = \text{mes}\{[\vartheta_0, \vartheta_1] \cap c_\alpha\} \geq \frac{\beta}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0).$$

Обозначим через d количество промежутков Δ_j , для которых $m_j > \alpha$. Так как имеют место неравенства $m_j \leq \text{mes} \Delta_j < 4\alpha/\beta$, то

$$\frac{\beta}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0) \leq m_1 + \dots + m_{k+1} \leq \frac{4\alpha d}{\beta} + (k+1-d)\alpha.$$

Поэтому

$$\frac{\beta(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{2} \leq \frac{(4-\beta)\alpha}{\beta}d + (k+1)\alpha \leq \frac{4\alpha}{\beta}d + \frac{3\beta(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{8}.$$

Следовательно, выполнено неравенство $\beta(\vartheta_1 - \vartheta_0)/2 \leq 4d\alpha/\beta$ и поэтому $d \geq \varepsilon(\vartheta_1 - \vartheta_0)$, где $\varepsilon = \beta^2/32\alpha$.

Пронумеруем промежутки Δ_j , для которых $\text{mes}\{\Delta_j \cap c_\alpha\} > \alpha$, в порядке их расположения на числовой прямой и введем для них обозначения $E_1, E_2, \dots, E_d$. При больших ϑ выполнено неравенство $d > 2$. Пусть t_1 — произвольная точка множества $E_1 \cap c_\alpha$. Тогда $\text{mes} J_{t_1}(\gamma) \leq \alpha$ и найдется точка $t_2 \in (E_2 \cap c_\alpha) \setminus J_{t_1}(\gamma)$. Действительно, если t_2 не существует, то $E_2 \cap c_\alpha \subset J_{t_1}(\gamma)$ и поэтому

$$\alpha \leq \text{mes}(E_2 \cap c_\alpha) < \text{mes} J_{t_1}(\gamma) \leq \alpha,$$

противоречие. Аналогично построим точки $t_3, \dots, t_d$ такие, что $t_j \in (E_j \cap c_\alpha) \setminus J_{t_{j-1}}(\gamma)$. Поскольку $t_j \notin J_{t_{j-1}}(\gamma)$, $j = 2, \dots, d$, $\gamma(t_j) > \gamma(t_{j-1}) + 1$, поэтому

$$\gamma(t_d) > \gamma(t_1) + d - 1 \geq \gamma(t_1) + \varepsilon(\vartheta_1 - \vartheta_0) - 1. \quad (11.2)$$

Так как $\vartheta_1 \geq 2\vartheta_0$ и $\vartheta_0 \leq t_1 < \dots < t_d \leq \vartheta_1$, то из (11.2) получаем неравенства

$$\frac{\gamma(t_d)}{t_d} > \frac{\gamma(t_1)}{t_d} + \frac{\varepsilon}{t_d}(\vartheta_1 - \vartheta_0) - \frac{1}{t_d} \geq \frac{\gamma(t_1)}{t_d} + \frac{\varepsilon}{\vartheta_d}(\vartheta_1 - \vartheta_0) - \frac{1}{\vartheta_0}$$

или

$$\frac{\gamma(t_d)}{t_d} > \frac{\gamma(t_1)}{t_d} + \varepsilon - \frac{\varepsilon\vartheta_0}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_0} \geq \frac{\gamma(t_1)}{t_d} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{\vartheta_0}.$$

Построим функцию $t \rightarrow p(t) = \min\{0, \gamma(t)/t\}$, $t \geq 0$. Из определения p следует легко проверяемое неравенство $\frac{\gamma(t_1)}{t_d} \geq p(t_1)$, поэтому

$$\frac{\gamma(t_d)}{t_d} > p(t_1) + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{\vartheta_0}.$$

Так как $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$, то устремляя в последнем неравенстве ϑ_0 к $+\infty$ (при этом t_1 и $t_d \rightarrow \infty$), получим $\varepsilon \leq 0$. $\square$

Доказательство теоремы 15. А. В силу равномерной локальной управляемости системы (Σ, f^t) и минимальности Σ семейство (S, Σ) регулярно (определение 4) и поэтому в силу теоремы 10, допускает каноническое представление (определение 5). Поскольку свойства локальной и глобальной управляемости инвариантны относительно перроновских преобразований и, кроме того, перроновские преобразования сохраняют эргодичность, будем сразу предполагать, что семейство (S, Σ) записано в канонической форме (следовательно, матрица $A(\sigma)$ верхне-треугольная).

Б. Наряду с каноническим семейством (S, Σ) будем рассматривать семейство систем (T, Σ) , где $T(\sigma) = (A(\sigma), I_n)$, I_n — единичная матрица. Нетрудно убедиться в том, что функция

$$\xi \rightarrow I(\xi, \sigma) = \int_0^\infty |\xi X(0, t, \sigma)| dt$$

является опорной функцией множества управляемости $\mathfrak{D}(\sigma, T, O_1^n)$ системы (T, σ) с ограничивающим множеством $U = O_1^n \subset \mathbb{R}^n$. В силу леммы 11 система (S, σ) глобально управляема в том и только в том случае, если система (T, σ) глобально управляема. Поэтому достаточно доказать, что мера множества глобально управляемых систем (T, σ) равна единице.

Пусть $a_1(\sigma), \dots, a_n(\sigma)$ — диагональные элементы матрицы $A(\sigma)$ и

$$\mathfrak{M}_1 \doteq \left\{ \sigma \in \Sigma : \int_0^\infty \exp \left(- \int_0^t a_n(f^s \sigma) ds \right) dt = \infty \right\},$$

$$\mathfrak{M}_i \doteq \left\{ \sigma \in \mathfrak{M}_{i-1} : \int_0^\infty \exp \left(- \int_0^t a_{n-i+1}(f^s \sigma) ds \right) dt = \infty \right\}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Легко проверить, что каждое из множеств $\mathfrak{M}_i$ положительно инвариантно (т.е. если $\sigma \in \mathfrak{M}_i$, то $f^\tau \sigma \in \mathfrak{M}_i$ для всех $\tau \geq 0$). Отметим далее, что множество $\mathfrak{M}_1$ состоит из всех $\sigma \in \Sigma$, для которых система (T, σ) глобально управляема из пространства $P_0 = \mathbb{R}^n$ на подпространство

$$P_1 \doteq \{x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$$

с помощью допустимых управлений $t \rightarrow u(t) \in O_1^n$. Далее, множество $\mathfrak{M}_2$ состоит из всех $\sigma \in \Sigma$, для которых система (T, σ) одновременно глобально управляема из P_0 на подпространство P_1 и глобально управляема из P_1 на подпространство

$$P_2 \doteq \{x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{n-1} = 0, x_n = 0\}$$

вдоль P_1 , т.е. для всякого $x_0 \in P_0$ найдутся моменты времени $\vartheta_0 \geq 0$, $\vartheta_1 \geq 0$ и управление $u_0 : [0, \vartheta_0 + \vartheta_1] \rightarrow O_1^n$ такие, что решение $x(t, x_0)$ системы (T, σ) с управлением $u_0(t)$ удовлетворяет следующим условиям: $x(t, x_0) \in P_1$ при всех $t \in [\vartheta_0, \vartheta_0 + \vartheta_1]$ и $x(\vartheta_0 + \vartheta_1, x_0) \in P_2$. Рассуждая аналогичным образом, получаем включение $\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}(T)$, где $\mathfrak{M}(T)$ — множество всех таких $\sigma \in \Sigma$, что система (T, σ) глобально управляема.

В. Введем в рассмотрение множества

$$\mathfrak{N}_i(p) = \left\{ \sigma \in \Sigma : \int_0^\infty \exp \left(- \int_0^t a_{n-i+1}(f^s \sigma) ds \right) dt \leq p \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим через $\mathfrak{N}(T)$ множество таких $\sigma \in \Sigma$, что система (T, σ) не является глобально управляемой, и покажем, что

$$\mathfrak{N}(T) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{N}_i, \quad \text{где} \quad \mathfrak{N}_i \doteq \bigcup_{p=1}^\infty \mathfrak{N}_i(p).$$

Действительно, если $\sigma \notin \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{N}_i$, то $\sigma \notin \mathfrak{N}_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, поэтому $\sigma \notin \mathfrak{N}_i(p)$ для всех целых $p \geq 1$. Следовательно, $\sigma \in \mathfrak{M}_1$. Далее, так как $\sigma \notin \mathfrak{N}_2(p)$ для всех целых $p \geq 1$ и $\sigma \in \mathfrak{M}_1$,

то $\sigma \in \mathfrak{M}_2$. Продолжая эти рассуждения, получим включение $\sigma \in \mathfrak{M}_n$. Поскольку $\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}(T)$, то $\sigma \in \mathfrak{M}(T)$ и поэтому $\sigma \notin \mathfrak{N}(T)$.

Докажем, что множество $\mathfrak{N}_i(p)$ замкнуто. Пусть последовательность $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\sigma_k \in \mathfrak{N}_i(p)$ и $\sigma_k \rightarrow \hat{\sigma}$. Допустим, что $\hat{\sigma} \notin \mathfrak{N}_i(p)$. Введем обозначение

$$p_0 = \int_0^{\infty} \exp \left(- \int_0^t a_{n-i+1}(f^s \hat{\sigma}) ds \right) dt.$$

Так как $p_0 > p$, то $\delta \doteq \frac{p_0 + p}{2} > p$. Выберем ϑ таким, что

$$\int_0^{\vartheta} \exp \left(- \int_0^t a_{n-i+1}(f^s \hat{\sigma}) ds \right) dt = \delta.$$

Поскольку последовательность функций

$$t \rightarrow \exp \left(- \int_0^t a_{n-i+1}(f^s \sigma_k) ds \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11.3)$$

равномерно ограничена и равномерно непрерывна на отрезке $[0, \vartheta]$, то из нее можно выделить равномерно на $[0, \vartheta]$ сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что сама последовательность (11.3) сходится. Тогда

$$\int_0^{\vartheta} \exp \left(- \int_0^t a_{n-i+1}(f^s \sigma_k) ds \right) dt \rightarrow \delta,$$

поэтому для достаточно больших k

$$\int_0^{\infty} \exp \left(- \int_0^t a_{n-i+1}(f^s \sigma_k) ds \right) dt \geq \int_0^{\vartheta} \exp \left(- \int_0^t a_{n-i+1}(f^s \sigma_k) ds \right) dt \geq p_0,$$

что противоречит включению $\sigma_k \in \mathfrak{N}_i(p)$.

Г. Так как для почти всех (относительно любой эргодической меры μ на Σ) $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\mu(\mathfrak{N}_i(p)) = \omega(\sigma, \mathfrak{N}_i(p))$, то равенство $\mu(\mathfrak{N}_i(p)) = 0$ будет выполнено, если найдется такое множество $Q \subset \Sigma$, что $\mu(Q) = 1$ и $\omega(\sigma, \mathfrak{N}_i(p)) = 0$ для всех $\sigma \in Q$. Пусть Q — множество таких σ , что система (A, σ) правильная (из результатов [14] следует, что множество таких $\sigma \in \Sigma$, что система (A, σ) правильная, имеет полную меру) и старший показатель $\lambda_n(\sigma)$ положителен, $\lambda_n(\sigma) \leq 0$. Тогда в силу условий теоремы $\mu(Q) = 1$.

Докажем, что $\omega(\sigma, \mathfrak{N}_i(p)) = 0$ для всех $\sigma \in Q$, всех $p > 0$ и всех $i = 1, \dots, n$. Введем обозначение

$$\gamma_i(\sigma, t) = \int_0^t a_{n-i+1}(f^s \sigma) ds, \quad i = 1, \dots, n,$$

и рассмотрим множества

$$J_{\tau}(\gamma_i) = \{t \geq \tau : \gamma_i(\sigma, t) - \gamma_i(\sigma, \tau) \leq 1\}.$$

Оказывается, что

$$c(\sigma, \mathfrak{N}_i(p)) \subset \{\tau \geq 0 : \text{mes } J_{\tau}(\gamma_i) \leq pe\},$$

где e — основание натурального логарифма. Действительно, если $\tau \in c(\sigma, \mathfrak{N}_i(p))$, то

$$\int_0^{\infty} \exp \left(- \int_{\tau}^{\tau+t} a_{n-i+1}(f^s \sigma) ds \right) dt \leq \int_0^{\infty} \exp (\gamma_i(\sigma, \tau) - \gamma_i(\sigma, \tau + t)) dt \leq p.$$

Так как

$$e^{-1} \text{mes } J_{\tau}(\gamma_i) \leq \int_{J_{\tau}(\gamma_i)} \exp(\gamma_i(\sigma, \tau) - \gamma_i(\sigma, \tau + t)) dt \leq \int_0^{\infty} \exp(\gamma_i(\sigma, \tau) - \gamma_i(\sigma, \tau + t)) dt,$$

то $\text{mes } J_{\tau}(\gamma_i) \leq pe$, поэтому

$$\tau \in \{\tau \geq 0 : \text{mes } J_{\tau}(\gamma_i) \leq pe\}.$$

Поскольку для всякого $\sigma \in Q$ пределы $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_i(\sigma, t)}{t}$ существуют и неположительны, то из неравенств

$$\omega(\sigma, \mathfrak{N}_i(p)) \leq \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{1}{\vartheta} \text{mes} \{\tau \in [0, \vartheta] : \text{mes } J_{\tau}(\gamma_i) \leq pe\}$$

и леммы 14 получаем, что $\omega(\sigma, \mathfrak{N}_i(p)) = 0$ для всех $\sigma \in Q$, $p > 0$ и поэтому $\mu(\mathfrak{N}_i(p)) = 0$. $\square$

Доказательство следствия 1. Так как пространство Σ минимально и компактно, то $\mu(Q) > 0$ для любого открытого множества $Q \subset \Sigma$ (см. [9, теорема 3]). Мы показали ранее, что $\mu(\mathfrak{N}_i(p)) = 0$ для любого $p = 1, 2, \dots$. Поэтому множество $\mathfrak{N}_i(p)$ нигде не плотно в Σ . Действительно, если существует открытое множество $Q \subset \mathfrak{N}_i(p)$, то $0 < \mu(Q) \leq \mu(\mathfrak{N}_i(p))$. Поскольку множество $\mathfrak{N}_i$ представимо в виде $\mathfrak{N}_i = \bigcup_{p=1}^{\infty} \mathfrak{N}_i(p)$ то $\mathfrak{N} = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{N}_i$ — множество первой категории Бэра. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Арнольд В. И., Бронштейн И. У., Гринес В. З., Ильяшенко Ю. С. Динамические системы/ Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». — М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. — 1. — 244 с.
2. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. — М.: Высшая школа, 2001. — 239 с.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
4. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. О множестве управляемости линейной почти периодической системы// Диффер. уравн. — 1991. — 27, № 10. — С. 1692–1699.
5. Иванов А. Г., Тонков Е. Л., Шнейберг И. Я. О мере множества глобально управляемых системы// в кн.: Нелинейн. колебания и теор. управл. — Ижевск, 1981. — 3. — С. 3–32.
6. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
7. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999. — 768 с.
8. Керимов А. К. Управляемость в целом линейных периодических систем при наличии ограничений на управления// Диффер. уравн. — 1975. — 11, № 9. — С. 1575–1583.
9. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980. — 383 с.
10. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования// Прикл. мат. мех. — 1959. — 23, № 4. — С. 625–639.
11. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с.
12. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 574 с.
13. Миллиончиков В. М. О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью систем с почти периодическими коэффициентами// Диффер. уравн. — 1967. — 3, № 12. — С. 2127–2134.
14. Миллиончиков В. М. Статистически правильные системы// Мат. сб. — 1968. — 75, № 1. — С. 140–151.
15. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1949. — 550 с.
16. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова// Диффер. уравн. — 1997. — 33, № 2. — С. 226–235.
17. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Условия полной управляемости нестационарной линейной системы в критическом случае// Кибернетика и системн. анализ. — 2004. — 40, № 2. — С. 87–100.
18. Родионова А. Г., Тонков Е. Л. О непрерывности функции быстродействия в критическом случае// Изв. вузов. Сер. мат. — 1993. — 5 (372). — С. 101–111.
19. Тонков Е. Л. Стабилизация и глобальная управляемость почти периодической системы// Диффер. уравн. — 1979. — 15, № 4. — С. 757–758.

20. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы// Диффер. уравн. — 1979. — 15, № 10. — С. 1804–1813.
21. Тонков Е. Л. Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости линейной системы// Докл. АН СССР. — 1981. — 256, № 2. — С. 290–294.
22. Тонков Е. Л. О равномерной локальной управляемости линейного уравнения// в кн.: Матем. физика/ Республ. межведомств. сб. — Киев, 1983. — 33. — С. 44–53.
23. Тонков Е. Л. О множестве управляемости линейного уравнения// Диффер. уравн. — 1983. — 19, № 2. — С. 269–278.
24. Тонков Е. Л. Канонический представитель линейной управляемой системы// Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. мат. — Ижевск, 2003. — С. 113–128.

E-mail: elt@udman.ru

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА О «МЯГКОЙ ПОСАДКЕ» ДЛЯ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2005 г. **А. А. ЧИКРИЙ, А. А. БЕЛОУСОВ**

Аннотация. Рассматривается игровая задача о сближении одного управляемого объекта, движущегося в пространстве, с другим, движение которого происходит в горизонтальной плоскости. При этом горизонтальная плоскость играет роль фазовых ограничений для преследователя, которому, следовательно, предписано движение лишь в верхнем полупространстве. Динамика игроков моделирует движение разнотипных объектов в среде с трением. Цель преследователя — сближение геометрических координат и скоростей игроков (мягкая посадка) в некоторый конечный момент времени.

В работе выделены начальные фазовые состояния преследователя, а также установлены достаточные условия на параметры конфликтно-управляемого процесса, при которых задача о «мягкой посадке» разрешима за конечное время. При этом используется прием, позволяющий свести игровую задачу к эквивалентной задаче управления. На основе детального исследования множества достижимости последней в явном (аналитическом) виде строятся управления преследователя, позволяющие решить исходную задачу. На первом этапе, на основе правила экстремального прицеливания Н. Н. Красовского производится выравнивание скоростей игроков, а на заключительной стадии непосредственно осуществляется «мягкая посадка». На каждом этапе время на выполнение задачи может быть определено априорно.

В заключение проводится обсуждение результатов моделирования процесса «мягкой посадки».

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	166
2. Постановка игровой задачи о «мягкой посадке», сведение к задаче управления	167
3. Вспомогательные утверждения	169
4. Достаточные условия разрешимости задачи о «мягкой посадке»	171
5. Аналитическое описание области управления эквивалентной задачи	172
6. Оптимальное быстроедействие при нулевой начальной скорости	175
7. Игровое выравнивание скоростей объектов	177
8. Моделирование процесса «мягкой посадки»	179
9. Заключение	179
Список литературы	180

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема «мягкой посадки» для управляемых объектов известна достаточно давно. Ее актуальность продиктована прежде всего важными практическими приложениями. Такие задачи как посадка космического аппарата на Луну или другие планеты, стыковка космических аппаратов, посадка летательного аппарата на палубу корабля существенно предполагают проведение «мягкой посадки». По этому поводу существует обширная библиография. Мы приведем лишь некоторые источники [22, 26, 27].

С открытием принципа максимума Л. С. Понтрягина [14] появился мощный математический аппарат для обоснования выбора оптимальных управлений. Однако, как показывают публикации [1–3, 6, 8, 9, 14, 17, 23], уже при решении сравнительно простых многомерных линейных задач

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (ДФФД), проект № 01.07/013, и Научно-технологического центра Украины (НТЦУ), проект № 1746.

быстродействия возникают серьезные проблемы, касающиеся конструктивного синтеза оптимальных управлений. Эти трудности существенно увеличиваются при наличии фазовых ограничений, а для игровых постановок они возрастают уже многократно.

Задаче о «мягкой посадке» в игровой постановке, по-видимому, впервые было уделено специальное внимание в работах Д. Зонневенда [4, 5] и М. С. Никольского [10]. В них была рассмотрена игровая задача для систем второго порядка с трением в пространствах одинаковой размерности и без фазовых ограничений. Для нее получены достаточные условия разрешимости за конечное время. Эти работы показали, что прямое применение классических методов теории дифференциальных игр к задаче о «мягкой посадке» не дает результата. Одной из причин этого является тот факт, что для исследуемой задачи по существу не выполняется условие Л. С. Понтрягина [13, 18]. Поэтому каждым из упомянутых авторов были предложены специальные приемы, позволившие добиться результата.

Исследуемая в данной работе задача впервые поставлена в [19] как проблема «eagle snatch» («захват орла»). В силу различной размерности фазовых пространств игроков, а также наличия фазового ограничения на состояние преследователя, такая задача является существенно более трудной. Один из способов решения задачи о «мягкой посадке» предложен в [25]. В ней процесс разбивается на три стадии. На первой реализуется сближение по геометрическим координатам. На второй стадии осуществляется переход из точки в точку с попаданием на след убегающего в плоскости. Заключительная стадия — преследование по следу в плоскости. Один из способов преследования по следу, связанный с идеологией запаздывания информации, содержится также в [24].

Достаточно обширный обзор возможных методов решения задачи о «мягкой посадке» с программной реализацией различных алгоритмов представляет работа [20].

Структура данной работы следующая. В разделе 2 игровая задача о «мягкой посадке» сводится к задаче управления по переводу траектории из заданной точки в начало координат с учетом фазовых ограничений. При этом получившаяся область управления имеет негладкую границу. Построению специальных управлений преследователя для системы второго порядка, свойствам множества достижимости, управляемости при наличии фазового ограничения посвящен раздел 3. Достаточные условия разрешимости задачи о «мягкой посадке» даны в разделе 4 (теорема 1). Аналитическому описанию области управления эквивалентной задачи управления, а также нахождению ее опорной функции на основе правила множителей Лагранжа посвящен раздел 5. Решение задачи оптимального быстродействия в случае нулевой начальной скорости предлагается в разделе 6 (теорема 2). Вспомогательная задача о выравнивании скоростей на основе правила экстремального прицеливания Н. Н. Красовского решается в разделе 7 (теорема 3). Наконец, раздел 8 посвящен вопросам моделирования процесса «мягкой посадки».

2. ПОСТАНОВКА ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ О «МЯГКОЙ ПОСАДКЕ», СВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Динамика преследователя и убегающего задается дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{x} = -\alpha \dot{x} + \rho u, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^0, \quad u \in \mathbb{R}^3, \quad \|u\| \leq 1, \quad \alpha > 0, \quad \rho > 0; \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -\beta \dot{y} + \sigma v, \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad \|v\| \leq 1, \quad \beta > 0, \quad \sigma > 0. \quad (2)$$

Эти уравнения моделируют движение динамических объектов в среде с трением.

Под «мягкой посадкой» понимается выполнение (в некоторый момент времени T) равенств

$$x(T) = y(T), \quad \dot{x}(T) = \dot{y}(T). \quad (3)$$

Требуется также выполнение фазовых ограничений для траекторий объектов:

$$x_3(t) \geq 0, \quad y_3(t) \equiv 0 \quad \text{при } t \geq 0. \quad (4)$$

Из этих условий сразу следует, что $v_3(t) \equiv 0$.

Задача состоит в построении такого измеримого управления преследователя $u(\cdot)$, удовлетворяющего ограничениям (1), которое не приводит к нарушению фазового ограничения (4) и гарантирует «мягкую посадку» (3) для любого измеримого управления убегающего $v(\cdot)$, связанного ограничениями (2) и обеспечивающего соотношение (4).

Обозначим через π оператор ортогонального проектирования трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ на горизонтальную плоскость:

$$\pi(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, 0).$$

Пусть $D = \{z \in \mathbb{R}^3 : \|z\| \leq 1\}$ — единичный шар в $\mathbb{R}^3$; тогда $\pi D = \{z \in D : z_3 = 0\}$ — единичный шар в горизонтальной плоскости.

Напомним несколько определений из выпуклого анализа [11, 16]. Пусть A — выпуклый компакт в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим символом ∂A его границу. Опорной функцией множества A называется функция

$$C_A(\psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad \psi \neq 0. \quad (5)$$

Эта функция является выпуклой, положительно однородной и полунепрерывной снизу. Для выпуклых компактов A и B выполняется следующее свойство: $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $C_A(\psi) \leq C_B(\psi)$ для всех $\psi \neq 0$. Опорным множеством к A в направлении $\psi \neq 0$ называется множество

$$A(\psi) = \{a \in A : \langle a, \psi \rangle = C_A(\psi)\} \subset \partial A.$$

Геометрической разностью множеств A и B в $\mathbb{R}^n$ называется множество

$$A -^* B = \{z \in \mathbb{R}^n : z + B \subset A\} = \bigcap_{b \in B} (A - b).$$

Известно [13], что геометрическая разность выпуклых компактов есть выпуклый компакт.

Вернемся к уравнениям (1), (2) и сделаем замену переменных $\Delta = x - y \in \mathbb{R}^3$. Тогда

$$\ddot{\Delta} = -\alpha \dot{\Delta} + (\beta - \alpha) \dot{y} + \rho u - \sigma v, \quad (6)$$

где $\dot{y}$ определяется уравнением (2). Фазовое ограничение (4) примет вид

$$\Delta_3 \equiv x_3 \geq 0, \quad (7)$$

терминальное множество (3)

$$\{(\Delta, \dot{\Delta}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \Delta = \dot{\Delta} = 0\}, \quad (8)$$

начальные условия

$$\Delta_0 = x_0 - y_0, \quad \dot{\Delta}_0 = \dot{x}_0 - \dot{y}_0. \quad (9)$$

Полученная таким образом задача сближения (6)–(9) будет полностью эквивалентна исходной задаче (1)–(4).

Предлагается строить управление преследователя по формуле

$$\rho u(t) = \sigma v(t) + (\alpha - \beta) \dot{y}(t) + w(t), \quad (10)$$

где $w(t) \in W = \rho D -^* s \pi D \subset \mathbb{R}^3$, $s = \sigma \left(1 + \left|1 - \frac{\alpha}{\beta}\right|\right)$. Следующее условие на параметры игры обеспечивает непустоту этого множества W .

Условие 1. $\frac{\rho}{\sigma} > 1 + \left|1 - \frac{\alpha}{\beta}\right|.$

Подставив управление (10) в уравнение (6), получим управляемую систему

$$\ddot{\Delta} = -\alpha \dot{\Delta} + w, \quad w \in W. \quad (11)$$

Таким образом, исходная игровая задача сведется к построению управления $w(t) \in W$, которое переводит траекторию системы (11) из точки (9) на терминальное множество (8) при выполнении фазового ограничения (7).

Отметим, что аналогичный прием уже использовался М. С. Никольским [10] для подобных задач, но без фазовых ограничений.

Далее нам предстоит доказать, что, во-первых, выбор управления в виде (10) допустим, а во-вторых, задача управления (11), (7)–(9) разрешима.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Сформулируем и докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Из произвольного начального состояния $(x^0, \dot{x}^0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ система (1) может быть переведена (с помощью подходящего управления) в любое конечное состояние $(x, \dot{x})$ такое, что $\|\dot{x}\| < \rho/\alpha$.

Доказательство. Рассмотрим множество достижимости системы (1) в момент t [8]:

$$M(t) = \bigcup_{u(\cdot) \in L^1([0,t], D)} \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : x = x^0 + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \dot{x}^0 + \rho \int_0^t \frac{1 - e^{-\alpha(t-\tau)}}{\alpha} u(\tau) d\tau, \right. \\ \left. \dot{x} = e^{-\alpha t} \dot{x}^0 + \rho \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} u(\tau) d\tau \right\}, \quad (12)$$

где объединение берется по всем измеримым на интервале $[0, t]$ функциям $u(\cdot)$, принимающим значения в единичном шаре D .

Как известно [8], это множество является выпуклым компактом. Запишем его опорную функцию $C_{M(t)}(p, q)$, $(p, q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$C_{M(t)}(p, q) = \max_{(x, \dot{x}) \in M(t)} [\langle x, p \rangle + \langle \dot{x}, q \rangle] = \\ = \langle p, x^0 \rangle + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \langle p, \dot{x}^0 \rangle + e^{-\alpha t} \langle q, \dot{x}^0 \rangle + \rho \max_{u(\cdot) \in L^1([0,t], D)} \int_0^t \left\langle \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} p + e^{-\alpha\tau} q, u(t - \tau) \right\rangle d\tau = \\ = \langle p, x^0 \rangle + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \langle p, \dot{x}^0 \rangle + e^{-\alpha t} \langle q, \dot{x}^0 \rangle + \rho \int_0^t \max_{u \in D} \left\langle \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} p + e^{-\alpha\tau} q, u \right\rangle d\tau = \\ = \left\langle p, x^0 + \frac{\dot{x}^0}{\alpha} \right\rangle + e^{-\alpha t} \left\langle q - \frac{p}{\alpha}, \dot{x}^0 \right\rangle + \rho \int_0^t \left\| \frac{p}{\alpha} + e^{-\alpha\tau} \left(q - \frac{p}{\alpha} \right) \right\| d\tau.$$

Отметим, что предпоследнее равенство выполняется в силу теоремы Ляпунова о векторных мерах [2, 6], которая гарантирует возможность внесения максимума под знак интеграла.

Оценим теперь третье слагаемое последней суммы. Очевидно, что при $p \neq 0$ и $t \geq t^* = \max \left\{ 0, \frac{1}{\alpha} \ln \left(2 \frac{\|\alpha q - p\|}{\|p\|} \right) \right\}$ это слагаемое будет не меньше величины $\rho \int_{t^*}^t \left\| \frac{p}{\alpha} + e^{-\alpha\tau} \left(q - \frac{p}{\alpha} \right) \right\| d\tau$, причем

$$\rho \int_{t^*}^t \left\| \frac{p}{\alpha} + e^{-\alpha\tau} \left(q - \frac{p}{\alpha} \right) \right\| d\tau \geq \rho \int_{t^*}^t \frac{\|p\|}{2\alpha} d\tau = \frac{\rho\|p\|}{2\alpha} (t - t^*) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Поэтому можно утверждать, что

$$C_{M(t)}(p, q) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{cases} \infty & \text{при } p \neq 0, \\ \frac{\rho}{\alpha} \|q\| & \text{при } p = 0. \end{cases}$$

Справа в этом соотношении записана в точности опорная функция цилиндра:

$$Z = \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|\dot{x}\| \leq \frac{\rho}{\alpha} \right\}.$$

Таким образом, отсюда можно сделать вывод, что любая точка внутри этого цилиндра будет поглощена $M(t)$ для достаточно большого t . $\square$

В формулировке леммы 1 никак не учитывались фазовые ограничения (4). Наличие таких ограничений существенно осложняет исследование множеств достижимости. Однако, учитывая результаты леммы 1, удастся сформулировать определенные выводы и в этом случае.

Условие 2. Точка фазового пространства системы (1) $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ такова, что, во-первых, $x_3 \geq 0$, во-вторых, либо $\dot{x}_3 \geq 0$, либо $\dot{x}_3 < 0$ и

$$x_3 + \frac{\dot{x}_3}{\alpha} + \frac{\rho}{\alpha^2} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{\rho} \dot{x}_3 \right) \geq 0.$$

Смысл этого условия (и это будет видно из дальнейшего) состоит в том, что если начальное состояние системы (1) не удовлетворяет этому условию, то неизбежно спустя некоторое время любая траектория системы нарушит фазовое ограничение.

Лемма 2. Из произвольного начального состояния, удовлетворяющего условию 2, не нарушая фазовых ограничений, система (1) может быть переведена в любое конечное состояние $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ такое, что $\|\dot{x}\| < \rho/\alpha$, $x_3 \geq 0$, $\dot{x}_3 = 0$.

Доказательство. Возьмем произвольные (из упомянутых в формулировке леммы 2) начальную $(x^0, \dot{x}^0)$ и конечную $(x^*, \dot{x}^*)$ точки.

Доказательство разобьем на три этапа. На первом этапе обнулим вертикальную скорость ($\dot{x}_3 = 0$). На втором этапе построим управление, переводящее систему в точку $(x, \dot{x})$ с $x_3 = x_3^*$ и $\dot{x}_3 = 0$. На третьем этапе переведем систему в конечную точку, двигаясь по четырехмерной аффинной плоскости

$$L = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : x_3 = x_3^*, \dot{x}_3 = 0\}.$$

Итак, обнулим вертикальную скорость. Возьмем на этом этапе постоянное управление

$$u_1(t) = u_2(t) \equiv 0, \quad u_3(t) = -\text{sign}(\dot{x}_3^0), \quad (13)$$

где $\text{sign}(x) = 1$ при $x > 0$, $\text{sign}(x) = -1$ при $x < 0$. Требуемый момент определится из условия

$$\dot{x}_3(t) = e^{-\alpha t} \dot{x}_3^0 + \rho \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} u_3(\tau) d\tau = 0. \quad (14)$$

Несложно убедиться, что этот момент равен

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{\rho} |\dot{x}_3^0| \right),$$

а соответствующее значение координаты

$$x_3(t_1) = x_3^0 + \frac{1}{\alpha} \dot{x}_3^0 + \frac{\rho}{\alpha} t_1.$$

Отсюда видно, что условие 2 обеспечивает выполнение фазового ограничения в этот момент t_1 . Из формулы (14) видно, что вертикальная скорость изменяется монотонно до нуля. Значит, координата $x_3(t)$ достигает минимума на концах интервала $[0, t_1]$. В связи с вышесказанным это означает, что фазовое ограничение на этом этапе не нарушится.

На втором этапе используем релейное управление с одним переключением. Положим

$$a = \frac{\alpha}{\rho} [x_3^* - x_3(t_1)], \quad t_* = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 - \sqrt{1 - e^{-\alpha|a|}} \right), \quad t_2 = 2t_* - |a|,$$

$$u_1(t_1 + t) = u_2(t_1 + t) \equiv 0, \quad u_3(t_1 + t) = \begin{cases} \text{sign}(a) & \text{при } t \in [0, t_*], \\ -\text{sign}(a) & \text{при } t \in (t_*, t_2]. \end{cases}$$

Прямой подстановкой этого управления в формулу Коши для решения системы линейных дифференциальных уравнений (12) можно убедиться, что это и будет требуемое на этом этапе управление, т.е. $x_3(t_1 + t_2) = x_3^*$ и $\dot{x}_3(t_1 + t_2) = 0$, причем фазовое ограничение не нарушится.

Подчеркнем, что на этих двух этапах предлагаются управления, которые решают поставленные задачи за минимальное время.

Наконец, укажем, что если ограничиться управлениями из горизонтальной плоскости ($u_3(\cdot) \equiv 0$, $u_1^2(\cdot) + u_2^2(\cdot) \leq 1$), то сужение системы (1) на аффинную плоскость L будет иметь точно такой же вид, как и исходная, но с четырехмерным фазовым пространством $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. При этом фазовое ограничение ($x_3 \geq 0$) будет выполняться автоматически. Несложно убедиться, что в этом случае все рассуждения леммы 1 для сужения системы (1) сохраняют свою силу. Поэтому можно утверждать, что существует допустимое управление $(u_1(t), u_2(t))$ для $t - t_1 - t_2 \in [0, t_3]$, которое переводит систему в точку $(x_1^*, x_2^*, \dot{x}_1^*, \dot{x}_2^*) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ такую, что $\sqrt{\dot{x}_1^{*2} + \dot{x}_2^{*2}} < \rho/\alpha$ при сохранении равенств $x_3(t_1 + t_2 + t_3) = x_3^*$ и $\dot{x}_3(t_1 + t_2 + t_3) = 0$. $\square$

Лемма 3. Если начальная скорость объекта (2) ограничена величиной $\|\dot{y}^0\| \leq \sigma/\beta$, то для любого допустимого управления $v(\cdot)$ скорость и в дальнейшем не превысит той же величины:

$$\|\dot{y}(t)\| \leq \frac{\sigma}{\beta}, \quad t \geq 0.$$

Если же это ограничение на начальную скорость не выполняется, то можно утверждать, что начиная с некоторого момента норма скорости $\|\dot{y}(t)\|$ не превысит величину, сколь угодно близкую к σ/β .

Доказательство. Для произвольного допустимого управления (2) можно оценить норму скорости:

$$\begin{aligned} \|\dot{y}(t)\| &= \left\| e^{-\beta t} \dot{y}^0 + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} v(\tau) d\tau \right\| \leq e^{-\beta t} \|\dot{y}^0\| + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \|v(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq e^{-\beta t} \|\dot{y}^0\| + \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \sigma = \frac{\sigma}{\beta} + e^{-\beta t} \left[\|\dot{y}^0\| - \frac{\sigma}{\beta} \right]. \end{aligned}$$

Из этой оценки сразу следует доказательство, причем время, через которое произойдет ε -приближение, равно

$$T = \frac{1}{\beta} \left[\ln \left(\|\dot{y}^0\| - \frac{\sigma}{\beta} \right) - \ln \varepsilon \right].$$

Лемма доказана. $\square$

4. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О «МЯГКОЙ ПОСАДКЕ»

Теперь мы готовы доказать утверждение о разрешимости исходной игровой задачи (1)–(4).

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1. Тогда решение игровой задачи о «мягкой посадке» (1)–(4) возможно для любых начальных положений убегающего из произвольного начального положения преследователя, удовлетворяющего условию 2.

Доказательство. Начнем с обнуления вертикальной скорости преследователя. Выбрав управление в виде (13) из леммы 2, в некоторый момент t_1 получим $\dot{x}_3(t_1) = 0$. При этом в силу условия 2 фазовое ограничение не будет нарушено. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать момент t_1 начальным и $\dot{x}_3^0 = 0$.

Предположим, что $\|\dot{y}^0\| < \sigma/\beta$. Из леммы 3 и условия 1 следует, что для любого допустимого управления $v(\cdot)$ имеем

$$\|(\beta - \alpha)\dot{y}(t) - \sigma v(t)\| \leq |\beta - \alpha| \frac{\sigma}{\beta} + \sigma = s < \rho. \quad (15)$$

Это означает, что для любого допустимого $v(t)$ и произвольной функции $w(t) \in W = \rho D - s \cdot \pi D$ выполняется включение

$$w(t) + \sigma v(t) + (\alpha - \beta)\dot{y}(t) \subset \rho D,$$

т.е. выбор управления преследователя по формуле (10) допустим.

Теперь докажем разрешимость задачи управления (11), (7)–(9). Из условия 1 следует, что шар εD принадлежит W для некоторого $\varepsilon > 0$. Кроме того, учитывая что $\dot{x}_3^0 = 0$, начальная точка

(9) удовлетворяет условию 2. Поэтому к системе (11) с управлениями $w(t) \in \varepsilon D$ применима лемма 2, которая гарантирует существование искомого управления $w(t) \in \varepsilon D \subset W$. Следовательно, разрешима и исходная игровая задача (1)–(4).

Будем считать теперь, что $\|\dot{y}^0\| > \sigma/\beta$. Тогда в силу леммы 3 можно утверждать, что, начиная с некоторого момента, величина $\|\dot{y}(t)\|$ будет сколь угодно близко оцениваться числом σ/β . Поэтому начиная с этого времени, будет выполнено неравенство (15) для числа s' , несколько большего величины $\sigma \left(1 + \left|1 - \frac{\alpha}{\beta}\right|\right)$. Все следующие рассуждения могут быть в точности повторены, что завершит доказательство теоремы и в этом случае. $\square$

5. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОБЛАСТИ УПРАВЛЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 1 является теоремой существования. Хотелось бы получить конструктивный алгоритм решения задачи (11), (7)–(9). Более того, хотелось бы решить эту задачу за минимальное время. Таким образом, естественно возникает задача оптимального быстрогодействия для (11), (7)–(9). Ее исследование начнем с более конструктивного описания выпуклого компакта W .

Лемма 4. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Множество W задается неравенством

$$\|x\|^2 + 2s \cdot \|\pi x\| \leq \rho^2 - s^2.$$

2) Опорная функция множества W имеет вид ($\psi \in \mathbb{R}^3$, $\psi \neq 0$)

$$C_W(\psi) = \begin{cases} \rho\|\psi\| - s\|\pi\psi\| & \text{при } \rho\|\pi\psi\| - s\|\psi\| \geq 0, \\ \sqrt{\rho^2 - s^2} \cdot |\psi_3| & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Учитывая свойства опорной функции (5), можно записать:

$$W = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle \psi, x \rangle + s\|\pi\psi\| \leq \rho\|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \max_{\|\psi\|=1} [\langle \psi, x \rangle + s\|\pi\psi\|] \leq \rho\right\}. \quad (16)$$

Для нахождения этого максимума воспользуемся правилом множителей Лагранжа [2, 6], которое дает необходимые условия экстремума в задачах условной оптимизации.

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L(\psi, \lambda) = \langle \psi, x \rangle + s\|\pi\psi\| + \frac{\lambda}{2}(\|\psi\|^2 - 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Эта функция дифференцируема всюду на сфере $S = \{\psi \in \mathbb{R}^3 : \|\psi\| = 1\}$, кроме двух точек $\pm(0, 0, 1)$. Поэтому всюду на S (кроме этих двух точек) условие экстремума примет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = x + s \frac{\pi\psi}{\|\pi\psi\|} + \lambda\psi = 0, \quad (17)$$

откуда

$$x = -s \frac{\pi\psi}{\|\pi\psi\|} - \lambda\psi, \quad \pi x = -\pi\psi \left[\lambda + \frac{s}{\|\pi\psi\|} \right].$$

Рассмотрим сначала случай $\lambda + \frac{s}{\|\pi\psi\|} \leq 0$. Тогда $\frac{\pi x}{\|\pi x\|} = \frac{\pi\psi}{\|\pi\psi\|}$, а из (17) получаем

$$-\lambda\psi = x + s \frac{\pi x}{\|\pi x\|}.$$

Найдем отсюда экстремальные значения переменной $\psi \in S$ и множителя Лагранжа λ , обозначив их соответственно ψ^* и λ^* . Последовательно получаем:

$$\|\psi^*\|^2 = \frac{1}{\lambda^{*2}}(\|x\|^2 + 2s\|\pi x\| + s^2) = 1, \quad \lambda^* = -\sqrt{\|x\|^2 + 2s\|\pi x\| + s^2},$$

$$\psi^* = -\frac{1}{\lambda^*} \left(x + s \frac{\pi x}{\|\pi x\|} \right), \quad \|\pi\psi^*\| = -\frac{1}{\lambda^*}(\|\pi x\| + s).$$

Эти значения λ^* и ψ^* удовлетворяют сделанному предположению $\lambda^* + \frac{s}{\|\pi\psi^*\|} \leq 0$. Соответствующее значение целевой функции (16) равно

$$\langle \psi^*, x \rangle + s\|\pi\psi^*\| = \frac{\|x\|^2 + s\|\pi x\| + s(\|\pi x\| + s)}{-\lambda^*} = \sqrt{\|x\|^2 + 2s\|\pi x\| + s^2}. \quad (18)$$

Если же предположить, что $\lambda + \frac{s}{\|\pi\psi\|} > 0$, то аналогично предыдущему имеем

$$\begin{aligned} -\lambda\psi &= x - s\frac{\pi x}{\|\pi x\|}, \quad \|\psi^*\|^2 = \frac{1}{\lambda^{*2}}(\|x\|^2 - 2s\|\pi x\| + s^2) = 1, \quad |\lambda^*| = \sqrt{\|x\|^2 - 2s\|\pi x\| + s^2}, \\ \psi^* &= \pm \frac{1}{|\lambda^*|} \left(x - s\frac{\pi x}{\|\pi x\|} \right), \quad \|\pi\psi^*\| = \frac{1}{|\lambda^*|} \cdot \|\pi x\| - s. \end{aligned}$$

В этом случае целевая функция равна

$$\langle \psi^*, x \rangle + s\|\pi\psi^*\| = \frac{\pm(\|x\|^2 - s\|\pi x\|) + s\|\pi x\| - s}{\sqrt{\|x\|^2 - 2s\|\pi x\| + s^2}}.$$

Докажем, что эти величины меньше целевой функции (18). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \max_{j=\pm 1} \left[s\|\pi x\| - s + j \cdot (\|x\|^2 - s\|\pi x\|) \right]^2 &= \max \left\{ (\|x\|^2 - s^2)^2, (\|x\|^2 - 2s\|\pi x\| + s^2)^2 \right\} \leq \\ &\leq (\|x\|^2 - 2s\|\pi x\| + s^2) \cdot (\|x\|^2 + 2s\|\pi x\| + s^2). \end{aligned}$$

Оценим теперь значение целевой функции для точек, в которых нарушается гладкость функции Лагранжа ($\psi^* = \pm(0, 0, 1)$):

$$\langle \psi^*, x \rangle + s\|\pi\psi^*\| \leq |x_3| = \sqrt{\|x\|^2 - \|\pi x\|^2} \leq \sqrt{\|x\|^2 + 2s\|\pi x\| + s^2}.$$

Таким образом, максимум целевой функции (16) определяется формулой (18). Следовательно, уравнение, задающее множество W , имеет вид

$$\|x\|^2 + 2s\|\pi x\| + s^2 \leq \rho^2.$$

Нахождение опорной функции множества W свелось к задаче условной оптимизации:

$$C_W(\psi) = \max_{\{x: \|x\|^2 + 2s\|\pi x\| + s^2 \leq \rho^2\}} \langle \psi, x \rangle, \quad (19)$$

причем, в силу положительной однородности опорной функции, достаточно ограничиться доказательством для $\psi \in S$.

Отметим, что в выражении (19) целевая функция линейна, а ограничение выпукло. Поэтому, во-первых, максимум (19) будет достигаться на ∂W , т.е. при выполнении равенства в ограничении, во-вторых, указанная задача эквивалентна задаче минимизации функции $\langle -\psi, x \rangle$ по $x \in W$, в-третьих, по теореме Куна—Таккера [2, 6] достаточно ограничиться положительным множителем в соответствующей функции Лагранжа.

Таким образом, функцию Лагранжа для задачи (19) можно записать в виде

$$L(x, \lambda) = -2\lambda \langle \psi, x \rangle + (\|x\|^2 + 2s\|\pi x\| + s^2 - \rho^2), \quad \lambda > 0.$$

Эта функция дифференцируема при $\|\pi x\| \neq 0$, т.е. всюду на ∂W , кроме двух точек $\pm(0, 0, \sqrt{\rho^2 - s^2}) \in \partial W$. Отметим, что в этих точках целевая функция принимает значение

$$\max_{\substack{x \in \partial W \\ \|\pi x\|=0}} \langle \psi, x \rangle = \sqrt{\rho^2 - s^2} \cdot |\psi_3|. \quad (20)$$

Условием, определяющим экстремальные значения переменных в задаче (19) (всюду на ∂W , кроме двух точек), будет равенство

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2s\frac{\pi x}{\|\pi x\|} - 2\lambda\psi = 0.$$

Тогда последовательно получаем цепочку тождеств, которым должны удовлетворять подозрительные на экстремум значения x и λ :

$$\begin{aligned}\lambda\psi &= x + s\frac{\pi x}{\|\pi x\|}, & \lambda\pi\psi &= \pi x \left(1 + \frac{s}{\|\pi x\|}\right), & \frac{\pi\psi}{\|\pi\psi\|} &= \frac{\pi x}{\|\pi x\|}, \\ x &= \lambda\psi - s\frac{\pi\psi}{\|\pi\psi\|}, & \pi x &= \pi\psi \left(\lambda - \frac{s}{\|\pi\psi\|}\right).\end{aligned}\tag{21}$$

Если предположить, что $\lambda \geq s/\|\pi\psi\|$, то $\|\pi x\| = \lambda\|\pi\psi\| - s$. Поэтому из (21) с учетом включения $x \in \partial W$ имеем

$$\rho^2 = \|x^2\| + 2s\|\pi x\| + s^2 = \lambda^2 - 2\lambda s\|\pi\psi\| + s^2 + 2s(\lambda\|\pi\psi\| - s) + s^2 = \lambda^2.$$

Следовательно, экстремальное значение $\lambda^* = \rho$, а соответствующее значение целевой функции

$$\langle x^*, \psi \rangle = \rho\psi^2 - s\|\pi\psi\| = \rho - s\|\pi\psi\|.\tag{22}$$

Укажем, что это значение целевой функции может достигаться лишь при выполнении предположения $\lambda^* = \rho \geq s/\|\pi\psi\|$. Отметим также, что функция из правой части равенства (22) больше соответствующей функции из равенства (20).

Если же предположить, что $0 < \lambda < s/\|\pi\psi\|$, то $\|\pi x\| = s - \lambda\|\pi\psi\|$. Аналогично предыдущему имеем

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \|x^2\| + 2s\|\pi x\| + s^2 = \lambda^2 - 2\lambda s\|\pi\psi\| + s^2 + 2s(s - \lambda\|\pi\psi\|) + s^2 = \\ &= \lambda^2 - 4\lambda s\|\pi\psi\| + 4s^2 = (2s - \lambda\|\pi\psi\|)^2 + \lambda^2(1 - \|\pi\psi\|^2).\end{aligned}$$

В силу предположения выполняется неравенство $2s - \lambda\|\pi\psi\| > s$, а значит, из предыдущего тождества получаем

$$\lambda^2 \leq \frac{\rho^2 - s^2}{1 - \|\pi\psi\|^2}.$$

Отсюда для целевой функции получаем оценку:

$$\begin{aligned}\langle x^*, \psi \rangle &= \lambda - s\|\pi\psi\| = \left(\lambda - \frac{s}{\|\pi\psi\|}\right) \|\pi\psi\|^2 + \lambda(1 - \|\pi\psi\|^2) \leq \\ &\leq 0 + \sqrt{\frac{\rho^2 - s^2}{1 - \|\pi\psi\|^2}} \cdot (1 - \|\pi\psi\|^2) = \sqrt{\rho^2 - s^2} \sqrt{1 - \|\pi\psi\|^2} = \sqrt{\rho^2 - s^2} \cdot |\psi_3|.\end{aligned}$$

Это означает, что в этом случае целевая функция не может быть больше функции из равенства (20).

Объединяя соотношения (20) и (22), мы получаем доказательство утверждения. $\square$

Замечание 1. Непосредственно можно убедиться, что $C_W(\psi)$ — дифференцируемая функция для любого $\psi \in \mathbb{R}^3$, $\psi \neq 0$. Известно [16], что в этом случае опорное множество к W в направлении ψ будет одноточечным множеством и

$$W(\psi) = \frac{\partial C_W(\psi)}{\partial \psi} = \begin{cases} \rho \frac{\psi}{\|\psi\|} - s \frac{\pi\psi}{\|\pi\psi\|} & \text{при } \rho\|\pi\psi\| \geq s\|\psi\|, \\ (0, 0, \sqrt{\rho^2 - s^2}) & \text{при } \rho\|\pi\psi\| < s\|\psi\| \text{ и } \psi_3 > 0, \\ (0, 0, -\sqrt{\rho^2 - s^2}) & \text{при } \rho\|\pi\psi\| < s\|\psi\| \text{ и } \psi_3 < 0. \end{cases}$$

Укажем, что вариант $\psi_3 = 0$ охватывается неравенством $\rho\|\pi\psi\| \geq s\|\psi\|$.

6. ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ПРИ НУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

Вернемся к задаче быстрогодействия. Множество достижимости для системы (11), (9) в момент t имеет вид [8]:

$$M(t) = \bigcup_{w(\cdot) \in L^1([0,t], W)} \left\{ (\Delta, \dot{\Delta}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \Delta = \Delta^0 + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \dot{\Delta}^0 + \int_0^t \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} w(t - \tau) d\tau, \right. \\ \left. \dot{\Delta} = e^{-\alpha t} \dot{\Delta}^0 + \int_0^t e^{-\alpha \tau} w(t - \tau) d\tau \right\},$$

где объединение берется по всем измеримым функциям $w(\tau)$, $w(\tau) \in W$. Это множество является выпуклым компактом [8], а его опорная функция

$$C_{M(t)}(p, q) = \langle \Delta^0, p \rangle + \langle \dot{\Delta}^0, \psi(t) \rangle + \max_{w(\cdot) \in L^1([0,t], W)} \int_0^t \langle \psi(\tau), w(t - \tau) \rangle d\tau = \\ = \langle \Delta^0, p \rangle + \langle \dot{\Delta}^0, \psi(t) \rangle + \int_0^t C_W(\psi(\tau)) d\tau, \quad (23)$$

где

$$\psi(\tau) = \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} p + e^{-\alpha \tau} q \in \mathbb{R}^3, \quad \tau \in [0, t].$$

Из замечания 1 следует, что эта функция является дифференцируемой и

$$\frac{\partial C_{M(t)}(p, q)}{\partial p} = \Delta^0 + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \dot{\Delta}^0 + \int_0^t \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} \cdot W(\psi(\tau)) d\tau, \\ \frac{\partial C_{M(t)}(p, q)}{\partial q} = e^{-\alpha t} \dot{\Delta}^0 + \int_0^t e^{-\alpha \tau} W(\psi(\tau)) d\tau. \quad (24)$$

Поэтому опорное множество к $M(t)$ в направлении (p, q) будет просто вектором

$$\left(\frac{\partial C_{M(t)}(p, q)}{\partial p}, \frac{\partial C_{M(t)}(p, q)}{\partial q} \right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

Тогда условие первого поглощения множеством $M(t)$ терминальной точки $(0, 0)$ будет эквивалентно нахождению минимального $T > 0$ и вектора $(p^*, q^*) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ таких, что

$$\left(\frac{\partial C_{M(t)}(p^*, q^*)}{\partial p}, \frac{\partial C_{M(t)}(p^*, q^*)}{\partial q} \right) = (0, 0). \quad (25)$$

Это необходимое и достаточное условие решение задачи оптимального быстрогодействия (11), (8), (9), которое, по существу, является формулировкой принципа максимума Понтрягина для линейной задачи быстрогодействия [2, 14]. Оптимальное управление имеет вид

$$w^*(t) = W(\psi(T - t)), \quad t \in [0, T],$$

для соответствующих p^* и q^* .

Таким образом, решение задачи быстрогодействия (11), (8), (9) свелось к решению системы нелинейных уравнений (24), (25). Но решение этой весьма сложной системы уравнений, вообще говоря, можно получить лишь численно, реализуя подходящие итерационные алгоритмы. Более того, при выводе этих уравнений не учитывалось фазовое ограничение. Это еще больше осложняет задачу. Однако в одном частном случае, когда оптимальное управление оказывается релейным, удастся получить аналитическое (т.е. в виде явных соотношений) решение задачи оптимального быстрогодействия, учитывающее фазовое ограничение (7).

Теорема 2. Пусть $\dot{\Delta}^0 = 0$, а $\Delta^0 = \Delta$ произвольно. Введем положительное число

$$\mu = \frac{\sqrt{\rho^2 \|\Delta\|^2 - s^2 \|\Delta_3\|^2} - s \|\pi \Delta\|}{\|\Delta\|^2}.$$

Тогда время оптимального быстрогодействия в задаче (11), (7)–(9) равно

$$T = -\frac{2}{\alpha} \ln \left(e^{\alpha^2/2\mu} - \sqrt{e^{\alpha^2/\mu} - 1} \right), \quad (26)$$

а оптимальное управление является кусочно постоянным с одним переключением:

$$w^*(t) = \begin{cases} -\mu \cdot \Delta & \text{при } t \in \left[0, \frac{1}{2} \left(T + \frac{\alpha}{\mu}\right)\right], \\ \mu \cdot \Delta & \text{при } t \in \left[\frac{1}{2} \left(T + \frac{\alpha}{\mu}\right), T\right]. \end{cases} \quad (27)$$

Доказательство. В этом случае опорная функция $C_{M(t)}(p, q)$ является монотонно возрастающей по t . Значит, существует единственное значение T , удовлетворяющее (24), (25). Поэтому достаточно предъявить какое-либо решение (24), (25), которое и будет оптимальным решением задачи быстрогодействия (11), (8), (9).

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\mu^2 \|\Delta\|^2 + 2s\mu \|\pi \Delta\| = \rho^2 - s^2.$$

Отсюда, учитывая первую часть леммы 4, получаем, что $-\mu \Delta \in \partial W$. Следовательно, существует ненулевой вектор $p \in \mathbb{R}^3$ такой, что опорное множество $W(p)$ имеет вид $W(p) = -\mu \Delta$.

Положим $q = \frac{1 - e^{\alpha\delta}}{\alpha} \cdot p$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда

$$\psi(\tau) = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} p + e^{-\alpha\tau} q = \frac{1 - e^{\alpha(\delta-\tau)}}{\alpha} p;$$

значит, вектор $\psi(\tau)$ сонаправлен с p при $\tau > \delta$ и противоположно направлен при $0 < \tau < \delta$. Поэтому, учитывая равенство опорных множеств для сонаправленных векторов и симметричность множества W , получаем

$$W(\psi(\tau)) = \begin{cases} W(p) = -\mu \Delta & \text{при } \tau > \delta, \\ W(-p) = -W(p) = \mu \Delta & \text{при } \tau < \delta. \end{cases}$$

Система уравнений (24), (25) примет вид

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial C_{M(T)}(p, q)}{\partial p} + \frac{\partial C_{M(T)}(p, q)}{\partial q} &= \alpha \Delta + \left(\int_0^\delta d\tau - \int_\delta^T d\tau \right) \cdot \mu \Delta = (\alpha - \mu(T - 2\delta)) \cdot \Delta = 0, \\ \frac{\partial C_{M(T)}(p, q)}{\partial q} &= \left(\int_0^\delta e^{-\alpha\tau} d\tau - \int_\delta^T e^{-\alpha\tau} d\tau \right) \mu \Delta = (2e^{-\alpha\delta} - e^{-\alpha T} - 1) \frac{\mu}{\alpha} \Delta = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнения для определения T и δ :

$$\alpha - \mu(T - 2\delta) = e^{-\alpha T} - 2e^{-\alpha\delta} + 1 = 0.$$

Поэтому

$$\delta = \frac{1}{2} \left(T - \frac{\alpha}{\mu} \right),$$

соответственно

$$e^{-\alpha T} - 2e^{\alpha^2/2\mu} e^{-\alpha T/2} + 1 = 0 \quad (28)$$

и, следовательно,

$$T = -\frac{2}{\alpha} \left(e^{\alpha^2/2\mu} - \sqrt{e^{\alpha^2/\mu} - 1} \right).$$

Таким образом, указанные вектор (p, q) и момент T доставляют решение (24), (25), а потому и являются оптимальными. Соответствующее им оптимальное управление имеет вид

$$w^*(T-t) = W(\psi(t)) = \begin{cases} \mu\Delta & \text{при } t \in [0, \delta], \\ -\mu\Delta & \text{при } t \in (\delta, T]. \end{cases}$$

Остается лишь показать, что порожденная этим управлением траектория не нарушит фазовое ограничение $\Delta_3(t) \geq 0$ для всех $t \in [0, T]$. Действительно, если предположить противное и учесть, что $\Delta_3 = \Delta_3(0) \geq \Delta_3(T) = 0$, то должен бы существовать такой момент $t^* \in [0, T]$, что $\dot{\Delta}_3(t^*) > 0$. Но прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_3(t) &= \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \cdot (-\mu\Delta_3) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \cdot (-\mu\Delta_3) \leq 0 \quad \text{при } t \in [0, T-\delta]; \\ \dot{\Delta}_3(t) &= \left(-\int_0^{T-\delta} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau + \int_{T-\delta}^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \right) \cdot \mu\Delta_3 = e^{-\alpha t} \frac{\mu\Delta_3}{\alpha} \left[e^{\alpha t} - 1 - 2(e^{\alpha(T-\delta)} - 1) \right] \leq \\ &\leq e^{-\alpha t} \frac{\mu\Delta_3}{\alpha} \left[e^{\alpha T} - 2e^{\alpha^2/2\mu} e^{\alpha T/2} + 1 \right] = 0 \quad \text{при } t \in [T-\delta, T], \end{aligned}$$

где в последнем равенстве учтено соотношение (28). Оба эти неравенства противоречат предположению, а значит фазовое ограничение не нарушается. $\square$

7. ИГРОВОЕ ВЫРАВНИВАНИЕ СКОРОСТЕЙ ОБЪЕКТОВ

Теперь покажем как исходная игровая задача о «мягкой посадке» (1)–(4) может быть сведена к уже рассмотренному в теореме 2 частному случаю. Построим такое управление преследователя, которое гарантирует выравнивание скоростей объектов при любом допустимом противодействии противника: $\dot{\Delta} = \dot{x} - \dot{y} = 0$. В основе предлагаемой конструкции лежит правило экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [7, 15].

Прежде всего отметим, что динамика обоих объектов (1), (2) не зависит от их координат x и y . Не входят координаты и в терминальное условие задачи выравнивания скоростей $\dot{x} = \dot{y}$. Поэтому в контексте этой задачи скорости можно просто считать переменными $X = \dot{x}$ и $Y = \dot{y}$. Для этих переменных игровая задача выравнивания скоростей примет вид задачи сближения:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\alpha X + \rho u, & X \in \mathbb{R}^3, & u \in \mathbb{R}^3, \|u\| \leq 1, \alpha > 0, \rho > 0, \\ \dot{Y} &= -\beta Y + \sigma v, & Y \in \mathbb{R}^3, & v \in \mathbb{R}^3, \|v\| \leq 1, \beta > 0, \sigma > 0, \end{aligned} \quad (29)$$

терминальное множество — $\{(X, Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : X = Y\}$.

Предположим, что выполнено условие 1 на параметры игры. Тогда несложно показать, что $\rho > \sigma$ и $\frac{\rho}{\alpha} > \frac{\sigma}{\beta}$. Известно [13], что при этих условиях выполняется неравенство

$$\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} \sigma > 0 \quad \text{при } t > 0. \quad (30)$$

Введем функцию

$$\lambda(t, X, Y) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} \sigma - \|e^{-\alpha t} X - e^{-\beta t} Y\|.$$

Эта функция непрерывна по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема в области

$$G = \{(t, X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : e^{-\alpha t} X \neq e^{-\beta t} Y\}.$$

Для нее выполняются следующие условия:

- (1) $\lambda(0, X, Y) = -\|X - Y\| < 0$ при $X \neq Y$;
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t, X, Y) = \frac{\rho}{\alpha} - \frac{\sigma}{\beta} > 0$.

Поэтому, в силу непрерывности $\lambda(\cdot)$, существует момент $T_0 > 0$ такой, что $\lambda(T_0, X(0), Y(0)) = 0$.

Укажем индуктивный способ последовательного построения управления преследователя. Начнем с $i = 0$ и положим $t_0 = 0$. Управление будем строить по формуле

$$u(t, X, Y) = - \frac{e^{-\alpha(T_i-t)}X - e^{-\beta(T_i-t)}Y}{\|e^{-\alpha(T_i-t)}X - e^{-\beta(T_i-t)}Y\|}. \quad (31)$$

Это непрерывно дифференцируемая функция в области

$$G_i = \{(t, X, Y) \in (t_i, T_i) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : e^{-\alpha(T_i-t)}X \neq e^{-\beta(T_i-t)}Y\}.$$

В паре с произвольной измеримой функцией $v(t)$ они составляют систему дифференциальных уравнений (29), которая в области G_i удовлетворяет условиям существования и единственности [12], а значит, и определяют движение объектов $X(t)$ и $Y(t)$.

В силу ограниченности управлений ($\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$), решения системы дифференциальных уравнений (29) не могут уходить на бесконечность за конечное время. Поэтому (см. [12]), решение продолжимо до границы области G_i , т.е. на полуинтервал $[t_i, t_{i+1})$, где либо $t_{i+1} = T_i$, либо $(t, X(t), Y(t)) \in G_i$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, и по непрерывности определены точки $X(t_{i+1})$ и $Y(t_{i+1})$, для которых

$$e^{-\alpha(T_i-t_{i+1})}X(t_{i+1}) = e^{-\beta(T_i-t_{i+1})}Y(t_{i+1}). \quad (32)$$

В первом случае построение управления преследователя на этом заканчивается. Во втором случае имеем

$$\lambda(T_i - t_{i+1}, X(t_{i+1}), Y(t_{i+1})) > 0, \quad \lambda(0, X(t_{i+1}), Y(t_{i+1})) \leq 0;$$

следовательно, существует момент T_{i+1} , $T_{i+1} < T_i$, такой, что

$$\lambda(T_{i+1} - t_{i+1}, X(t_{i+1}), Y(t_{i+1})) = 0. \quad (33)$$

Если $X(t_{i+1}) \neq Y(t_{i+1})$, то построение управления преследователя продолжается по формуле (31) (уже для следующего i).

Таким образом, мы получим стягивающуюся систему интервалов $[t_i, T_i]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < T_i < \dots < T_1 < T_0, \quad (34)$$

на каждом из которых определено управление (31), которое в паре с допустимым управлением $v(\cdot)$ задает движение преследователя на полуинтервалах $[t_i, t_{i+1})$, зависящих от управления $v(\cdot)$.

Теорема 3. Пусть выполнено условие 1. Тогда предложенная процедура построения управления преследователя гарантирует выравнивание скоростей объектов (1), (2) при любом допустимом противодействии и для любых начальных состояний преследователя и убегающего:

$$\dot{x}(T) = \dot{y}(T) \quad \text{для некоторого } T < T_0.$$

Доказательство. Продифференцируем в силу системы (29):

$$\frac{d}{dt}[e^{-\alpha(T_i-t)}X(t)] = \alpha e^{-\alpha(T_i-t)}X(t) + e^{-\alpha(T_i-t)}\dot{X}(t) = e^{-\alpha(T_i-t)}u(t).$$

Тогда, учитывая выбор управления $u(t, X, Y)$ в виде (31), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\lambda(T_i - t, X(t), Y(t)) &= -e^{-\alpha(T_i-t)}\rho + e^{-\beta(T_i-t)}\sigma - \\ &- \left\langle \frac{e^{-\alpha(T_i-t)}X(t) - e^{-\beta(T_i-t)}Y(t)}{\|e^{-\alpha(T_i-t)}X(t) - e^{-\beta(T_i-t)}Y(t)\|}, e^{-\alpha(T_i-t)}\rho u(t, X(t), Y(t)) - e^{-\beta(T_i-t)}\sigma v(t) \right\rangle = \\ &= e^{-\beta(T_i-t)}\sigma \left[1 - \langle u(t, X(t), Y(t)), v(t) \rangle \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda(T_i - t, X(t), Y(t))$ — неубывающая функция на $[t_i, t_{i+1})$.

Поэтому если $t_{i+1} = T_i$, то $\lambda(0, X(T_i), Y(T_i)) \geq 0$ (см. (33)); следовательно, $X(T_i) = Y(T_i)$, т.е. в этом случае решение получается за конечное число шагов в момент $T_i < T_0$.

Если же $t_{i+1} < T_i$ для любого i , то потребуются бесконечное число шагов выбора управления (31). Покажем, что и в этом случае гарантируется решение. Действительно, имеются две монотонные

и ограниченные последовательности чисел $\{t_i\}$ и $\{T_i\}$ (34), для каждой из которых существуют пределы t^* и T^* . Тогда, поскольку функции $X(t)$, $Y(t)$ и $\lambda(t, X, Y)$ непрерывны, из равенств (32) и (33) следуют равенства

$$e^{-\alpha(T^*-t^*)}X(t^*) = e^{-\beta(T^*-t^*)}Y(t^*), \quad \lambda(T^* - t^*, X(t^*), Y(t^*)) = 0.$$

Учитывая (30), можно показать, что эти равенства выполняются одновременно лишь при $t^* = T^*$ и $X(t^*) = Y(t^*)$, т.е. сближение произойдет в момент $t^* = T^* < T^0$: $\dot{x}(t^*) = \dot{y}(t^*)$. $\square$

Замечание 2. Хотя предложенная процедура гарантирует выравнивание скоростей, вообще говоря, за бесконечное число шагов, однако можно утверждать, что сколь угодно точное сближение произойдет за конечное число итераций.

Отметим также, что предложенная процедура не учитывает наличие фазового ограничения $x_3(t) \geq 0$. Однако можно предложить прием, который обеспечит выполнение этого ограничения. Для этого возьмем управление (13), которое уже использовалось в доказательстве леммы 2 при обнулении вертикальной скорости.

Пусть t^* — нижняя грань тех моментов времени, когда нарушается условие 2. Используем постоянное управление

$$u_1(t^* + \tau) = u_2(t^* + \tau) \equiv 0, \quad u_3(t^* + \tau) \equiv 1 \quad \text{при } \tau \in [0, \delta],$$

где $\delta = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{\rho} \dot{x}_3(t^*) \right)$. Тогда, так же как и в доказательстве леммы 2, получим

$$x_3(t^* + \delta) = \dot{x}_3(t^* + \delta) = 0.$$

С этого момента начнем снова процедуру выравнивания скоростей, взяв реализовавшиеся на этот момент состояния преследователя и убегающего в качестве исходных. При этом, как видно из формулы (31), дальнейшее движение обоих объектов будет происходить уже в горизонтальной плоскости, т.е. без нарушения фазовых ограничений.

Таким образом, теорема 1 указывает те значения параметров игры и начальные состояния преследователя, для которых возможно решение игровой задачи о «мягкой посадке» (1)–(4) при любом допустимом противодействии убегающего и для любых его начальных состояний. Теоремы 2 и 3 предъявляют конкретное управление преследователя, которое решает эту задачу. При этом на первом этапе, используя управление (31), производим выравнивание скоростей объектов. На втором этапе, используя управление (10), (27), за время (26) непосредственно производим «мягкую посадку».

8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА «МЯГКОЙ ПОСАДКИ»

Предлагаемый подход к решению игровой задачи «мягкой посадки» программно реализован. Программа позволяет пользователю в режиме реального времени моделировать процесс сближения, интерактивным образом управляя направлением и скоростью движения убегающего объекта. Для разных значений параметров $(\rho, \sigma, \alpha, \beta)$ и начальных состояний преследователя и убегающего проведено моделирование.

Программа продемонстрировала высокую скорость и надежность работы. Это связано, в первую очередь, с простотой функциональных соотношений определяющих управление преследователя.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для игровой задачи о «мягкой посадке» (1)–(4) получены достаточные условия разрешимости (условия 1 и 2). При этом конструктивно процесс «мягкой посадки» состоит из двух этапов. На первом из них производится выравнивание скоростей за время первого поглощения [7, 18] для системы (29) (на основе правила экстремального прицеливания Н. Н. Красовского). На втором этапе решается соответствующая задача оптимального быстрогодействия (7)–(9), (11).

Заметим, что на каждом из этапов дается явный вид оптимального управления (31), (10), (27). Последнее обстоятельство позволило программно реализовать процесс «мягкой посадки» и провести моделирование для различных исходных данных и параметров процесса.

Анализируя метод решения задачи (1)–(4), позволивший провести почти все вычисления до конца и получить управления преследователя, а иногда и время решения задачи, в аналитическом виде, можно сделать вывод о том, что он применим и в более общих ситуациях. Наиболее интересными из них являются задача о «мягкой посадке» при нелинейной зависимости коэффициентов трения от геометрических координат и скоростей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л. Д., Шматков А. М. Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию приведения материальной точки в заданное положение с нулевой скоростью// Прикл. мат. мех. — 1998. — 62. — № 1. — С. 129–138.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
3. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968.
4. Зонневенд Д. Об одном методе преследования// Докл. АН СССР. — 1972. — 204, № 6. — С. 1296–1299.
5. Зонневенд Д. Об одном типе превосходства игрока// Докл. АН СССР. — 1973. — 208, № 3. — С. 520–523.
6. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
8. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.
9. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988.
10. Никольский М. С. О применении первого прямого метода Понтрягина в играх преследования// Изв. АН СССР. — 1972. — № 6. — С. 51–56.
11. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988.
12. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1970.
13. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. — М.: Наука, 1988.
14. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983.
15. Пшеничный Б. Н. Линейные дифференциальные игры// Автомат. телемех. — 1968. — 1. — С. 65–78.
16. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
17. Черноусько Ф. Л., Шматков А. М. Оптимальное по быстродействию управление в одной системе третьего порядка// Прикл. мат. мех. — 1997. — 61, № 5. — С. 723–731.
18. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наукова думка, 1992.
19. Albus J., Meystel A. The eagle snatch// Proc. Int. Multidisciplinary Conf. "Intelligent Systems: A Semiotic Perspective"/ NIST, 1996. — Gaithersburg, USA, 1996. — С. 1–7.
20. Albus J., Meystel A., Chikrii A. Soft landing of moving objects/ Report NIST. — Gaithersburg, USA, 1998.
21. Albus J., Meystel A., Chikrii A., Belousov A., Kozlov A. Analytic method for solving the game problem of soft landing for moving objects// Докл. НАН Украины. — 2001. — 8. С. 61–65.
22. Bennet F. V. Lunar descent and ascent trajectories// AIAA 8 Aerospace Sci. Meeting, New York, January 19–21, 1970.
23. Berkovitz L. Optimal control theory. — New York: Springer-Verlag, 1974.
24. Chikrii G. Ts. Game problems of control with delay of information// Proc. Int. Conf. "Intelligent Systems and Semiotics"/ NIST, 1997. — Gaithersburg, USA, 1997. — С. 450–454.
25. Chikrii A. A. Game problem on soft landing for moving objects// Proc. Int. Conf. "Intelligent Systems and Semiotics"/ NIST, 1997. — Gaithersburg, USA, 1997. — С. 443–449.
26. Eyles D. E. Apollo LM guidance and pilot-assistance during the final stage of lunar descent: software considerations// 4 IFAC Sympos on Automat. Control in Space, Dubrovnik, September 6–10, 1971.
27. Lessing H., Tummel P., Coate R. Lunar landing and long-range earth re-entry guidance by application of perturbation theory// J. Spacecraft Rockets. — 1964. — 1, № 2. — С. 112–126.

А. А. Чикрий, А. А. Белоусов

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины

E-mail: dept165@insyg.kiev.ua