Академия Наук Грузии Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Tom 24

динамические системы и оптимизация



Тбилиси **2005**

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

- А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)
- Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)
- Е. С. Голод (Московский государственный университет)
- А. Лашхи (Грузинский технический университет)
- И. Кигурадзе (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)
- Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
- А. В. Овчинников (Московский государственный университет)
- В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
- А. В. Сарычев (Университет Флоренции)
- Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Tom 24

динамические системы и оптимизация

კიბერნეგიკის ინსგიგუგი თბილისი

2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

3
14
35
51
66
74
135
148
167

ПЕРЕКАЧКА ЭНЕРГИИ В УРАВНЕНИИ КУРАМОТО—СИВАШИНСКОГО НА МНОГОМЕРНОМ ТОРЕ С РИМАНОВОЙ МЕТРИКОЙ

© 2005 г. **А. М. АРХИПОВ**

Аннотация. В статье рассматривается уравнение Курамото—Сивашинского на многомерном торе с римановой метрикой: $u_t = -(P(\nabla u, \nabla u) + \Delta u + \nu \Delta^2 u), \ \bar{u} = 0, \ x \in T^n, \ \text{где} \ \bar{u} = \frac{1}{\operatorname{vol} T^n} \int\limits_{T^n} u \ d\mu,$ $Pu = u - \bar{u}, \ \nu > 0.$ Для этого уравнения выполняется теорема о перекачке энергии, которая формулируется следующим образом. Пусть $u = \sum a_k \xi_k$ — разложение Фурье функции u. Обозначим через P_N и P_N^\perp операторы отбрасывания «старших» и соответственно «младших» членов разложения Фурье (гармоник), т.е. $P_N u = \sum_1^N a_k \xi_k, \ P_N^\perp = u - P_N u.$ Тогда для любых $\rho > 0, \ N \in \mathbb{N}, \ s \geqslant n/2 + 5,$ $\lambda \in (0,1),$ существует такое R, что для любой функции $\varphi \in \bar{C}^\infty(T^n)$, лежащей вне шара $n_{C^1} \leqslant R$ в шаре $Q = \{n_s \leqslant \rho \|\varphi\|_{C^1}\}$, существует такое время $t \in (0,1),$ что $g_{KS}^t \varphi = \psi$ и $\|P_N^\perp \psi\|_s^2 \geqslant \lambda \|\psi\|_s^2$. Здесь R — константа, зависящая от метрики $(g), \ n_s - s$ -я соболевская норма, $n_{C^1} - C^1$ -норма.

1. Введение. Уравнение, которое будет рассматриваться ниже, впервые возникло в работах, посвященных волновым потокам жидкости, текущей по наклонной плоскости (Сивашинский) и диффузионному хаосу в системах реакции (Курамото). Отсюда и происходит название — уравнение Курамото—Сивашинского. Данное уравнение было интенсивно изучено как численно, так и аналитически. В частности, было доказано существование аттрактора, и оценена сверху его размерность. Для этой цели применялись различные методы и подходы.

Подход, который был предложен Ю. С. Ильяшенко в [2], использовал методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае уравнение Курамото—Сивашинского рассматривается как динамическая система в бесконечномерном фазовом пространстве. Тогда уравнение Курамото—Сивашинского задает векторное поле в бесконечномерном пространстве, а его траектории будут решениями уравнения. С помощью этого подхода была доказана теорема о существовании и конечномерности аттрактора, и установлен интересный эффект перекачки энергии. Позднее подобный эффект перекачки энергии был установлен для уравнения Курамото—Сивашинского в случае многомерного евклидового тора (см. [5]).

В этой работе рассматривается уравнение Курамото—Сивашинского на торе с переменной римановой метрикой. Оно имеет внешне такой же вид, как обычное уравнение Курамото—Сивашинского (см. [2]), но операторы ∇ , Δ и P понимаются в смысле римановой геометрии. А именно, ∇ — это ковариантная производная, согласованная с метрикой (g). В частности, ∇u — это ковариантная производная функции u, $(\nabla u, \nabla u)$ — скалярный квадрат производной.

Далее, Δ — оператор Лапласа—Бельтрами в метрике g. Метрика (g) задает меру μ на торе. Рассмотрим в пространстве L^2_μ на торе с этой мерой подпространство функций с нулевым средним. Пусть P — оператор ортогонального проектирования пространства L^2_μ на это подпространство. Итак, рассматриваем уравнение

$$u_t = -(P(\nabla u, \nabla u) + \Delta u + \nu \Delta^2 u) \tag{KS}$$

на торе T^n с римановой метрикой (g), правая часть которого определена выше.

Соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$u_t = -P(\nabla u, \nabla u), \tag{HJ}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00482) и CRDF RM1-2358.

а соответствующее линейное уравнение записывается в виде

$$u_t = -\Delta u - \nu \Delta^2 u. \tag{L}$$

Опишем сначала на эвристическом уровне явление перекачки энергии в уравнении Курамото—Сивашинского. Рассмотрим произвольный луч с вершиной 0 в пространстве начальных условий, лежащий в конечномерной плоскости «низших гармоник». Для любого начального условия φ на этом луче существует непрерывно зависящий от φ момент времени T_{φ} , обладающий следующим свойством. Пусть $u_{\varphi}(T_{\varphi})$ — значение решения уравнения (KS) с начальным условием $u|_{t=0}=\varphi$ в момент времени T_{φ} , рассмотренное как элемент пространства $C^{\infty}(T^n)$. Тогда «энергия», сосредоточенная в «старших гармониках"функции $u_{\varphi}(T_{\varphi})$ превосходит «энергию», сосредоточенную в ее «младших гармониках», если L^2 -норма φ достаточно велика. Более того, отношение этих «энергий» стремится к ∞ при $\|\varphi\| \to \infty$.

Опишем теперь на эвристическом уровне механизм перекачки энергии. Вне шара достаточно большого радиуса в пространстве начальных условий нелинейный член правой части уравнения Курамото—Сивашинского начинает доминировать. Само решение уравнения (KS) будет рассматриваться как малое возмущение уравнения (HJ). Решения уравнения Гамильтона—Якоби могут быть написаны в явном виде, и они существуют конечное время как в прошлом, так и в будущем. Потом решения «коллапсируют», т.е. рвутся производные старших порядков. Назовем время существования решения в прошлом и будущем с начальным условием φ моментами коллапса T_{φ}^- , T_{φ}^+ соответственно. При приближении к моменту коллапса L^2 -норма старших производных начинает неограниченно расти. В то же время C^1 -норма решения уравнения Гамильтона—Якоби является первым интегралом уравнения (HJ). Эти соображения, сведенные вместе, дают, что «старшие гармоники» начинают доминировать над «младшими» при приближении к моменту коллапса, т.е. происходит перекачка энергии для уравнения (KS).

Замечание. В одномерном случае первая соболевская норма будет первым интегралом уравнения Гамильтона—Якоби, в то же время для старших размерностей первым интегралом будет лишь C^1 -норма решения. Поэтому методы использованные для доказательства существования аттрактора в одномерном случае, не могут быть использованы без дополнительных исследований поведения C^1 -нормы вдоль решений.

Рассмотрим физическую модель уравнения Гамильтона—Якоби как описание движения свободных частиц. Заметим, что производная решения этого уравнения имеет вид композиции начального условия с диффеоморфизмом области определения функции (начального условия). Этот диффеоморфизм зависит от времени и начальной функции и задается траекториями движения свободных частиц. В евклидовом случае это прямые. При наличии метрики траектории движения будут геодезическими. В этом состоит отличие решений уравнения Гамильтона—Якоби на многообразии с метрикой от обычного евклидового уравнения Гамильтона—Якоби.

2. Уравнение Курамото—Сивашинского на многомерном торе с римановой метрикой. Пусть $T^n - n$ -мерный тор, (g) — метрический тензор, заданный на этом торе.

Определение. Многомерным уравнением Курамото—Сивашинского на торе T^n называется уравнение следующего вида:

$$u_t = -(P(\nabla u, \nabla u) + \Delta u + \nu \Delta^2 u), \tag{KS}$$

где $u\in \bar{C}^{\infty}(T^n)$, Δ — оператор Лапласа—Бельтрами, $\nu>0$, ∇ — ковариантное дифференцирование, согласованное с метрикой. $\bar{C}^{\infty}(T^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с нулевым средним. Среднее функции u на торе T^n равно

$$\bar{u} = \frac{1}{\operatorname{vol} T^n} \int_{T^n} u \, d\mu,$$

где μ — форма объема. P — ортогональный оператор проектирования, действующий в $C^{\infty}(T^n)$ следующим образом: $Pu=u-\bar{u}$.

3. Нормы и определения. Пусть метрика (g) бесконечно гладкая. В дальнейшем всегда будем считать, что метрика является таковой.

Оператор Лапласа—Бельтрами. Этот оператор самосопряженный. На компактном многообразии его спектр дискретный, и собственные функции оператора образуют ортогональный базис в пространстве бесконечно дифференцируемых функций с нулевым средним на торе (см. [гл. 1, § 8]2). Упорядочим собственные значения оператора Лапласа—Бельтрами:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$$

и пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

- соответствующие собственные функции.

Пусть $u=\sum a_k \xi_k$ — разложение Фурье функции u. Обозначим через P_N и P_N^\perp операторы отбрасывания «старших» и соответственно «младших» членов разложения Фурье (гармоник), т.е.

$$P_N u = \sum_{1}^{N} a_k \xi_k, \ P_N^{\perp} = u - P_N u.$$

Как и в евклидовом случае, на многообразии с метрикой с использованием разбиения единицы определяются пространства Соболева и соболевские нормы (см. [гл. 1, § 7]2).

В случае пространства бесконечно дифференцируемых функций с нулевым средним (в разложении Фурье $a_0=0$) эти нормы эквивалентны следующим:

$$n_s^2(u) = \sum |\lambda_k|^{2s} |a_k|^2.$$

Эти нормы обладают следующими свойствами:

- а) Монотонность, т.е. функция $s\mapsto n_s(u)$ монотонно возрастающая по s для любого u.
- б) Логарифмическая выпуклость, т.е. для любых $s \in \mathbb{R}, \ s > 0, \ k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n_s}{n_{s-ka}} \leqslant \left(\frac{n_s}{n_{s-a}}\right)^k, \quad a > 0.$$

В частности, $n_s^2 \leqslant n_{s-a} n_{s+a}$.

- в) Теорема вложения Соболева: для любого s>m+n/2 и $m\in\mathbb{N}$ существует константа $c\in\mathbb{R}^+$ такая, что $\|u\|_{C^m}\leqslant c\|u\|_s$.
- 4. Теорема о перекачке энергии. Сформулируем теперь теорему о перекачке энергии.

Теорема 1. Для любых $\rho > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $s \geqslant n/2 + 5$, $\lambda \in (0,1)$, существует такое R, что для любой функции $\varphi \in \bar{C}^{\infty}(T^n)$, лежащей вне шара $n_{C^1} \leqslant R$ в шаре $Q = \{n_s \leqslant \rho \|\varphi\|_{C^1}\}$, существует такое время $t \in (0,1)$, что $g^t_{KS}\varphi = \psi$ и $\|P_N^{\perp}\psi\|_s^2 \geqslant \lambda \|\psi\|_s^2$. Здесь R — константа, зависящая от метрики (g).

5. Лемма о выходе.

Лемма о выходе. Для любых $\rho\geqslant 0$, $s\geqslant n/2+5$ существует R такое, что для любой функции $\varphi\in \bar{C}^\infty(T^n)$, лежащей вне шара $n_{C^1}\leqslant R$ в шаре $Q=\{n_s\leqslant \rho\|\varphi\|_{C^1}\}$, существует такое время $t\in [0,1]$, что

- a) $g_{KS}^t \varphi = \psi$, $\psi \in \partial Q$;
- б) соответствующая дуга траектории уравнения (KS) лежит в шаре $n_{c^1} \leqslant 2 \|\varphi\|_{C^1}$.

Выведем теорему о перекачке энергии из леммы о выходе. Докажем от противного. Предположим, что лемма о выходе выполняется, а теорема нет. Пусть ψ , s — те же, что в лемме о выходе, λ — то же, что в теореме 1. Из сделанного предположения следует

$$||P_N^{\perp}\psi||_s^2 \le \lambda ||\psi||_s^2 \implies ||P_N\psi||_s^2 > (1-\lambda)||\psi||_s^2.$$

Оценим норму ψ . Из приведенного выше уравнения следует

$$\|\psi\|_s \leqslant \frac{\|P_N\psi\|_s}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

Из определения s-соболевской нормы и разложения Фурье получаем оценку первой соболевской нормы:

$$\frac{\|P_N\psi\|_s}{\sqrt{1-\lambda}} \leqslant \frac{N^{s-1}}{\sqrt{1-\lambda}} \|\psi\|_1.$$

Поскольку функция ψ имеет нулевое среднее, то ее первая соболевская норма оценивается сверху как произведение максимума первой производной на торе на объем тора T^n :

$$\|\psi\|_1 \leqslant \text{vol}(T^n)\|\psi\|_{C^1}.$$

Положим $c=2\operatorname{vol}(T^n)N^{s-1}/\sqrt{1-\lambda}$. Тогда

$$\frac{N^{s-1}}{\sqrt{1-\lambda}}\|\psi\|_1\leqslant c\|\psi\|_{C^1}.$$

Из утверждения б) леммы имеем

$$\|\psi\|_{s} \leqslant c\|\psi\|_{C^{1}} \leqslant 2c\|\varphi\|_{C^{1}}.$$

При $\rho\geqslant 2c$ получаем противоречие с утверждением а) леммы о выходе.

Остальная часть работы будет посвящена доказательству леммы о выходе.

6. Уравнение Курамото—Сивашинского как малое возмущение уравнения Гамильтона— Якоби.

Замена масштаба. Вне шара большого радиуса квадратичные члены начинают доминировать. Исходя из этого, сделаем замену времени и масштаба, переводящую шар радиуса ε^{-1} в шар единичного радиуса и сохраняющую квадратичные члены уравнения (KS): $w=\varepsilon u,\ \tau=\varepsilon^{-1}t.$ Тогда уравнение (KS) будет иметь вид

$$w_{\tau} = -(P(\nabla w)^2 + \varepsilon(\Delta w + \nu \Delta^2 w)).$$

Заменяя w на u и au на t, получим

$$u_t = -(P(\nabla u)^2 + \varepsilon(\Delta u + v\Delta^2 u)). \tag{KS_{\varepsilon}}.$$

Фазовый поток уравнения (KS_{ε}) обозначим через g_{ε}^t .

Лемма о выходе (в новом масштабе). Для любых $\rho \geqslant 0$, $s \geqslant n/2+5$ существует ε_0 такое, что для любой функции $\varphi \in \bar{C}^{\infty}(T^n)$ $n_{C^1}(\varphi) = 1$ в шаре $Q = \{n_s \leqslant \rho\}$ и для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ существует время $t \in [0,c]$, где c — некоторая универсальная константа, такое, что $g_{\varepsilon}^t \varphi = \psi$, $\psi \in \partial Q$. При этом соответствующая дуга траектории уравнения (KS_{ε}) лежит в шаре $n_{c^1} \leqslant 2$.

Лемма о выходе из раздела 5 очевидным образом следует из этой леммы (заменой масштаба). В дальнейшем будем доказывать именно эту лемму.

7. Свойства решений уравнения Гамильтона—Якоби. Так мы будем называть уравнение

$$u_t = -P(\nabla u)^2, \quad u|_{t=0} = \varphi. \tag{HJ}$$

Решения системы. Найдем решения этого уравнения. Уравнение (HJ) задает в кокасательном пространстве T^*M , $M=T^n$, уравнение характеристик, которое находится следующим образом (см. [1, § 8, п. H]): пусть задано уравнение $F(y,u_y)=0$, тогда соответствующее уравнение характеристик имеет вид

$$\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial p},$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial F}{\partial y}.$$

В нашем случае $y=(x,t),\ p=(p',p_t),\ p'=p_1,\ldots,p_n,\ F(y,p)=p_t+g^{ij}(x)p_ip_j;$ здесь и ниже $i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n,\ u_i=\nabla_i u.$ Следовательно, уравнение характеристик для уравнения (HJ) будет иметь следующий вид:

$$\dot{x}^{i} = 2g^{ij}p_{j}, \qquad i = 1, \dots, n,
\dot{p}_{k} = -\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^{k}}p_{i}p_{j}, \qquad k = 1, \dots, n,
\dot{p}_{n+1} = 0,
\dot{t} = 1.$$
(1)

Заметим, что $p_{n+1}=p_t$ сохраняется при движении по траекториям уравнения характеристик. Из уравнения (HJ) при $t\to 0$ находим, что в начальный момент времени ее значение равно $-(\nabla\varphi,\nabla\varphi)$. Поскольку $p_t=$ const вдоль характеристики, то функция u вдоль этой характеристики линейна по t, в начальный момент времени она равна φ . Обозначим через (x(t,a),p(t,a)) проекцию на плоскость x,p' решения системы (1) с начальным условием $(a,\nabla\varphi(a),-P(\nabla\varphi)^2(a),0)$. Тогда

$$u(x(t,a),t) = \varphi(a) - t(\nabla \varphi(a), \nabla \varphi(x)). \tag{2}$$

Уравнения на x, p' в системе (1) отделяются и образуют систему

$$\dot{x}^{i} = 2g^{ij}p_{j},
\dot{p}_{k} = -\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^{k}}p_{i}p_{j}.$$
(3)

Это гамильтонова система с функцией Гамильтона $H(x,p')=g^{ij}(x)p_ip_j$. Она является первым интегралом системы (3). Поверхность уровня H=1 яляется проективизированным кокасательным расслоением $T_1^*M=\{(x,p')\in T^*(M),\|p'\|=1\}$ (см. [3, § 20, п. 1]). На этой поверхности система (3) задает геодезический поток на торе M с метрикой g. Обозначим через T^t преобразование фазового потока системы (3) за время t.

Теорема 2 (см. [3, § 20, п. 1]). При естественном изоморфизме $T^*M \to TM$ траектории геодезического потока переходят в кривые, составленные из касательных векторов к геодезическим линиям в M. Отдельное преобразование T^t переводит пару (x_0, p_0) в пару $(x_t, p_t) = T^t(x_0, p_0)$, где для получения x_t следует провести геодезическую через точку $x_0 \in M$ в направлении p_0 , и тогда x_t отстоит от x_0 на расстояние t вдоль геодезической, а вектор p_t касается этой геодезической в x_t и направлен так же, как и p_0 .

Обозначим через $\chi_{\varphi}(t)$ отображение $M \to M$, $a \mapsto x(t,a)$. При t=0 отображение $\chi_{\varphi}(t)$ тождественное; при малых t — диффеоморфизм. Подробнее существование этого диффеоморфизма рассматривается в следующем параграфе. Далее везде, если не оговорено противное, верхний индекс [-1] будет обозначать обратное отображение. Рассмотрим $\chi^{[-1]}(t)$ — отображение, обратное к $\chi(t)$; обратное отображение в расширенных координатах имеет вид $(\chi^{[-1]}(t), -t)$. Следовательно, при малых t, исходя из тождества (2), получим

$$u(x,t) = (\varphi + t(\nabla \varphi, \nabla \varphi)) \circ \chi^{[-1]}(t).$$

Обозначим выражение $\varphi+t(\nabla\varphi,\nabla\varphi)$ через v_{φ}^t . Таким образом, решение уравнения (HJ) с начальным условием $u|_{t=0}=\varphi$ представляется в следующем виде:

$$u_{\varphi}^t = v_{\varphi}^t \circ \chi^{[-1]}(t).$$

Диффеоморфизм $\chi(t)$ тоже зависит от начальной функции φ . Заметим, что диффеоморфизм $\chi(t)$ зависит исключительно от уравнений на (x, p_1, \ldots, p_n) , поскольку уравнения на (t, p_{n+1}) уже отделены и проинтегрированы.

Таким образом, явное решение уравнения Гамильтона—Якоби имеет вид

$$u_\varphi^t = v_\varphi^t \circ \chi_\varphi^{[-1]}(t), \qquad v^t = \varphi + t(\nabla \varphi)^2, \quad \chi_\varphi(t) = g_\varphi^t,$$

где [-1] означает обратное отображение, $g_{\varphi}^t(x)$ — сдвиг точки x вдоль геодезической, выходящей из точки x по направлению $\frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}$, на расстояние t.

Отметим также, что поскольку функция Гамильтона $|p^2|$ постоянна вдоль траекторий геодезического потока, то и функция |p| постоянная на траекториях, и, следовательно, C^1 -норма является первым интегралом уравнения Гамильтона—Якоби.

Моменты коллапса. Обратное отображение к χ^t существует до тех пор, пока само отображение не вырождено. Докажем это. Рассмотрим дифференциал $d\chi^t$. Если дифференциал отличен от нуля на всем торе, то отображение однозначно и, следовательно, является диффеоморфизмом. Действительно, отображение χ^t гомотопно тождественному, степень отображения при гомотопии сохраняется, поэтому его степень равна единице. Таким образом, если у какой-либо точки имеется несколько прообразов, то существует прообраз, в котором якобиан принимает положительное значение, и прообраз, в котором якобиан отрицателен. Соединив эти точки путем и учитывая непрерывную зависимость значений якобиана от точки, получаем, что в некоторой точке пути якобиан обращается в ноль, что противоречит невырожденности дифференциала.

Вычислим дифференциал D отображения $(\chi^t)^{[-1]}$. Рассмотрим решение уравнения (HJ) и вычислим его производную, используя тот факт, что метрика G согласована со связностью.

$$\nabla u^t = ((\nabla \varphi + 2t(\nabla(\nabla \varphi)G)\nabla \varphi)D(\chi_{\varphi}(t))^{-1}) \circ \chi_{\varphi}^{[-1]}(t),$$

где $\nabla(\nabla\varphi)=\mathrm{Hess}\,\varphi$ — гессиан функции φ , G— метрика. Выражение $\nabla(\nabla\varphi)G$ понимается как свертка произведения метрического тензора G и гессиана функции φ , т.е. оператор, полученный поднятием индекса из гессиана функции φ . Заметим, что этот оператор самосопряженный, в силу равенства $\nabla_i\nabla_j\varphi=\nabla_j\nabla_i\varphi$, поскольку φ — скалярная функция. Обозначим этот оператор через $\mathrm{Hess}_G\,\varphi$, т.е. гессиан, полученный поднятием индекса по метрике G. С другой стороны, имеем, что $\nabla\varphi$ в данную точку переносится потоком уравнения (3), его норма сохраняется вдоль траектории, поскольку является функцией Гамильтона, а направление совпадает, в силу теоремы 2. Таким образом, справедливо равенство

$$(E + 2t \operatorname{Hess}_G \varphi)(\nabla \varphi)D(\chi_{\varphi}(t))^{-1}) = \nabla \varphi.$$

Следовательно, $E+2t\, \mathrm{Hess}_G\, \varphi=D(\chi_\varphi(t))$, в силу самосопряженности оператора $E+2t\, \mathrm{Hess}_G\, \varphi$. Пусть $\lambda_{\min}(x)$ и $\lambda_{\max}(x)$ — соответственно минимальное и максимальное значения самосопряженного оператора $\mathrm{Hess}_G\, \varphi$ в точке x. Обозначим $\lambda_{\min}=\min_{T^n}\lambda_{\min}(x)$, $\lambda_{\max}=\max_{T^n}\lambda_{\max}(x)$. Пусть T_φ^- и T_φ^+ — моменты коллапса в прошлом и будущем соответственно. Тогда $T_\varphi^-=-1/2\lambda_{\max}$ и $T_\varphi^+=-1/2\lambda_{\min}$. Более того, существует константа c (зависящая от метрики), точное значение которой не важно, такая, что $|T_\varphi^\pm|< c$ при $\|\varphi\|_C=1$, где $T_\varphi^\pm=T_\varphi^+-T_\varphi^-$.

Рост старших норм при приближении к моменту коллапса.

Предложение. Для решений уравнения (HJ) выполняются следующие оценки:

$$c(T_{\varphi}^{\pm} - t)^{(1-s)/(s_0 - 1)} < \|g_{HJ}^t \varphi\|_s < f(\|\varphi\|_s)(T_{\varphi}^{\pm} - t)^{2-2s}$$

Оба неравенства выполняются для $t \in (T_{\varphi}^{\pm}/2, T_{\varphi}^{\pm})$, $s \geqslant s_0$, $s_0 = n/2 + 3$, где c — некоторая константа, зависящая от метрики, f — полином фиксированной степени, зависящий от s и метрики (g).

Докажем эти оценки. Рассмотрим сначала левое неравенство. Прямое вычисление дает:

$$\operatorname{Hess}(g_{HJ}^t\varphi) = [(\operatorname{Hess}\varphi)(E + 2t \operatorname{Hess}_G\varphi)^{-1}] \circ \chi^{t[-1]}.$$

Поднимая индекс, получаем

$$\|\operatorname{Hess}_G(g_{HJ}^t\varphi)\|_C = \|[(\operatorname{Hess}_G\varphi)(E + 2t\operatorname{Hess}_G\varphi)^{-1}] \circ \chi^{t[-1]}\|_C.$$

Поскольку оператор $\operatorname{Hess}_G \varphi$ самосопряженный, то

$$\|\operatorname{Hess}_G(g_{HJ}^t\varphi)\|_C = c_1 \frac{-\lambda_{\min}}{1 + 2t\lambda_{\min}}$$

П

для $t \in (T_{\varphi}^+/2, T_{\varphi}^+)$, где c_1 — некоторая константа, зависящая от метрики.

Аналогично

$$\|\operatorname{Hess}_{G}(g_{HJ}^{t}\varphi)\|_{C} = c_{1} \frac{\lambda_{\max}}{1 + 2t\lambda_{\max}}$$

для $t\in (T_{\varphi}^-/2,T_{\varphi}^-)$, где c_1 — та же константа, что и выше. Нормы $\|\cdot\|_{C^2}$ и $\|\operatorname{Hess}_G\|_C$ эквивалентны в пространстве функций с нулевым средним для фиксированной метрики, согласованной со связностью. Имея в виду, что $\lambda_{\min}=-1/2T_{\varphi}^+$, получаем

$$-\lambda_{\min}/(1+2t\lambda_{\min}) = 1/2(T_{\lambda}^{+}-t), \qquad \|g_{HJ}^{t}\varphi\|_{c^{2}} \geqslant c(T_{\varphi}^{+}-t)^{-1}.$$

Пусть $s_0 = n/2 + 3$. Тогда по теореме вложения Соболева

$$||g_{HJ}^t \varphi||_{s_0} > c(T_{\varphi}^+ - t)^{-1},$$

где c — константа, зависящая от метрики.

В заключение, поскольку норма $n_s(u)$ логарифмически выпукла как функция от s, получим левое неравенство для оценки роста норм при приближении к моменту коллапса.

Правое неравенство для евклидового случая было доказано в ([5, §3]). В случае метрики заметим, что этой оценки достаточно, поскольку соответствующая s-я ковариантная производная представляет собой сумму, состоящую из частных производных s-го порядка (для которых оценки сверху уже были получены в [5]) и производных меньшего порядка с коэффициентами, зависящими от метрики и ее производных. Эти слагаемые оцениваются сверху старшей соболевской нормой порядка s с некоторым коэффициентом, зависящим от фиксированной метрики (g) и ее производных, до порядка s включительно.

Уравнение в вариациях.

Утверждение. a) $d(g_{HJ}^t\varphi)\psi=\psi\circ\chi_{\varphi}^{t[-1]};$

б) для любого $\rho > 0$ существует константа $F(\rho,g)$ такая, что для любых $s \geqslant s_0 = n/2 + 3$, $\|d(g_{HJ}^t \varphi)\|_s \leqslant F(\rho,g)$ для $\|g_{HJ}^\tau \varphi\|_s \leqslant \rho$ при $\tau \in [0,t]$.

Приступим к доказательству этих утверждений.

Сначала докажем, что

$$d(g_{HJ}^t\varphi)\psi = \frac{du^t(\varphi + \varepsilon\psi)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \psi \circ \chi^{t[-1]}.$$

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма.

$$\frac{d((f_0 + \varepsilon f_1) \circ (g_0 + \varepsilon g_1))}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon = 0} = \frac{\partial f_0}{\partial x} \circ g_0 \cdot g_1 + f_1 \circ g_0.$$

Доказательство. Прямое дифференцирование.

Приступим теперь к доказательству утверждения а), используя эту лемму. В силу явного вида, для решения уравнения (HJ) имеем

$$v^{t}|_{\varepsilon=0} = f_{0} = \varphi + t(\nabla\varphi)^{2}, \qquad \frac{dv^{t}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = f_{1} = \psi + 2t(\nabla\psi, \nabla\varphi),$$
$$[\chi^{t}]^{-1}|_{\varepsilon=0} = g_{0} = (\chi^{t})^{(-1)}, \qquad \frac{d[\chi]^{-1}}{d\varepsilon} = g_{1}.$$

Теперь вычислим

$$\frac{d[\chi]^{-1}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Пусть

$$[\chi_{\varepsilon}^t]^{-1} = [\chi^t]^{-1} + \varepsilon \zeta + o(\varepsilon).$$

Продифференцировав это выражение по x, получим

$$D[\chi_{\varepsilon}^{t}]^{-1} = D[\chi^{t}]^{-1} + \varepsilon D\zeta + o(\varepsilon).$$
(4)

Из явных формул для дифференциалов имеем

$$D\chi^t = E + 2t \operatorname{Hess}_G \varphi,$$

$$D\chi_{\varepsilon}^t = E + 2t \operatorname{Hess}_G(\varphi + \varepsilon \psi) = D\chi^t + 2\varepsilon t \operatorname{Hess}_G \psi.$$

Подставив эти выражения в (4), получим

$$E = (D\chi^t + 2\varepsilon t \operatorname{Hess}_G \psi)(D[\chi^t]^{-1} + \varepsilon D\zeta + o(\varepsilon)).$$

Таким образом,

$$D\zeta = -2t \operatorname{Hess}_G \psi(D(\chi^t)^{-1})^2 \circ [\chi^t]^{-1}.$$

Следовательно,

$$\zeta = -\left(\left(\frac{\partial \chi^t}{\partial x}\right)^{-1} \circ 2t\nabla\psi\right) \circ [\chi^t]^{-1}.$$

Тогда, применяя лемму, получаем

$$\frac{du^t(\varphi + \varepsilon \psi)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = (\psi + 2t\nabla\psi\nabla\varphi) \circ [\chi^t]^{-1} - (E + 2t\operatorname{Hess}_G)\nabla\varphi \cdot [(\nabla\chi^t)^{-1} \circ 2t\nabla\psi] \circ [\chi^t]^{-1}.$$

Отсюда, используя самосопряженность $E+2t\operatorname{Hess}_G$, находим, что

$$d(g_{HJ}^t\varphi)\psi = \psi \circ [\chi^t]^{-1}.$$

Докажем теперь верхнюю оценку для уравнения в вариациях (утверждение б)). Используя [5, § 3, предложение 2] для оценки старших производных композиции, получаем

$$||d(g_{HJ}^t\varphi)\psi||_s \prec ||\varphi||_s^{s-1} ||\psi||_s \delta^{-2|s-1|}$$

или

$$||dg_{HJ}^t||_s \prec ||\varphi||_s^{s-1} \delta^{-2|s-1|}.$$

Знак \prec для функций или функционалов означает следующее: $A \prec B \Leftrightarrow \exists c: A < cB$. Для завершения доказательства нужно оценить δ через $\|g_{HJ}^t \varphi\|_s = \rho$. Действительно, используя нижнюю оценку на $\|g_{HJ}^t \varphi\|_s$, находим, что

$$\delta = T_{\varphi}^{\pm} - t \succ \rho^{1/\lambda},$$

где $\frac{(s-1)}{(s_0-1)}=\lambda>0$. Отсюда следует нужная оценка.

8. Определение трубки траекторий и лемма о возмущении. Дадим теперь определение трубки траекторий. Пусть даны гиперплоскость $\Lambda \in X$ и замкнутое подмножество D гиперплоскости Λ , во всех точках которого поле v трансверсально гиперплоскости.

Определение. Трубкой траекторий поля v с дном D и временным интервалом T называется множество

$$\Omega=\{g_v^tx|x\in D,\,t\in[0,T]\}.$$

Множества $D^T=g_v^TD$, $\partial\Omega=\{g_v^t\partial D|\,t\in[0,T]\}$, $D^t=g_v^tD$ называются соответственно крышкой, стенкой, и t-перегородкой трубки.

Определим также проектирование π_v вдоль траекторий трубки на дно следующим образом: $\pi_v(g_v^t x) = x$. Приведем формулировку леммы о возмущении; ее доказательство дано в [2].

Лемма (о возмущении, см. [2]). Пусть v и w-два векторных поля в предгильбертовом пространстве X, $\varphi-$ произвольная точка X. Если X конечномерно, то поля v и w гладкие; если X бесконечномерно, то налагается следующее условие гладкости: отображение $\Phi: (t,\tau) \to g_v^t \circ g_{v+w}^\tau \varphi$ гладко всюду, где оно определено. Пусть $\Gamma-$ дуга траектории поля v+w:

$$\Gamma = \{\Gamma(\tau) | \tau \in [0, \tau_0]\}, \qquad \Gamma(\tau) = g_{v+w}^{\tau} \varphi,$$

 Ω — трубка траекторий с дном D, лежащим на гиперплоскости $\Lambda:\langle \psi-\varphi,v(\varphi)\rangle=0$, и временным интервалом T. Пусть $\Gamma\subset\Omega$, и выполнены следующие условия:

1) $||w|| < \alpha$ всюду на Γ ;

- 2) если $y \in \Gamma$ и $g_v^t y \in \Omega$, то $\|dg_v^t(y)\| \leqslant F$;
- 3) ||v|| > C всюду на D;
- 4) угол, образованный вектором $v(\psi)$ и нормалью $v(\varphi)$ к плоскости Λ , не больше некоторого фиксированного (например, $\frac{\pi}{3}$) угла всюду на D.

Тогда

- 1) длина проекции $\pi_v\Gamma$ не превосходит $2\alpha FT$;
 2) $((t\circ\Gamma)'-1)\leqslant \frac{3\alpha F}{C}$, и функция $t:\Omega\to\mathbb{R}$ определяется так: $t(g_v^tx)=t$ при $x\in D$.
- **9.** Доказательство леммы о выходе. Рассмотрим два уравнения (HJ) и (KS_{ε}) , считая первое невозмущенным, а второе — его возмущением; соответствующие векторные поля v и v+w. Рассмотрим три целых значения: $s^- < s^0 < s^+$, например, $s^- = s^+ - 4$, $s^+ > n/2 + 5$, $s^0 = s^+ - 2$. Докажем лемму о выходе для $s = s^{+} > n/2 + 5$.

Пусть функция φ удовлетворяет условиям леммы $\|\varphi\|_{C^1}=1, \|\varphi\|_s\leqslant \rho$. Выберем трубку траекторий Σ уравнения (HJ), на дне которой лежит φ . Дно принадлежит гиперплоскости $\Lambda: \langle \varphi - \psi, v(\varphi) \rangle_{H^{s_-}} = 0$ и определяется на этой плоскости неравенством $D: \|\varphi - \psi\|_{s^0} \leqslant \sigma$ для достаточно малого σ . Пусть T_{φ}^+ (соответственно T_{ψ}^+) — момент коллапса в будущем решения уравнения (HJ) с начальным условием φ (соответственно ψ). Выберем δ такое, что

$$c(3\delta)^{(1-s^+)/(s^0-1)} > 2\rho,$$
 (5)

где c — константа из оценки нормы решения снизу. Выберем σ такое, что для любой $\psi \in D$

$$|T_{\varphi}^{+} - T_{\psi}^{+}| \leqslant \delta. \tag{6}$$

 ${\mathfrak I}$ возможно, поскольку момент коллапса непрерывно зависит от начального условия в C^2 норме и, следовательно, по теореме вложения Соболева в норме n_{s^0} . Пусть $T=T_{\varphi}-2\delta$ — временной интервал трубки Σ . Шар $Q:n_{s^+}\leqslant \rho$ не пересекает верх трубки, в силу неравенств (5), (6) и оценки нормы снизу. Покажем, что дуга Γ фазовой кривой $\Gamma = \{g_{arepsilon}^t arphi \mid t \in [0,T]\}$ существует вне шара $Q:n_{s^+}(\psi)>
ho,\ \psi=g_arepsilon^Tarphi$. Предположим обратное. Тогда возможны два случая.

- а) Кривая Γ остается в пересечении трубки траекторий Σ с шаром Q.
- б) Кривая Γ покидает трубку Σ , но остается в Q.

Оба предположения ведут к противоречию. Ниже, в следующем параграфе проверим, что все условия леммы о возмущении выполняются. Если ε достаточно мало, то по лемме о возмущении дуга Γ достигает t-перегородки трубки Σ при $t\in (T-\delta,T)$, на которой $n_{s^+}>\rho$. Это доказывает невозможность случая а).

Случай б) также не возможен. Как и выше, пусть ψ — конец дуги Γ . Пусть ψ_1 — точка выхода Γ из трубки траекторий Σ . Положим $\xi = \varphi - \pi_v \psi_1$. Ниже докажем, что вектор ξ обладает следующими свойствами, которые противоречат друг друг при малых ε :

- 1) $\|\xi\|_{s^-} \leqslant \varepsilon c(\rho)$;
- 2) $\|\xi\|_{s^0} = \sigma$;
- 3) $\|\xi\|_{s^+} = c_1(\rho)$.

Первое следует из леммы о возмущении (см. раздел 8. Второе следует из определения трубки траекторий Σ . Докажем третье.

Докажем сначала, что момент коллапса в прошлом отделен от нуля константой, зависящей от ho, для всех начальных условий на дне трубки. Действительно, для T_{arphi}^- это следует из оценок $\|\varphi\|_{s^+}\leqslant
ho$ и $\|arphi\|_{C^2}< c$ (где c- некоторая константа). Для остальных начальных условий $\psi\in D$ это следует из определения дна, если σ (зависящее от ρ) достаточно мало. Теперь оценка сверху для нормы $\|\pi_v\psi_1\|_{s^+}$ следует из оценки нормы снизу для $s=s^+$. Это доказывает свойство 3 вектора ξ. Из логарифмической выпуклости получаем

$$\|\xi\|_{s^0}^2 \leqslant \|\xi\|_{s^-} \|\xi\|_{s^+}.$$

При достаточно малом ε это неравенство вместе со свойствами 1), 2), 3) дает противоречие. Для полного доказательства теоремы нам необходимо

- 1) проверить условия леммы о возмущении;
- 2) доказать априорную оценку $n_{C^1}|_{\Gamma} \leq 2$.
- **10.** Проверка условий леммы о возмущении. 1) Уравнение (KS_{ε}) в шаре $Q:n_{s^+}\leqslant \rho$ является малым возмущением уравнения (HJ) в норме n_{s^-} при достаточно малых ε : норма $\|\Delta u + \nu \Delta^2 u\|_{s^-}$ ограничена константой, зависящей от ρ при $\|u\|_{s^+}\leqslant \rho$. Это очевидно, поскольку $s^+=s^-+4$, и нормы $\|\Delta^2 u\|_{s^-}$ и $\|u\|_{s^+}$ эквивалентны.
- 2) Ограниченность решения уравнения в вариациях по начальному условию следует из соответствующего свойства уравнения (HJ).
 - 3) Для некоторого c имеем, что $\|P(\nabla u)^2\|_{s^-}\geqslant c$ всюду на D.

Доказательство. Поскольку $s^+>n/2+2$, по теореме вложения Соболева норма $\|\varphi\|_{C^2}$ ограничена сверху константой, зависящей от φ (и метрики). Следовательно, норма n_{C^2} ограничена на D константой, зависящей от ρ и σ . С другой стороны, при достаточно малом σ C^1 -норма близка к 1 всюду на D. Тор компактен, таким образом, функция $(\nabla \psi)^2$, $\psi \in D$, принимает значения ноль и «почти единицу». Эта функция меняется гладко, поскольку норма $\|\psi\|_{C^2}$ равномерно ограничена на D. Следовательно, для любого $c' \in \mathbb{R}$ норма $\|(\nabla \psi)^2 - c'\|_0$ отлична от нуля на D. Тогда существует число c>0 такое, что для любой $\psi \in D$ имеем $\|P(\nabla \psi)^2\|_0 > c$, и таким образом, $\|P(\nabla \psi)^2\|_{s^-} > c$. Это доказывает третье утверждение леммы о возмущении.

4) Оценим угол $\angle(v(\varphi),v(\psi))$. Для этого достаточно доказать, что норма $\|P(\nabla\varphi)^2-P(\nabla\psi)^2\|_{s^-}$ равномерно ограничена на D константой, которая стремится к нулю вместе с σ . Норма n_s для любого натурального числа s эквивалентна сумме L^2 норм производных порядка s. По неравенству Гёльдера и теореме вложения Соболева для любых положительных сопряженных чисел p, q, 1/p+1/q=1, получаем неравенство

$$||fg||_0 < c||f||_{s_1}||g||_{s_2}$$

для любых $s_1 > n(1/2-1/2p), \ s_2 > n(1/2-1/2q),$ где c — некоторая константа. Имеем

$$\gamma = \|P(\nabla \varphi)^2 - P(\nabla \psi)^2\|_{s^-} \leqslant \|(\nabla \varphi)^2 - (\nabla \psi)^2\|_{s^-}.$$

Достаточно оценить норму $\|fg\|_0$ для $f=D^{\alpha}(\nabla\varphi-\nabla\psi),\ g=D^{\beta}(\nabla\varphi+\nabla\psi),\ |\alpha|=a,\ |\beta|=b,$ $a+b=s^-.$ По определению дна D

$$||f||_{s^0-(a+1)} < c_1 \rho, \qquad ||g||_{s^0-(b+1)} < c_2 \rho,$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы.

Числа p и q могут быть выбраны так, что выполняются следующие неравенства:

$$n(1/2 - 1/2p) < s^0 - (a+1), \qquad n(1/2 - 1/2q) < s^0 - (b+1),$$

поскольку $s^0 = s^- + 2 > n/2$. Малость γ следует из выведенных выше неравенств.

Таким образом, все условия леммы о возмущения выполнены, за исключением требования глад-кости. Гладкость сразу следует из теоремы о существовании гладких решений уравнения (KS) и гладкой зависимости решений уравнения (HJ) от начальных условий, которое следует из точных формул для решения. Начальное условие $u=g_{v+w}^{\tau}\varphi$ на траектории Γ уравнения (KS_{ε}) зависит гладко от τ , и решение уравнения (HJ) с начальным условием, которое зависит гладко от параметра τ , также зависит гладко от этого параметра.

11. Априорная оценка. Докажем второе утверждение леммы о выходе: $n_{C^1}(\Gamma\cap Q)\leqslant 2$. Для этого оценим сверху временную длину дуги Γ и докажем, что производная функционала n_{C^1} на этой дуге стремится к нулю вместе с ε по уравнению (KS_ε) . Действительно, производная нормы n_{C^1} , в силу уравнения (HJ), равна нулю по закону сохранения. Производная функционала n_{C^1} вдоль векторного поля $\varepsilon(\Delta u + \nu \Delta^2 u)$ порядка $\varepsilon\|\Delta u + \nu \Delta^2 u\|$. По теореме вложения Соболева $\|\Delta u + \nu \Delta^2 u\|_{C^1} < c_1\|u\|_{n/2+5} < c_2\|u\|_{s+} < c_3\rho$, где c_1 , c_2 , c_3 — некоторые константы. Поскольку момент коллапса ограничен сверху на D некоторой универсальной константой, то получаем, что норма n_{C^1} меняется на дуге $\Gamma\cap Q$ на величину порядка $\varepsilon\rho$, т.е. меньше единицы.

Таким образом, закончено доказательство леммы о выходе, и, следовательно, доказана теорема о перекачке энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. M.: Наука, 1978.
- 2. *Ильяшенко Ю. С.* Глобальный анализ фазового портрета нелинейного параболического эволюционного уравнения. В кн.: «Математика и моделирование». Пущино, 1990. С. 5–32.
- 3. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995.
- 4. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.
- 5. *Arkhipov A. M., Il'yashenko Yu. S.* Jump of energy from low harmonics to high ones in the multidimensional Kuramoto-Sivashinskii equation// Selecta Mathematica (formerly Sovietica). 1994. 13, № 3.

А. М. Архипов

E-mail: arkkom@mail.su

МЕТОД РЯДА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРАВЛЕНИЕМ: СХОДИМОСТЬ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

© 2005 г. Л. К. БАБАДЖАНЯНЦ, Д. Р. САРКИССЯН

Аннотация. Для оптимизации сложной функции, построенной из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, весьма важно очень точно аппроксимировать решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Точность, обеспечиваемая стандартными методами Рунге—Кутта зачастую бывает недостаточной, что приводит к необходимости оптимизировать «зашумленную функцию».

Рассматривается задача с начальными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих полиномиальные правые части по всем зависимым переменным. Вначале показывается, как свести широкий класс обыкновенных дифференциальных уравнений к таким полиномиальным системам. С помощью оценок для метода ряда Тейлора строится новый «агрегативный» метод ряда Тейлора и выводятся гарантированные априорные оценки длины шага и погрешности для методов Рунге—Кутта порядка r. Затем сравниваются 8,13-метод Принса—Дорманда, метод ряда Тейлора, агрегативный метод ряда Тейлора с помощью 7 эталонных тестовых систем уравнений, включая уравнения ван дер Поля, уравнения «брусселятора», уравнения эллиптических функций Якоби, линейные и нелинейные жесткие системы уравнений. Численные эксперименты показывают, что с помощью метода ряда Тейлора достигается наилучшая точность, в то время как агрегативный метод рядов Тейлора дает наилучшее время вычисления.

Заключительный параграф этой статьи посвящен сравнительному исследованию вышеприведенных численных методов интегрирования для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих оптимальный полет космического корабля с Земли на Луну.

СОДЕРЖАНИЕ

Ι.	Введение
2.	Оценки локальной погрешности для метода ряда Тейлора и методов Рунге—Кутта
3.	Численные эксперименты для эталонных тестовых примеров
4.	Доказательства
5.	Практическое осуществление методов
6.	Оптимальный полет с Земли на Луну
7.	Выводы
	Список литературы

1. Введение

В §§ 2 и 4 рассматриваются оценки погрешности метода Рунге—Кутта, метода рядов Тейлора и агрегативного метода ряда Тейлора для полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В §§ 3 и 6 сравниваются эффективность численных методов интегрирования применительно к эталонным тестовым примерам и уравнениям оптимального полета космического корабля с Земли на Луну. Некоторые вопросы численной реализации обсуждаются в § 5.

Идея сведения к полиномиальным системам восходит к [10]. Общий метод такого сведения был предложен в [1] и уточнен в [5] и [7, § 2.1]. В частности, основное уравнение небесной механики может быть приведено к виду, в котором его правые части являются как раз квадратными многочленами (см. § 6).

Для полноты изложения ниже мы опишем метод редукции.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_m, t),\tag{1}$$

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m.$$
 (2)

С этого момента и далее предполагаем, что (1) принадлежит к классу дифференциальных систем, для которых

$$f_i(x_1,\ldots,x_m,t) = P_i(x_1,\ldots,x_m;t;\phi_1(x_1,\ldots,x_m,t),\ldots,\phi_k(x_1,\ldots,x_m,t)),$$

где для всех $1\leqslant r\leqslant k$ и $1\leqslant s\leqslant m$

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial t} = \Phi_r(x_1, \dots, x_m, t, \phi_1, \dots, \phi_k), \qquad \frac{\partial \phi_r}{\partial x_s} = \Phi_{r,s}(x_1, \dots, x_m, t, \phi_1, \dots, \phi_k),$$

и все функции $P_1, \ldots, P_m, \Phi_1, \ldots, \Phi_k, \Phi_{1,1}, \ldots, \Phi_{k,m}$ являются многочленами от $t, x_1, \ldots, x_m, \phi_1, \ldots, \phi_k$.

Затем, вводя переменные $x_{m+1}=t,\ x_{m+2}=\phi_1,\ \ldots,\ x_n=\phi_k$, сводим исходную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) к следующей полиномиальной задаче Коши для x_1,\ldots,x_n :

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \dots, x_n),\tag{3}$$

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad j = 1, \dots, n,$$
 (4)

где все функции

$$X_1 = P_1, \dots, X_m = P_m, X_{m+1} = 1,$$

 $X_{m+2} = \sum_{r=1}^m \Phi_{1,r} X_r + \Phi_1, \dots, X_n = \sum_{r=1}^m \Phi_{k,r} X_r + \Phi_k$

— многочлены от x_1, \ldots, x_n .

Замечание 1. Если \mathcal{P} — множество всех таких правых частей f_i , то множество \mathcal{S} скалярных функций со скалярными аргументами, которое может быть получено из систем обыкновенных дифференциальных уравнений с правыми частями из \mathcal{P} , включает практически все аналитические функции из известных справочников математических функций. Отметим также, что множество \mathcal{P} замкнуто при алгебраических операциях, дифференцировании, интегрировании и суперпозиции с любой функцией из \mathcal{S} . Очень важно осознать, что класс полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений является большим.

Замечание 2. Кусочно-аналитические функции могут рассматриваться без каких-либо трудностей, что имеет место для примера в § 6.

Например, имея «модельную» задачу Коши

$$\dot{x}_1 = x_1 \sin \ln(x_2) + x_1^2 \ln(x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2 \ln(x_1),$$

 $x_1(t_0) = e, \quad x_2(t_0) = 1,$

вводим новые переменные

$$x_3 = \ln(x_2), \quad x_4 = \ln(x_1), \quad x_5 = \sin\ln(x_2), \quad x_6 = \cos\ln(x_2), \quad x_7 = x_1x_3$$

и сводим ее к полиномиальной задаче Коши

$$\dot{x}_1 = x_1 x_7 + x_1 x_5, \quad \dot{x}_2 = x_2 x_4, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = x_7 + x_5,$$

$$\dot{x}_5 = x_4 x_6, \quad \dot{x}_6 = -x_4 x_5, \quad \dot{x}_7 = x_7^2 + x_5 x_7 + x_1 x_4,$$

$$x_1(t_0) = e, \quad x_2(t_0) = 1, \quad x_3(t_0) = 0, \quad x_4(t_0) = 1, x_5(t_0) = 0, \quad x_6(t_0) = 1, \quad x_7(t_0) = 0.$$

1.1. Эталонные тестовые примеры. Будем использовать следующие системы уравнений (см. [8,9]) для сравнения численных методов интегрирования в данной статье.

Первые четыре эталонные тестовые системы уже имеют нужный полиномиальный вид:

SIMPLEST: задача Коши для x(t) = 1/(1-t)

$$\dot{x}(t) = x(t)^2, \quad x(0) = 1.$$

STIFF-LINEAR: задача Коши для $y(t) = s(t) + e^{-100t}y(0)$, $s(t) = \sin(t)$, $c(t) = \cos(t)$

$$\dot{y}(t) = -100y(t) + c(t) + 100s(t), \quad \dot{s}(t) = c(t), \quad \dot{c}(t) = -s(t),$$

 $y(0) = 2, \quad s(0) = 0, \quad c(0) = 1.$

STIFF-CAPS: задача Коши для $y_1(t) = y_2^2(t), y_2(t) = e^{-t}$ с параметром $\alpha = 1.25 \cdot 10^4$

$$\dot{y}_1(t) = -(\alpha + 2)y_1(t) + \alpha y_2(t)^2, \quad \dot{y}_2(t) = y_1(t) - y_2(t) - y_2(t)^2,$$
$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

JACOB: задача Коши для эллиптических функций Якоби

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sn}(t) = \operatorname{cn}(t)\operatorname{dn}(t), \quad \frac{d}{dt}\operatorname{cn}(t) = -\operatorname{sn}(t)\operatorname{dn}(t), \quad \frac{d}{dt}\operatorname{dn}(t) = -0.5\operatorname{sn}(t)\operatorname{cn}(t),$$

$$\operatorname{sn}(0) = 0, \quad \operatorname{cn}(0) = 1, \quad \operatorname{dn}(0) = 1.$$

Решение имеет период 4K, где K = 1.8540746773013719184.

Две другие системы сводим к квадратичному полиномиальному виду следующим образом.

VDPL: задача Коши для уравнения Ван дер Поля

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \quad \dot{y}_2(t) = (1 - y_1(t)^2)y_2(t) - y_1(t),$$

 $y_1(0) = 2.0086198608748431365, \quad y_2(0) = 0.$

Вводя дополнительную переменную $y_3(t) = 1 - y_1^2(t)$, получаем систему

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \quad \dot{y}_2(t) = y_2(t)y_3(t) - y_1(t), \quad \dot{y}_3(t) = -2y_1(t)y_2(t),$$

 $y_1(0) = 2.0086198608748431365, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 1 - y_1^2(0).$

Решение имеет период T = 6.6632868593231301897.

BRUS: задача Коши для уравнений «брусселятора»

$$\dot{y}_1(t) = 2 + y_1(t)^2 y_2(t) - 9.533 y_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = 8.533 y_1(t) - y_1(t)^2 y_2(t),$$

 $y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 4.2665.$

Вводя дополнительные переменные $y_3(t)=y_1(t)y_2(t)-8.533,\ y_4(t)=y_1(t)^2,\ y_5(t)=1,$ получаем систему

$$\dot{y}_1(t) = 2y_5(t) + y_1(t)y_3(t) - y_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = -y_1(t)y_3(t),$$

$$\dot{y}_3(t) = -8.533y_5(t) + 2y_2(t) + 7.533y_3(t) + y_3(t)^2 - y_3(t)y_4(t),$$

$$\dot{y}_4(t) = 4y_1(t) - 2y_4(t) + 2y_3(t)y_4(t), \quad \dot{y}_5(t) = 0,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 4.2665, \quad y_3(0) = -4.2665, \quad y_4(0) = 1, \quad y_5(0) = 1.$$

2. Оценки локальной погрешности для метода ряда Тейлора и методов Рунге—Кутта

Рассмотрим полиномиальную задачу Коши (3), (4) с

$$X_j = \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{i \in I(m)} a_j[i] x^i,$$
 (5)

$$i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad x^i = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n},$$

$$I(m) = \{i \in \mathbb{Z}^n : i_1 \geqslant 0, \dots, i_n \geqslant 0; |i| = m\}, \quad |i| = i_1 + \dots + i_n,$$

$$1 \leqslant j \leqslant n, \quad 0 \leqslant L < +\infty, \quad x_{j0} \in \mathbb{C}, \quad a_j[i] \in \mathbb{C}.$$

Через $x(t,t_0,x_0)$ обозначим решение этой задачи, где $x_0=(x_{10},\ldots,x_{n0})$, и пусть $O_a(b)=\{t\in\mathbb{C}:|t-b|< a\}.$

2.1. Метод ряда Тейлора. Обозначим частичную сумму ряда Тейлора задачи Коши через

$$T_M x(t, t_0, x_0) = \sum_{m=0}^{M} \frac{d^m x}{dt^m} \bigg|_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^m}{m!}.$$
 (6)

Пусть $R(t_0, x_0)$ — радиус сходимости ряда Тейлора $T_{\infty}x(t, t_0, x_0)$.

Метод ряда Тейлора для решения задачи Коши (1), (2) аппроксимирует искомое решение x(t) задачи Коши как

$$\tilde{x}(t_1) = T_{M_1} x(t_1, t_0, x_0),
\dots
\tilde{x}(t_w) = T_{M_w} x(t_w, t_{w-1}, \tilde{x}(t_{w-1})),$$
(7)

где M_1, M_2, \ldots некоторые натуральные числа, $t_1 = t_0 + h_1, t_2 = t_1 + h_2, \ldots$, и локальные шаги h_1, h_2, \ldots удовлетворяют неравенствам $|h_w| < R(t_{w-1}, \tilde{x}(t_{w-1}))$.

Натуральное число M_w — порядок метода для номера шага w. Чтобы получить $T_M x(t,\tau,\tilde{x}(\tau))$, нужно вычислить первые M производных $(d^l x/dt^l)|_{t=\tau},\ l=1,\ldots,M$, предполагая, что $(d^0 x/dt^0)|_{t=\tau}=\tilde{x}(\tau)$. Именно вычислительные затраты на вычисление этих производных препятствуют использованию метода ряда Тейлора для общей задачи Коши. Но в случае полиномиальных задач Коши быстрые рекуррентные формулы для производных $(d^l x/dt^l)|_{t=\tau}$ получаются таким образом, позволяя методу ряда Тейлора конкурировать с традиционными методами Рунге—Кутта как в отношении времени вычислений, так и в отношении точности аппроксимации.

2.1.1. Формулы для вычисления коэффициентов Тейлора.

Общий полиномиальный случай. Рассмотрим задачу Коши (3), (4) с полиномиальными правыми частями (5) и начальными условиями $x_k(t_0) = c_k$, $k = 1, \ldots, n$, где t_0 , c_k — комплексные постоянные, L — натуральное число ($+\infty$ в случае аналитической системы) и $a_k[i]$ — некоторые комплексные голоморфные функции t в окрестности t_0 .

Чтобы подчеркнуть, что правые части X_k зависят и от $a_k[i]$, используем обозначение $X_k(\{a_k[i]\},x_1,\ldots,x_n)$ наряду с $X_k(x_1,\ldots,x_n)$. Пусть

$$x_k^r = \sum_{i=0}^r x_{k,j} (t - t_0)^j, \qquad a_k^r[i] = \sum_{i=0}^r a_{k,j}[i] (t - t_0)^j$$

— полиномы Тейлора для $x_k(t), a_k[i].$ Обозначая коэффициент при члене r-й степени в многочлене $X_k(\{a_k^r[i]\}, x_1^r, \ldots, x_n^r)$ через $\langle X_k(\{a_k^r[i]\}, x_1^r, \ldots, x_n^r) \rangle_r$, заметим, что для того чтобы оценить его, нужно сохранять в каждом вычислении только члены до r-й степени.

Подставляя разложения Тейлора в систему (3), (4), (5) и приводя подобные члены, получаем следующие формулы:

$$x_{k,r+1} = \frac{1}{r+1} \langle X_k(\{a_k^r[i]\}, x_1^r, \dots, x_n^r) \rangle_r,$$

$$x_{k,0} = c_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad r = 0, 1, \dots.$$

Случай квадратного многочлена.

$$\dot{x}_k(t) = a_k + \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l(t) + \sum_{i,j=1}^n a_{kij} x_i(t) x_j(t),$$
$$x_k(t_0) = c_k,$$

где t_0 , c_k , a_k , a_{kl} , a_{kjl} — комплексные постоянные и t — комплексная переменная. Подставляя разложение в ряд Тейлора

$$x_k(t) = \sum_{m=0}^{\infty} x_{k,m} (t - t_0)^m$$

в уравнения и приводя подобные члены, получаем формулы

$$x_{k,m+1} = \frac{1}{m+1} \left(\delta_m a_k + \sum_{l=1}^n a_{kl} x_{l,m} + \sum_{i,j=1}^n a_{kij} \sum_{p=0}^m x_{i,p} x_{j,m-p} \right),$$

$$x_{k,0} = c_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad m = 0, 1, \dots,$$

где $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = 0$.

2.1.2. Оценки размера шага и погрешности. Чтобы оценить шаги h_i и локальную погрешность метода, используем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $a_j[i]$ — комплексные постоянные и пусть L>0. Если неравенство $|x_{j0}|\leqslant \gamma$ выполняется для каждого $1\leqslant j\leqslant n$, то

а) решение $x=(x_1,\dots,x_n)$ задачи (3), (4), (5) регулярно в круге $O_{\rho}(t_0)$, где

$$\rho = \frac{1}{Ls(\gamma)}, \qquad s(\gamma) = \max_{1 \le j \le n} \sum_{m=1}^{L+1} \gamma^{m-1} \sum_{i \in I(m)} |a_j[i]|; \tag{8}$$

б) если $t \in O_{\rho}(t_0)$, то справедливы следующие неравенства для всех $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$|x_j(t) - (T_M x(t, t_0, x_0))_j| \le \gamma \left(1 - \frac{|t - t_0|}{\rho}\right)^{-1/L} \left|\frac{t - t_0}{\rho}\right|^{M+1}.$$
 (9)

Доказательство. См. [6, предложение 2].

Замечание 4. Если L=0 в системе (3), (4), (5), то вводим «поддельное» уравнение $\dot{x}_{n+1}=\varepsilon\,x_{n+1}^2,\ \varepsilon\approx0$, с начальным условием $x_{n+1}(t_0)=0$ и применяем теорему 3 с L=1.

Замечание 5. Чтобы улучшить оценки теоремы 3, можно переписать систему относительно новых переменных $y_j(t) = x_j(t)/\sigma_j(t_0), \ 1 \leqslant j \leqslant n,$ с подходящими $\sigma_1 > 0, \ldots, \sigma_n > 0,$ так как истинный радиус сходимости и истинные относительные погрешности для новых переменных y_j остаются такими же, как и для старых переменных x_j .

Замечание 6. Обобщения теоремы 3 для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (5) с голоморфными $a_i[i]$ в случаях $L < +\infty$ и $L = +\infty$ приведены в [2] и [3].

2.1.3. Оценки метода ряда Тейлора для эталонных тестовых примеров. В этом пункте применяем теорему 3, чтобы записать оценки радиуса сходимости для эталонных тестовых примеров из п. 1.1.

SIMPLEST:
$$\gamma = |x(t_0)|, s(\gamma) = \gamma, L = 1, \rho = 1/(Ls(\gamma)).$$

Отметим, что оценка радиуса сходимости ρ дает в точности значение истинного радиуса сходимости, и оценка локальной ошибки (9) дает в точности значение истинной локальной ошибки.

В оставшихся примерах используем подходящее σ_i из замечания 5 для улучшения оценок $s(\gamma)$.

STIFF-LINEAR:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.01, \quad s(\gamma) = 101.01,$$

 $\gamma = \max\{|y(t_0)|, |100s(t_0)|, |100c(t_0)|\}.$

STIFF-CAPS:

$$\sigma_1 = \alpha, \quad \sigma_2 = 1, \quad s(\gamma) = 2 + \alpha + \gamma,$$

$$\gamma = \max\left\{\frac{|y_1(t_0)|}{\alpha}, |y_2(t_0)|\right\}.$$

JACOB:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = \sqrt{0.5}, \quad s(\gamma) = \sqrt{0.5}\gamma,$$

$$\gamma = \max\{|\operatorname{sn}(t_0)|, |\operatorname{cn}(t_0)|, \sqrt{2}|\operatorname{dn}(t_0)|\}.$$

VDPL:

$$\sigma_1 = 0.5, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = \sqrt{2}, \quad s(\gamma) = \max\{2, \sqrt{2}\gamma + 0.5\},$$

$$\gamma = \max\{|2y_1(t_0)|, |y_2(t_0)|, \left|\frac{y_3(t_0)}{\sqrt{2}}\right|\}.$$

BRUS:

$$\sigma_{1} = \sigma_{2} = 1, \quad \sigma_{3} = \max \left\{ 1, \frac{|y_{3}(t_{0})|}{\gamma} \right\},$$

$$\sigma_{4} = \max \left\{ 1, \frac{|y_{4}(t_{0})|}{\gamma} \right\}, \quad \sigma_{5} = \frac{1}{\gamma},$$

$$\gamma = \max \left\{ |y_{1}(t_{0})|, |y_{2}(t_{0})| \right\},$$

$$s(\gamma) = 2 + \sigma_{3}\gamma + \max \left\{ \left| 5.533 + \frac{2}{\sigma_{3}} + \sigma_{4}\gamma + \frac{8.533}{\gamma\sigma_{3}} \right|, \left| \frac{4}{\sigma_{4}} + \sigma_{3}\gamma \right| \right\}.$$

2.2. Методы Рунге—Кутта. Наибольшей проблемой с эвристическими оценками шага для методов Рунге—Кутта является то, что они могут перешагнуть особенность решения, вызывая катастрофическую потерю точности интегрирования. Основываясь на теореме 3, выводим теоретические априорные оценки длины шага и погрешности для общих явных методов Рунге—Кутта следующим образом.

Обозначим r,q-метод Рунге—Кутта (степени r с q этапами) через

$$x_j(t) \approx R_j x(t, t_0, x_0) = x_{j0} + h \sum_{i=1}^q p_i k_j^{(i)}$$
 (11)

с вещественными постоянными $p_i,\ \beta_{il}$ и $h=t-t_0>0$ такими, что $1\leqslant j\leqslant n,\ 2\leqslant i\leqslant q.$

Для того чтобы использовать оценки (подробности см. в теореме 7) в случае квадратичных систем с вещественными постоянными t_0 , c_k , a_k , a_{kl} , a_{kjl} и вещественным t, необходимо вычислить

следующие величины:

$$s_{1} = \max \left\{ s(\gamma), s_{2}, \gamma s_{3} \right\},$$

$$s_{2} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{v=1}^{n} \left| a_{jv} + \sum_{m=1}^{n} (a_{jvm} + a_{jmv}) x_{j}^{(1)} \right|,$$

$$s_{3} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{v,m=1}^{n} |a_{jvm} + a_{jmv}|.$$
(12)

2.2.1. Оценки длины шага и погрешности для методов Рунге—Кутта.

Теорема 7. Пусть $Rx(t,t_0,x_0)-r,q$ -аппроксимация Рунге—Кутта, определенная (11). Тогда в условиях теоремы 3 с L=1 для всех $h<1/(\tau s_1)$ выполняется следующее неравенство:

$$|x_j(t_0+h) - Rx(t_0+h, t_0, x_0)_j| \le \gamma (hs_1\tau)^{r+1} \left(\frac{D}{\tau} + \left(\frac{s(\gamma)}{s_1\tau}\right)^{r+1} \left(1 - \frac{s(\gamma)}{s_1\tau}\right)^{-1}\right),\tag{13}$$

где постоянные τ и D зависят только от β_{il} и p_i (см. п. 2.2.2 и (21)).

Доказательство. См. п. 4.1.

2.2.2. Параметры для методов Рунге—Кутта. В данном пункте выписываем постоянные r, q, τ, D , требуемые в теореме 7. Исходные параметры методов Рунге—Кутта были взяты из [9] и [11].

4,4-метод Рунге-Кутта:

$$\beta_{21} = \beta_{32} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{43} = 1, \quad \beta_{31} = \beta_{41} = \beta_{42} = 0,$$

$$p_1 = p_4 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = p_3 = \frac{1}{3},$$

$$r = 4, \quad q = 4, \quad \tau = 2, \quad D < 0.577.$$

8,13-метод Принса—Дорманда:

$$r = 8$$
, $q = 13$, $\tau = 33.77$, $D < 3.58$.

2.2.3. Оценки метода Рунге-Кутта для эталонных тестовых примеров.

SIMPLEST: $s_1 = 2\gamma$.

STIFF-LINEAR: $s_1 = 101.01$.

STIFF-CAPS: $s_1 = \alpha + 2 + 2\gamma$.

JACOB: $s_1 = \max \{ \sqrt{2\gamma}, \sqrt{0.5} |\operatorname{cn}(t_0)| + |\operatorname{dn}(t_0)|, \sqrt{0.5} |\operatorname{sn}(t_0)| + |\operatorname{dn}(t_0)| \}.$

VDPL: $s_1 = \max \{ s(\gamma), 2\sqrt{2}\gamma, 0.5 + \sqrt{2}|y_2(t_0)| + |y_3(t_0)| \}$

BRUS:

$$\sigma_{3} = \max \left\{ 1, \frac{|y_{3}(t_{0})|}{\gamma} \right\}, \quad \sigma_{4} = \max \left\{ 1, \frac{|y_{4}(t_{0})|}{\gamma} \right\},$$

$$s_{1} = \max \left\{ s(\gamma), 2\gamma(\sigma_{3} + \sigma_{4}), |y_{3}(t_{0}) - 1| + \sigma_{3}|y_{1}(t_{0})| + \frac{2}{\gamma}, 4\sigma_{3}\gamma, |7.533 + 2y_{3}(t_{0}) - y_{4}(t_{0})| + \frac{\sigma_{4}}{\sigma_{3}}|y_{3}(t_{0})| + \frac{2}{\sigma_{3}} + \frac{8.533}{\gamma\sigma_{3}}, \sigma_{3}|y_{1}(t_{0})| + |y_{3}(t_{0})|, \frac{4}{\sigma_{4}} + 2\frac{\sigma_{3}}{\sigma_{4}}|y_{4}(t_{0})| + |2y_{3}(t_{0}) - 2| \right\}.$$

2.3. Агрегативный метод ряда Тейлора. Когда нужно аппроксимировать истинное решение x(t) очень точно, оценка локальной погрешности (9) говорит о том, что локальная длина шага $\tau_{i+1} - \tau_i$ должна быть очень малой долей оценки ρ_i радиуса сходимости в каждый момент времени τ_i , и потребуется много шагов для того, чтобы выйти из радиуса сходимости ρ_0 вокруг точки τ_0 . Т.е., используя операторы $T_M x(\tau_{i+1}, \tau_i, x_0)$, определенные в (6), имеем

$$h = \frac{\tau_r - \tau_0}{r}, \quad \tau_i = \tau_0 + ih, \quad |t - t_0| = |\tau_r - \tau_0| < \rho_0$$

для некоторого большого числа r шагов метода ряда Тейлора.

Таким образом, определяем один шаг агрегативного метода ряда Тейлора как результат r шагов той же длины $(t-t_0)/r$ метода ряда Тейлора следующим образом:

$$ATx(r, N; t, t_0, x_0) = ATx(r, N; \tau_r, \tau_0, x_0) = \tilde{x}_r,$$
 (14)

где

$$\tilde{x}_1 = T_N x(\tau_1, \tau_0, x_0),
\dots
\tilde{x}_r = T_N x(\tau_r, \tau_{r-1}, \tilde{x}_{r-1}).$$
(15)

 $ATx(r,N;t,t_0,x_0)$ — это как раз результат вычисления решения x(t) с помощью r шагов метода ряда Тейлора. Наша цель состоит в том, чтобы привести подобные члены и получить явную формулу для \tilde{x}_r , используя первые несколько производных $(d^lx(t_0)/dt^l), l=1,\ldots,Nr$. Мы надеемся, что агрегативный метод ряда Тейлора уменьшит как составные ошибки округления, так и время вычислений при практических вычислениях и будет применим как к жестким, так и нежестким задачам с начальными условиями для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные эксперименты, проведенные в § 3, похоже, оправдывают эти надежды.

Теорема 8. Формула для $ATx(r, N; t, t_0, x_0)$ может быть получена в следующем виде:

$$ATx(r, N; t, t_0, x_0) = \sum_{m=0}^{Nr} \alpha(m, r, N) \frac{(t - t_0)^m}{m!} \frac{d^m x(t_0)}{dt^m},$$
(16)

где

$$\alpha(m,r,N) = r^{-m} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = m, \\ 0 \leqslant k_1, \dots, k_r \leqslant N}} \frac{m!}{k_1! \cdots k_r!}.$$

Доказательство. См. п. 4.2.

В фактических вычислениях усекается каждый шаг агрегативного метода ряда Тейлора как

$$AT_{M}x(r,N;t,t_{0},x_{0}) = \sum_{m=0}^{M} \alpha(m,r,N) \frac{(t-t_{0})^{m}}{m!} \frac{d^{m}x(t_{0})}{dt^{m}}$$
(17)

и составляется таблица аппроксимативных значений $\tilde{x}(t_1), \ldots, \tilde{x}(t_w)$ следующим образом:

где $t_1=t_0+r_1h_1, t_2=t_1+r_2h_2,\ldots$ — моменты времени и натуральные числа $1\leqslant r_w,N_w,M_w\leqslant r_wN_w$ — параметры агрегативного метода ряда Тейлора на w-м шаге (подробный алгоритм для вычисления этих параметров приведен в п. 5.4).

Замечание. Действуя на локальных допусках вблизи компьютерного эпсилон, приведение подобных членов, предлагаемое агрегативным методом ряда Тейлора, повышает точность вычислений, накапливая меньше ошибок округления. Также для малых допусков один шаг агрегативного метода ряда Тейлора является сокращением вычислений для получения результата многих шагов метода ряда Тейлора с меньшими затратами, так как оценки п. 5.4 будут часто позволять выходить из положения с малыми M_w .

3. Численные эксперименты для эталонных тестовых примеров

Таблицы, детализирующие сравнительное изучение различных численных методов с использованием численного интегрирования эталонных тестовых задач, описанных в п. 1.1, приведены в конце этой статьи.

Для допусков до 10^{-15} численные методы используют арифметические операции с удвоенной точностью с компьютерным эпсилон $2.22 \cdot 10^{-16}$. Для более строгих допусков численные методы используют программно эмулированную учетверенную точность с компьютерным эпсилон $1.93 \cdot 10^{-34}$. Глобальная погрешность вычисляется именно с использованием точных решений или свойств периодичности эталонных тестовых примеров, за исключением примера брусселятора, где предполагается, что результат метода ряда Тейлора степени 30 играет роль «точного решения».

Была использована рабочая станция SUN SPARC. Все методы для этих примеров выполнены на языке FORTRAN 77, и коды могут быть предоставлены по запросу. О подробностях практической реализации этих методов см. § 5.

4. Доказательства

4.1. Доказательство теоремы 7. Вводя обозначения

$$k_{j}^{i,w} = \frac{d^{w}}{dh^{w}} k_{j}^{(i)}(h),$$

$$f_{i}(w) = \sum_{u=1}^{i-1} |\beta_{iu}| g_{u}(w-1), \quad i \geqslant 2,$$

$$g_{i}(w) = f_{i}(w) + \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{w-1} f_{i}(u) f_{i}(w-u),$$

$$f_{i}(0) = g_{i}(0) = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant q,$$

$$f_{1}(w) = g_{1}(w) = 0, \quad w \geqslant 1,$$

$$(19)$$

представляя формулу аппроксимации Рунге-Кутта в виде

$$R_j x = \sum_{u=0}^r \frac{x^{(u)}(t_0)h^u}{u!} + \sum_{u=r+1}^{2^q-1} \alpha_{ju}h^u$$

и используя (9) с M = r и $h < 1/(\tau s_1)$, получаем

$$|x_j - R_j x| \le \gamma \left(1 - \frac{1}{\rho s_1 \tau}\right)^{-1} \left(\frac{h}{\rho}\right)^{r+1} + \sum_{u=r+1}^{2^q - 1} |\alpha_{ju}| h^u,$$
 (20)

где

$$\alpha_{ju} = \frac{1}{(u-1)!} \sum_{i=1}^{q} p_i k_j^{i,u-1}(0).$$

Используя оценки леммы 9, приведенной ниже, выводим

$$\max_{j} \sum_{u=r+1}^{2^{q}-1} |\alpha_{ju}| h^{u} \leqslant \frac{\gamma}{\tau} \sum_{u=r+1}^{2^{q}-1} (hs_{1}\tau)^{u} \sum_{i=1}^{q} |p_{i}| \frac{g_{i}(u-1)}{\tau^{u-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma}{\tau} (hs_{1}\tau)^{r+1} \sum_{u=r}^{2^{q}-2} (hs_{1}\tau)^{u-r} \sum_{i=1}^{q} |p_{i}| \frac{g_{i}(u)}{\tau^{u}} \leqslant (hs_{1}\tau)^{r+1} \frac{\gamma D}{\tau},$$

где

$$hs_1 \tau \leqslant 1$$
 и $D = \sum_{u=r}^{2^q-2} \sum_{i=1}^q |p_i| \frac{g_i(u)}{\tau^u}$. (21)

Чтобы закончить доказательство, остается учесть (20) и вычислить константу D в значениях β_{ij} , p_i по (19). Чтобы уменьшить резко возрастающую $g_i(u)$, можно выбрать подходящее значение параметра $\tau \in (1, +\infty)$.

Лемма 9. В условиях теоремы 7 для любого $w \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$ выполняется неравенство

$$|k_j^{i,w}(0)| \leqslant w! s_1^{w+1} \gamma g_i(w).$$

Доказательство. Используя обозначение

$$x_j^{i,w} = \frac{d^w}{dh^w} x_j^{(i)}(h), \quad \partial_v X_{ji} = \frac{\partial X_j}{\partial x_v} (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}),$$
$$\partial_v \partial_m X_{ji} = \partial_v (\partial_m X_{ji}) = a_{jmv} + a_{jvm}$$

и дифференцируя (10), получаем

$$x_{j}^{i,w} = w \sum_{u=1}^{i-1} \beta_{iu} k_{j}^{u,w-1} + h \sum_{u=1}^{i-1} \beta_{iu} k_{j}^{u,w},$$

$$k_{j}^{i,w} = \sum_{v=1}^{n} \partial_{v} X_{ji} x_{v}^{i,w} + \sum_{v,m=1}^{n} \partial_{v} \partial_{m} X_{ji} \sum_{k=1}^{[w/2]} C_{w,k} x_{v}^{i,k} x_{m}^{i,w-k}$$
(22)

с натуральными константами $C_{w,k}$ для $w\geqslant 1$ (см. лемму 11 ниже).

Из уравнений (10) также следует, что

$$|k_j^{i,0}(0)| \le \gamma s(\gamma), \quad |x_j^{i,0}(0)| \le \gamma, \quad k_j^{1,w} = x_j^{1,w} = 0 \quad \text{for} \quad w \ge 1.$$
 (23)

Используя (22) и (23), получаем следующие оценки с помощью индукции по $w=0,1,\ldots$ при $1\leqslant i\leqslant q,\ 1\leqslant j\leqslant n$:

$$|k_j^{i,w}(0)| \leqslant k^{i,w} = w! s_1^{w+1} \gamma g_i(w), \quad |x_j^{i,w}(0)| \leqslant x^{i,w} = w! s_1^w \gamma f_i(w) = x^{i,w}. \tag{24}$$

В действительности, для w=0 неравенства следуют из (19) и (23). Отметим, что для i=1 неравенства также являются очевидными следствиями (19) и (23).

Если неравенства (24) выполняются для $0, \ldots, w-1$ то, принимая во внимание лемму 10 и (22), для $2 \leqslant i \leqslant q$ получаем

$$|x_{j}^{i,w}(0)| \leqslant w \sum_{u=1}^{i-1} |\beta_{iu}|(w-1)! s_{1}^{w} \gamma g_{u}(w-1) = x^{i,w},$$

$$|x_{j}^{i,w}(0)| \leqslant \sum_{v=1}^{n} |\partial_{v} X_{ji}| \Big|_{h=0} x^{i,w} + \frac{1}{2} \sum_{v,m=1}^{n} |\partial_{v} \partial_{m} X_{ji}| \sum_{k=1}^{w-1} {w \choose k} x^{i,k} x^{i,w-k} \leqslant$$

$$\leqslant s_{1} w! s_{1}^{w} \gamma f_{i}(w) + \frac{s_{1}}{2} \sum_{k=1}^{w-1} {w \choose k} k! s_{1}^{k} f_{i}(k)(w-k)! s_{1}^{w-k} \gamma f_{i}(w-k) = w! s_{1}^{w+1} \gamma g_{i}(w),$$

ввиду неравенства

$$s_2 \geqslant \max_{j} \sum_{v=1}^{n} |\partial X_{ji}| \Big|_{h=0} = \max_{j} \sum_{v=1}^{n} \left| a_{iv} + \sum_{m=1}^{n} (a_{jvm} + a_{jmv}) \left((x_m^{(1)} + h \sum_{u=1}^{i-1} \beta_{iu} k_j^{(u)}) \right) \right| \Big|_{h=0}.$$

Доказательство завершено.

Лемма 10. Следующее равенство выполняется для $w \geqslant 2$, $1 \leqslant v, m \leqslant n$:

$$\sum_{k=1}^{[w/2]} C_{w,k} x_v^{i,k} x_m^{i,w-k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{w-1} {w \choose k} x_v^{i,k} x_m^{i,w-k}.$$

Доказательство. Надо использовать лемму 11.

Лемма 11. Для $k \leq [w/2]$ и $w \geq 2$,

$$C_{w,k} = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w \\ \frac{w}{2} \end{pmatrix}, & w = 2k, \\ \begin{pmatrix} w \\ k \end{pmatrix} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$
 (25)

Доказательство. С помощью (22) индукцией по w проверяется формула (25).

Действительно, для w = 1, 2, 3 формула очевидна.

Пусть (25) выполняется для w. Введем E_{k_1,k_2} и $\{k_1,k_2\}$ следующим образом:

$$E_{k_1,k_2}=E_{k_2,k_1}=rac{1}{2}C_{w,k_1},$$
 если $1\leqslant k_1< w,$ $1\leqslant k_2< w,$ $k_1
eq k_2,$ $w=k_1+k_2,$ $E_{k,k}=C_{w,k},$ если $2k=w,$ $E_{k_1,k_2}=0$ в противном случае,

$$\{k_1, k_2\} = \{k_2, k_1\} = \sum_{v,m=1}^{n} \partial_v \partial_m X_{ji} x_v^{i,k_1} x_m^{i,k_2}.$$

Затем, используя (22), получаем

$$\begin{aligned} k_j^{i,w+1} &= \sum_{v=1}^n \partial_v X_{ji} x_v^{i,w+1} + \{1,w\} + \sum_{k_1+k_2=w} E_{k_1,k_2}(\{k_1+1,k_2\} + \{k_1,k_2+1\}) = \\ &= \sum_{v=1}^n \partial_v X_{ji} x_v^{i,w+1} + \{1,w\} + \sum_{k_1+k_2=w+1} E_{k_1-1,k_2}\{k_1,k_2\} + \sum_{k_1+k_2=w+1} E_{k_1,k_2-1}\{k_1,k_2\} = \\ &= \sum_{v=1}^n \partial_v X_{ji} x_v^{i,w+1} + \{1,w\} + \left(\sum_{\substack{k_1 < k_2, \\ k_1+k_2=w+1}} + \sum_{\substack{k_2 < k_1, \\ k_1+k_2=w+1}} + \sum_{\substack{k_1=k_2, \\ k_1+k_2=w+1}} \right) (E_{k_1-1,k_2} + E_{k_1,k_2-1})\{k_1,k_2\} = \\ &= \sum_{v=1}^n \partial_v X_{ji} x_v^{i,w+1} + \{1,w\} + \sum_{\substack{k_1 < k_2, \\ k_1+k_2=w+1}} (E_{k_1-1,k_2} + E_{k_1,k_2-1} + E_{k_2-1,k_1} + E_{k_2,k_1-1})\{k_1,k_2\} + \\ &+ \sum_{\substack{k_1=k_2, \\ k_1+k_2=w+1}} \left(E_{\frac{w+1}{2}-1,\frac{w+1}{2}} + E_{\frac{w+1}{2},\frac{w+1}{2}-1}\right) \left\{\frac{w+1}{2},\frac{w+1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены, видим, что

$$\begin{split} C_{w+1,1} &= 1 + E_{0,w} + E_{1,w-1} + E_{w-1,1} + E_{w,0} = 1 + C_{w,1}, \\ C_{w+1,k} &= E_{k-1,w+1-k} + E_{k,w-k} + E_{w-k,k} + E_{w+1-k,k-1} = \\ &= C_{w,k-1} + C_{w,k}, \quad \text{если} \quad 2 \leqslant k < \frac{w}{2}, \\ C_{w+1,\frac{w}{2}} &= E_{\frac{w}{2}-1,\frac{w}{2}+1} + E_{\frac{w}{2},\frac{w}{2}} + E_{\frac{w}{2},\frac{w}{2}} + E_{\frac{w}{2}+1,\frac{w}{2}-1} = \\ &= C_{w,\frac{w}{2}-1} + 2C_{w,\frac{w}{2}}, \quad \text{если} \quad w \text{ четный}, \\ C_{w+1,\frac{w+1}{2}} &= C_{w,\frac{w-1}{2}}, \qquad \text{если} \quad w \text{ нечетный}. \end{split}$$

Доказательство завершено.

4.2. Доказательство теоремы 8.

Замечание 12. Соотношение (16) выведено с помощью метода бесконечных систем, предложенного одним из авторов (см. [1,5]). Попытки найти простое доказательство этого результата по индукции не увенчались успехом. Поэтому начнем с метода бесконечных систем.

Введение в метод бесконечных систем. Опуская подробности, опишем этот метод следующим образом.

Шаг 1. Задача (3), (4), (5) сводится к бесконечной линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Шаг 2. Используя линейность бесконечной системы, получаем желаемые результаты для выведенной линейной задачи.

Шаг 3. Интерпретируем результаты шага 2 в терминах исходной задачи (3), (4), (5).

Теперь докажем теорему 8 в соответствии с вышеприведенной схемой.

Для каждого $i \in \bigcup_{m=1}^{+\infty} I(m)$ вводим новую переменную

$$y[i] = x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}.$$

Чтобы упорядочить множество только что введенных переменных, располагаем множества $\chi_m=\{y[i]|i\in I(m)\}$ слева направо в порядке χ_1,χ_2,\ldots , и для каждого m располагаем элементы множеств χ_m в лексикографическом порядке, т.е. $x[i_1,\ldots,i_n]$ предшествует $x[k_1,\ldots,k_n]$, если $i_1=k_1,\ldots,i_j=k_j,\ i_{j+1}>k_{j+1}.$ Затем нумеруем все элементы упорядоченного множества $\bigcup_{m=1}^{+\infty}\chi_m$ как y_1,y_2,\ldots

Запишем (3),(4), (5) в матричной форме как

$$\frac{dy}{dt} = \mathcal{A}y, \quad y(t_0) = y_0, \tag{26}$$

где

$$y = (y_1, y_2, \dots), \quad \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \dots\right),$$
$$y_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}, x_{10}^2, x_{10} \cdot x_{20}, \dots, x_{n0}^2, \dots).$$

Здесь \mathcal{A} — бесконечная матрица типа ленты, т.е. матрица, для которой каждая строка и каждый столбец содержат лишь конечное число ненулевых элементов. Если коэффициенты $a_k[i]$ исходной задачи (3), (4), (5) являются константами (неважно, вещественными или комплексными), то \mathcal{A} тоже является постоянной матрицей.

Замечание 13. Подобная идея для алгебраических систем восходит к Вейерштрассу. Для обыкновенных дифференциальных уравнений Беллман ссылается на Карлемана. Общие формулы для коэффициентов матрицы \mathcal{A} были предложены в [1].

Дифференцируя уравнение (26), получаем

$$\frac{dy}{dt} = \mathcal{A}y, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathcal{A}\frac{dy}{dt} = \mathcal{A}\mathcal{A}y = \mathcal{A}^2y, \ldots, \frac{d^ry}{dt^r} = \mathcal{A}^ry.$$

Используя эти формулы и обозначая первые n строк матрицы \mathcal{A} через $[\mathcal{A}]$, переписываем (6) в следующем виде:

$$T_N x(t, t_0, x_0) = \sum_{m=0}^{N} \frac{(t - t_0)^m}{m!} [\mathcal{A}^m] x_0,$$

который влечет следующие явные формулы для (15):

Чтобы завершить доказательство, учтем уравнение (14) и $t-t_0=rh$.

5. Практическое осуществление методов

В этом параграфе рассматриваются некоторые необходимые подробности осуществления численных методов.

- **5.1. Практическая оценка погрешности для метода Дорманда—Принса.** Код для этого метода был взят из [9]. Коэффициенты метода точны до 18 десятичных знаков.
- **5.2.** Гарантированная оценка для r,q-метода Рунге—Кутта. Положительные константы $\tau>1$ и D (см. п. 2.2.2 и (21)) должны быть вычислены только один раз для каждого метода Рунге—Кутта.

Если t_0 и x_0 известны из предыдущего шага или как начальные данные, то, в соответствии с формулой (13), неравенство

$$|x_i(t_0+h,t_0,x_0)-Rx(t_0+h,t_0,x_0)_i| \leq \varepsilon \gamma$$

гарантировано, если шаг интегрирования вычисляется следующим образом (см. также (12)):

$$h = \frac{1}{s_1 \tau} \min \left\{ 1, \sqrt[r+1]{\varepsilon \left(\frac{D}{\tau} + \left(1 - \frac{1}{\rho s_1 \tau} \right)^{-1} (\rho s_1 \tau)^{-r-1} \right)^{-1}} \right\}.$$

5.3. Гарантированная оценка локальной погрешности для метода ряда Тейлора. Пусть M — порядок метода ряда Тейлора (см. (6)). Если t_0 и x_0 известны из предыдущего шага или как начальные данные, то шаг интегрирования вычисляется следующим образом (см. (9)):

$$h = \rho \min\left\{\frac{1}{2}, \sqrt[M+1]{\frac{\varepsilon}{2}}\right\},\tag{27}$$

что, согласно формуле (9), гарантирует неравенство

$$|x_i(t_0+h,t_0,x_0)-T_Mx(t_0+h,t_0,x_0)_i| \le \varepsilon \gamma.$$

5.4. Практическая оценка погрешности для агрегативного метода ряда Тейлора. Агрегативный метод ряда Тейлора основан на формулах (16) и (17). В этих формулах полагаем

$$|t - t_0| \leqslant \lambda \rho, \quad t = t_0 + rh, \tag{28}$$

где ρ — оценка радиуса сходимости и $0<\lambda<1$ — фиксированное. В численных экспериментах полагаем $\lambda=0.5$ (см. § 3).

В отсутствие ошибок округления получаем $AT_{Nr}x = ATx = \tilde{x}_r$ (см. (15)–(17)), т.е. в этом случае $ATx(r,N;t,t_0,x_0)$ — как раз результат вычисления решения x(t) путем r идентичных шагов метода ряда Тейлора порядка N. Через ε обозначаем относительную локальную допустимую ошибку каждого шага агрегативного метода ряда Тейлора.

Чтобы получить более точную аппроксимацию путем одного шага агрегативного метода ряда Тейлора по сравнению с r результирующими шагами метода ряда Тейлора, нужно выбрать параметры $M,\,r,\,\lambda$ так, что

$$|ATx(r, N; t, t_0, x_0) - AT_M x(r, N; t, t_0, x_0)| = \left| \sum_{m=M+1}^{Nr} \alpha(m, r, N) \frac{r^m h^m}{m!} \frac{d^m x}{dt^m} \right|_{t=t_0}$$

будет достаточно мала. С другой стороны, чем больше M, тем более трудоемким становится вычисление AT_Mx . Поэтому ограничиваем $M\leqslant M_{\max}$ и $r\leqslant R_{\max}$, где M_{\max} и R_{\max} — некоторые фиксированные параметры.

Используя эвристическую (что всегда верно, если ε достаточно мала) оценку

$$|ATx(r, N; t, t_0, x_0) - AT_M x(r, N; t, t_0, x_0)| \le \text{Err}(M, h),$$
 (29)

где

$$\operatorname{Err}(M,h) = (Nr - M) \left| \alpha(M,r,N) \frac{r^M h^M}{M!} \frac{d^M x}{dt^M} \right|_{t=t_0} ,$$

предлагаем следующее $правило \ для \ выбора \ параметров \ M, \ r.$

- 1. Вначале пользователем заранее задаются параметры ε , N, λ , $M_{\rm max}$, $R_{\rm max}$.
- 2. Параметр r вычисляется как (см. (9), (28))

$$h = \rho \cdot \min \left\{ \lambda, \sqrt[N+1]{\varepsilon(1-\lambda)} \right\}, \qquad r = \min \left\{ \left[\frac{\lambda \rho}{h} \right], R_{\max} \right\},$$

где [a] — наибольшее целое число такое, что $[a]\leqslant a.$

3. Параметр M задается как наименьшее натуральное число такое, что $M\leqslant M_{\max}$ и $\mathrm{Err}(M,h)\leqslant \varepsilon\gamma$. Если такое M существует, то вычисляем

$$x(t_0 + rh) \approx AT_M x(r, N; t_0 + rh, t_0, x(t_0)).$$

4. Если такое M не существует, то полагаем

$$x(t_0+rh_1)\approx AT_Mx(r,N;t_0+rh_1,t_0,x(t_0)),$$
 где $M=M_{\max},\ h_1=h\sqrt[M]{(\varepsilon\gamma)/\mathrm{Err}(M,h)}$ (так как $\mathrm{Err}(M,h_1)=\varepsilon\gamma$).

6. Оптимальный полет с Земли на Луну

В этом параграфе применяем оценки, полученные в этой статье, к реальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей оптимальный полет космического корабля с Земли на Луну (см. [4]).

Через x, y, u, v, m обозначаем соответственно координаты, скорости и массу космического корабля и через p_x , p_y , p_u , p_v , p_m — канонически сопряженные переменные.

Эти уравнения включают следующие физические константы:

$$x_{\Lambda} = 384.4, \quad x_{B} = 4.665507, \quad \mu_{\Lambda} = 2.81556 \cdot 10^{-6}, \quad \mu_{3} = 6.256818 \cdot 10^{-5},$$

 $P_{\text{max}} = 9.81 \cdot 10^{-7}, \quad c = 3.4335 \cdot 10^{-3}, \quad \omega = 2.6676 \cdot 10^{-6}.$

Следуя [4], используем начальные условия

$$u(0) = -4.406463701184517 \cdot 10^{-3}, \quad x(0) = -5.418331088513003,$$
 $v(0) = -6.401245846380632 \cdot 10^{-3}, \quad y(0) = 3.729848819356288,$
 $p_u(0) = -206534.5274675425, \quad p_x(0) = -675.626010487872,$
 $p_v(0) = -978439.312867057, \quad p_y(0) = 1016.800527213885,$
 $p_m(0) = 3071.41103, \quad m(0) = 1.$

6.1. Система обыкновенных дифференциальных уравнений. Вначале мы вводим следующие обозначения:

$$\begin{split} g_{11}^1 = x, \quad g_{21}^1 = x - x_{\Lambda}, \quad g_{i2}^1 = y, \quad g_{i1}^2 = u, \quad g_{i2}^2 = v, \quad i = 1, 2, \\ p_1^1 = p_x, \quad p_2^1 = p_y, \quad p_1^2 = u, \quad p_2^2 = p_v, \\ d_i = \sqrt{(g_{i1}^1)^2 + (g_{i2}^1)^2}, \quad \rho = \sqrt{(p_1^2)^2 + (p_2^2)^2}, \quad d_{i0} = d_i(0), \quad \rho_0 = \rho(0). \end{split}$$

Эти обозначения позволяют переписать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую движение космического корабля во время полета, в симметричной и компактной форме (30).

Чтобы получить полиномиальную задачу Коши в виде (3), (4), (5) с квадратичными правыми сторонами (т.е. L=1), вводим следующие переменные:

$$u_i = \frac{d_{i0}}{d_i}, \quad v_i = (u_i)^2, \quad B_i = (u_i)^3, \quad K = \frac{\rho_0}{\rho},$$

$$x_{ij} = \frac{g_{ij}^{1}u_{i}}{d_{i}}, \quad w_{ij} = x_{ij}u_{i}, \quad C_{ij} = w_{ij}u_{i}, \quad D_{ijk} = x_{ij}w_{ik},$$

$$y_{j} = \frac{g_{1j}^{2}}{\alpha}, \quad z_{ij} = y_{j}u_{i}, \quad \theta_{i} = \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{2} x_{ij}y_{j}, \quad m_{1} = \frac{\xi}{m},$$

$$E_{j}^{1} = \frac{p_{j}^{1}}{\eta\rho}, \quad E_{j}^{2} = \frac{p_{j}^{2}}{\rho}, \quad M_{j}^{i} = m_{1}E_{j}^{i}, \quad F_{kl}^{ij} = E_{k}^{i}E_{l}^{j},$$

$$E_{3}^{i} = E_{1}^{i}, \quad M_{3}^{i} = E_{1}^{i}, \quad F_{k3}^{ij} = F_{k1}^{ij}, \quad A_{1} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\omega}{2} (g_{11}^{1} - x_{B}) + g_{12}^{2} \right),$$

$$A_{2} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\omega}{2} g_{12}^{1} - g_{11}^{2} \right), \quad E = \lambda \frac{p_{m}}{\rho}.$$

Замечание 14. Легко видеть, что обозначения для y, u и v не единственны. Например, u обозначено как через g_{11}^2 , так и через g_{21}^2 . Аналогично, $E_1^i = E_3^i, \ M_1^i = M_3^i, \ F_{k1}^{ij} = F_{k3}^{ij}$ и $q_1 = q_3$.

В п. 6.2 выбираем вещественные положительные параметры α , η , ξ и λ для того, чтобы улучшить оценки относительной локальной погрешности и длины шага и гарантировать, что $\gamma < 1$.

Дифференциируя переменные u_i , ..., E и используя исходные уравнения из [4], получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (i, j, l = 1, 2):

$$\begin{split} \dot{u}_{i} &= -\beta \sigma_{i} u_{i} \theta_{i}, \quad \dot{v}_{i} = -2\beta \sigma_{i} v_{i} \theta_{i}, \quad \dot{B}_{i} = -3\beta \sigma_{i} B_{i} \theta_{i}, \quad \dot{K} = \phi K, \\ \dot{x}_{ij} &= \sigma_{i} u_{i} z_{ij} - 2\beta \sigma_{i} x_{ij} \theta_{i}, \quad \dot{w}_{ij} = \sigma_{i} b_{i} z_{ij} - 3\beta \sigma_{i} w_{ij} \theta_{i}, \\ \dot{C}_{ij} &= \sigma_{i} B_{i} z_{ij} - 4\beta \sigma_{i} C_{ij} \theta_{i}, \quad \dot{D}_{ijl} = \sigma_{i} C_{il} z_{ij} + \sigma_{i} C_{ij} z_{il} - 5\beta \sigma_{i} D_{ijl} \theta_{i}, \\ \dot{y}_{j} &= q_{j}, \quad \dot{z}_{ij} = u_{i} q_{j} - \beta \sigma_{i} z_{ij} \theta_{i}, \\ \dot{\theta}_{i} &= -2\beta \sigma_{i} \theta_{i}^{2} + \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{2} (\sigma_{i} (z_{ij})^{2} + x_{ij} q_{j}), \quad \dot{m}_{1} = \frac{P}{\xi_{c}} (m_{1})^{2}, \\ \dot{E}_{j}^{1} &= \phi E_{j}^{1} + \frac{1}{\eta} \left(E_{j}^{2} \sum_{k=1}^{2} \mu_{k} (B_{k} - 3D_{kjj}) - E_{j}^{2} \omega^{2} - 3E_{1+j}^{2} \sum_{k=1}^{2} \mu_{k} D_{k12} \right), \\ \dot{E}_{j}^{2} &= -\eta E_{j}^{1} + 2\omega \chi_{j} E_{1+j}^{2} + \phi E_{j}^{2}, \\ \dot{M}_{j}^{1} &= \frac{1}{\eta} \left(M_{j}^{2} \sum_{k=1}^{2} \mu_{k} (B_{k} - 3D_{kjj}) - M_{j}^{2} \omega^{2} - 3M_{1+j}^{2} \sum_{k=1}^{2} \mu_{k} D_{k12} \right) + + \phi M_{j}^{1} + \frac{P}{\xi_{c}} m_{1} M_{j}^{1}, \\ \dot{M}_{j}^{2} &= -\eta M_{j}^{1} + 2\omega \chi_{j} M_{1+j}^{2} + \phi M_{j}^{2} + \frac{P}{\xi_{c}} m_{1} M_{j}^{2}, \\ \dot{F}_{jl}^{11} &= \frac{1}{\eta} \left(F_{lj}^{12} \sum_{k=1}^{2} \mu_{k} (B_{k} - 3D_{kjj}) - F_{lj}^{12} \omega^{2} - 3F_{l+j}^{12} \sum_{k=1}^{2} \mu_{k} D_{k12} \right) + 2\phi F_{jl}^{11}, \\ \dot{F}_{jl}^{12} &= \frac{1}{\eta} \left(F_{jl}^{22} \sum_{k=1}^{2} \mu_{k} (B_{k} - 3D_{kjl}) - F_{jl}^{12} \omega^{2} - 3F_{l+j}^{12} \sum_{k=1}^{2} \mu_{k} D_{k12} \right) + \\ &+ 2\phi F_{jl}^{12} - \eta F_{jl}^{11} + 2\omega \chi_{l} F_{j+l}^{12}, \\ \dot{F}_{jl}^{22} &= -\eta F_{jl}^{2} + 2\omega \chi_{j} F_{l+j}^{2} - \eta F_{lj}^{12} + 2\omega \chi_{l} F_{j+l}^{2}, \\ \dot{A}_{j} &= \frac{\omega}{2} y_{1j} + \chi_{j} q_{1+j}, \quad \dot{E} = \lambda \frac{P}{\xi_{l}} (m_{1})^{2} + \phi E, \end{split}$$

где

$$\chi_1 = +1, \quad \chi_2 = -1, \quad \beta = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \sigma_i = \frac{\alpha}{d_{i0}}, \quad \phi = \eta F_{11}^{21} + \eta F_{22}^{21},$$
$$q_j = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{P}{\xi} M_j^2 - \sum_{k=1}^2 \frac{\mu_k}{(d_{k0})^2} w_{kj} \right) + 2\omega A_j, \quad q_3 = q_1,$$

и условие оптимального управления следующее:

$$P = \begin{cases} P_{\text{max}}, & \lambda c m_1 > \xi E \\ 0, & \lambda c m_1 < \xi E. \end{cases}$$

Чтобы завершить постановку задачи с начальными условиями, также вычисляем начальные значения для новых переменных $u_{i0},\,v_{i0},\,B_{i0},\,K_0,\,x_{ij0},\,y_{j0},\,z_{ij0},\,w_{ij0},\,C_{ij0},\,D_{ijk0},\,\theta_{i0},\,A_{i0},\,E^i_{j0},\,M^i_{j0},$ $F^{ij}_{kl0},\ m_{10},\ E_0$ через старые переменные $x(0),\ y(0),\ \dots,\ p_m(0).$ Оцениваем глобальную ошибку, проверяя, насколько точно методы численного интегрирования

способны сохранить постоянную движения

$$H = \frac{\rho_0}{K} \left(\sum_{j=1}^{2} \left(\alpha \eta y_j E_j^1 + E_j^2 \left(2\omega \alpha A_j - \sum_{i=1}^{2} \frac{\mu_i}{(d_{i0})^2} w_{ij} \right) \right) - \frac{P}{\lambda c} E + \frac{P}{\xi} m_1 \right). \tag{31}$$

6.2. Масштабирование. Процесс масштабирования переменных (см. замечание 5) предназначен для улучшения оценок относительной локальной погрешности, задаваемых формулой (9).

Чтобы масштабировать оценки для задачи Коши (30), можно приписать произвольные положительные значения параметрам. С другой стороны, для упрощения вычислений естественно наложить подходящие ограничения на $\xi, \lambda, \alpha, \eta$. В частности, в случае, когда $\gamma \leqslant 1$, оценку (8) гораздо проще использовать. Чтобы гарантировать это неравенство, полагаем $\xi \leqslant m(t_0), \ \lambda \leqslant \rho(t_0)/p_m(t_0),$ $\alpha \geqslant \alpha_0, \, \eta \geqslant \eta_0, \,$ где

$$\alpha_0 = \max_{i,j} \left\{ \left| g_{ij}^2(t_0) \right|, \frac{1}{\beta} \left| x_{i1}(t_0) g_{i1}^2(t_0) + x_{i2}(t_0) g_{i2}^2(t_0) \right|, \\ \left| \frac{\omega}{2} g_{12}^1(t_0) - g_{11}^2(t_0) \right|, \left| \frac{\omega}{2} (g_{11}^1(t_0) - x_B) + g_{12}^2(t_0) \right| \right\},$$

$$\eta_0 = \max_i \left\{ \frac{\left| p_i^1(t_0) \right|}{\rho(t_0)} \right\}.$$

Затем, находя предел при $\lambda \to 0$, полагая $\xi = m(t_0)$ и используя формулу (8), получаем

$$s = \max \left\{ \alpha c_1, \frac{c_2}{\alpha} + \alpha c_3 + c_4, \frac{c_5}{\eta} + 2\eta + c_6, \frac{2c_5}{\eta} + 4\eta, 3\eta + c_6 + 2\omega, 6\eta + 4\omega \right\},$$

$$c_1 = (2 + 5\beta) \max \left\{ \frac{1}{d_1(t_0)}, \frac{1}{d_2(t_0)} \right\},$$

$$c_2 = \frac{2}{\beta} \left(\frac{P}{\xi} + \frac{\mu_1}{(d_1(t_0))^2} + \frac{\mu_2}{(d_2(t_0))^2} \right),$$

$$c_3 = \left(2\beta + \frac{2}{\beta} \right) \max \left\{ \frac{1}{d_1(t_0)}, \frac{1}{d_2(t_0)} \right\},$$

$$c_4 = \frac{4}{\beta} \omega, \quad c_5 = 7 \left(\frac{\mu_1}{(d_1(t_0))^3} + \frac{\mu_2}{(d_2(t_0))^3} \right) + \omega^2, \quad c_6 = \frac{P}{\xi c}.$$

Затем рассматриваем s как функцию от α и η . Отметим, что $\min_{\alpha,\eta} s = \min_{\Omega} s(\alpha,\eta)$, где

$$\Omega = \{ (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \eta_0, \dots, \eta_5) : \alpha_1 \geqslant \alpha_0, \alpha_2 \geqslant \alpha_0, \ \eta_1 \geqslant \eta_0, \dots, \eta_5 \geqslant \eta_0 \},$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_3}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2(c_1 - c_3)} \left(c_4 + \sqrt{(c_4)^2 + 4(c_1 - c_3)c_2} \right),$$

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(c_6 + 2\omega \pm \sqrt{(c_6 + 2\omega)^2 - 8c_5} \right), \quad \eta_3 = \sqrt{\omega^2 + c_5} - \omega,$$
$$\eta_4 = \frac{1}{8} \left(c_6 - 4\omega + \sqrt{(c_6 - 4\omega)^2 + 16c_5} \right), \quad \eta_5 = \sqrt{\frac{c_5}{2}}.$$

6.3. Численные результаты. В таблице 2 в конце этой статьи подведен итог сравнительного исследования различных численных методов для численного интегрирования по интервалу $[0, 1000 \, \sec]$ задачи с начальными условиями, описывающей оптимальный полет между Землей и Луной.

7. Выводы

Очень сжатая глобальная точность (даже сравнимая с компьютерным эпсилон в некоторых эталонных примерах) методов численного интегрирования достигается с помощью метода ряда Тейлора и нового агрегативного метода ряда Тейлора, предложенного в этой статье. Оба эти метода значительно быстрее и более точны, чем явные методы Рунге—Кутта сравнимых порядков. Агрегативный метод ряда Тейлора оказался наиболее быстрым методом для эталонных примеров, когда локальные допуски очень сжаты, в то время как метод ряда Тейлора имеет преимущество в виде гарантированных оценок погрешности и длины шага. Другое преимущество, которое имеют как метод ряда Тейлора, так и агрегативный метод ряда Тейлора над методами Рунге—Кутта — это непосредственность способа, которым для них получаются методы произвольного порядка.

Это делает как метод ряда Тейлора, так и агрегативный метод ряда Тейлора блестящим выбором, когда численное интегрирование должно принести подходящие результаты при решении семейства задач Коши с медленно меняющимися параметрами, включая случай, когда должна быть оптимизирована сложная функция, построенная из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Применимость этих методов демонстрируется на реальном примере интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей оптимальный полет с Земли на Луну.

Таблица 1.

 T_N — Метод ряда Тейлора порядка N, оценка размера шага и погрешности с помощью (9);

AT — агрегативный метод ряда Тейлора, параметры $R_{\rm max}=100,\,N=8,\,M_{\rm max}=26,\,\lambda=0.5$ (см. п. 5.4);

DP(8)7 — метод Дорманда—Принса, практическая оценка погрешности применена к исходным задачам с начальными условиями;

DPA — метод Дорманда—Принса, оценка размера шага и погрешности с помощью (13);

LocErr — локальная допустимая относительная погрешность;

GlobalErr — глобальная относительная погрешность;

CPU time — вычислительное время процесса интегрирования (в единицах), одна единица — продолжительность метода T_8 .

Задача	Метод	GlobalErr	Шаги	CPU time
SIMPLEST	T_{12}	$2.60 \cdot 10^{-5}$	66	0.5
$t \in [0, 0.99999]$	T_8	$6.47 \cdot 10^{-5}$	155	1
$LocErr < 10^{-10}$	AT	$3.43 \cdot 10^{-4}$	26	1
	DP(8)7	$4.08 \cdot 10^{-3}$	7683	20.5
	DPA	$4.02 \cdot 10^{-3}$	7818	58
SIMPLEST	T_{12}	$7.01 \cdot 10^{-10}$	168	0.43
$t \in [0, 0.99999]$	T_8	$2.46 \cdot 10^{-9}$	572	1
$LocErr < 10^{-15}$	AT	$2.13 \cdot 10^{-11}$	48	0.43
	DP(8)7	$1.30 \cdot 10^{-5}$	2446229	3413
	DPA	$1.12 \cdot 10^{-3}$	28155	59.4
SIMPLEST	T_{12}	$1.53 \cdot 10^{-14}$	414	0.3
$t \in [0, 0.99999]$	T_8	$8.00 \cdot 10^{-14}$	2069	1
$LocErr < 10^{-20}$	AT	$4.08 \cdot 10^{-14}$	82	0.26
SIMPLEST	T_{12}	$7.02 \cdot 10^{-11}$	134	0.6
$t \in [0, 0.9999]$	T_8	$2.46 \cdot 10^{-10}$	458	1
$LocErr < 10^{-15}$	AT	$2.14 \cdot 10^{-12}$	38	0.4
	DP(8)7	$1.30 \cdot 10^{-6}$	1957182	2069
	DPA	$1.13 \cdot 10^{-4}$	22497	66.4
STIFF-	T_{12}	$2.46 \cdot 10^{-16}$	3935	0.7
-LINEAR	T_8	$2.48 \cdot 10^{-16}$	8854	1
$t \in [0, 2\pi]$	AT	$1.68 \cdot 10^{-11}$	1476	0.12
$LocErr < 10^{-10}$	DP(8)7	8.28	12	0.007
	DPA	$6.85 \cdot 10^{-14}$	215721	29.6
STIFF-	T_{12}	$2.45 \cdot 10^{-16}$	9540	0.5
-LINEAR	T_8	$2.47 \cdot 10^{-16}$	31817	1
$t \in [0, 2\pi]$	AT	$2.16 \cdot 10^{-16}$	1273	0.04
$LocErr < 10^{-15}$	DP(8)7	8.29	13	0.002
	DPA	$4.91 \cdot 10^{-14}$	775261	27.6
STIFF-LINEAR	T_{12}	$2.44 \cdot 10^{-16}$	23130	0.33
$t \in [0, 2\pi]$	T_8	$2.46 \cdot 10^{-16}$	114345	1
$LocErr < 10^{-20}$	AT	$3.20 \cdot 10^{-16}$	1271	0.016
STIFF-	T_{12}	$5.15 \cdot 10^{-19}$	38759	0.75
-CAPS	T_8	$1.17 \cdot 10^{-18}$	87204	1
$t \in [0, 0.5]$	AT	$6.27 \cdot 10^{-16}$	14534	0.08
$LocErr < 10^{-10}$	DP(8)7	$2.09 \cdot 10^{3}$	3589	0.18
	DPA	$1.20 \cdot 10^{-12}$	2124967	25.8

Задача	Метод	GlobalErr	Шаги	CPU time
STIFF-	T_{12}	$1.20 \cdot 10^{-18}$	93968	0.5
-CAPS	T_8	$5.97 \cdot 10^{-18}$	313395	1
$t \in [0, 0.5]$	$\stackrel{-3}{AT}$	$2.34 \cdot 10^{-18}$	12536	0.025
$LocErr < 10^{-15}$	DP(8)7	$2.09 \cdot 10^{3}$	1127284	13.4
STIFF-CAPS	T_{12}	$6.62 \cdot 10^{-18}$	227822	0.34
	T_8	$2.63 \cdot 10^{-18}$	1126282	1
$t \in [0, 0.5]$ LocErr< 10^{-20}	\widetilde{AT}	$1.96 \cdot 10^{-18}$	12515	0.01
STIFF-CAPS	T_{12}	$4.34 \cdot 10^{-19}$	456	0.33
$t \in [0, 0.001]$	T_{12} T_{8}	$1.63 \cdot 10^{-18}$	2253	0.55
LocErr $< 10^{-20}$	AT	$1.63 \cdot 10^{-19}$	26	0.01
LOCEII \ 10	DPA	$5.27 \cdot 10^{-16}$	54892	26.9
	DIA		34032	20.3
JACOB	T_{12}	$1.39 \cdot 10^{-11}$	974	0.72
$t \in [0, 100K]$	T_8	$3.19 \cdot 10^{-10}$	2192	1
$LocErr < 10^{-10}$	AT	$1.23 \cdot 10^{-8}$	365	0.65
	DP(8)7	$1.51 \cdot 10^{-5}$	77938	12.5
	DPA	$8.91 \cdot 10^{-6}$	106782	65
JACOB	T_{12}	$4.33 \cdot 10^{-15}$	2362	0.48
$t \in [0, 100K]$	T_8	$1.37 \cdot 10^{-15}$	7875	1
$LocErr < 10^{-15}$	AT	$4.53 \cdot 10^{-14}$	406	0.3
	DPA	$2.48 \cdot 10^{-6}$	383755	64.4
JACOB	T_{12}	$4.25 \cdot 10^{-15}$	5725	0.33
$t \in [0, 100K]$	T_8	$4.03 \cdot 10^{-15}$	28301	1
LocErr< 10 ⁻²⁰	AT	$4.21 \cdot 10^{-15}$	667	0.13
JACOB	T_{12}	$1.69 \cdot 10^{-16}$	95	0.5
$t \in [0, 4K]$	T_8	$1.81 \cdot 10^{-16}$	315	1
LocErr< 10^{-15}	AT	$5.52 \cdot 10^{-17}$	17	0.25
	DP(8)7	$5.52 \cdot 10^{-10}$	987266	1346
	DPA	$3.54 \cdot 10^{-8}$	15351	62.75
VDPL	T_{12}	$1.03 \cdot 10^{-12}$	19152	0.72
$t \in [0, 100T]$	T_8	$1.09 \cdot 10^{-10}$	43092	1
$LocErr < 10^{-10}$	AT	$7.39 \cdot 10^{-10}$	7180	0.33
	DP(8)7	$1.71 \cdot 10^{-5}$	764560	59.3
	DPA	$5.93 \cdot 10^{-4}$	1873519	51
VDPL	T_{12}	$4.00 \cdot 10^{-15}$	46435	0.48
$t \in [0, 100T]$	T_8	$9.26 \cdot 10^{-15}$	154866	1
$LocErr < 10^{-15}$	AT	$3.23 \cdot 10^{-14}$	6194	0.13
VDPL	T_{12}	$4.07 \cdot 10^{-15}$	112579	0.32
$t \in [0, 100T]$	T_8	$1.51 \cdot 10^{-15}$	556558	1
$LocErr < 10^{-20}$	AT	$6.15 \cdot 10^{-15}$	6633	0.05
ADDI	T	$2.24 \cdot 10^{-16}$	1100	0.22
VDPL	T_{12}	$2.24 \cdot 10^{-16}$ $2.25 \cdot 10^{-16}$	1126 5566	0.33
$t \in [0, T]$ $LocErr < 10^{-20}$	$T_8 \ AT$	$2.25 \cdot 10^{-16}$ $2.22 \cdot 10^{-16}$	5566 67	
LUCEII < 10	DPA	$5.46 \cdot 10^{-9}$	67 241974	0.06 54
BRUS	DFA	0.40 . 10	241314	J4
$t \in [0, 126.5]$	T_{30}	0	62406	
LocErr< 10^{-34}	1 30		02400	
LUCLII \ 10				

Задача	Метод	GlobalErr	Шаги	CPU time
BRUS	T_{12}	$9.48 \cdot 10^{-14}$	30276	0.75
$t \in [0, 126.5]$	T_8	$2.87 \cdot 10^{-12}$	68124	1
$LocErr < 10^{-10}$	AT	$9.15 \cdot 10^{-11}$	11254	0.16
	DP(8)7	$2.87 \cdot 10^{-8}$	99394	0.19
	DPA	$3.89 \cdot 10^{-7}$	2419707	37
BRUS	T_{12}	$3.05 \cdot 10^{-19}$	73408	0.5
$t \in [0, 126.5]$	T_8	$3.14 \cdot 10^{-16}$	244825	1
$LocErr < 10^{-15}$	AT	$2.68 \cdot 10^{-16}$	9802	0.06
BRUS	T_{12}	$8.90 \cdot 10^{-18}$	177975	0.34
$t \in [0, 126.5]$	T_8	$2.55 \cdot 10^{-18}$	879854	1
$LocErr < 10^{-20}$	AT	$4.60 \cdot 10^{-17}$	9909	0.03
BRUS $t \in [0, 20]$ LocErr< 10^{-34}	T_{30}	0	9277	1.87
BRUS	T_{12}	$2.89 \cdot 10^{-16}$	10912	0.5
$t \in [0, 20]$	T_8	$5.69 \cdot 10^{-15}$	36294	1
$LocErr < 10^{-15}$	AT	$2.56 \cdot 10^{-15}$	1457	0.06
	DP(8)7	$6.56 \cdot 10^{-9}$	4724964	19
	DPA	$2.09 \cdot 10^{-6}$	1265040	36

Таблица 2.

 T_N — метод ряда Тейлора порядка N, оценка длины шага и погрешности с помощью (9):

AT — агрегативный метод ряда Тейлора, параметры $R_{\rm max}=100,\,N=8,\,M_{\rm max}=26,\,\lambda=0.5$ (см. п. 5.4);

DP(8)7 — метод Дорманда—Принса, практическая оценка погрешности применена к исходным задачам с начальными условиями;

DPA — метод Дорманда—Принса, оценка длины шага и погрешности с помощью (13);

LocErr — локальная допустимая относительная ошибка;

CPU time — вычислительное время процесса интегрирования (в единицах), одна единица — это продолжительность метода T_8 ;

IntegralErr = |(H(1000) - H(0))/H(0)| (cm. (31)).

LocErr	Метод	IntegralErr	Шаги	CPU time
	T_{12}	$5.49 \cdot 10^{-18}$	47	0.78
	T_8	$4.86 \cdot 10^{-17}$	106	1
10^{-10}	AT	$3.25 \cdot 10^{-12}$	18	0.25
	DP(8)7	$1.74 \cdot 10^{-8}$	594	0.29
	DPA	$5.41 \cdot 10^{-8}$	5131	9.06
	T_{12}	$7.21 \cdot 10^{-18}$	80	0.62
	T_8	$5.04 \cdot 10^{-18}$	227	1
10^{-13}	AT	$2.71 \cdot 10^{-15}$	16	0.15
	DP8(7)	$5.53 \cdot 10^{-10}$	18457	4.17
	DPA	$5.16 \cdot 10^{-8}$	11053	9.14
	T_{12}	$6.24 \cdot 10^{-18}$	114	0.53
	T_8	$6.91 \cdot 10^{-18}$	379	1
10^{-15}	AT	$1.06 \cdot 10^{-18}$	16	0.11
	DP(8)7	$5.53 \cdot 10^{-11}$	184502	24.98
	DPA	$5.06 \cdot 10^{-8}$	18437	9.13

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Бабаджанянц Л. К. Существование продолжений и представление решений в небесной механике// Тр. ИТА АН СССР. 1978. XVII. С. 3-45.
- 2. *Бабаджанянц Л. К., Мгоян П. Б.* Оценки голоморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений// Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. 1982. 17, №. 2. С. 83—91.
- 3. Бабаджанянц Л. К., Мгоян П. Б. Оценки голоморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений// Вестн. ЛГУ. -1984.-7.- С. 9-16.
- 4. Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1994.
- 5. $Babadzanjanz\ L.\ K.$ Existence of the Continuations in the N-body problem// Celestial Mechanics. $1979.-20.-C.\ 43-57.$
- 6. Babadzanjanz L. K. Error estimation for numerical solution of N-body problem// Letters to AG. 1981. 7, No. 12. C. 752–755.
- 7. Babadzanjanz L. K. On the global solution of N-body problem// Celestial Mechanics. 1993. 56. C. 427-449.
- 8. *Dekker K., Verwer J. G.* Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations. North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford: Elsevier Science Publishers B. V., 1984.
- 9. *Hairer E., Norset S. P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. Berlin–Heilberg, Springer Verlag, 1987.
- 10. *Poincaré H*. Sur les courbes definies par les equations differentielles (IV partie)// J. Math. Pures et Appl. (4), -1886. -2. -C. 151-217; Oeuvres, Paris, Gauthier-Villars. -1928. -1, -C. 167-178, 181.
- 11. Prince P. J., Dormand J. R. High order embedded Runge-Kutta formulae// J. Comput. Appl. Math. 1981. 7. C. 67-75.

Л. К. Бабаджанянц

Факультет прикладной математики и процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

E-mail: levon@mail.wplus.net

Д. Р. Саркиссян

Факультет математики и статистики,

Государственный университет Миссисипи, MS 39765

E-mail: voidcaller@mail.domonet.ru

О МИНИМУМЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, ПАРАМЕТРИЗОВАННОЙ ЕЕ ИСКОМОЙ ЛИНИЕЙ УРОВНЯ И/ИЛИ ДРУГИМИ ГРАНИЧНЫМИ ДАННЫМИ

© 2005 г. А. С. ДЕМИДОВ

Аннотация. Показывается возможность применения метода Гельмгольца—Кирхгофа [15] как для доказательства существования, так и для численного поиска минимума некоторых непрерывных снизу функционалов (в том числе недифференцируемых), зависящих от производных гармонической функции, параметризованной ее искомой линией уровня и/или другими граничными данными. Одна из рассматриваемых задач связана с проблемой обледенения элементов корпуса летательных аппаратов. Другая задача относится к вопросу оценки КПД турбин в открытом потоке. Обозначены возможные обобщения.

«Ich will hier . . . ein Beispiel zu geben für eine Methode, durch welche einige Probleme der Lehre von den Potential-functionen gelösst werden können, die bisher Schwierigkeiten machten»
/ . . . мое намерение — дать пример применения этого метода, позволяющего решать некоторые проблемы о потенциальных функциях, ранее казавшиеся трудными/ Г. Гельмгольц [21]

СОДЕРЖАНИЕ

1. Функционал
$$\Phi(\gamma)=\dfrac{\displaystyle\max_{P\in\gamma}|\nabla u(P)|}{\displaystyle\min_{P\in\gamma}|\nabla u(P)|}\to \displaystyle\inf_{\gamma}$$
, где $\gamma\subset\partial\Omega_{\gamma}$ — линия уровня гармонической функции u в $\Omega_{\gamma}\subset\mathbb{R}^2$

1.1. На рис. 1 изображена односвязная центрально-симметричная область Ω_{γ} , ограниченная отрезками M_3M_0 , M_1M_2 и кривыми $\gamma=\gamma_+$ и γ_- . Кривая γ_+ соединяет точки $M_0(0,0)$, $M_1(1,\rho)$, а кривая γ_- точки $M_2(1-h,\rho)$ и $M_3(-h,0)$. Если зеркально отразить область Ω_{γ} относительно отрезков M_3M_0 , M_1M_2 и последовательно таким способом отражать возникающие области, то получится криволинейная периодическая полоска «ширины» h. Ее полупериод равен ρ . По такой

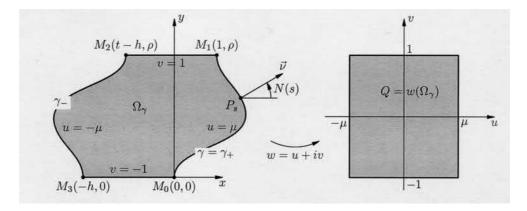


Рис. 1. Область Ω_{γ} и ее образ $Q=w(\Omega_{\gamma})$ при аналитическом отображении $w=u+iv;\ N(s)$ — угол между осью Ox и нормалью $\vec{\nu}$ к γ в точке $P_s\in\gamma$.

полоске, вырезанной из фольги, можно пропустить электрический ток $J=\nabla v$. Функция v- гармоническая. Она постоянна на каждом из отрезков $M_3M_0,\ M_1M_2$ (в силу симметрии). Можно считать, что

$$v = -1$$
 на $M_3 M_0$, $v = 1$ на $M_1 M_2$. (1)

Обозначим через 2μ силу тока $\int\limits_{M_3M_0} (\partial v/\partial y)\,dx$, протекающего по полоске. Зафиксируем параметр

 μ и выберем в зависимости от той или иной кривой γ такую «ширину» $h=h_{\gamma}$ области $\Omega=\Omega_{\gamma}$, при которой непрерывная в $\overline{\Omega}_{\gamma}$ и аналитическая в Ω_{γ} функция

$$w: \overline{\Omega} = \overline{\Omega}_{\gamma} \ni z = x + iy \mapsto w(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in \overline{Q} \stackrel{def}{=} w(\overline{\Omega})$$
 (2)

удовлетворяет не только условию (1), но и условию 2

$$u = \pm \mu$$
 Ha γ_{\pm} . (3)

При прохождении тока по полоске фольги, в ней возникает тепловой поток. В точке $P_0 \in \Omega$ величина этого теплового потока пропорциональна $|\nabla u(P_0)|$. Функция u гармонична в Ω_γ и непрерывна в $\overline{\Omega}_\gamma$. Поэтому экстремальные значения теплового потока достигаются на границе полоски. Таким образом, чтобы максимально сократить риск перегорания полоски фольги, нужно так подобрать кривую γ , чтобы на (порожденной ею) границе полоски фольги, которую мы обозначим через Γ , была минимальна следующая величина

$$\Phi(\Gamma) = \frac{\max_{P \in \Gamma} |\nabla u(P)|}{\min_{P \in \Gamma} |\nabla u(P)|}.$$

В [11, § 37] приведен простой пример кусочно-аналитической кривой Γ класса C^1 (в точке сопряжения аналитических дуг), для которой $\Phi(\Gamma) = \infty$. Ограничимся поэтому кривыми Γ класса $C^{k+1,\lambda}$, фиксируя то или иное целое $k \geqslant 0$ и число $\lambda \in (0,1)$. Это эквивалентно тому, что функция

$$N: \gamma \ni P_s \mapsto N(s), \tag{4}$$

задающая угол N(s) (см. рис. 1) между осью Ox и нормалью к кривой γ в точке $P_s \in \gamma$, отстоящей вдоль γ на расстоянии s от точки M_0 , удовлетворяет двум условиям:

 $^{{}^1}$ Через $\overline{\Omega}$ обозначается замыкание в $\mathbb C$ области Ω .

 $^{^2}$ Требуемое h существует, если при уменьшении h (до тех пор, пока γ и γ_- не соприкоснутся) интеграл $I(h,\gamma)=\int\limits_{\gamma}\left(\partial u/\partial \nu\right)d\gamma$, равный $v(M_1)-v(M_0)$, превысит значение 2. Действительно, интеграл $I(h,\gamma)$ непрерывно зависит от h

и стремится к нулю при $h \to \infty$. Отметим, что если h можно уменьшать до нуля, то $\sup_{(h,\gamma)} I(h,\gamma) = \infty$.

- 1) $N\in C^{k,\lambda}(I)$, где $^1I=[0,|\gamma|]$, а $|\gamma|-$ длина кривой γ ; 2) $N(0)=N(|\gamma|)=0$ (т.е. кривая Γ пересекается под прямым углом с отрезками $M_3\,M_0$ и

Учитывая сказанное и фиксируя числа k и λ , будем рассматривать задачу минимизации функционала

$$\Phi: G \ni \gamma \mapsto \Phi(\gamma) = \frac{\max\limits_{P \in \gamma} |\nabla u(P)|}{\min\limits_{P \in \gamma} |\nabla u(P)|}$$
(6)

на множестве $G = G^{k,\lambda}$ кривых γ класса $C^{k+1,\lambda}$, для которых справедливо условие (3).

Отображение (2), подчиненное граничным условиям (1) и (3) однолистно³ отображает $\Omega =$ Ω_{γ} на прямоугольник (см. рис. 1)

$$Q = \{ w = u + iv \in \mathbb{C} \mid \ |u| < \mu, \ |u| < 1 \}.$$

Поскольку область Q односвязна, то определена 4 функция Гельмгольца—Кирхгофа

$$Q \ni w = u + iv \mapsto A(u, v) + iB(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{dz}{dw}.$$
 (8)

Эта функция задает искомое отображение

$$z:Q\ni w=u+iv\mapsto z(w)=\int_{\mu-i}^{w}\exp\left[A(u,v)+iB(u,v)\right]\,dw\,\in\,\Omega_{\gamma}.\tag{9}$$

В частности, «ширина» h области Ω_{γ} вычисляется по формуле

$$h = \int_{-\mu}^{\mu} e^{A(\xi, -1)} d\xi. \tag{10}$$

Лемма 1.1. Функция $B: w \mapsto B(u,v) = \arg dz/dw$ есть решение задачи

$$\Delta B = 0 \quad \mathcal{B} \quad Q, \qquad B(u, \pm 1) = 0, \qquad B(\pm \mu, v) = \beta(\pm v). \tag{11}$$

 $3 \partial e c b \beta : [-1,1] \ni v \mapsto \beta(v)$, г ∂e

$$\beta(v) = N(s(v)), \quad s: [-1, 1] \ni v \mapsto s(v) = \int_{1}^{v} e^{\alpha(\eta)} d\eta, \quad \alpha(v) = A(\mu, v),$$
 (12)

а функция A гармонически сопряжена κ B.

 $\overline{\ ^1}$ Напомним, что норма функции f в $C^{k,\lambda}(I)$ есть $\|f\|_{k,\lambda}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\|f\|_k+\left[f^{(k)}
ight]_\lambda$, где

$$||f||_k = \max_{0 \le j \le k} \sup_{t \in I} |f^{(j)}(t)|, \qquad \left[f^{(k)}\right]_{\lambda} = \sup_{t_k \in I, \ 0 < |t_1 - t_2| \le 1} \frac{|f^{(k)}(t_1) - f^{(k)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\lambda}}, \tag{5}$$

а $f^{(j)}-j$ -я производная функции f.

 2 С инженерной точки зрения иногда разумно фиксировать диапазон [m,M] допустимого изменения значений функции N:

$$m \leqslant N(s) \leqslant M \quad \forall P_s \in \gamma, \qquad (N(0) = N(|\gamma|) = 0 \in [m, M]).$$
 (7)

Соответствующий ограничению (7) подкласс кривых из множества $G^{k,\lambda}$ можно было бы обозначить через G= $G^{k,\lambda}(m,M)$. Однако доказательства приводимых ниже теорем не зависят от того, фиксирован или нет диапазон изменения функции N. Поэтому для краткости формулировок класс $G = G^{k,\lambda}(m,M)$ будем в дальнейшем обозначать также через $G = G^{k,\lambda}$.

³Однолистность отображения (2) следует из принципа соответствия границ [11], поскольку, согласно лемме Жиро— Хопфа-Олейник (см., например, [12]) о производной гармонической функции в точке ее максимума на границе, это отображение гомеоморфно переводит $\partial\Omega$ в ∂Q , сохраняя ориентацию обхода.

 4 При отображении $\zeta:Q
ightarrow with <math>\zeta(w)\stackrel{\mathrm{def}}{=} dz/dw\in\mathbb{C}_*$ образ $\zeta(C)$ любой кривой $C\subset Q$, гомеоморфной окружности, не охватывает нуль, так как иначе, стягивая C в точку, придем к противоречию с тем, что $0 \notin \zeta(Q)$. Поэтому определена однозначная ветвь логарифма $\ln(dz/dw)$, которая и принимается за функцию A+iB.

Доказательство. Все утверждения леммы вполне стандартны (см. [15]).

Предположим, что существует кривая $\hat{\gamma}$, на которой достигается минимум функционала (6). Обозначим через $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ те функции α и β (определенные формулами (12)), которым соответствует эта кривая $\hat{\gamma}$, задаваемая (согласно (9)) отображением

$$z(\mu,\cdot): [-1,1] \ni v \mapsto z(\mu,v) = i \int_{-1}^{v} \exp\left[\hat{\alpha}(\eta) + i\hat{\beta}(\eta)\right] d\eta. \tag{13}$$

Теорема 1.1. Функции $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ дают решение задачи

$$F_0(\alpha) \to \inf, \qquad F_1(\alpha, \beta) = 0, \qquad F_2(\alpha, \beta) = 0,$$
 (14)

где

$$F_{0}(\alpha) = \alpha^{+} - \alpha^{-}, \qquad \alpha^{+} = \max_{|v| \leqslant 1} \alpha(v), \qquad \alpha^{-} = \min_{|v| \leqslant 1} \alpha(v),$$

$$F_{1}(\alpha, \beta) = \rho - \int_{-1}^{1} e^{\alpha(v)} \cos \beta(v) \, dv, \qquad F_{2}(\alpha, \beta) = 1 + \int_{-1}^{1} e^{\alpha(v)} \sin \beta(v) \, dv,$$

$$(15)$$

 $a \rho$ — ордината точки $M_1(1,\rho)$ (см. рис. 1).

 \mathcal{A} оказательство. Обозначим $\mathrm{Im}\, w(P_s)$ через v_s , т.е. $w(P_s)=\mu+iv_s$. Имеем

$$|\nabla u(P_s)| = \left| \frac{dz}{dw} \right|_{w=\mu+iv_s}^{-1}.$$

Тем самым, $\ln |\nabla u(P_s)| = -\alpha(v_s)$. Поэтому

$$\ln \left[\frac{\max\limits_{P \in \gamma} |\nabla u(P)|}{\min\limits_{P \in \gamma} |\nabla u(P)|} \right] = \max\limits_{|v| \leqslant 1} (-\alpha(v)) - \min\limits_{|v| \leqslant 1} (-\alpha(v)) = -\alpha^{-} + \alpha^{+}.$$

Далее, выписывая комплексную координату точки $M_1(1, \rho)$, получаем

$$i\int_{-1}^{1} e^{\alpha(v)} \left[\cos \beta(v) + i\sin \beta(v)\right] dv = 1 + i\rho,$$

т.е.

$$\int_{-1}^{1} e^{\alpha(v)} \cos \beta(v) \, dv = \rho, \qquad \int_{-1}^{1} e^{\alpha(v)} \sin \beta(v) \, dv = -1.$$
 (16)

1.3. Функционал Φ , определенный формулой (6) на кривых $\gamma \in G^{k,\lambda}$, будем рассматривать также и на кривых класса $\gamma \in G^{k,\lambda}$

$$S=\{\gamma\in G=G^{k,\lambda},\ ext{ а функция }\beta=eta_{\gamma}\ ext{четна и выпукла вниз}\}.$$

возрастает как предел $\lim_{u\to\mu}A(u,v)$ функции A, производная которой $A_v(\mu-\varepsilon,v)=\int\limits_0^{\mu-\varepsilon}B_{vv}(u,v)\,du$ строго положительна при |v|<1 и $0<\varepsilon<\mu$. Тем самым, дуга кривой γ , соответствующая параметру $v\in[-1,0]$, короче той части γ , которая отвечает $v\in[0,1]$. Кроме того, кривая γ (если функция α' не выпукла) не обязательно имеет лишь одну точку перегиба

(в то время, как график функции $\int \beta(v) \, dv$ имеет ровно одну такую точку, если β строго выпукла).

¹См. сноску 2 на с. 37.

 $^{^2}$ Подчеркнем, что кривая γ класса S не является центрально-симметричной в отличие от графика функции $v\mapsto\int eta(v)\,dv$, поскольку функция $\alpha:[-1,1]\ni v\mapsto \alpha(v)$, соответствующая четной и выпуклой вниз функции eta, монотонно

Теорема 1.2. 1^0 . При любом целом $k \ge 0$ и любых вещественных числах L > 0, $\lambda \in (0,1)$, функционал Φ , определенный формулой (6), достигает минимума на каждом из множеств¹

$$G_L^{k,\lambda} = \{ \gamma \in G^{k,\lambda} \mid [N^{(k)}]_{\lambda} \leqslant L \}, \qquad S_L^{k,\lambda} = S \cap G_L^{k,\lambda}, \tag{18}$$

 $ecлu^2$

$$\max N - \min N \leqslant \pi. \tag{19}$$

Соответствующая кривая $\hat{\gamma}_G$ или $\hat{\gamma}_S$ определяется формулой (13) по решению $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in C^{k,\lambda} \times C^{k,\lambda}$ задачи (14). (Если функционал Φ минимизируется на кривых класса S, то решение задачи (14) подчинено дополнительному условию: $\hat{\beta}$ четна и выпукла, а $\hat{\alpha}$ монотонна и, с точностью до аддитивной константы, нечетна.)

 2^0 . Если функция \hat{eta} (она зависит от параметра $\mu=uig|_{\gamma}$) такова, что 4

$$K(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \|\hat{\beta}\|_{C^4} < \infty \quad npu \quad \mu > 0, \tag{20}$$

то существуют константа C и функция $\mu\mapsto C(\mu)$, удовлетворяющая условию $|C(\mu)|\leqslant C\cdot K(\mu)$, такая, что

$$\Phi(\hat{\gamma}_G) = \inf_{\gamma \in G} \Phi(\gamma) \stackrel{\text{(15)}}{=} \exp(\hat{\alpha}^+ - \hat{\alpha}^-) \stackrel{\mu \to 0}{=} \exp\left(\frac{C_{-1}}{\mu} + C_0 + C_1\mu + C(\mu)\mu^2\right), \tag{21}$$

 $\operatorname{ede}\,\hat{\alpha}^+ = \max_{|v| \leqslant 1} \hat{\alpha}(v), \ \hat{\alpha}^- = \min_{|v| \leqslant 1} \hat{\alpha}(v), \ a$

$$C_{-1} = \max_{|v| \le 1} D_{-1}(v) - \min_{|v| \le 1} D_{-1}(v), \qquad D_{-1}(v) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{v} (\hat{\beta}(-\eta) - \hat{\beta}(\eta)) d\eta.$$
 (22)

Если функция $\hat{\beta}$ еще и четна (в частности, это так при минимизации функционала Φ на множестве S), то

$$C_{-1} = C_0 = 0, \qquad C_1(v) = \max_{|v| \le 1} \hat{\beta}'(v) - \min_{|v| \le 1} \hat{\beta}'(v),$$
 (23)

$$\hat{\alpha}'(v) \stackrel{\mu \to 0}{=} \hat{\beta}''(v)\mu + C(\mu)\mu^2. \tag{24}$$

Наконец,

$$\Phi(\hat{\gamma}_S) = \inf_{\gamma \in S} \Phi(\gamma) = \exp\left[\hat{\alpha}(1) - \hat{\alpha}(-1)\right] \stackrel{\mu \to 0}{=} \exp\left[2\mu \hat{\beta}'(1) + C(\mu)\mu^2\right]. \tag{25}$$

Доказательство. 1^0 . Пусть $\gamma_j \in V_L^{k,\lambda}$ и $\Phi(\gamma_j) \to \inf$ на $V_L^{k,\lambda}$, где $V_L^{k,\lambda}$ — либо $G_L^{k,\lambda}$, либо $S_L^{k,\lambda}$, а N_j , s_j , α_j и β_j — соответствующие γ_j функции, определенные по формулам (4) и (12). Так как

¹Величина $[N^{(k)}]_{\lambda}$ определена в (5).

 $^{^2}$ Условие (19) на угловую функцию N (см. (4)) обеспечивает однолистность отображения (9) (см. [2, предложение 3.3]).

³Если функция $\hat{\beta} = \hat{\beta}_L^{k,\lambda} \in C^{k,\lambda}$ окажется, на самом деле, более гладкой, а именно, класса $C^{k,\sigma}$, где $\sigma \in (\lambda,1)$, то кривая $\hat{\gamma} = \gamma(\hat{\beta}) \in C^{k+1,\sigma}$ минимизирует функционал Φ на $G^{k,\lambda} = \bigcup_L G_L^{k,\lambda}$ или, соответственно, на $S^{k,\lambda} = \bigcup_L S_L^{k,\lambda}$. Однако автору не удалось доказать включение $\hat{\gamma} \in C^{1,\sigma}$ с $\sigma > \lambda$ для кривой $\hat{\gamma}$, дающей минимум функционалу на кривых класса $C^{1,\lambda}$. Предположительно это верно в случае конечного числа локальных экстремумов функции N.

 $^{^4}$ Если кривые $\hat{\gamma}_-$ и $\hat{\gamma}_+$ стягиваются при $\mu \to 0$ к некоторой кривой γ_0 , то $\overline{\lim}_{\mu \to 0} \|\hat{\beta}\|_{C^4} = \infty$. Действительно, γ_0 необходимо центрально-симметрична. К ней не может стягиваться $\hat{\gamma}_S(\mu)$ (в силу неравенства $\|\beta\|_0 \geqslant \arctan(1/\rho)$ и причин, указанных в примечании к формуле (17)). Но из формул (21)–(23) следует, что при условии $\overline{\lim}_{\mu \to 0} \|\hat{\beta}\|_{C^4} < \infty$ и достаточно малом μ минимизирующей кривой (и в классе G) является кривая $\hat{\gamma}_+ = \hat{\gamma}_S(\mu)$. Что же касается вопроса о стягивании кривых $\hat{\gamma}_-$ и $\hat{\gamma}_+$ к некоторой кривой γ_0 при $\mu \to 0$, то он остается открытым (численные расчеты [10] были ограничены практическими запросами, которые предусматривали выполнение технологического условия: «ширина» полоски фольги должна быть не меньше некоторого числа).

 $\max_{i} |\alpha_j(v)|$ ограничен 1 при любых j некоторой константой C_0 , то

$$|s_j(v) - s_j(v_0)| = \int_{v_0}^v \left| \frac{dz_j}{dw} \right|_{w=\mu+i\eta} d\eta = \int_{v_0}^v e^{\alpha_j(\eta)} d\eta \leqslant e^{C_0} |v - v_0|.$$

Поэтому, учитывая то, что $\beta_j(v) = N_j(s_j(v))$, а $[N^{(k)}]_{\lambda} \leqslant L$, получаем

$$|\beta_j^{(k)}(v) - \beta_j^{(k)}(v_0)| \le L|s_j(v) - s_j(v_0)|^{\lambda} \le Le^{C_0}|v - v_0|^{\lambda}.$$

Таким образом, согласно теоремам Харди—Литтльвуда и Привалова², изложенным, например, в [5] (см. также [4]), существует константа $C\geqslant L\exp C_0$ такая, что³ при $0<\tau<\lambda$

$$\|\alpha_j\|_{k,\tau} \leqslant \|\alpha_j\|_{k,\lambda} \leqslant C, \qquad \|\beta_j\|_{k,\tau} \leqslant \|\beta_j\|_{k,\lambda} \leqslant C \quad$$
для любых $j \geqslant 1.$ (26)

Поскольку $C^{k,\lambda}[-1,1]$ компактно вложено в $C^{k,\tau}[-1,1]$, можно считать, что α_j и β_j сходятся в $C^{k,\tau}[-1,1]$ соответственно к $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$. Имеем

$$\lim_{\tau \to \lambda} \|\hat{\alpha}\|_{k,\tau} \stackrel{(5)}{=} \|\hat{\alpha}\|_{k,\lambda} \leqslant C, \qquad \lim_{\tau \to \lambda} \|\hat{\beta}\|_{k,\tau} \stackrel{(5)}{=} \|\hat{\beta}\|_{k,\lambda} \leqslant C, \tag{27}$$

поэтому функции $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ определяют кривую $\hat{\gamma} \in V_L^{k,\lambda}$, доставляющую минимум функционалу (6) на множестве $V_L^{k,\lambda}$, так как функционалы F_0, F_1 и F_2 , определенные формулой (15), непрерывны относительно равномерной сходимости⁴, и при такой сходимости сохраняются свойства (17) (если речь идет о множестве $S_L^{k,\lambda}$).

 2^0 . Формулы (21)–(25) для $\Phi(\hat{\gamma}(\mu))$ при $\mu \to 0$ получим, используя явную формулу для гармонической в полосе $\Pi = \{u + iv \in \mathbb{C} \mid |u| < \mu\}$ функции b, равной нулю на границе Π при |v| > 3 и такой, что

$$b(-\mu, v) = b(\mu, -v),$$
 $b(\mu, v) = \beta(v)$ при $|v| \le 3,$ (28)

где $\beta(v \pm 2k) = \hat{\beta}(v)$ для $|v| \leqslant 1$ и $k = 0, \pm 1$.

Положим $\omega=(2\mu)^{-1}\pi,\ \xi=\exp(\omega v).$ Учитывая предполагаемую гладкость функции $\hat{\beta}$, заметим, что

$$\frac{\partial b}{\partial u}(\mu, v) = R_{-} + R_{+} + J_{-} + J_{+},\tag{29}$$

где

$$R_{\pm} = -\frac{1}{2\mu} \exp(\omega v) \left[\partial_t \varphi(t) \ln \left| \frac{t}{\xi} - 1 \right| \right] \Big|_{t=\zeta(\pm\mu,\pm3)}^{t=\zeta(\pm\mu,\pm3)}, \tag{30}$$

$$J_{\pm} = \frac{1}{2\mu} \exp(\omega v) \int \ln_{\zeta(\pm\mu,\pm3)}^{\zeta(\pm\mu,\pm3)} \partial_{tt} \varphi(t) \ln \left| \frac{t}{\xi} - 1 \right| dt,$$

$$\zeta(u,v) = i \exp[i\omega(u+iv)], \quad \varphi(t) = \beta(y(t)), \quad y(t) = \omega^{-1} \ln |t|.$$
(31)

Положим

$$p = \exp[-\omega(3+v)], \qquad q = \exp[-\omega(3-v)], \qquad g_{\pm}(y) = \omega^{-1}\beta''(\pm y) \mp \beta'(\pm y).$$

Тогда

$$R_{+} = -\frac{1}{\pi} \left\{ \beta'(3)p^{-1} \ln|p+1| - \beta'(-3)q \ln|q^{-1}+1| \right\},$$

$$R_{-} = -\frac{1}{\pi} \left\{ \beta'(3)q \ln|q^{-1}-1| - \beta'(-3)p^{-1} \ln|p-1| \right\},$$

¹В противном случае последовательность $|\nabla u_j|_{\gamma_j}$ равномерно стремится либо к нулю, либо к бесконечности, что противоречит условию $\int (\partial u/\partial \nu) \, d\gamma = 2$, следующему из (1).

²Теорему Привалова следует применить к мнимой части функции $d^k(A+iB)/dw^k$, а затем проинтегрировать k раз граничное значение вещественной части этой функции.

³Априорные оценки (26) вытекают также из теорем об ограниченности в $C^{0,\lambda}$ сингулярных интегральных операторов (см., например, [3,13]), поскольку $\alpha = \mathbf{H}\beta$, где \mathbf{H} — преобразование Гильберта следа гармонической функции.

 $^{^4}$ Отметим, что $|F_0(\alpha) - F_0(\hat{\alpha})| \leq 2\|\alpha - \hat{\alpha}\|_0$, так как $|\min \alpha - \min \hat{\alpha}| \leq \|\alpha - \hat{\alpha}\|_0$.

$$J_{\pm} = \frac{1}{2\mu} \int_{-3}^{3} g_{\pm}(y) e^{-\omega(y-v)} \ln|e^{\omega(y-v)} \mp 1| dy.$$

Поскольку $\ln(1+t) = \sum_{k\geqslant 1} (-1)^{n+1} t^n$ при |t| < 1, то

$$R_{+} + R_{-} - = -\frac{\beta'(3)}{\pi} \left[p^{-1} \left(p - \frac{p^{2}}{2} + \frac{p^{3}}{3} - \cdots \right) \right] - \frac{\beta'(3)}{\pi} q \left[\omega(3 - v) + \left(q - \frac{q^{2}}{2} + \frac{q^{3}}{3} - \cdots \right) \right] + \frac{\beta'(-3)}{\pi} q \left[\omega(3 - v) - \left(q + \frac{q^{2}}{2} + \frac{q^{3}}{3} + \cdots \right) \right] - \frac{\beta'(-3)}{\pi} \left[p^{-1} \left(p + \frac{p^{2}}{2} + \frac{p^{3}}{3} + \cdots \right) \right].$$

Поэтому (в силу того, что $\beta'(\pm 3) = \beta'(\mp 1)$)

$$R_{+} + R_{-} \stackrel{\mu \to 0}{=} -\frac{1}{\pi} \left[\beta'(1) + \beta'(-1) \right] + O\left(\frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{\pi}{\mu}\right)\right).$$
 (32)

Полагая теперь $p=e^{-\omega x}$, а $q=e^{-\omega y}$, имеем

$$J_{+} + J_{-} = \frac{\omega}{2\mu} \int_{0}^{3-v} [xg_{-}(v+x) + xg_{+}(v+x)]e^{-\omega x} dx +$$

$$+ \frac{1}{2\mu} \int_{0}^{3-v} p[g_{-}(v+x)\ln(1+p) + g_{+}(v+x)\ln(1-p)] dx +$$

$$+ \frac{1}{2\mu} \int_{0}^{3+v} q^{-1}[g_{-}(v-y)\ln(1+q) + g_{+}(v-y)\ln(1-q)] dy.$$

Применяя формулу Тейлора, находим, что

$$J_{+} + J_{-} = \frac{\pi}{(2\mu)^{2}} \int_{0}^{3-v} x \left[g_{-}(v) + x g'_{-}(v) + \frac{x^{2}}{2!} g''_{-}(v + \theta_{-}x) \right] e^{-\omega x} dx +$$

$$+ \frac{\pi}{(2\mu)^{2}} \int_{0}^{3-v} x \left[g_{+}(v) + x g'_{+}(v) + \frac{x^{2}}{2!} g''_{+}(v + \theta_{+}x) \right] e^{-\omega x} dx +$$

$$+ \frac{1}{2\mu} \int_{0}^{3-v} \left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} p^{n+1} \right) [g_{-}(v) + x g'_{-}(v + \xi_{-}x)] dx -$$

$$- \frac{1}{2\mu} \int_{0}^{3-v} \left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} p^{n+1} \right) [g_{+}(v) + x g'_{+}(v + \xi_{+}x)] dx +$$

$$+ \frac{1}{2\mu} \int_{0}^{3+v} \left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} q^{n-1} \right) [g_{-}(v) - y g'_{-}(v + \eta_{-}y)] dy -$$

$$- \frac{1}{2\mu} \int_{0}^{3+v} \left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} q^{n-1} \right) [g_{+}(v) - y g'_{+}(v + \eta_{+}y)] dy.$$

Учитывая соотношения

$$\int_{0}^{a} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a}, \qquad \int_{0}^{a} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^{2}} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} \left(a + \frac{1}{\lambda} \right)$$

и то, что $|3\pm v|\geqslant 2$ при $|v|\leqslant 1$, имеем (при $\mu=(2\omega)^{-1}\pi\to 0$)

$$J_{+} + J_{-} = \frac{1}{2\mu} \int_{0}^{3+v} \left[g_{-}(v-y) - g_{+}(v-y) \right] dy + \frac{1}{\pi} \left\{ \left[g_{-}(v) + g_{+}(v) \right] + \frac{4\left[g'_{-}(v) + g'_{+}(v) \right]}{\pi} \mu + C(\mu) \mu^{2} \right\} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n} \left\{ (-1)^{n-1} \left[\frac{g_{-}(v)}{n-1} - \frac{2\mu}{\pi} \frac{g'_{-}(v)}{(n-1)^{2}} \right] - \left[\frac{g_{+}(v)}{n-1} - \frac{2\mu}{\pi} \frac{g'_{+}(v)}{(n-1)^{2}} \right] \right\} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \left\{ (-1)^{n+1} \left[\frac{g_{-}(v)}{n+1} + \frac{2\mu}{\pi} \frac{g'_{-}(v)}{(n+1)^{2}} \right] - \left[\frac{g_{+}(v)}{n+1} + \frac{2\mu}{\pi} \frac{g'_{+}(v)}{(n+1)^{2}} \right] \right\}.$$
 (33)

Вспоминая формулы (29), (30), и то, что $g_\pm(v)=\omega^{-1}\beta''(\pm v)\mp\beta'(\pm v)$, получаем

$$\frac{\partial b}{\partial u}(\mu, v) \stackrel{\mu \to 0}{=} \frac{1}{2\mu} \left[\beta(-v) - \beta(v) \right] + C(\mu),$$

если $\beta(-v) \neq \beta(v)$ хотя бы при одном значении $v \in [-1,1]$. Если же функция β четна, то, полагая $g(y) = \omega^{-1}\beta''(y) - \beta'(y)$ и учитывая формулы (32)–(33), получим

$$\frac{\partial b}{\partial u}(\mu, v) \stackrel{\mu \to 0}{=} \left[\frac{2}{\pi} g(v) + \frac{8\mu}{\pi^2} g'(v) + C(\mu) \mu^2 \right] - \frac{1}{\pi} \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k} \left\{ \left[\frac{g(v)}{2k - 1} - \frac{2\mu g'(v)}{\pi (2k - 1)^2} \right] + \left[\frac{g(v)}{2k + 1} + \frac{2\mu g'(v)}{\pi (2k + 1)^2} \right] \right\} = g'(v)\mu + C(\mu)\mu^2,$$

поскольку

$$\sum_{k \ge 1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right) = 2, \qquad \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right) = \frac{\pi^2}{2} - 4$$

(последнее равенство следует из формулы Эйлера $\sum_{k>1} k^{-2} = \pi^2/6$). Отсюда непосредственно сле-

дуют формулы (23)-(24), так как

$$\alpha'(v) \stackrel{\mu \rightarrow 0}{=} -b'_u(\mu,v) + C(\mu)(e^{-1/\mu}), \qquad g'(v) \stackrel{\mu \rightarrow 0}{=} -\beta''(v) + C(\mu)\mu \quad \text{при} \quad |v| \leqslant 1.$$

В случае минимизации на множестве S функции $\beta(\cdot)$ и $B_u'(\mu,\cdot)$ четны, строго выпуклы вниз и равны нулю при $v=\pm 1$. Поэтому функция $\alpha(\cdot)=A(\mu,\cdot)$ строго возрастает (см. сноску к формуле (17)). Тем самым, $F_0(\alpha)=\alpha(1)-\alpha(-1)=2\beta'(1)$, что влечет формулу (25).

1.4. Сделаем краткие замечания относительно численного поиска кривой $\hat{\gamma}$ и ее единственности. Функционал $F_0(\alpha)$ на множестве кривых класса S принимает вид $F_0(\alpha) = \alpha(1) - \alpha(-1)$. Тем самым, если ограничиться множеством кривых класса S, можно применять методы (в том числе численные), развитые для гладких экстремальных задач 1 . Численное исследование возможно также на пути аппроксимации множества тех четных, строго выпуклых функций $\beta: [-1,1] \ni v \mapsto \beta(v) \in [m,0]$, обращающихся в нуль при $v=\pm 1$, для которых $F_1(\alpha,\beta) = F_2(\alpha,\beta) = 0$ (здесь $\alpha-$ функция, соответствующая функции β ; см. формулу (12)). Такого рода численный анализ может быть полезен и при предварительном изучении вопроса единственности.

$$\sin(\beta(v) + C)\mathbf{H}\beta'(v) + \sin(\beta(v) - C)\beta'(v) = 0, \quad |v| < 1$$

при некоторой (подходящей) константе $C \in \mathbb{R}$. Здесь через **H** обозначено преобразование Гильберта следа β гармонической функции B (см. сноску 3 на с. 40).

 $^{^1}$ Принцип Лагранжа [1] приводит в данном случае к такому необходимому условию: искомая функция $\beta = \hat{\beta}: [-1,1] \ni v \mapsto \hat{\beta}(v)$ обращается в нуль при $v=\pm 1$ и удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

В общем случае кривых класса G задача (6) численно решалась спуском по градиенту с учетом рекомендаций Р. П. Федоренко [14].

 $2. \quad \text{ФУНКЦИОНАЛ } \mathfrak{F}\left(\Gamma,\varphi\right) = \int\limits_{\Gamma} \left(\left[\vec{V}_{\infty}^2 - \vec{V}^2 \, \right] \vec{V} * \vec{\nu} \, \right) \, d\Gamma \rightarrow \sup_{\Gamma,\varphi}, \text{ где } \vec{V}^2 = \vec{V} * \vec{V}, \ \vec{V} = \nabla u - \text{СКОРОСТЬ}$

плоского потока, направленного на частично абсорбируемом препятствии Γ под углом φ относительно нормали \vec{v} к Γ , $\vec{V}*\vec{v}$ — скалярное произведение векторов \vec{V} и \vec{v} , $\vec{V}_{\infty}=(1,0)$

2.1. Пусть $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \ni (x,y) \to \vec{V}(x,y) = \nabla u(x,y)$ — скорость потока несжимаемой жидкости, обтекающей некоторое препятствие, за которым образуется зона застоя (стагнации: $\vec{V}(x,y) \equiv 0$), иначе говоря, каверна (т.е. полость по отношению к движению). Ограничимся здесь 2 для определенности случаем каверны, простирающейся до бесконечности (схема Кирхгофа; см. рис. 2). Обозначим через Ω область течения (т.е. область, внешнюю относительно каверны). Будем считать, что

$$\vec{V}(x,y) = (V_x, V_y) \rightarrow (V_\infty, 0) = (1,0)$$
 при $\Omega \ni z = x + iy \rightarrow \infty$. (34)

Геометрию препятствия представим в виде самонепересекающейся незамкнутой кривой Γ , длина которой (в выбранной системе единиц измерения³) равна 1. Обозначим одну из крайних точек кривой через P_0 , а через P_s , где $s\in[0,1]$, ту точку на Γ , расстояние до которой, измеренное вдоль Γ от P_0 , равно s. Будем считать, что ординаты y_0 и y_1 крайних точек P_0 и P_1 кривой Γ подчинены условию

$$D(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1 - y_0) > 0. \tag{35}$$

Кривая Γ полностью определяется функцией $N:[0,1]\ni s\mapsto N(s)\in\mathbb{R}$, задающей угол N(s) между осью Ox и нормалью $\vec{\nu}(s)$ к Γ в точке $P_s\in\Gamma$. Будем предполагать, что⁴

$$|N(s)| \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \forall s \in [0, 1] \tag{36}$$

и что срыв линий тока γ_0 и γ_1 , охватывающих каверну, происходит с крайних точек P_0 и P_1 кривой Γ .

Следуя [16–18], будем интерпретировать препятствие, представленное кривой Γ , как турбину в открытом потоке (см. [19,20]), предполагая, что часть потока абсорбируется препятствием. Мощность турбины в этом случае не превосходит той мощности, которую абсорбирует препятствие. Последняя (при тех или иных предположениях) может быть выражена интегралом вида 5

$$\int_{\Gamma} f(s, V_{\nu}(s), V_{\tau}(s)) d\Gamma, \quad f \in C(\Gamma \times \mathbb{R}^2).$$
(38)

$$\int_{\Gamma} (p^{+} - p^{-}) \vec{V} * \vec{\nu} d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (1 - \vec{V}^{2}) \vec{V} * \vec{\nu} d\Gamma.$$
(37)

Здесь p^+ (соответственно p^-) — давление на Γ со стороны набегающего потока (соответственно со стороны каверны). Равенство (37) следует из теоремы Бернулли

$$p+rac{ec{V}^2}{2}=p_{\infty}+rac{V_{\infty}^2}{2}$$
 в области течения $\Omega
i x+iy$

и того, что $V_{\infty}\stackrel{(34)}{=}1,$ а давление всюду внутри каверны постоянно и равно $p_{\infty}.$

 $^{^1}$ Соответствующая вычислительная программа, написанная А. А. Созыкиным [10], позволяла почти мгновенно находить искомую область $\Omega_{\hat{\gamma}}$, что привело к «печальному» следствию: была расформирована лаборатория, в которой раньше с помощью ножниц в течение нескольких недель экспериментально подбирали подходящую область для того или иного класса кривых.

²В [7,8] предлагается метод изучения аналогичных задач, учитывающих наличие и эволюцию вихревых особенностей в следе за препятствием.

 $^{^{3}}$ Плотность жидкости тоже нормируем: она будет считаться равной единице.

⁴Ограничение (36) можно ослабить. Однако оно вполне естественно, и благодаря ему, кривая Γ — самонепересекающаяся (допускаются «складки» в виде берегов горизонтальных разрезов), и ее проекция на ось Oy автоматически совпадает с отрезком $[y_0, y_1]$.

⁵В [16-18] рассматривался интеграл

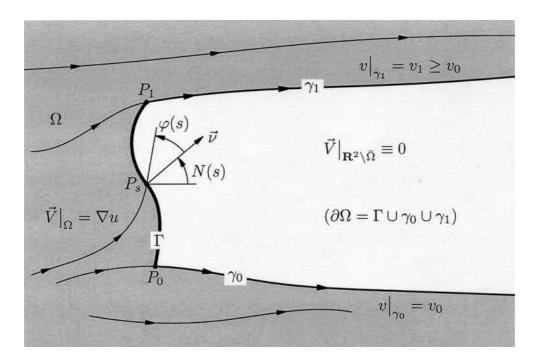


Рис. 2. Область течения $\Omega=\Omega_{\Gamma}$ и препятствие Γ , частично поглощающее (абсорбирующее) набегающий поток и снабженное устройством, задающим направление вектора скорости $\vec{V}(s)$ в каждой точке $P_s\in\Gamma$, а именно: угол $\varphi(s)\in[-\pi/2,\pi/2]$ между нормалью $\vec{\nu}(s)$ к Γ (направленной в сторону каверны) и вектором $\vec{V}(s)$ (s- натуральный параметр точки P_s); N(s)- угол между осью Ox и нормалью $\vec{\nu}(s)$ к Γ в точке P_s .

Здесь $V_{\nu} = \vec{V} * \vec{\nu}$ (соответственно $V_{\tau} = \vec{V} * \vec{\tau}$) — скалярное произведение векторов \vec{V} и $\vec{\nu} = (\cos N, \sin N)$, (соответственно \vec{V} и $\vec{\tau} = (-\sin N, \cos N)$).

Как максимизировать эту мощность? Будем считать, что для этого (кроме возможности выбора кривой Γ , заданной функцией N) можно в каждой точке $P_s \in \Gamma$ фиксировать то или иное направление вектора скорости $\vec{V}(s)$ абсорбируемого потока, а именно, угол $\varphi(s) \in [-\pi/2, \pi/2]$ между нормалью $\vec{\nu}(s)$ к Γ (направленной в сторону каверны) и вектором $\vec{V}(s)$.

Ответы на вопросы о максимизации абсорбируемой мощности могут служить ориентиром при разработке «наилучшей» конструкции турбины. Такова мотивация постановки как задачи

$$\mathfrak{F}_1(\Gamma,\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} f(s, V_{\nu}(s), V_{\tau}(s)) d\Gamma \to \sup, \tag{39}$$

так и задач следующего типа

$$\mathfrak{F}_2(\Gamma,\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathfrak{F}_1(\Gamma,\varphi)}{D(\Gamma)} \to \sup, \qquad \mathfrak{F}_3(\Gamma,\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathfrak{F}_1(\Gamma,\varphi)}{H(\Gamma)} \to \sup,$$
 (40)

где 2 $D(\Gamma)$ уже было определено в (35), а

$$H(\gamma) = \sup_{P_s = (x_s, y_s) \in \Gamma} |x(s) - x(0)|.$$
(41)

Задачи (39)–(40) сформулированы в терминах функции \vec{V} , определенной в области Ω со свободной границей $\gamma_0 \cup \gamma_1$, не являющейся непосредственно варьируемым аргументом функционалов \mathfrak{F}_k , $k=1\div 3$. В следующем пункте мы переформулируем эти задачи в терминах функции

¹Отметим, что функция $[0,1] \ni s \to |\vec{V}(P_s)| \in [0,1]$ не может быть равномерно близка к нулю или к 1, если мы желаем максимизировать интеграл (37).

 $^{^2}$ Число $D(\Gamma)/2$ есть мощность (не возмущенного препятствием) равномерного потока $V_0=(1,0)$, протекающего в пределах сечения, совпадающего с проекцией кривой Γ на ось Oy.

Гельмгольца—Кирхгофа, что позволит преодолеть трудности, связанные с наличием свободной границы области Ω .

2.2. В односвязной области Ω введем функцию $v:\Omega\to\mathbb{R}$, гармонически сопряженную к функции u. Зафиксировав равенством $w(P_0)=0$ аддитивную константу аналитического отображения

$$w: \Omega \ni z = x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbb{C},$$

найдем образ $Q=w(\Omega)$ области Ω и образ $\Lambda\cup\lambda_0\cup\lambda_1=w(\partial\Omega)$ ее границы $\partial\Omega=\Gamma\cup\gamma_0\cup\gamma_1.$

Лемма 2.1. Кривая $\Lambda = w(\Gamma)$ задается формулой

$$\Lambda = \{ w(P_s) = u(P_s) + iv(P_s), [0, 1] \ni s \mapsto P_s \in \Gamma \}, \tag{42}$$

где

$$u(P_s) = \int_0^s V(r)\sin\varphi(r) dr, \qquad v(P_s) = \int_0^s V(r)\cos\varphi(r) dr$$
(43)

 $(v(P_s) -$ неубывающая функция $s \in [0,1]$), $a^2 V(s) = |\vec{V}(P_s)|$.

Доказательство. Пусть ds — дифференциал дуги кривой Γ . Тогда (см. рис. 2)

$$dx = -\sin N \, ds, \qquad dy = \cos N \, ds.$$

С другой стороны, $\vec{V} = (u_x, u_y)$, и поэтому

$$v_x = -u_y = -|\vec{V}|\sin\beta, \qquad v_y = u_x = |\vec{V}|\cos\beta,$$

где $\beta=N+\varphi$ — угол между осью Ox и вектором \vec{V} . Следовательно,

$$du = u_x dx + u_y dy = |\vec{V}| \sin \varphi \, ds, \qquad dv = v_x dx + v_y dy = |\vec{V}| \cos \varphi \, ds.$$

Очевидно, что в w-плоскости линии тока γ_0 и γ_1 представляются лучами

$$\lambda_0 = \{u \geqslant u(P_0), \ v = v(P_0)\} \quad \text{if} \quad \lambda_1 = \{u \geqslant u(P_1), \ v = v(P_1)\}.$$

Обозначим через T_l ту точку на кривой Λ , расстояние до которой, измеренное вдоль Λ от ее крайней точки $w(P_0)=0$, равно l. Заметим, что $T_{l(s)}=w(P_s)$, где s- натуральный параметр точки $P_s\in \Gamma$, а

$$l(s) \stackrel{(42),(43)}{=} \int_{0}^{s} V(r) dr, \quad s \in [0,1], \tag{44}$$

где априори неизвестная функция $s\mapsto V(s)=|\vec{V}(P_s)|$ является искомой как в задаче (39), так и в задачах (40). В случае задачи (39) это относится и к длине L=l(1) кривой Λ . Отметим, что $L\leqslant 1$, поскольку $V\leqslant 1$.

Не уточняя здесь функциональные классы, к которым принадлежат аргументы функционалов \mathfrak{F}_k , будем считать, что они таковы, что функция l строго монотонна. Тогда, учитывая, что $l'(s)\geqslant 0$ $\forall s\in [0,1]$, а $\vec{V}_{\infty}=(1,0)$, получим, согласно принципу сохранения границ [11], что отображение $w:z\mapsto w(z)$ однолистно отображает область Ω на область $Q=w(\Omega)$, дополнительную к (замкнутой в \mathbb{C}) полуполосе Π , лежащей между лучами λ_0 , λ_1 и ограниченной слева кривой Λ .

Поскольку функция $l:s\mapsto l(s)$ строго монотонна, она имеет обратную функцию, которая выражается формулой

$$s: [0, L] \ni l \mapsto s(l) = \int_{0}^{l} e^{A(u_l, v_l)} dl.$$
 (45)

 $^{^1}$ В том случае, когда каверна конечна, односвязность области Ω формируется разрезом области течения вдоль линии тока, идущей от каверны до бесконечно удаленной точки. Эта линия определяется либо симметрией (при ее наличии), либо специально оговоренным способом.

 $^{^{2}}$ Подчеркнем, что $|\vec{V}(P_{s})|$ — искомая величина как в задаче (39), так и в задачах (40).

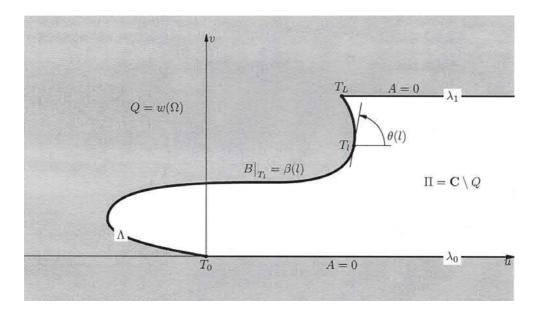


Рис. 3. Граничные условия функции $A+iB\stackrel{\mathrm{def}}{=} \ln dz/dw: Q=w(\Omega) \to \mathbb{C}$ на $\partial Q=\Lambda\cup\lambda_0\cup\lambda_1\subset\Pi=\mathbb{C}\setminus Q.$

Здесь и ниже (u_l,v_l) — координаты точки $T_l\in\Lambda,$ A — вещественная часть функции Гельмгольца — Кирхгофа

$$A + iB : Q = w(\Omega) \ni w = u + iv \mapsto A(u, v) + iB(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{dz}{dw} \in \mathbb{C}, \tag{46}$$

определенной в односвязной области Q.

Лемма 2.2. Кривая Λ полностью определяется функцией

$$\theta: [0, L] \ni l \mapsto \theta(l) = \frac{\pi}{2} - \varphi(s(l)) \in [0, \pi], \tag{47}$$

задающей как длину $L=|\Lambda|$ этой кривой, так и угол $\theta(l)$ между осью Ou и касательной к ней в точке $T_l\in\Lambda$.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из формул (43).

Найдем граничные значения функции Гельмгольца-Кирхгофа. Легко видеть, что

$$A = 0$$
 на лучах $\lambda_0 = w(\gamma_0)$ и $\lambda_1 = w(\gamma_1)$. (48)

Действительно, положение линий тока γ_0 и γ_1 определяется равенством давления на них как со стороны потока, так и со стороны каверны. В каверне давление постоянно. Поэтому, в силу интеграла Бернулли, $|\nabla u|=V_\infty=1$ на γ_0 и γ_1 . Остается вспомнить, что $A(u,v)=-\ln|w_z'(z)|_{z=z(w)}$. Столь же просто устанавливается формула

$$B(u_l, v_l) = \beta(l),$$
 где $\beta(l)\Big|_{l=l(s)} \stackrel{\text{def}}{=} N(s) + \varphi(s).$ (49)

В самом деле, $\cos \varphi \, du \stackrel{(43)}{=} \sin \varphi \, dv$, и поэтому

$$B = \arg dz - \arg dw = \left(\frac{\pi}{2} + N\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Наконец, на бесконечности имеем

$$A + iB \to A_{\infty} = 0$$
 при $Q \ni w \to \infty$, (50)

поскольку $\vec{V} \to (1,0)$ при $\Omega \ni z \to \infty$.

Замечание 2.1. Удобно нормировать длину L кривой Λ с помощью замены $(\xi, \eta) = (u/L, v/L)$. Всюду в дальнейшем будем считать, что такая замена выполнена. Однако новые переменные (ξ, η) будут, по-прежнему, обозначаться через (u, v).

Анонсированная выше переформулировка задач (39)–(40) в терминах функции Гельмгольца— Кирхгофа базируется на нижеследующих леммах¹.

Лемма 2.3. $\mathfrak{F}_1(\Gamma,\varphi) = \mathfrak{G}_1(\theta,\beta)$, где (с учетом замечания 2.1)

$$\mathfrak{G}_{1}(\theta,\beta) = L \int_{0}^{1} f\left(s, e^{-A(u_{l},v_{l})} \cos \varphi(s), e^{-A(u_{l},v_{l})} \sin \varphi(s)\right) \Big|_{\substack{s = s(l)}} e^{A(u_{l},v_{l})} dl, \tag{51}$$

 $a\ (u_l,v_l)$ — координаты точки $T_l\in\Lambda$.

Доказательство. Действительно, якобиан отображения $z\mapsto w(z)$ равен e^A , а

$$\vec{V}(x,y) = \exp(-A(u,v) + iB(x,y)),$$
 где $u + iv = w(x+iy).$ (52)

Лемма 2.4. $D(\Gamma) = \mathfrak{D}(\theta, \beta)$, еде (с учетом замечания 2.1)

$$\mathfrak{D}(\theta,\beta) = L \int_{0}^{1} e^{A(u_l,v_l)} \cos N(s) \Big|_{\substack{s \stackrel{(45)}{=} s(l)}} dl.$$
 (53)

Доказательство. Имеем $du=dl\cos\theta,\ dv=dl\sin\theta,\ \beta\stackrel{(49)}{=}N+\varphi.$ Поэтому

$$\mathfrak{D}(\theta,\beta) = \int_{\Lambda} e^{A} \left[\cos B \, dv + \sin B \, du \right] \stackrel{(47)}{=} L \int_{0}^{1} e^{A(u_{l},v_{l})} \cos N(s) \Big|_{\substack{s \stackrel{(45)}{=} s(l)}} dl.$$

Точно также доказывается следующая лемма.

Лемма 2.5. $H(\Gamma) = \mathfrak{H}(\theta, \beta)$, где (с учетом замечания 2.1)

$$\mathfrak{H}(\theta,\beta) = L \sup_{0 \leqslant l \leqslant 1} \left| \int_{0}^{l} e^{A(u_l, v_l)} \sin N(s) \right|_{s \stackrel{(45)}{=} s(l)} dl \right|. \tag{54}$$

Хотя $\mathfrak{D}(\theta,\beta)$ и $\mathfrak{H}(\theta,\beta)$ представлены в формулах (53) и (54) через функцию A, зависящую от β и θ (т.е. кривой Λ , на которой функция $B:Q\to\mathbb{C}$, гармонически сопряженная к A, равна β), однако и $\mathfrak{D}(\theta,\beta)$, и $\mathfrak{H}(\theta,\beta)$ зависят лишь от кривой Γ и выражают ее геометрические характеристики: «размер» по вертикали и горизонтальное «отклонение» от вертикали x=0.

Предыдущие построения (см. (45)–(50) и леммы 2.3–2.5) показывают, что верна следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть функциональные классы, на которых рассматриваются функционалы

$$\mathfrak{F}_1(\Gamma,\varphi), \quad \mathfrak{F}_2(\Gamma,\varphi), \quad \mathfrak{F}_3(\Gamma,\varphi)$$
 (55)

(заданные формулами (39)-(40)), таковы, что отображение $w:\overline{\Omega}\to \overline{Q}$ гомеоморфно, а в Ω оно однолистно. Пусть $(\hat{\theta}_k,\hat{\beta}_k)$ — решение задачи

$$\mathfrak{G}_k(\theta,\beta) \to \sup,$$
 (56)

¹Напомним, что N(s) — угол между осью Ox и нормалью к Γ в точке $P_s \in \Gamma$; $\theta(\cdot) = \pi/2 - \varphi(s(\cdot))$, а $\beta(s) = N(s) + \varphi(s)$ — значение, которое принимает функция B (гармонически сопряженная к A) в точке $w(P_s)$.

где функционал $\mathfrak{G}_1(\theta,\beta)$ определен формулой (51), a^1

$$\mathfrak{G}_{2}(\theta,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathfrak{G}_{1}(\theta,\beta)}{\mathfrak{D}(\theta,\beta)}, \qquad \mathfrak{G}_{3}(\theta,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathfrak{G}_{1}(\theta,\beta)}{\mathfrak{H}(\theta,\beta)}. \tag{57}$$

Тогда задача

$$\mathfrak{F}_k(\Gamma,\varphi) \to \sup$$
 (58)

имеет решение $(\hat{\Gamma}_k, \hat{\varphi}_k)$, и пара функций $(\hat{N}_k, \hat{\varphi}_k)$, представляющая это решение, определяется следующим образом:

$$\hat{N}_k(s)\big|_{s=s_k(l)} = B(s_k(l)), \qquad \hat{\varphi}_k(s)\big|_{s=s_k(l)} = \frac{\pi}{2} - \hat{\theta}(s_k(l)).$$
 (59)

Здесь функция s_k определена согласно формуле (45), а фигурирующая в этой формуле функция Гельмгольца—Кирхгофа $A+iB:Q\to\mathbb{C}$ удовлетворяет условиям (48)–(50), где в качестве функции β (в формуле (49)) взята функция $\hat{\beta}_k$.

2.3. Приведем простейший (но полезный с точки зрения численного анализа) пример, когда выполнены предположения теоремы 2.1, т.е. отображение $w:\overline{\Omega}\to \overline{Q}$ гомеоморфно и однолистно в Ω , а задача (56) разрешима. Определим с этой целью множество \mathfrak{M}_{ρ} по заданному натуральному числу M и положительному числу ρ . Множество \mathfrak{M}_{ρ} — это класс кусочно-постоянных функций

$$\theta \in L^{\infty}((0,L);\mathbb{R})$$
 и $\beta \in L^{\infty}((0,L);\mathbb{R}),$

каждая из которых характеризуется тремя M-мерными векторами

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_M), \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_M) \quad \text{if} \quad \vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_M)$$
(60)

такими, что (для любого $j = 1 \div M$)

$$\sigma_j \geqslant \rho > 0, \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^M \sigma_j \leqslant \frac{1}{\rho}, \quad \theta_j = \frac{\pi}{2} - \varphi_j, \quad \beta_j = N_j + \varphi_j,$$
 (61)

где числа φ_j , N_j $(j=1\div M)$ удовлетворяют условиям 2

$$|\varphi_j| \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad |N_j| \leqslant \frac{\pi}{2},$$
 (62)

а

$$|\beta_{j+1} - \beta_j| \leqslant \pi - \rho \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j \leqslant M - 1. \tag{63}$$

Элемент (θ, β) множества \mathfrak{M}_{ρ} определяется так:

$$\theta(l) = \theta_i, \quad \beta(l) = \beta_i \quad \text{при} \quad l_{i-1} < l < l_i \quad \text{и} \quad j = 1 \div M.$$
 (64)

Здесь

$$l_0 = 0, \quad l_1 = \sigma_1, \dots, \quad l_j = l_{j-1} + \sigma_j, \dots, \quad l_M = L.$$
 (65)

Пара $(\theta, \beta) \in \mathfrak{M}_{\rho}$ определяет, в свою очередь,

- 1) ломанную³ $\Lambda = \cup \Lambda_j$, составленную из отрезков Λ_j , j-й из которых имеет длину σ_j , наклонен к оси Ou под углом $\theta_j \in [0,\pi]$ и примыкает к отрезку Λ_{j-1} (отрезок Λ_1 исходит из начала координат (u,v)=(0,0));
 - 2) значение функции B на Λ_j , а именно: $B\big|_{\Lambda_i} = \beta_j$.

Тем самым, пара $(\theta, \beta) \in \mathfrak{M}$ задает (в соответствии с формулами (48)–(50)) ту или иную функцию Гельмгольца—Кирхгофа A+iB.

 $^{^1}$ Функционалы, определенные формулой (57), не зависят от длины кривой Λ . Для этих функционалов областью определения функции θ можно считать отрезок [0,1].

 $^{^{2}}$ Ср. примечание к формуле (36).

 $^{^3}$ Кривая Λ характеризует (см. рис. 3) область определения Q функции A+iB.

Теорема 2.2. Задачи (56) имеют решение на множестве $\mathfrak{M}_{\rho,\sigma}$, а отображение

$$\overline{Q} \ni w \mapsto z(w) = \int_{0}^{w} e^{A+iB} dw \overline{\Omega}$$

гомеоморфно и однолистно в Q.

Доказательство. В силу условий (62)–(63) (ср. [2, замечания 1.2, 1.3 и предложение 3.1]), справедливо включение $e^{\pm A}|_{\Lambda} \in L^1(\Lambda)$. Остается заметить, что условие $\sigma_j \geqslant \rho > 0$ (см. (61)) обеспечивает также непрерывность функционалов (51) и (57) относительно компонент векторов (60).

3. Замечание о возможных обобщениях

Производные $u_x = e^A \cos B, \ldots, u_{xx}, u_{xxxyy}, \ldots$ функции u, а также переменные $x = \operatorname{Re} z(w)$ и $y = \operatorname{Im} z(w)$ выражаются через функцию Гельмгольца—Кирхгофа. Это обстоятельство отражено в названии статьи.

Благодарности Автор чрезвычайно благодарен участникам руководимого А. К. Гущиным, А. А. Дезиным и В. П. Михайловым семинара в МИАН РАН за скрупулезное обсуждение первой части работы. Это позволило автору устранить ряд неточностей и улучшить первоначальное изложение. Автор весьма признателен Е. П. Долженко и Г. Я. Дынниковой за консультации. Особую благодарность автор выражает М. И. Зеликину и В. М. Тихомирову за полезные обсуждения и постоянную поддержку.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 04-01-00735).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М: Наука, 1979.
- 2. *Баджади А., Демидов А. С.* Теоремы существования, несуществования и регулярности в одной задаче со свободной границей// Мат. сб. 1983. *122(164)*, № 1(9). С. 64–81.
- 3. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными произодными. М: Мир, 1966.
- 4. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции М: Мир, 1984.
- 5. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М: Наука, 1966.
- 6. Демидов А. С. О плоских течениях с минимальным отношением экстремальных давлений на свободной границе// 6-й Всесоюзный съезд по механике. Аннотации докладов. Ташкент, 1986. 243 с.
- 7. Демидов А. С. Метод Гельмгольца—Кирхгофа и плоское цикло-периодическое течение с вихревыми особенностями за препятствием// Сборник тезисов докладов конференции им. И. Г. Петровского, Москва, 2004. 51 с.
- 8. Демидов А. С. Метод Гельмгольца—Кирхгофа и граничное управление при обтекании плоским потоком// Фундам. и прикл. мат. (в печати).
- 9. Демидов А. С., Лавлинская О. Н. О разрешимости одной экстремальнй задачи со свободной границей// Понтрягинские чтения: Оптимальное управление, геометрия и анализ. Тезисы. Кемерово, 1990. 125 с.
- 10. Демидов А. С., Созыкин А. А. Об одной экстремальной задаче со свободной границей// Успехи мат. наук. 1986. 41, № 4. С. 190–191.
- 11. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М: Наука, 1965
- 12. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М: Изд-во ин. лит., 1957.
- 13. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М: Физматгиз, 1962.
- 14. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М: Наука, 1978.
- 15. Demidov A. S. Some applications of the Helmholtz-Kirchhoff method (equilibrium plasma in Tokamaks, Hele-Shaw flow, and high-frequency asymptotics)// J. Math. Phys. -2000.-7, $N \ge 2.-C$. 166–186.
- 16. *Gorban' A. N., Gorlov A. N., Silantyev V. M.* Limits of the turbine efficiency for free fluid flow// J. Energy Resources Technology. -2001. -123, № 4. -C. 311-317.

- 17. Gorban' A. N., Braverman M., Silantyev V. M. Modified Kirchhoff flow with a partially penetrable obstacle and its application to the efficiency of free flow turbines// Math. and Comput. Modelling. -2002.-35, No.13.-C.1371-1375.
- 18. *Gorban' A. N., Silantyev V. M.* Riabouchinsky flow with partially penetrable obstacle// Math. and Comput. Modelling. -2002.-35, No 13.-C. 1365-1370.
- 19. *Gorlov A*. *M*. The Helical turbine: a new idea for low-head hydropower// Hydro Review. -1995.-14, $N \ge 5. C. 44-50$.
- 20. Gorlov A. M. Helical turbine for the Gulf Stream// Marine Technology. -1998. -35, № 3. C. 175–182.
- 21. *Helmholtz H*. Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen// Monatsber. Königl. Akad. Wissenschaften, Berlin, 1868. C. 215–228.

А. С. Демидов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: asd@mech.math.msu.su

УДК 517.937; 517.956; 517.968

ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ В ЗАДАЧЕ СТОКСА—ЛЕЙБЕНЗОНА ДЛЯ ПОТОКА ХИЛ-ШОУ. ЧАСТЬ II

© 2005 г. А. С. ДЕМИДОВ

Аннотация. Показывается, что бесконечномерная динамическая система вида

$$2(t+t_0)\Big(\beta_1\dot{\beta}_1 + r_1(\beta)\dot{\beta}\Big) = \Big(-\beta_1^2 + 2\sum_{j\geq 2}\beta_j^2\Big) + s_1(\beta),$$

$$2(t+t_0)(\dot{\beta}_k + R_k(\beta)\dot{\beta}) = -(k+2)\beta_k + S_k(\beta), \quad k \geqslant 2,$$

изученная для достаточно малых r_1 , s_1 , R_k и S_k в предыдущей части данной работы (Соврем. мат. и ее прил., 2003, 2, С. 22-49), описывает эволюцию свободной границы в задаче о течении Хил-Шоу в случае, когда давление на свободной границе постоянно (условие Лейбензона).

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Постановка задачи. Формулировка теоремы	51
2.	Эволюция коэффициента деформации долготы	53
3.	Уравнение $2(t+t_0)[\mathbf{I}-\mathbf{K}(\beta)]\dot{\beta}=\mathbf{F}(\beta)$	56
4.	Проекции векторов $\mathbf{K}(\beta)\dot{\beta}$ и $\mathbf{F}(t,\beta)$ на базис в L^2	57
5.	Заключительная часть доказательства теоремы	63
	Список литературы	65

1. Постановка задачи. Формулировка теоремы

1.1. Напомним кратко исходную постановку задачи Стокса—Лейбензона для течения Хил-Шоу¹, отсылая за деталями к первой части этой работы (см. [1]). Ставится вопрос о качественных характеристиках, а также самом существовании *такой эволюции* плоской области $\Omega = \Omega_t$, для которой в момент $t \geqslant 0$ точка $\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t))$ ее границы $\Gamma = \Gamma_t$ движется со скоростью $\dot{\mathbf{s}} = (\dot{x}, \dot{y})$, определяемой кинематическим условием

$$\dot{\mathbf{s}} = \nabla u$$
 Ha Γ_t , $\nabla u = \partial_x u + \partial_y u$, (1)

где функция $u(t;\cdot,\cdot):\Omega_t \to \mathbb{R}$ — решение следующей задачи:

$$u_{xx} + u_{yy} = 2\delta(x, y)$$
 b Ω_t , $u = 0$ ha $\Gamma_t = \partial \Omega_t$. (2)

В этой работе дополнительно предполагается, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ограничена, односвязна и симметрична относительно оси Ox, а ее граница Γ_t непрерывно дифференцируема. Симметрия области Ω относительно оси Ox позволяет ограничиться поиском кривой

$$\Gamma_t^+ = \Gamma_t \cap \Omega_t^+, \qquad$$
 где $\Omega_t^+ = \{(x,y) \in \Omega_t \cap \mathbb{R}_+^2\}.$

 $^{^1}$ Так называется плоское безвихревое течение $\mathbb{R} \ni t \to \Omega_t \in \mathbb{R}^2$ пятна вязкой жидкости. Два типичных объекта таких течений: 1) нефть на спокойной глади воды или в срезе пористого грунта (нефтеносного пласта); 2) расплавленная масса в литейном производстве плоских изделий.

 $^{^2}$ Стокс показал [3], что скорость течения Хил-Шоу потенциальна: $\vec{V}=\nabla u$. Тем самым, функция u гармонична в области течения. Правая часть в уравнении (2) характеризует точечный источник внутри области Ω ($\delta(x,y)$ — это δ -функция Дирака). Лейбензон [2] предложил (в связи с задачей об эволюции контура нефтеносности) считать равной нулю вязкость среды, окружающей область Ω , что соответствует постоянству функции u (т.е. давления) на границе Γ области Ω .

Эта кривая, как нетрудно проверить [1], задается (для каждого $t \geqslant 0$) диффеоморфизмом

$$\left\{e^{i\pi v} \mid v \in]0,1[\right\} \ni e^{i\pi v} \mapsto x(t,v) + iy(t,v) \in \Gamma^+ = \Gamma_t^+, \tag{3}$$

где

$$x(t,v) = x(t,0) - \int_{0}^{v} e^{a(t,\eta)} \sin b(t,\eta) \, d\eta, \qquad y(t,v) = \int_{0}^{v} e^{a(t,\eta)} \cos b(t,\eta) \, d\eta. \tag{4}$$

Здесь $x(t,0) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{A(t,u,0)} \, du$, а

$$a(t,v) + ib(t,v) = A(t,0,v) + iB(t,0,v),$$
(5)

где A+iB — функция Гельмгольца—Кирхгофа, определяемая [1] (при каждом $t\geqslant 0$) в полуполосе $Q=\{u+iv\in\mathbb{C}\mid -\infty< u<0,\ 0< v<1\}$ по следующей формуле:

$$A(t, u, v) + iB(t, u, v) = \ln \left| \frac{\partial z(t; w)}{\partial w} \right| + i \arg \frac{\partial z(t; w)}{\partial w}, \quad z = x + iy \in \Omega \setminus \overline{\mathbb{R}}_{+}.$$
 (6)

1.2. Таким образом, задача (1)–(2) может быть переформулирована в терминах функций a и b. Они подчинены условию (5). Это условие означает, что функции a и b при каждом t являются следом при u=0 гармонически сопряженных в полуполосе Q функций A и B. Заметим, что $B(t,u,v)\equiv \pi v$, если (и только если) кривая Γ является окружностью $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=R_0>0\}$, центр которой совпадает с точкой z=0 (т.е. носителем источника, другими словами, носителем δ -функции в уравнении (2)). Учитывая это, представим функцию b в виде

$$b(t,v) = \pi v + \beta(t,v). \tag{7}$$

Заметим, что $\beta(t,0)=\beta(t,1)=0$ (в силу симметрии и дифференцируемости кривой Γ); разложим функцию $\beta(t,\cdot):[0,1]\ni v\mapsto \beta(t,v)$ в ряд Фурье

$$\beta(t,v) = \sum_{k \ge 1} \beta_k(t) \sin \pi kv \tag{8}$$

по ортобазису

$$e_k: [0,1] \ni v \mapsto \sin \pi k v, \quad k \in \mathbb{N},$$
 (9)

пространства $L^2(0,1)$.

Легко видеть, что те же коэффициенты Фурье $eta_k(t)$ определяют функцию

$$A(t, u, v) = a_0(t) + \pi u + \sum_{k \ge 1} \beta_k(t) e^{\pi k u} \cos \pi k v$$
 (10)

и функцию

$$a(t,v) = a_0(t) + \alpha(t,v),$$
 где $\alpha(t,v) = \sum_{k>1} \beta_k(t) \cos \pi k v.$ (11)

Действительно, приращение площади $|\Omega_t|=2|\Omega_t^+|$ области Ω_t за единицу времени равно

$$\int_{\Gamma} \dot{\mathbf{s}} \, d\Gamma \stackrel{\text{(1)}}{=} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\Gamma,$$

т.е. коэффициенту при δ -функции в уравнении (2). Другими словами,

$$\frac{d}{dt}|\Omega_t^+| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |\Omega_t^+| = t + t_0, \quad \text{где} \quad t_0 = |\Omega_0^+|. \tag{12}$$

В терминах функции Гельмгольца—Кирхгофа это условие принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{0}^{1} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{2A(t,u,v)} du \right) dv = 1, \tag{13}$$

поскольку якобиан отображения $w\mapsto z$ равен e^{2A} . Отсюда следует, что коэффициент $e^{a_0(t)}$ продольной деформации контура Γ определяется из уравнения (13). Поэтому он зависит¹ от $|\Omega_0|$ и коэффициентов Фурье $\beta_k(t)$.

Таким образом, искомая деформация начальной кривой Γ_0 полностью характеризуется эволюцией коэффициентов Фурье $\beta_k(\cdot)$.

В следующих разделах статьи доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.1. Искомая эволюция коэффициентов Фурье $\beta_k(\cdot)$ задается динамической системой вида

$$\begin{cases}
2(t+t_0)\Big(\beta_1\dot{\beta}_1 + r_1(\beta)\dot{\beta}\Big) &= \Big(-\beta_1^2 + 2\sum_{j\geqslant 2}\beta_j^2\Big) + s_1(\beta), \\
2(t+t_0)\Big(\dot{\beta}_k + R_k(\beta)\dot{\beta}\Big) &= -(k+2)\beta_k + S_k(\beta) \quad \text{ons} \quad k\geqslant 2,
\end{cases}$$
(16)

где

$$|r_1(\beta)\dot{\beta}| \leqslant C\|\beta\|_1^2\|\dot{\beta}\|_0, \qquad |s_1(\beta)| \leqslant C\|\beta\|_1^3, \qquad |R_k(\beta)\dot{\beta}| \leqslant C\|\beta\|_1\|\dot{\beta}\|_0, \qquad |S_k(\beta)| \leqslant C\|\beta\|_1^2,$$
(17)

a

$$\|\beta\|_1 = \max_t \sqrt{\sum_{k\geqslant 1} (k\beta_k(t))^2}, \qquad \|\dot{\beta}\|_0 = \max_t \sqrt{\sum_{k\geqslant 1} (\dot{\beta}_k(t))^2}.$$
 (18)

Замечание 1.1. Теорема 1.1 была анонсирована² в первой части [1] данной работы, где система (16)—(17) была изучена при достаточно малых значениях $\|\beta(0\cdot)\|_1$. В частности, доказано, что если

$$\sum_{k \ge 2} (k\beta_k(0))^2 \le \lambda^{1/2} |\beta_1(0)|^{3/2}, \quad 0 < |\beta_1(0)| \le \lambda \ll 1,$$

то задача Коши для системы (16) задает функцию

$$\beta(t, v) = \sum_{k>1} \beta_k(t) \sin \pi k v,$$

которая определена при всех (!) $t \geqslant 0$. При этом коэффициенты Фурье $\beta_k(t)$ (начиная с некоторого момента $t^* \geqslant 0$ почти монотонно) стремятся к нулю при $t \to \infty$.

2. Эволюция коэффициента деформации долготы

Обозначая штрихом оператор дифференцирования по v, отметим, прежде всего, что

$$\dot{\beta} - b'e^{-\alpha} \int_{0}^{v} e^{\alpha} \dot{\alpha} \, d\eta = e^{-2a_0} \left\{ e^{-2\alpha} \alpha' + b'e^{-\alpha} \left[\frac{\partial_t (e^{2a_0})}{2} \int_{0}^{v} e^{\alpha} \, d\eta - \int_{0}^{v} e^{-\alpha} b' \, d\eta \right] \right\},\tag{19}$$

$$e^{2a_0(t)} = 2\pi \left(|\Omega_0| + t \right) \implies \frac{d}{dt} e^{2a_0(t)} = 2\pi.$$
 (14)

Ниже (см. лемму 2.2) устанавливается аппроксимационная формула

$$\frac{d}{dt}e^{2a_0(t)} = 2\pi \left(1 - \sum_{k \geqslant 1} \frac{\beta_k^2 + 2(t+t_0)\beta_k \dot{\beta}_k}{k+1}\right) + \cdots, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}R_0^2, \tag{15}$$

в случае, когда Γ_0 мало отличается от окружности $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=R_0\}.$

 $^{^1}$ Если Γ_0 — окружность $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=R_0\}$, центр которой совпадает с точечным источником, то, как нетрудно проверить [1],

 $^{^2}$ Этот анонс имел дефект, так как вместо формулы (15) для $a_0(t)$ (см. лемму 2.2) была взята формула (14). На этот дефект внимание автора любезно обратил Г. Прокерт (Technische Universiteit Eindhoven, Faculty of Mathematics and Computing Science, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands). Впрочем, в обоих случаях соответствующие динамические системы, описывающие эволюцию коэффициентов Фурье $\beta_k(\cdot)$, имеют вид (16)–(17). Это следует из представленного ниже доказательства. Оказывается, что погрешность (она имеет 2-ой порядок малости), возникающая из-за аппроксимации функции $a_0(t)$ по формуле (14), не вносит изменений в формулы (16)–(17) (в том числе, и в первую строчку системы (16)).

поскольку, как показано в [1],

$$\dot{b}(t,v) = e^{-2a}a' + b'e^{-a} \int_{0}^{v} [e^{a}\dot{a} - e^{-a}b'] d\eta, \tag{20}$$

а $\dot{\beta}=\dot{b},~a'=\alpha',~\dot{a}=\dot{a}_0+\dot{\alpha}.$ Отметим также, что $b'=\pi+\beta'.$

Лемма 2.1. Пусть

$$X = 2\sum_{k\geqslant 1} \beta_k(t)e^{\pi ku}\cos \pi kv, \qquad Y = e^{2a_0}, \qquad Z = \left(\int_0^1 \int_{-\infty}^0 e^{2\pi u}e^X \, du \, dv\right). \tag{21}$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}[YZ] = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{Y}Z + Y\dot{Z} = 1 \quad \stackrel{\text{(12),(13)}}{\Longleftrightarrow} \quad YZ = t + t_0. \tag{22}$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{0}^{1} \left(\int_{-\infty}^{0} \partial_{t} e^{2A(t,u,v)} du \right) dv \stackrel{(13)}{=} 1, \qquad \partial_{t}(e^{2A}) = 2\dot{A}e^{2A}, \qquad \dot{A} \stackrel{(10)}{=} \dot{a}_{0} + \sum_{m \geqslant 1} \dot{\beta}_{m}(t)e^{\pi mu} \cos \pi mv. \tag{23}$$

Следовательно,

$$1 = 2\dot{a}_0(t)e^{2a_0} \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^0 e^{2\pi u} e^{X(t)} du \right) dv +$$

$$+2 \sum_{m\geqslant 1} \dot{\beta}_m(t)e^{2a_0} \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^0 e^{\pi(2+m)u} e^{X(t)} du \right) \cos \pi mv dv = \frac{\partial}{\partial t} \left[Y \left(\int_0^1 \int_{-\infty}^0 e^{2\pi u} e^X du dv \right) \right].$$

Заметим далее, что

$$Z = \int_{0}^{1} \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi u} \left[1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} e^{\theta X} \right] du \, dv, \quad 0 < \theta < 1.$$
 (24)

Кроме того,

$$\int_{0}^{1} \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi u} \, du \, dv = \frac{1}{2\pi},\tag{25}$$

$$\int_{0}^{1} \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi u} X \, du \, dv = 2 \sum_{k \geqslant 1} \beta_k(t) \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{0}^{1} \cos \pi k v \, dv \right] e^{2\pi u} e^{\pi k u} \, du = 0, \tag{26}$$

$$\frac{1}{2!} \int_{0}^{1} \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi u} X^{2} du dv = \sum_{j\geqslant 1} \sum_{k\geqslant 1} \beta_{j}(t) \beta_{k}(t) \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{0}^{1} 2\cos \pi j v \cos \pi k v dv \right] e^{2\pi u} e^{\pi(j+k)u} du =$$

$$= \sum_{j=k\geqslant 1} \beta_{k}^{2} \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi(k+1)u} du = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\geqslant 1} \frac{\beta_{k}^{2}}{k+1}, \tag{27}$$

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{0} e^{2\pi u} \left| \frac{X^{3}}{3!} \right| e^{\theta X} du dv \leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \frac{X^{3}}{3!} \right| e^{\theta X} \leqslant C \|\beta\|_{1}^{3}, \tag{28}$$

так как

$$|X| \le 2 \sum |\beta_k| \le 2 \sum \frac{|k\beta_k|}{k} \le C \|\beta\|_1$$
 и $e^{\theta X} \le 2$ если $\|\beta\|_1 \ll 1$. (29)

Отметим, что

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{\beta_k^2}{k+1} \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \beta_k^2 = \|\beta\|_0^2. \tag{30}$$

Следовательно (с учетом условия $\|\beta\|_1 \ll 1$), имеем

$$Z = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{\beta_k^2}{k+1} + \mathbf{s}(\beta) \right\}, \qquad Z^{-1} = 2\pi \left\{ 1 - \sum_{k \geqslant 1} \frac{\beta_k^2}{k+1} + \mathbf{s}(\beta) \right\}, \tag{31}$$

где через $\mathbf{s}: \beta \mapsto \mathbf{s}(\beta)$ обозначен (здесь и ниже) такой оператор, что (при $\|\beta\|_1 \ll 1$)

$$|\mathbf{s}(\beta)| \leqslant C \|\beta\|_1^3, \quad \text{где} \quad 0 < C < \infty. \tag{32}$$

Далее,

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \int_{0}^{1} \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi u} \dot{X} e^{X} \, du \, dv = \int_{0}^{1} \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi u} \left[\dot{X} + \dot{X} X + \dot{X} \frac{X^{2}}{2!} e^{\theta X} \right] du \, dv. \tag{33}$$

При этом (ср. с (26)–(28)),

$$\int_{0}^{1} \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi u} \dot{X} \, du \, dv = 2 \sum_{k \geqslant 1} \dot{\beta}_{k}(t) \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{0}^{1} \cos \pi k v \, dv \right] e^{2\pi u} e^{\pi k u} \, du = 0, \tag{34}$$

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{0} e^{2\pi u} \dot{X} X \, du \, dv = \frac{1}{\pi} \sum_{k \ge 1} \frac{\dot{\beta}_k \beta_k}{k+1},\tag{35}$$

$$\int_{0}^{1} \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi u} \dot{X} \frac{X^{2}}{2!} e^{\theta X} du dv \leqslant C \|\beta\|_{1}^{2} \sum_{k=\infty}^{\infty} \dot{\beta}_{k} \int_{-\infty}^{0} e^{(2+k)\pi u} du \leqslant C \|\beta\|_{1}^{2} \sum_{k\geqslant 1} \frac{\dot{\beta}_{k}}{k+2} \leqslant C \|\beta\|_{1}^{2} \|\dot{\beta}\|_{0}.$$
 (36)

Таким образом,

$$\dot{Z} = \frac{1}{\pi} \sum_{k>1} \frac{\beta_k \dot{\beta}_k}{k+1} + \mathbf{r}(\beta) \dot{\beta}, \tag{37}$$

где через $\mathbf{r}(\beta): \varphi \mapsto \mathbf{r}(\beta) \varphi$ обозначен (здесь и ниже) такой оператор, что (при $\|\beta\|_1 \ll 1$)

$$|\mathbf{r}(\beta)\varphi| \leqslant C\|\beta\|_1^2\|\varphi\|_0$$
, где $0 < C < \infty$. (38)

Заметим, что

$$\left| \frac{1}{\pi} \sum_{k \ge 1} \frac{\beta_k \dot{\beta}_k}{k+1} \right| \le \left| \sum_{k \ge 1} \beta_k \dot{\beta}_k \right| \le \left(\sum \beta_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum \dot{\beta}_k^2 \right)^{1/2} = \|\beta\|_0 \|\dot{\beta}\|_0. \tag{39}$$

Кроме того,

$$Y \stackrel{\text{(22)}}{=} (t+t_0)(Z)^{-1} \stackrel{\text{(31)}}{=} 2\pi(t+t_0) \left\{ 1 - \sum_{k>1} \frac{\beta_k^2}{k+1} + \mathbf{s}(\beta) \right\}. \tag{40}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что $t \leqslant \text{const.}$

Лемма 2.2.

$$\dot{Y} = 2\pi \left(1 - \sum_{k \geqslant 1} \frac{\beta_k^2 + 2(t+t_0)\beta_k \dot{\beta}_k}{k+1} \right) + \mathbf{s}(\beta) + \mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}. \tag{41}$$

Доказательство.

$$\dot{Y} \stackrel{(22)}{=} (Z)^{-1} \{1 - Y\dot{Z}\} \stackrel{(31),(37),(40)}{=}$$

$$= 2\pi \left(1 - \sum_{k \geqslant 1} \frac{\beta_k^2}{k+1} + \mathbf{s}(\beta)\right) \left\{1 - \left[2\pi(t+t_0)\left(1 - \sum_{k \geqslant 1} \frac{\beta_k^2}{k+1} + \mathbf{s}(\beta)\right)\right] \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k \geqslant 1} \frac{\dot{\beta}_k \beta_k}{k+1} + \mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}\right)\right\} =$$

$$= 2\pi \left(1 - \sum_{k \geqslant 1} \frac{\beta_k^2}{k+1} + \mathbf{s}(\beta)\right) - 4\pi(t+t_0) \left(1 - \sum_{k \geqslant 1} \frac{\beta_k^2}{k+1} + \mathbf{s}(\beta)\right)^2 \left(\sum_{k \geqslant 1} \frac{\beta_k \dot{\beta}_k}{k+1} + \mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}\right) =$$

$$= 2\pi \left(1 - \sum_{k \geqslant 1} \frac{\beta_k^2}{k+1}\right) - 4\pi(t+t_0) \sum_{k \geqslant 1} \frac{\beta_k \dot{\beta}_k}{k+1} + \mathbf{s}(\beta) + \mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}.$$

Поэтому

$$\frac{\dot{Y}}{Y} \stackrel{(40)-(41)}{=} \frac{1}{t+t_0} \left[1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{\beta_k \dot{\beta}_k}{k+1} + \mathbf{s}(\beta) \right] \cdot \left[1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{\beta_k^2 + 2(t+t_0)\beta_k \dot{\beta}_k}{k+1} + \mathbf{s}(\beta) + \mathbf{r}(\beta) \dot{\beta} \right] =
= \frac{1}{t+t_0} \left(1 + 2(t+t_0) \sum_{k\geqslant 1} \frac{\beta_k \dot{\beta}_k}{k+1} + \mathbf{s}(\beta) + \mathbf{r}(\beta) \dot{\beta} \right).$$
(42)

3. Уравнение
$$2(t+t_0)[\mathbf{I}-\mathbf{K}(\beta)]\dot{\beta}=\mathbf{F}(\beta)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.1. Уравнение (19) представимо в виде

$$\dot{\beta} - \mathbf{K}(\beta)\dot{\beta} = \frac{1}{2(t+t_0)}\mathbf{F}(\beta),\tag{43}$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1$, а

$$[\mathbf{K}_0(\beta)\dot{\beta}](t,v) = b'(t,v)e^{-\alpha(t,v)} \int_0^v e^{\alpha(t,\eta)}\dot{\alpha}(t,\eta) \,d\eta,\tag{44}$$

$$[\mathbf{K}_1(\beta)\dot{\beta}](t,v) = \left(\sum_{j\geqslant 1} \frac{2\beta_j \dot{\beta}_j}{j+1}\right) \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \pi k v + [\mathbf{r}_1(\beta)\dot{\beta}](t,v),\tag{45}$$

$$[\mathbf{F}_0(\beta)](t,v) = \frac{1}{\pi} \left\{ e^{-2\alpha}\alpha' - b'e^{-\alpha} \int_0^v e^{-\alpha}b' \, d\eta + \pi b'e^{-\alpha} \int_0^v e^{\alpha} \, d\eta \right\},\tag{46}$$

$$[\mathbf{F}_1(\beta)](t,v) = \left(\sum_{j\geq 1} \frac{2\beta_j^2}{j+1}\right) \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \pi k v + [\mathbf{s}_1(\beta)](t,v). \tag{47}$$

Кроме того,

$$|\mathbf{r}_1(\beta)\dot{\beta}| \leqslant C\|\beta\|_1^2\|\beta\|_0, \qquad |\mathbf{s}_1(\beta)| \leqslant C\|\beta\|_1^3.$$
 (48)

Доказательство. Правая часть уравнения (19) эквивалентна (см. (21))

$$Y^{-1} \left\{ e^{-2\alpha} \alpha' + b' e^{-\alpha} \left[\frac{\dot{Y}}{2} \int_{0}^{v} e^{\alpha} d\eta - \int_{0}^{v} e^{-\alpha} b' d\eta \right] \right\} \stackrel{\text{(40)},(42)}{=}$$

$$\stackrel{\text{(40)},(42)}{=} \frac{1}{2\pi (t + t_0)} \left(1 + \sum_{j \geqslant 1} \frac{\beta_j^2}{j+1} + \mathbf{s}(\beta) \right) \left(e^{-2\alpha} \alpha' - b' e^{-\alpha} \int_{0}^{v} e^{-\alpha} b' d\eta \right) +$$

$$+ \frac{\pi b' e^{-\alpha}}{2\pi (t+t_0)} \left(1 + 2(t+t_0) \sum_{k\geqslant 1} \frac{\beta_k \dot{\beta}_k}{k+1} + \mathbf{s}(\beta) + \mathbf{r}(\beta) \dot{\beta} \right) \int_0^v e^{\alpha} d\eta =$$

$$= \frac{\left\{ e^{-2\alpha} \alpha' - b' e^{-\alpha} \int_0^v e^{-\alpha} b' d\eta + \pi b' e^{-\alpha} \int_0^v e^{\alpha} d\eta \right\} + \mathbf{f}_1(\beta)}{2\pi (t+t_0)} + \mathbf{k}_1(\beta) \dot{\beta},$$

где (см. (32), (38))

$$\mathbf{f}_{1}(\beta) = \left(\sum_{j \geqslant 1} \frac{\beta_{j}^{2}}{j+1} + \mathbf{s}(\beta)\right) \left(e^{-2\alpha}\alpha' - b'e^{-\alpha}\int_{0}^{v} e^{-\alpha}b' d\eta\right) + \left(\pi b'e^{-\alpha}\int_{0}^{v} e^{\alpha} d\eta\right) \mathbf{s}(\beta) =$$

$$= \pi \left(\sum_{j \geqslant 1} \frac{2\beta_{j}^{2}}{j+1}\right) \frac{\pi}{2}v + \mathbf{s}(\beta) = \pi \left(\sum_{j \geqslant 1} \frac{2\beta_{j}^{2}}{j+1}\right) \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \pi kv + \mathbf{s}(\beta)$$

И

$$\mathbf{k}_1(\beta)\dot{\beta} = \left(b'e^{-\alpha}\int_0^v e^{\alpha}\,d\eta\right)\left(\sum_{j\geqslant 1}\frac{\beta_j\dot{\beta}_j}{j+1} + \mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}\right) = \frac{\pi}{2}v\sum_{j\geqslant 1}\frac{2\beta_j\dot{\beta}_j}{j+1} + \mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}.$$

4. Проекции векторов $\mathbf{K}(\beta)\dot{\beta}$ и $\mathbf{F}(t,\beta)$ на базис в L^2

Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в $L^2(0,1)$. Рассмотрим систему проекций

$$\langle 2(t+t_0)[\mathbf{I} - \mathbf{K}(\beta)]\dot{\beta} - \mathbf{F}(t,\beta), e_k \rangle = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$
(49)

уравнения (43) на базисные векторы (9). Другими словами, речь идет о системе уравнений для коэффициентов Фурье $\beta_j(\cdot)$ решения $\beta(\cdot,\cdot) = \sum_{j \ge 1} \beta_j(\cdot) e_k(\cdot)$.

Предложение 4.1. Имеем

$$\mathbf{K}_{0}(\beta)\dot{\beta} = \pi \int_{0}^{v} \dot{\alpha} + \mathbf{R}_{0}(\beta)\dot{\beta} = \pi(1-\alpha) \int_{0}^{v} \dot{\alpha} + \pi \int_{0}^{v} \alpha \dot{\alpha} + \beta' \int_{0}^{v} \dot{\alpha} + \mathbf{r}_{0}(\beta)\dot{\beta}. \tag{50}$$

Здесь

$$\mathbf{R}_{0}(\beta)\dot{\beta} = -\pi\alpha \int_{0}^{v} \dot{\alpha} + \pi \int_{0}^{v} \alpha \dot{\alpha} + \beta' \int_{0}^{v} \dot{\alpha} + \mathbf{r}_{0}(\beta)\dot{\beta}, \tag{51}$$

а

$$\mathbf{r}_{0}(\beta)\dot{\beta} = \beta' \left\{ \int_{0}^{v} (e^{\alpha} - 1)\dot{\alpha} + (e^{-\alpha} - 1) \int_{0}^{v} e^{\alpha}\dot{\alpha} \right\} +$$

$$+\pi \left\{ -\alpha \int_{0}^{v} \alpha \dot{\alpha} + (1 - \alpha) \int_{0}^{v} [e^{\alpha} - (1 + \alpha)]\dot{\alpha} + e(p_{1}) \int_{0}^{v} e^{\alpha}\dot{\alpha} \right\},$$

$$(52)$$

где

$$e(p_k) = e^{-\alpha} - p_k, \qquad p_1 = 1 - \alpha, \qquad p_2 = p_1 + \frac{\alpha^2}{2}.$$
 (53)

 Π ри этом 1

$$|\mathbf{R}_{0}(\beta)\dot{\beta}| \leq C\|\beta\|_{1}\|\beta\|_{0}, \qquad |\mathbf{r}_{0}(\beta)\dot{\beta}| \leq C\|\beta\|_{1}^{2}\|\beta\|_{0}.$$
 (54)

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{0}(\beta)\dot{\beta} &\stackrel{(44)}{=} \pi[1 + (e^{-\alpha} - 1)] \int_{0}^{v} [1 + (e^{\alpha} - 1)]\dot{\alpha} + \beta'e^{-\alpha} \int_{0}^{v} e^{\alpha}\dot{\alpha} &\stackrel{(53)}{=} \\ &\stackrel{(53)}{=} \pi[p_{1} + e(p_{1})] \int_{0}^{v} \{(1 + \alpha) + [e^{\alpha} - (1 + \alpha)]\}\dot{\alpha} + \beta'[1 + (e^{-\alpha} - 1)] \int_{0}^{v} [1 + (e^{\alpha} - 1)]\dot{\alpha} = \\ &= \pi \left[(1 - \alpha) \int_{0}^{v} (1 + \alpha)\dot{\alpha} + \alpha \int_{0}^{v} \alpha\dot{\alpha} \right]_{1} + \pi \left\{ -\alpha \int_{0}^{v} \alpha\dot{\alpha} + p_{1} \int_{0}^{v} [e^{\alpha} - (1 + \alpha)]\dot{\alpha} + e(p_{1}) \int_{0}^{v} e^{\alpha}\dot{\alpha} \right\}_{1} + \\ &+ \beta' \left[\int_{0}^{v} \dot{\alpha} \right]_{2} + \beta' \left\{ \int_{0}^{v} (e^{\alpha} - 1)\dot{\alpha} + (e^{-\alpha} - 1) \int_{0}^{v} e^{\alpha}\dot{\alpha} \right\}_{2} = \left[\pi \left(\int_{0}^{v} \dot{\alpha} - \alpha \int_{0}^{v} \dot{\alpha} + \int_{0}^{v} \alpha\dot{\alpha} \right) + \beta' \int_{0}^{v} \dot{\alpha} \right] + \\ &+ \left\{ \pi \left(-\alpha \int_{0}^{v} \alpha\dot{\alpha} + p_{1} \int_{0}^{v} [e^{\alpha} - (1 + \alpha)]\dot{\alpha} + e(p_{1}) \int_{0}^{v} e^{\alpha}\dot{\alpha} \right) + \beta' \left(\int_{0}^{v} (e^{\alpha} - 1)\dot{\alpha} + (e^{-\alpha} - 1) \int_{0}^{v} e^{\alpha}\dot{\alpha} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Следствие 4.1.

$$\left\langle \mathbf{K}_{0}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_{1}}{2} \right\rangle = \left(\dot{\beta}_{1} + \beta_{1}\dot{\beta}_{1} + \sum_{j \geq 2} \left[\beta_{j} + \frac{j-1}{j} \beta_{j-1} \right] \dot{\beta}_{j} \right) + \left\langle \mathbf{r}_{0}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_{1}}{2} \right\rangle, \tag{55}$$

$$\left\langle \mathbf{K}_{0}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_{k}}{2} \right\rangle = \frac{\dot{\beta}_{k}}{k} + \left\langle \mathbf{R}_{0}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_{k}}{2} \right\rangle \quad \partial \mathcal{M} \quad k \geqslant 2.$$
 (56)

Доказательство. Сначала отметим, что $\langle e_k, e_j \rangle = 2 \delta_j^k$. Далее,

$$\mathbf{K}_{0}(\beta)\dot{\beta} - \mathbf{r}_{0}(\beta)\dot{\beta} \stackrel{(50)}{=} \pi \int_{0}^{v} \dot{\alpha} + (\beta' - \pi\alpha) \int_{0}^{v} \dot{\alpha} + \pi \int_{0}^{v} \alpha \dot{\alpha} =$$

$$= \pi \sum_{k \geqslant 1} \int_{0}^{v} \dot{\beta}_{k} \cos \pi k \eta \, d\eta + \sum_{m \geqslant 1} \sum_{l \geqslant 1} \frac{m-1}{2l} \beta_{m} \dot{\beta}_{l} [2 \cos \pi m v \sin \pi l v] +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \sum_{m,l \geqslant 1} \int_{0}^{v} \beta_{m} \dot{\beta}_{l} [\cos \pi (m+l) \eta + \cos \pi (m-l) \eta] \, d\eta =$$

$$= \sum_{k \geqslant 1} \frac{\dot{\beta}_{k}}{k} \sin \pi k v + \sum_{m,l \geqslant 1} \frac{m-1}{2l} \beta_{m} \dot{\beta}_{l} [\sin \pi (m+l) v - \sin \pi (m-l) v] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\sum_{m,l \geqslant 1} \frac{\beta_{m} \dot{\beta}_{l}}{m+l} \sin \pi (m+l) v + \pi v \sum_{j \geqslant 1} \beta_{j} \dot{\beta}_{j} + \sum_{m,l \geqslant 1; m \neq l} \frac{\beta_{m} \dot{\beta}_{l}}{m-l} \sin \pi (m-l) v \right) =$$

$$\mathbf{R}_0(\beta)\dot{\beta} \stackrel{(51),(52)}{=} \pi \left[\int_0^v (e^{\alpha} - 1)\dot{\alpha} + (e^{-\alpha} - 1) \int_0^v e^{\alpha}\dot{\alpha} \right] + \beta' e^{-\alpha} \int_0^v e^{\alpha}\dot{\alpha}.$$

 $^{^{1}}$ Отметим, что

$$= \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k} \left[\dot{\beta}_k + (-1)^{k-1} \sum_{j \geqslant 1} \beta_j \dot{\beta}_j \right] \sin \pi k v + \mathbf{S}^{(+)} + \mathbf{S}^{(-)},$$

где

$$\mathbf{S}^{(+)} = \sum_{m,l \geqslant 1} \left[\frac{1}{2(m+l)} + \frac{m-1}{2l} \right] \beta_m \dot{\beta}_l \sin \pi (m+l) v = \sum_{k \geqslant 2} \sum_{m=1}^{k-1} \left[\frac{1}{2k} + \frac{m-1}{2(k-m)} \right] \beta_m \dot{\beta}_{k-m} \sin \pi k v$$

И

$$\mathbf{S}^{(-)} = \sum_{m,l\geqslant 1; m\neq l} \left[\frac{1}{2(m-l)} - \frac{m-1}{2l} \right] \beta_m \dot{\beta}_l \sin \pi (m-l) v =$$

$$= \sum_{m>l\geqslant 1} \left[\left(\frac{1}{2(m-l)} - \frac{m-1}{2l} \right) \beta_m \dot{\beta}_l - \left(\frac{1}{2(l-m)} - \frac{l-1}{2m} \right) \beta_l \dot{\beta}_m \right] \sin \pi (m-l) v \stackrel{m-l=k}{=}$$

$$\stackrel{m-l=k}{=} \sum_{k,l\geqslant 1} \left[\left(\frac{1}{2k} - \frac{k+l-1}{2l} \right) \beta_{k+l} \dot{\beta}_l + \left(\frac{1}{2k} + \frac{l-1}{2(k+l)} \right) \beta_l \dot{\beta}_{k+l} \right] \sin \pi k v.$$

Предложение 4.2.

$$\mathbf{F}_0(\beta) = \mathbf{G}_0(\beta) + \mathbf{S}_0(\beta) = \mathbf{g}_0(\beta) + \mathbf{s}_0(\beta). \tag{57}$$

Здесь

$$\mathbf{G}_0(\beta) = \frac{\alpha'}{\pi} + \left(2\pi \int_0^v \alpha \, d\eta\right) - \beta,\tag{58}$$

$$\mathbf{g}_{0}(\beta) = \mathbf{G}_{0}(\beta) - \frac{2\alpha'\alpha}{\pi} - 2\pi\alpha \int_{0}^{v} \alpha + 2\beta' \int_{0}^{v} \alpha + \alpha\beta + \int_{0}^{v} \alpha\beta' - \frac{\beta'\beta}{\pi}, \tag{59}$$

а (см. (53))

$$\mathbf{s}_{0}(\beta) = \frac{\alpha'}{\pi} \left\{ e^{-2\alpha} - (1 - 2\alpha) \right\} + \pi \left\{ \alpha^{2} \int_{0}^{v} \alpha + 2p_{2} \int_{0}^{v} (\operatorname{sh} \alpha - \alpha) + 2e(p_{2}) \int_{0}^{v} \operatorname{sh} \alpha \right\} + 2\beta' \left\{ -\alpha \int_{0}^{v} \alpha + p_{1} \int_{0}^{v} (\operatorname{sh} \alpha - \alpha) + e(p_{1}) \int_{0}^{v} \operatorname{sh} \alpha \right\} - \left\{ \alpha \int_{0}^{v} \alpha \beta' + p_{1} \int_{0}^{v} e(p_{1})\beta' + e(p_{1}) \int_{0}^{v} e^{-\alpha}\beta' \right\} - \frac{\beta'}{\pi} \left\{ \int_{0}^{v} (e^{-\alpha} - 1)\beta' + (e^{-\alpha} - 1) \int_{0}^{v} e^{-\alpha}\beta' \right\}.$$
 (60)

При этом

$$|\mathbf{S}_0(\beta)| \le C \|\beta\|_1^2, \qquad |\mathbf{s}_0(\beta)| \le C \|\beta\|_1^3.$$
 (61)

Доказательство. 1 Имеем

$$\mathbf{F}_0(\beta) \stackrel{\text{(46)}}{=} \frac{\alpha'}{\pi} ((1 - 2\alpha) + [e^{-2\alpha} - (1 - 2\alpha)])_1 -$$

$$\mathbf{S}_{0}(\beta) \stackrel{(57),(59)}{=} \left(\mathbf{G}_{0}(\beta) - \mathbf{g}_{0}(\beta)\right) + \mathbf{s}_{0}(\beta) = \frac{\alpha'}{\pi} \left\{ e^{-2\alpha} - 1 \right\} + 2\pi \left\{ \int_{0}^{v} (\operatorname{sh} \alpha - \alpha) + (e^{-\alpha} - 1) \int_{0}^{v} \operatorname{sh} \alpha \right\} + 2\beta' \left\{ e^{-\alpha} \int_{0}^{v} \operatorname{sh} \alpha \right\} - \left\{ \int_{0}^{v} (e^{-\alpha} - 1)\beta' + (e^{-\alpha} - 1) \int_{0}^{v} e^{-\alpha}\beta' \right\} - \frac{\beta' e^{-\alpha}}{\pi} \int_{0}^{v} e^{-\alpha}\beta'.$$

Г. Прокерт любезно обратил внимание автора на то, что в [1] эта формула была (по вине автора) напечатана с опечат-ками:

¹Отметим, что

$$-\left(\pi\Big\{\Big(1-\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\Big)+\Big[e^{-\alpha}-\Big(1-\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\Big)\Big]\Big\}\int_0^v\Big\{\Big(1-\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\Big)+\Big[e^{-\alpha}-\Big(1-\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\Big)\Big]\Big\}\Big)_2^v - \left(\beta'\{(1-\alpha)+[e^{-\alpha}-(1-\alpha)]\}\right)\int_0^v\{(1-\alpha)+[e^{-\alpha}-(1-\alpha)]\}\Big)_3^v - \left(\{(1-\alpha)+[e^{-\alpha}-(1-\alpha)]\}\int_0^v\{(1-\alpha)+[e^{-\alpha}-(1-\alpha)]\}\beta'\Big)_4 - \frac{1}{\pi}\Big(\beta'\{1+(e^{-\alpha}-1)\}\Big)\int_0^v\{(1-\alpha)+[e^{-\alpha}-(1-\alpha)]\}\beta'\Big)_4 - \frac{1}{\pi}\Big(\beta'\{1+(e^{-\alpha}-1)\}\Big)\int_0^v\{(1+\alpha)+[e^{-\alpha}-(1-\alpha)]\}\beta'\Big)_5 + \left(\pi\Big\{\Big(1-\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\Big)+\Big[e^{-\alpha}-\Big(1-\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\Big)\Big]\Big\}\Big)\int_0^v\{(1+\alpha)+[e^{\alpha}-(1+\alpha)]\}\Big)\Big\}_6 + \left(\beta'\{(1-\alpha)+[e^{-\alpha}-(1-\alpha)]\}\Big)\int_0^v\{(1+\alpha)+[e^{\alpha}-(1+\alpha)]\}\Big)\Big\}_7 - \frac{\alpha'}{\pi}\Big\{(1-\alpha)+\Big[e^{-\alpha}-(1-\alpha)]\Big\}\Big\}\Big\}_7 - \frac{\alpha'}{\pi}\Big\{(1-\alpha)+\frac{\alpha^2}{2}\Big\}\Big\Big\}\int_0^v\Big\{(1-\alpha)+\Big[e^{-\alpha}-(1-\alpha)]\Big\}\Big\}\Big\}\Big\}_7 - \frac{\alpha'}{\pi}\Big\{(1-\alpha)+\frac{\alpha'}{2}\Big\}\Big\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\int_0^v\Big\{(1-\alpha)+\Big[e^{-\alpha}-(1-\alpha)]\Big\}\Big\}\Big\}\Big\}\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\{(1-\alpha)\Big\}\Big\}\Big\{(1-\alpha)$$

$$\begin{split} &=\frac{\alpha'}{\pi}[1-2\alpha]_1 + \left\{\frac{\alpha'}{\pi}[e^{-2\alpha}-(1-2\alpha)]\right\}_1 - \pi\left[(1-\alpha)\int\limits_0^v (1-\alpha) + v\frac{\alpha^2}{2} + \int\limits_0^v \frac{\alpha^2}{2}\right]_2 - \\ &-\pi\left\{-\alpha\int\limits_0^v \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\int\limits_0^v \left(-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) + \\ &+\left(1-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right)\int\limits_0^v \left[e^{-\alpha} - \left(1-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right)\right] + \left[e^{-\alpha} - \left(1-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right)\right]\int\limits_0^v e^{-\alpha}\right\}_2 - \\ &-\beta'\left[(1-\alpha)v - \int\limits_0^v \alpha\right]_3 - \beta'\left\{\alpha\int\limits_0^v \alpha + (1-\alpha)\int\limits_0^v \left[e^{-\alpha}-(1-\alpha)\right] + \left[e^{-\alpha}-(1-\alpha)\right]\int\limits_0^v e^{-\alpha}\right\}_3 - \\ &-\left[(1-\alpha)\beta - \int\limits_0^v \alpha\beta'\right]_4 - \left\{\alpha\int\limits_0^v \alpha\beta' + (1-\alpha)\int\limits_0^v \left[e^{-\alpha}-(1-\alpha)\right]\beta' + \left[e^{-\alpha}-(1-\alpha)\right]\int\limits_0^v e^{-\alpha}\beta'\right\}_4 - \\ &-\frac{1}{\pi}\left[\beta'\int\limits_0^v \beta'\right]_5 - \frac{\beta'}{\pi}\left\{\int\limits_0^v \left(e^{-\alpha}-1\right)\beta' + \left(e^{-\alpha}-1\right)\int\limits_0^v e^{-\alpha}\beta'\right\}_5 + \\ &+\pi\left[(1-\alpha)\int\limits_0^v (1+\alpha) + v\frac{\alpha^2}{2} + \int\limits_0^v \frac{\alpha^2}{2}\right]_0 + \pi\left\{-\alpha\int\limits_0^v \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\int\limits_0^v \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) + \\ &+\left(1-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right)\int\limits_0^v \left[e^{\alpha}-\left(1+\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right)\right] + \left[e^{-\alpha}-\left(1-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right)\right]\int\limits_0^v e^{\alpha}\right\}_6 + \\ &+\beta'\left[(1-\alpha)v + \int\limits_0^v \alpha\right]_7 + \beta'\left\{-\alpha\int\limits_0^v \alpha + (1-\alpha)\int\limits_0^v \left[e^{\alpha}-(1+\alpha)\right] + \left[e^{-\alpha}-(1-\alpha)\right]\int\limits_0^v e^{\alpha}\right\}_7 \\ \stackrel{(53)}{=}\left[\frac{\alpha'}{\pi}(1-2\alpha)_1 - \pi\left((1-\alpha)\int\limits_0^v (1-\alpha) + v\frac{\alpha^2}{2} + \int\limits_0^v \frac{\alpha^2}{2}\right)_2 - \beta'\left((1-\alpha)v - \int\limits_0^v \alpha\right)_3 - \\ &-\left((1-\alpha)\beta - \int\limits_0^v \alpha\beta'\right)_4 - \frac{1}{\pi}\left(\beta'\int\limits_0^v \beta'\right)_5 + \pi\left((1-\alpha)\int\limits_0^v (1+\alpha) + v\frac{\alpha^2}{2} + \int\limits_0^v \frac{\alpha^2}{2}\right)_6 + \\ &+\beta'\left((1-\alpha)v + \int\limits_0^v \alpha\right)_7\right] + \left\{\frac{\alpha'}{\pi}\left(e^{-2\alpha}-(1-2\alpha)\right)_1 + \\ &+\pi\left(-\alpha\int\limits_0^v \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\int\limits_0^v \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) + p_2\int\limits_0^v \left[e^{\alpha}-\left(1+\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right)\right] + e(p_2)\int\limits_0^v e^{\alpha}\right)_6 - \\ &-\pi\left(-\alpha\int\limits_0^v \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\int\limits_0^v \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) + p_2\int\limits_0^v \left[e^{\alpha}-\left(1+\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right)\right] + e(p_2)\int\limits_0^v e^{\alpha}\right)_7 - \\ &-\beta'\left(\alpha\int\limits_0^v \alpha + p_1\int\limits_0^v \left[e^{\alpha}-(1+\alpha)\right] + e(p_1)\int\limits_0^v e^{\alpha}\right)_3 - \\ &-\beta'\left(\alpha\int\limits_0^v \alpha + p_1\int\limits_0^v \left[e^{\alpha}-(1+\alpha)\right] + e(p_1)\int\limits_0^v e^{\alpha}\right)_7 - \\ &-\beta'\left(\alpha\int\limits_0^v \alpha + p_1\int\limits_0^v \left[e^{\alpha}-(1+\alpha)\right] + e(p_1)\int\limits_0^v e^{\alpha}\right)_7 - \\ &-\beta'\left(\alpha\int\limits_0^v \alpha + p_1\int\limits_0^v \left[e^{\alpha}-(1+\alpha)\right] + e(p_1)\int\limits_0^v e^{\alpha}\right)_3 - \\ &-\beta'\left(\alpha\int\limits_0^v \alpha + p_1\int\limits_0^v \left[e^{\alpha}-(1+\alpha)\right] + e(p_1)\int\limits_0^v e^{\alpha}\right)_3 - \\ &-\beta'\left(\alpha\int\limits_0^v \alpha + p_1\int\limits_0^v \left[e^{\alpha}-(1+\alpha)\right] + e(p_1)\int\limits_0^v e^{\alpha}\right)_3 - \\ &-\beta'\left(\alpha\int\limits_0^v \alpha + p_1\int\limits_0^v \left[e^{\alpha}-(1+\alpha)\right] + e(p_1)\int\limits_0^v e^$$

$$-\left(\alpha \int_{0}^{v} \alpha \beta' + p_{1} \int_{0}^{v} e(p_{1})\beta' + e(p_{1}) \int_{0}^{v} e^{-\alpha} \beta'\right)_{4} - \frac{\beta'}{\pi} \left(\int_{0}^{v} (e^{-\alpha} - 1)\beta' + (e^{-\alpha} - 1) \int_{0}^{v} e^{-\alpha} \beta'\right)_{5}.$$

Следствие 4.2.

$$\left\langle \mathbf{F}_0(\beta), \frac{e_1}{2} \right\rangle = \sum_{j \ge 1} \left[j\beta_j^2 + \frac{j^2 + 3j}{j+1} \beta_j \beta_{j+1} \right] + \left\langle \mathbf{s}_0(\beta), \frac{e_1}{2} \right\rangle, \tag{62}$$

$$\left\langle \mathbf{F}_0(\beta), \frac{e_k}{2} \right\rangle = -\frac{(k-1)(k+2)}{k} \beta_k + \left\langle \mathbf{S}_0(\beta), \frac{e_k}{2} \right\rangle \quad \partial \mathcal{M} \quad k \geqslant 2. \tag{63}$$

 $extit{Доказательство}.$ Имеем $\mathbf{F}_0(eta)\stackrel{(57)}{=}\mathbf{G}_0(eta)+\mathbf{S}_0(eta)=\mathbf{g}_0(eta)+\mathbf{s}_0(eta)$, где

$$\mathbf{g}_{0}(\beta) \stackrel{(59)}{=} \left[\frac{\alpha'}{\pi} - \frac{2\alpha'\alpha}{\pi} \right]_{1} + 2\pi \left[\int_{0}^{v} \alpha - \alpha \int_{0}^{v} \alpha \right]_{2,6} + 2\beta' \left[\int_{0}^{v} \alpha \right]_{3,7} + \left[\alpha\beta - \beta + \int_{0}^{v} \alpha\beta' \right]_{4} - \left[\frac{\beta'\beta}{\pi} \right]_{5} \stackrel{(8),(11)}{=} - \sum_{k\geqslant 1} k\beta_{k} \sin \pi k v + \left[\sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} l\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{k\geqslant 1} \frac{2}{k}\beta_{k} \sin \pi k v - \left[\sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] - \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \left[\sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] - \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \left[\sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] \right] - \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \left[\sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] - \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \left[\sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] \right] - \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \left[\sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] \right] + \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] - \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{k\geqslant 1} \beta_{k} \sin \pi k v + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{l}\beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\sin \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\cos \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\cos \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\cos \pi l v \cos \pi m v] + \sum_{l\geqslant 1} \beta_{l}\beta_{m} [2\cos \pi l v \cos$$

$$+\sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{1}{2} \beta_l \beta_m [2\sin\pi lv\cos\pi mv] + \frac{\pi}{2} \int_0^v \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} l\beta_l \beta_m (2\cos\pi l\eta\cos\pi m\eta) \,d\eta + \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{m}{l} \beta_l \beta_m [2\sin\pi lv\cos\pi mv] - \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1} \frac{m}{2} \beta_l \beta_m [2\sin\pi lv\cos\pi mv] =$$

$$+\sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1}\frac{m}{l}\beta_{l}\beta_{m}[2\sin\pi lv\cos\pi mv] - \sum_{l\geqslant 1,m\geqslant 1}\frac{m}{2}\beta_{l}\beta_{m}[2\sin\pi lv\cos\pi mv]$$

$$= -\sum_{k\geqslant 1} \left(k + 1 - \frac{2}{k}\right) \beta_k \sin \pi k v +$$

$$+ \sum_{l\geqslant 1, m\geqslant 1} \left[l - \frac{1}{l} + \frac{1}{2} + \frac{m}{l} - \frac{m}{2}\right] \beta_l \beta_m \left(\sin \pi (l+m)v + \sin \pi (l-m)v\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{2} v \sum_{r\geqslant 1} n \beta_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{l\geqslant 1, m\geqslant 1} l \beta_l \beta_m \left(\frac{\sin \pi (l+m)v}{l+m} + \frac{\sin \pi (l-m)v}{l-m}\right).$$

Отсюда, учитывая формулу
$$\frac{\pi}{2}v=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin\pi kv$$
, получаем

$$\mathbf{g}_{0}(\beta) = \left\{ \sum_{n \geqslant 1} n\beta_{n}^{2} + \sum_{m \geqslant 1} \left(l + \frac{m-1}{l} - \frac{m-1}{2} + \frac{l}{2(l-m)} \right)_{l-m=1} \beta_{l} \beta_{m} - \frac{m-1}{l} - \frac{m-1}{l} - \frac{m-1}{2} + \frac{l}{2(l-m)} \right)_{m-l=1} \beta_{l} \beta_{m} \right\} \sin \pi v + \sum_{k \geqslant 2} \{ \dots \} \sin \pi k v = \frac{l}{l} \left\{ \lim_{n \geqslant 1} \left(l + \frac{m-1}{l} - \frac{m-1}{2} + \frac{l}{2(l-m)} \right)_{m-l=1} \beta_{l} \beta_{m} \right\} \sin \pi v + \sum_{k \geqslant 2} \{ \dots \} \sin \pi k v = \frac{l}{l} \left\{ \lim_{n \geqslant 1} \left(l + \frac{m-1}{l} - \frac{m-1}{2} + \frac{l}{2(l-m)} \right)_{m-l=1} \beta_{l} \beta_{m} \right\}$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} \left\{ n\beta_n^2 + \left(n+1 + \frac{n-1}{n+1} + 1 - 1\right) \beta_n \beta_{n+1} \right\} \sin \pi v + \sum_{k\geqslant 2} \{\dots\} \sin \pi k v.$$

5. Заключительная часть доказательства теоремы

Предложение 5.1. Пусть $\mathbf{r}(\beta)\dot{\beta} = \mathbf{r}_0(\beta)\dot{\beta} + \mathbf{r}_1(\beta)\dot{\beta}$, где \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_1 определены в (48) и (55). Пусть

$$\mathbf{R}(\beta)\dot{\beta} = \left(\sum_{j\geqslant 1} \frac{2\beta_j \dot{\beta}_j}{j+1}\right) \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}.$$

Тогда

$$\left\langle \mathbf{K}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_1}{2} \right\rangle = \left(\dot{\beta}_1 + 2\beta_1\dot{\beta}_1 + \sum_{j \geq 2} \left[\frac{j+3}{j+1}\beta_j + \frac{j-1}{j}\beta_{j-1} \right] \dot{\beta}_j \right) + \left\langle \mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_1}{2} \right\rangle, \tag{64}$$

$$\left\langle \mathbf{K}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_k}{2} \right\rangle = \frac{\dot{\beta}_k}{k} + \left\langle \mathbf{R}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_k}{2} \right\rangle \quad \partial \mathcal{M} \quad k \geqslant 2.$$
 (65)

При этом

$$|\mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}| \leqslant C\|\beta\|_1^2\|\dot{\beta}\|_0, \qquad |\mathbf{R}(\beta)\dot{\beta}| \leqslant C\|\beta\|_1|\dot{\beta}\|_0. \tag{66}$$

Доказательство.

$$\left\langle \left[\mathbf{K}_{0}(\beta) + \mathbf{K}_{1}(\beta) \right] \dot{\beta}, \frac{e_{1}}{2} \right\rangle \stackrel{(45),(55)}{=} \left(\dot{\beta}_{1} + \beta_{1} \dot{\beta}_{1} + \sum_{j \geqslant 2} \left[\beta_{j} + \frac{j-1}{j} \beta_{j-1} \right] \dot{\beta}_{j} \right) + \left(\sum_{j \geqslant 1} \frac{2\beta_{j} \dot{\beta}_{j}}{j+1} \right) + \left\langle \mathbf{r}_{0}(\beta) \dot{\beta}, \frac{e_{1}}{2} \right\rangle + \left\langle \mathbf{r}_{1}(\beta) \dot{\beta}, \frac{e_{1}}{2} \right\rangle, \tag{67}$$

$$\left\langle \left[\mathbf{K}_{0}(\beta) + \mathbf{K}_{1}(\beta)\right] \dot{\beta}, \frac{e_{k}}{2} \right\rangle \stackrel{(45),(56)}{=} \frac{\dot{\beta}_{k}}{k} + \left(\sum_{j\geqslant 1} \frac{2\beta_{j} \dot{\beta}_{j}}{j+1}\right) \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \left\langle \mathbf{r}_{0}(\beta) \dot{\beta}, \frac{e_{k}}{2} \right\rangle + \left\langle \mathbf{r}_{1}(\beta) \dot{\beta}, \frac{e_{k}}{2} \right\rangle \quad \text{для} \quad k \geqslant 2.$$

$$(68)$$

Предложение 5.2. Пусть $\mathbf{s}(\beta) = \mathbf{s}_0(\beta) + \mathbf{s}_1(\beta)$, где \mathbf{s}_0 и \mathbf{s}_1 определены в (48) и (62). Пусть $\mathbf{S}(\beta) \stackrel{(69)}{=} \mathbf{S}_0(\beta) + \mathbf{F}_1(\beta)$. Тогда

$$\left\langle \mathbf{F}(\beta), \frac{e_1}{2} \right\rangle = \sum_{j \ge 1} \left[\frac{j^2 + j + 2}{j + 1} \beta_j^2 + \frac{j^2 + 3j}{j + 1} \beta_j \beta_{j+1} \right] + \left\langle \mathbf{s}(\beta), \frac{e_1}{2} \right\rangle, \tag{69}$$

$$\left\langle \mathbf{F}(\beta), \frac{e_k}{2} \right\rangle = -\frac{(k-1)(k+2)}{k} \beta_k + \left\langle \mathbf{S}(\beta), \frac{e_k}{2} \right\rangle \quad \partial \mathcal{M} \quad k \geqslant 2.$$
 (70)

При этом

$$|\mathbf{s}(\beta)\dot{\beta}| \leqslant C\|\beta\|_1^3, \qquad |\mathbf{S}(\beta)\dot{\beta}| \leqslant C\|\beta\|_1^2. \tag{71}$$

Доказательство.

$$\left\langle \mathbf{F}_{0}(\beta) + \mathbf{F}_{1}(\beta), \frac{e_{1}}{2} \right\rangle^{(47),(62)} \stackrel{}{=} \sum_{j \geqslant 1} \left[j\beta_{j}^{2} + \frac{2\beta_{j}^{2}}{j+1} + \frac{j^{2}+3j}{j+1} \beta_{j} \beta_{j+1} \right] + \left\langle \mathbf{s}_{0}(\beta) + \mathbf{s}_{1}(\beta), \frac{e_{1}}{2} \right\rangle.$$

$$\left\langle \mathbf{F}_{0}(\beta) + \mathbf{F}_{1}(\beta), \frac{e_{k}}{2} \right\rangle^{(63)} \stackrel{}{=} -\frac{(k-1)(k+2)}{k} \beta_{k} + \left\langle \mathbf{S}_{0}(\beta) + \mathbf{F}_{1}(\beta), \frac{e_{k}}{2} \right\rangle \quad \text{for} \quad k \geqslant 1.$$

Перейдем к заключительной части доказательства теоремы 1.1. Имеем

$$0 \stackrel{(43)}{=} \left\langle 2(t+t_0) \left[\mathbf{K}(\beta) \dot{\beta} - \dot{\beta} \right] + \mathbf{F}(\beta), \frac{e_1}{2} \right\rangle \stackrel{(64),(69)}{=}$$

$$\stackrel{(64),(69)}{=} 2(t+t_0) \left(2\beta_1 \dot{\beta}_1 + \sum_{j \geqslant 2} \left[\frac{j+3}{j+1} \beta_j + \frac{j-1}{j} \beta_{j-1} \right] \dot{\beta}_j \right) + 2(t+t_0) \left\langle \mathbf{r}(\beta) \dot{\beta}, \frac{e_1}{2} \right\rangle +$$

$$+2\beta_1^2 + 2\beta_1 \beta_2 + \sum_{j \geqslant 2} \left[\frac{j^2 + j + 2}{j+1} \beta_j^2 + \frac{j^2 + 3j}{j+1} \beta_j \beta_{j+1} \right] + \left\langle \mathbf{s}(\beta), \frac{e_1}{2} \right\rangle, \tag{72}$$

а для $k \geqslant 2$

$$0 \stackrel{(43)}{=} \left\langle 2(t+t_0)[\dot{\beta} - \mathbf{K}(\beta)\dot{\beta}] - \mathbf{F}(\beta), \frac{e_k}{2} \right\rangle \stackrel{(65),(70)}{=}$$

$$\stackrel{(65),(70)}{=} 2(t+t_0) \left(1 - \frac{1}{k} \right) \dot{\beta}_k - 2(t+t_0) \left\langle \mathbf{R}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_k}{2} \right\rangle + \frac{(k-1)(k+2)}{k} \beta_k - \left\langle \mathbf{S}(\beta), \frac{e_k}{2} \right\rangle,$$

$$2(t+t_0) \left(\dot{\beta}_k + R_k(\beta)\dot{\beta} \right) = -(k+2)\beta_k + S_k(\beta),$$

$$(73)$$

где

т.е.

$$R_k(\beta)\dot{\beta} = -\frac{k}{k-1} \left\langle \mathbf{R}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_k}{2} \right\rangle, \qquad S_k(\beta) = \frac{k}{k-1} \left\langle \mathbf{S}(\beta), \frac{e_k}{2} \right\rangle.$$
 (74)

Подставляя $2(t+t_0)\dot{\beta}_j$ (для $j\geqslant 2$) из (73) в (72), получим

$$2(t+t_0)(2\beta_1\dot{\beta}_1) + 2(t+t_0)\left\langle \mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_1}{2} \right\rangle =$$

$$= \sum_{j\geqslant 2} \left[\frac{j+3}{j+1}\beta_j + \frac{j-1}{j}\beta_{j-1} \right] \left(2(t+t_0)R_j(\beta)\dot{\beta} + (j+2)\beta_j - S_j(\beta) \right) -$$

$$-2\beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2 - \sum_{j\geqslant 2} \left[\frac{j^2+j+2}{j+1}\beta_j^2 + \frac{j^2+3j}{j+1}\beta_j\beta_{j+1} \right] - \left\langle \mathbf{s}(\beta), \frac{e_1}{2} \right\rangle,$$

т.е.

$$2(t+t_0)(2\beta_1\dot{\beta}_1 + 2r_1(\beta)\dot{\beta}) = \sum_{j\geqslant 2} \left[\frac{(j+3)(j+2)}{j+1} \beta_j^2 + \frac{(j-1)(j+2)}{j} \beta_{j-1}\beta_j \right] - 2\beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2 - \sum_{j\geqslant 2} \left[\frac{j^2+j+2}{j+1} \beta_j^2 + \frac{j^2+3j}{j+1} \beta_j\beta_{j+1} \right] - 2s_1(\beta),$$
(75)

где

$$2r_1(\beta)\dot{\beta} = \left\langle \mathbf{r}(\beta)\dot{\beta}, \frac{e_1}{2} \right\rangle - \sum_{i \ge 2} \left[\frac{j+3}{j+1}\beta_j + \frac{j-1}{j}\beta_{j-1} \right] R_j(\beta)\dot{\beta},$$

а

$$2s_1(\beta) = -\sum_{j \ge 2} \left[\frac{j+3}{j+1} \beta_j + \frac{j-1}{j} \beta_{j-1} \right] S_j(\beta) - \left\langle \mathbf{s}(\beta), \frac{e_1}{2} \right\rangle.$$

Наконец, заметим, что правая часть уравнения (75) равна

$$-2\beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2 \sum_{j\geqslant 2} \left[\frac{j^2 + 5j + 6}{j+1} - \frac{j^2 + j + 2}{j+1} \right] \beta_j^2 + 2\beta_2\beta_1 +$$

$$+ \sum_{j-1\geqslant 2} \left[\frac{(j-1)((j-1)+3)}{(j-1)+1} \beta_{j-1}\beta_{(j-1)+1} \right] - \sum_{j\geqslant 2} \left[\frac{j^2 + 3j}{j+1} \beta_j\beta_{j+1} \right] - 2s_1(\beta) =$$

$$= -2\beta_1^2 + \sum_{j\geqslant 2} \left[\frac{4j+4}{j+1} \right] \beta_j^2 - 2s_1(\beta) = 2\left(-\beta_1^2 + 2\sum_{j\geqslant 2} \beta_j^2 + s_1(\beta) \right).$$

Тем самым, теорема 1.1 доказана.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 04-01-00735).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Демидов А. С. Эволюция возмущения окружности в задаче Стокса—Лейбензона для потока Хил-Шоу. Ч. I// Соврем. мат. и ее прил. -2003.-2.- С. 22-49.
- 2. $\emph{Лейбензон Л. C.}$ Нефтепромысловая механика. Ч. II-M.: Нефтеиздат, 1934.
- 3. Stokes G. G. Mathematical proof of the identity of the stream-lines obtained by means of viscous film with those of a perfect fluid moving in two dimensions// Brit. Ass. Rep. -1898. -143 (Papers, V, 278).

А. С. Демидов

МГУ, Механико-математический факультет, 119992, Россия

E-mail: asd@mech.math.msu.su

О КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

© 2005 г. П. А. ЗАХАРЧЕНКО

Аннотация. С помощью нового понятия полиномиального пучка получены достаточные условия корректрости задачи Коши для нестрого гиперболического оператора.

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	66
1.	Определение вполне связного пучка	67
2.	Существование решения задачи Коши	68
3.	Разрешимость смешанной задачи для операторов с переменной кратностью характеристик	69
4.	Условие Лопатинского	70
5.	Пространства смешанной задачи	72
	Список литературы	73

Введение

Анализ полиномиальных пучков дисперсионных уравнений систем моментов Грэда для кинетических уравнений Больцмана [6, 8] и Фоккера—Планка [1, 5] показывает, что для моментных аппроксимаций кинетических уравнений (и в более широком смысле [3] моделей механики сплошных сред) кратность характеристик является следствием самой природы описываемых физических процессов, связанных с включением в описание моментов высокого порядка: неравновесных, неконсервативных переменных. Полиномиальные пучки дисперсионных уравнений имеют структуру вида

$$\mathcal{P}(\tau,\xi) - i\mathcal{Q}(\tau,\xi) = 0,$$

$$\mathcal{P}(\tau,\xi) = P_0(\tau,\xi) + \sum_{j\geqslant 1, N\geqslant 2j} (-1)^j \gamma_{2j} P_{2j}(\tau,\xi),$$

$$\mathcal{Q}(\tau,\xi) = \gamma_1 P_1(\tau,\xi) + \sum_{j\geqslant 1, N\geqslant 2j+1} (-1)^j \gamma_{2j+1} P_{2j+1}(\tau,\xi),$$
(1)

где $P_j(au,\xi)$ — однородные полиномы степени m-j с равными единице старшими коэффициентами по au

Анализ полиномиальных пучков (1) показал, что они обладают чрезвычайно жесткой структурой. А именно, они обладают следующими свойствами.

- 1. Постоянные γ_i удовлетворяют условиям Раусса—Гурвица [4].
- 2. Однородные полиномы $P_j(\tau,\xi)$ нестрого гиперболичны по τ , и корни соседних полиномов нестрого разделяют друг друга, т.е. скобки Пуассона соседних полиномов удовлетворяют соотношению

$$[P_j, P_{j+1}] = P_{j+1}\partial_{\tau} P_j - P_j\partial_{\tau} P_{j+1} \geqslant 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^1, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

3. Структура однородных полиномов $P_j(\tau,\xi)$ степени m-j напоминает структуру полиномов в представлении полинома Гурвица как полиномиального пучка [4]. А именно, в каждом из

полиномов P_j отличны от нуля лишь коэффициенты при степенях τ , *имеющих только одну четность*, т.е. структура полиномов такова:

$$\mathcal{P}(\tau,\xi) = g(\tau^2,\xi), \qquad \mathcal{Q}(\tau,\xi) = \tau f(\tau^2,\xi). \tag{2}$$

Эти факты позволяют выделить класс устойчивых полиномиальных пучков, названных нами вполне связными пучками, свойства которых, как показали прямые вычисления, воспроизводятся на каждом шаге метода моментных аппроксимаций Грэда [6,8].

1. Определение вполне связного пучка

Полиномиальный пучок

$$\mathcal{P}(\tau,\xi) - i\mathcal{Q}(\tau,\xi) = 0,$$

$$\mathcal{P}(\tau,\xi) = \sum_{j \ge 0, N \ge 2j} (-1)^j \gamma_{2j} P_{2j}(\tau,\xi),$$

$$\mathcal{Q}(\tau,\xi) = \sum_{j \ge 0, N \ge 2j+1} (-1)^j \gamma_{2j+1} P_{2j+1}(\tau,\xi),$$
(3)

однородных полиномов P_j степени m-j с вещественными коэффициентами будем называть вполне связным пучком порядка (m,N), если выполнены следующие условия:

1) полиномы P_{2j} , $j \geqslant 0$, и полиномы P_{2j+1} , $j \geqslant 0$, имеют одну четность, т.е.

$$P_{2j}(au, \xi) = egin{cases} g_j(au^2, \xi), & (m-2j) & - \mbox{четное}, \ au f_j(au^2, \xi), & (m-2j) & - \mbox{нечетное}, \end{cases}$$

И

$$P_{2j+1}(au,\xi) = egin{cases} g_j(au^2,\xi), & (m-2j-1) & - \ au \ au f_j(au^2,\xi), & (m-2j-1) & - \ au \ au \ au \end{cases}$$
 нечетное;

- 2) для коэффициентов $\gamma_i > 0$ справедливо правило Раусса—Гурвица;
- 3) скобки Пуассона удовлетворяют неравенству

$$[P_0, \partial_{\tau}(P_0)](\tau, \xi) \geqslant 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1};$$

4) скобки Пуассона соседних полиномов удовлетворяют неравенству

$$[P_j, P_{j+1}](\tau, \xi) \ge 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, j = 0, \dots, N-1,$$

т.е. полиномы $P_j, j=0,\ldots,N$, нестрого гиперболичны, и корни соседних полиномов $P_j,$ P_{j+1} нестрого разделяют друг друга;

5) кратным корнем полинома P_0 может быть только $\tau=0$ (все корни $\tau\neq 0$ — простые). Более того, если корень $\tau=0$ полинома P_0 имеет кратность $r\geqslant 2$, то $\tau=0$ является корнем кратности r-j для полинома P_j .

Здесь мы использовали следующее определение условия Раусса—Гурвица [4].

Определение условия Раусса—Гурвица. Будем говорить, что система положительных констант $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N)$, $\gamma_0 = 1$, удовлетворяет условию Раусса—Гурвица, если положительны главные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_5 & \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_N \end{pmatrix}$$

порядка $N \times N$.

Установлено [1, 6], что второе условие в определении пучка Грэда (справедливость условий Раусса—Гурвица для старших коэффициентов полиномов P_j пучка) является следствием диссипативности матрицы представлений оператора столкновений в базисе функций Эрмита. Для линеаризаций в окрестности состояния равновесия моментных аппроксимаций кинетических уравнений Больцмана и Фоккера—Планка выполнено условие 5.

Подсказанный физикой допустимый класс пучков дисперсионных уравнений гарантировал следующее обобщение классической теоремы Эрмита [5] об устойчивых полиномах.

Теорема 1. Вполне связный пучок (1), для которого

1) справедливо неравенство

$$[P_{N-1}, P_N](\tau, \xi) > 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad (\tau, \xi) \neq 0;$$
 (4)

2) главные миноры матрицы Гурвица достаточно велики,

является устойчивым, т.е. мнимые части корней уравнения $\mathcal{R}=0$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Im} \tau_j(\xi) > 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \forall \xi \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

2. Существование решения задачи Коши

Теорема 1 дает естественную реализацию в разрешимости задачи Коши для операторов с переменной кратностью характеристик. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{R}(D)u = f \tag{5}$$

в смысле теории распределений

$$(u, \mathcal{R}^*(D)\varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$
 (6)

где $D_t = -i\partial_t, \ D_x = -i\partial_x.$

Теорема 2. Для связного пучка $\mathcal{R}(D)$ при условии (4) для любого $s \in \mathbb{R}$ существует достаточно большое $\gamma_s \gg 1$ такое, что $\forall \gamma \geqslant \gamma_s$ для любого $f \in H_{s,\gamma,+}$ существует единственное решение $u \in H_{s,\gamma,+}$ уравнения (5), причем

$$\frac{1}{\gamma} \|\mathcal{R}(D)u\|_{s,\gamma,+} \geqslant c_0 \|u\|_{m-N+s,\gamma,+},\tag{7}$$

$$\mathcal{R}^{(j)}(D)u \in H_{s,\gamma,+}, \quad j = 1, \dots, m. \tag{8}$$

Пространства функций задачи Коши. В случае постоянных коэффициентов вопрос о существовании решения задачи Коши (для связных пучков) решается напрямую, поскольку с помощью преобразования Фурье решение строится в явном виде. Однако мы предпочтем оставаться в рамках единого подхода — энергетических оценок. Здесь и далее будем понимать уравнение (5) в смысле теории распределений (6), где $\mathcal{D}-$ пространство $C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ -функций с компактным носителем; (f,g)- эрмитово скалярное произведение; $\mathcal{R}^*(D)=\overline{\mathcal{R}}(D)$. Здесь $H_{s,\gamma}-$ пополнение S (пространство функций Шварца) по норме

$$||f||_{s,\gamma} = \left(\int (1 + |(\xi, \sigma - i\gamma)|^2)^s |\widetilde{f}(\xi, \sigma - i\gamma)|^2 d\xi d\sigma\right)^{1/2}.$$
 (9)

Если Φ — некоторое пространство функций или распределений в \mathbb{R}^{n+1} , то через Φ_t^+ будем обозначать подпространство $f \in \Phi$, носитель которых принадлежит полупространству $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ t \geqslant 0\}.$

3. Разрешимость смешанной задачи для операторов с переменной кратностью характеристик

3.1. Постановка задачи. Для простоты ограничимся случаем, когда рассматриваемая область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ является полупространством. Переход к случаю области с гладкой границей достаточно хорошо разработан (см., например, [2]). Рассмотрим связный нестрого гиперболический полиномиальный пучок (1) и связанный с ним дифференциальный оператор

$$\mathcal{R}(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = f, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t > 0,$$
 (10)

 $D_t = -i\partial_t, \ D_1 = -i\partial_{x_1}, \ D_{x'} = -i\partial_{x'}, \$ порядка m с постоянными коэффициентами. На границе $\partial\Omega = \{x=0, (y,t)\in\mathbb{R}^d\}$ определен набор дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами $\mathcal{B}_j(D)$. Под смешанной задачей понимается задача определения решения уравнения (10), удовлетворяющего граничным условиям

$$\mathcal{B}_j(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = g_j, \quad x \in R_{x'}^{n-1}, \quad t > 0, \quad j = 1, \dots, \mu,$$
 (11)

$$u = f = g_i = 0 \quad \forall t < 0. \tag{12}$$

Как и в случае задачи Коши, ограничимся нулевыми данными Коши. Продолжим все функции из (10), (11) нулем для t < 0. Тогда уравнения (10), (11) будут выполняться при всех $t \in \mathbb{R}$, а начальные условия заменятся на условия (12).

Через \mathcal{B}_i будем обозначать полиномиальные пучки с символами

$$\mathcal{B}_{i}(\lambda, \eta, \sigma) = B_{0i}(\lambda, \eta, \sigma) - iB_{1i}(\lambda, \eta, \sigma) + \cdots, \tag{13}$$

 $\deg B_{kj} = \beta_j - j, \ j \leqslant \beta_j < m.$

Условие А. Пучок \mathcal{R} — нестрого гиперболический вполне связный пучок, удовлетворяющий (4).

Условие В. Граница $\partial\Omega$ не является характеристической, т.е. $P_j(\nu)\neq 0,\ j=0,\dots,N,$ где $\nu=(1,0,\dots,0)$ — нормаль к плоскости $\partial\Omega.$

В силу условия В, полином $P_0(\lambda, \eta, \sigma)$ можно разрешить относительно старшей степени λ^m . Поэтому можно предположить, что

$$P_0(\lambda, \eta, \sigma) = \lambda^m + \sum_{j=1}^m p_{0j}(\eta, \sigma) \lambda^{m-j}, \tag{14}$$

где $p_{0j}(\eta,\sigma)$ — вещественные однородные полиномиальные по (η,σ) символы порядка j. Рассмотрим дисперсионное уравнение

$$\mathcal{R}(X,\lambda) = 0, \quad X = (\eta,\tau), \quad \eta \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \sigma = \operatorname{Re} \tau \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im} \tau = -\gamma, \quad \gamma \geqslant 0.$$
 (15)

Ввиду условия A, это уравнение не имеет вещественных корней. Из условия B следует непрерывная зависимость корней $\lambda_j(X)$ от многомерного параметра X. Таким образом, при всех значениях X, ${\rm Im}\, \tau < 0$, число корней уравнения (15) в полуплоскостях ${\rm Im}\, \lambda > 0$ и ${\rm Im}\, \lambda < 0$ не зависит от X. Обозначим их через m_\pm , $m_+ + m_- = m$.

Условие С. $\mu = m^+$.

Наша задача — исследовать корректность смешанной задачи (10), (11), (12).

3.2. Факторизация. Рассмотрим факторизацию полинома

$$\mathcal{R}(\lambda, \eta, \sigma - i\gamma) = \mathcal{P}(\lambda, \eta, \sigma - i\gamma) - i\mathcal{Q}(\lambda, \eta, \sigma - i\gamma) = \mathcal{R}^{+}(\lambda, \eta, \sigma - i\gamma)\mathcal{R}^{-}(\lambda, \eta, \sigma - i\gamma),$$

отвечающую разделению корней полиномов $\mathcal{R}(\lambda,\eta,\sigma-i\gamma)$ по λ , лежащих в верхней и нижней полуплоскостях $\pm\operatorname{Im}\lambda>0$.

Постараемся оценить числа m^{\pm} , поскольку число граничных условий определяется m^{+} . Для этого прежде всего отметим, что одним из условий связности является строгая гиперболичность по τ крайнего полинома P_{N} . Число граничных условий определяется следующим образом:

$$m^+ = m_b^+ + m_d^+,$$

где m_d^+ — число корней $\lambda_{j,b}^+$ в верхней комплексной полуплоскости ${
m Im}\,\lambda_{j,b}^+>0$ полинома

$$P_b(\lambda) = \frac{\mathcal{R}(\lambda, 0, 0)}{\lambda^{m-N}}.$$

Постоянная m_d^+ — число корней $\lambda_{j,d}^+$ в верхней комплексной полуплоскости ${\rm Im}\,\lambda_{j,d}^+>0$ полинома $P_N(\lambda,\eta,\sigma-i\gamma),\ \gamma>0$, в силу строгой гиперболичности P_N , определяется следующей леммой (см. [2]).

Лемма 1. Пусть $P_N(\lambda, \eta, \tau)$ — строго гиперболический полином, нехарактеристичный по λ . В случае четного m-N имеем

$$m_{+} = m_{-} = \frac{m - N}{2}. (16)$$

Для нечетного m-N модуль разности $|m_+-m_-|=1$.

Для фиксированного достаточно малого $0 < \delta_0 \ll 1$ положим

$$\Sigma_{\text{ellip}}^{+} = \{(\eta, \sigma, \gamma) \in \Sigma^{+}, \, \varepsilon_{0} \leqslant \gamma \leqslant 1 - \varepsilon_{0}, \, \varepsilon_{0} \leqslant \sqrt{|\sigma|^{2} + |\eta|^{2}} \leqslant 1 - \varepsilon_{0}\},$$

$$\Sigma_{\text{parab}}^{+} = \{(\eta, \sigma, \gamma) \in \Sigma^{+}, \, \gamma > 1 - \varepsilon_{0}, \, 0 \leqslant \sqrt{|\sigma|^{2} + |\eta|^{2}} < \varepsilon_{0}\},$$

$$\Sigma_{\text{hyperb}}^{+} = \{(\eta, \sigma, \gamma) \in \Sigma^{+}, \, 0 \leqslant \gamma < \varepsilon_{0}, \, \sqrt{|\sigma|^{2} + |\eta|^{2}} < 1 - \varepsilon_{0}\},$$

$$\Sigma^{\pm} = \{(\eta, \sigma, \gamma) \in \mathbb{R}^{n}, \, |\eta|^{2} + |\sigma|^{2} + |\gamma|^{2} = 1\}.$$

Микролокализация позволяет разбить верхнюю полуплоскость

$$\Xi^{+} = \{ (\gamma, |\sigma| + |\eta|) \in \mathbb{R}^{2}, \, \gamma \geqslant 0, \, |\sigma| + |\eta| \geqslant 0 \}$$

области параметров $X=(\eta,\sigma,\gamma)$ на три конуса:

1) эллиптический конус

$$\mathcal{K}_{\mathrm{ellip},\varepsilon_{0}}^{+}=\{(\gamma,\sigma,\eta)=\Lambda(\gamma,\sigma,\eta)\,(\widetilde{\gamma},\widetilde{\sigma},\widetilde{\eta}),\,(\widetilde{\gamma},\widetilde{\sigma},\widetilde{\eta})\in\Sigma_{\mathrm{ellip}}^{+}\};$$

2) параболический конус

$$\mathcal{K}_{\mathrm{parab},\varepsilon_{0}}^{+}=\{(\gamma,\sigma,\eta)=\Lambda(\gamma,\sigma,\eta)\,(\widetilde{\gamma},\widetilde{\sigma},\widetilde{\eta}),\,(\widetilde{\gamma},\widetilde{\sigma},\widetilde{\eta})\in\Sigma_{\mathrm{parab}}^{+}\};$$

3) гиперболический конус

$$\mathcal{K}_{\mathrm{hyper},\varepsilon_{0}}^{+}=\{\left(\gamma,\sigma,\eta\right)=\Lambda(\gamma,\sigma,\eta)\left(\widetilde{\gamma},\widetilde{\sigma},\widetilde{\eta}\right),\left(\widetilde{\gamma},\widetilde{\sigma},\widetilde{\eta}\right)\in\Sigma_{\mathrm{hyper}}^{+}\}.$$

Здесь $\Lambda(\eta,\sigma,\gamma)=(|\eta|^2+|\sigma|^2+|\gamma|^2)^{1/2}.$

Теперь можно сформулировать условие Лопатинского — условие корректности смешанной задачи для нестрого гиперболического пучка.

4. Условие Лопатинского

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\mathcal{R}(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = f, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_1 > 0, \quad t > 0;$$

$$\mathcal{B}_j(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = g_j, \quad j = 1, \dots, m^+, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t > 0.$$
(17)

1. Пусть $\mathcal{B}'_j(\lambda,\eta,\sigma,\gamma)$ — остаток от деления символа полиномиального пучка $\mathcal{B}_j(\lambda,\eta,\sigma-i\gamma)$ на полином $\mathcal{R}^+(\lambda,\eta,\sigma,\gamma)$ по λ . Тогда \mathcal{B}'_j являются полиномами по λ степени не выше m^+-1 :

$$\mathcal{B}'_{j}(\lambda, \eta, \sigma, \gamma) = \sum_{k=0}^{m^{+}-1} b_{jk}(\eta, \sigma, \gamma) \lambda^{k}.$$

Рассмотрим матрицу Лопатинского

$$\mathcal{L}(\eta, \sigma, \gamma) = ||b_{jk}(\eta, \sigma, \gamma)||, \quad j, k = 1, \dots, m^+.$$

2. Далее определим полином

$$\mathcal{R}_p(\lambda, \gamma^{-1}) = \frac{\mathcal{R}(\gamma \lambda, 0, -i\gamma)}{\gamma^m}, \quad \gamma \geqslant \gamma_0 \gg 1, \quad \mathcal{R}_p(\lambda) = \mathcal{R}_p^+(\lambda)\mathcal{R}_p^-(\lambda).$$

Пусть $\mathcal{B}'_{j,p}(\lambda)$ — остаток от деления символа полиномиального пучка

$$\mathcal{B}_{j}^{p}(\lambda, \gamma^{-1}) = \frac{\mathcal{B}_{j}(\gamma\lambda, 0, -i\gamma)}{\gamma^{\beta_{j}}}$$

на полином $\mathcal{R}_p^+(\lambda)$ по λ . Тогда $\mathcal{B}_{j,p}'$ являются полиномами по λ степени не выше m^+-1 :

$$\mathcal{B}'_{j,p}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m^+-1} d_{jk}(\gamma) \lambda^k.$$

Рассмотрим матрицу Лопатинского параболической зоны

$$\mathcal{L}_p = ||d_{jk}(\gamma)||, \quad j, k = 1, \dots, m^+.$$

Условие 1 (условие Лопатинского). Будем говорить, что для смешанной задачи (17) выполнено равномерно условие Лопатинского, если выполнены следующие условия:

1) в эллиптической зоне

$$Lop(\mathcal{R}, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{m^+}) = \det \mathcal{L}(\eta, \sigma, \gamma) \neq 0 \quad \forall (\eta, \sigma, \gamma) \in \mathcal{K}_{ellip}, \quad \Lambda \geqslant 0;$$
(18)

2) в параболической зоне

$$\operatorname{Lop}_p(\mathcal{R}, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{m^+}) = \det \mathcal{L}_p(\gamma) \neq 0, \quad \gamma \geqslant \gamma_0 \gg 1;$$

3) в гиперболической зоне

$$Lop(\mathcal{R}, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{m^+}) = \det \mathcal{L}(\eta, \sigma, \gamma) \neq 0 \quad \forall (\eta, \sigma, \gamma) \in \mathcal{K}_{hyper}, \quad \gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \varepsilon_0 \Lambda.$$
 (19)

Условие D. Выполнено условие Лопатинского.

4.1. Структурные ограничения. Потребуем, чтобы пучок \mathcal{R} удовлетворял дополнительным структурным условиям, подсказанным свойствами полиномиальных пучков дисперсионных уравнений линеаризаций в окрестности состояний равновесия моментных приближений кинетических уравнений.

Условие E (согласованная кратность корней полиномов $P_j(au,\lambda,\eta),\ (\lambda,\eta)\in\mathbb{R}^d,$ по au пучка \mathcal{R}).

Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия.

1. Однородные нестрого гиперболические по τ полиномы $P_j(\lambda,\eta,\tau),\ j=0,\dots,N-1,$ представимы в виде

$$P_j(\lambda, \eta, \tau) = \prod_{k=1}^{N-j} \mathcal{P}_{k,j}(\lambda, \eta, \tau), \tag{20}$$

где $\mathcal{P}_{k,j}$ — строго гиперболические по τ полиномы, имеющие общие корни. Таким образом, кратные корни полинома P_i образуются общими корнями строго гиперболических полиномов $P_{k,j}$.

2. Корень $\tau_0(\lambda_0,\eta_0)$ нестрого гиперболического полинома $P_0(\tau,\lambda,\eta)=0$ кратности $1< r(\lambda_0,\eta_0)\leqslant N$ является корнем нестрого гиперболических полиномов $P_j(\tau,\lambda,\eta),\, s=j,\ldots,r-1,$ при $(\lambda,\eta)=(\lambda_0,\eta_0)$ кратности r-j соответственно, и $P_r(\tau_0,\lambda_0,\eta_0)\neq 0.$

5. ПРОСТРАНСТВА СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

Через $H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ обозначим пространство сужений функций из $H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1})$ на полупространство $\mathbb{R}^{d+1}_+=\{x_1\geqslant 0\}$. Естественная норма в этом пространстве получается из нормы (9) заменой интегрирования по прямой на интегрирование по полупрямой $x_1\geqslant 0$. Итак, положим

$$||u||_{[\gamma]}^{m,s} = \left(\sum_{j=0}^{m} \int_{0}^{\infty} dx_1 \int d\eta \int_{\text{Im }\tau = -\gamma} (1 + |\eta|^2 + |\tau|^2)^{m+s-j} |D_1^j \widehat{u}(x, \eta, \tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}.$$
 (21)

Через $H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1})^+_t, H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1})^+_t$ обозначим подпространства функций из $H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1}), H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1})$, равных нулю при t<0.

Для смешанной задачи рассмотрим также пространство $H^s_{[\gamma]}(\mathbb{R}^d)$ функций (распределений), сосредоточенных на границе $\Gamma=\{x_1=0\}$, с нормой

$$\langle g \rangle_{s,[\gamma]} = \left(\int_{\text{Im } \tau = -\gamma} (1 + |\tau|^2 + |\eta|^2)^s |\widehat{g}(\eta, \tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}$$
 (22)

и подпространство $H^s_{[\gamma]}(R^d)_t^+$ функций, равных нулю при t<0.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть для набора операторов $\mathcal{R}, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{\mu}$ выполнены условия A, B, C, D. Тогда для любого $s_0 \in \mathbb{R}^1$ найдется $\gamma_0 = \gamma_0(s_0) \gg 1$ такое, что при $|s| < s_0$, $\gamma \geqslant \gamma_0$, задача

$$\mathcal{R}(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = f, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t > 0,$$

$$\mathcal{B}_j(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = g_j, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}_{x'}, \quad t > 0, \quad j = 1, \dots, \mu,$$

$$u = f = g_j = 0, \quad t < 0,$$
(23)

при правых частях

$$f \in H_{0,s+1+5(N-1)/3,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)_t^+, \qquad g_j \in H_{m+s-\beta_j+N-1,\gamma}(\mathbb{R}^n)_t^+, \quad j=1,\ldots,m^+,$$

имеет единственное решение

$$u \in H_{m,s,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)_t^+, \qquad D_{x_1}^j u(0,x',t) \in H_{m+s-j+N-1,\gamma}(\mathbb{R}^n), \quad j=1,\ldots,m-1,$$

для которого справедлива следующая оценка:

$$c_0 \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} \langle D_1^j u \rangle_{m+s+N-1-j,\gamma}^2 + \|u\|_{m,s,\gamma}^2 \right\} \leqslant \frac{1}{\gamma} \|f\|_{0,s+1+5(N-1)/3,\gamma}^2 + \sum_{j=1}^{m+} \langle g_j \rangle_{m+s+N-1-\beta_j,\gamma}^2. \tag{24}$$

Эта теорема является обобщением результатов [2, 9] для строго гиперболических операторов высокого порядка.

Пример. Приведем пример нестрого гиперболического пучка, для которого справедливы условия A, B, E, D:

$$\mathcal{R}(D_t, D_x) = P_0(D_t, D_x) - \gamma_2 P_2(D_t, D_x) + \gamma_4 P_4(D_t, D_x) - i(\gamma_1 P_1(D_t, D_x) - \gamma_3 P_3(D_t, D_x) + \gamma_5 P_5(D_t, D_x)),$$

где

$$\gamma_1 = 8$$
, $\gamma_2 = 25$, $\gamma_3 = 38$, $\gamma_4 = 28$, $\gamma_5 = 1$.

Символы операторов P_i :

$$P_0(\tau, \xi_1, \xi_2) = \tau^2 \left(\tau^4 - 4(\xi_1^2 + \xi_2^2) \tau^2 + 3(\xi_2^2 + \xi_1^2)^2 \right),$$

$$P_1(\tau, \xi_1, \xi_2) = \tau \left(\tau^4 - \frac{11}{4} (\xi_1^2 + \xi_2^2) \tau^2 + (\xi_2^2 + \xi_1^2)^2 \right),$$

$$P_2(\tau, \xi_1, \xi_2) = \tau^4 - \frac{42}{25} (\xi_1^2 + \xi_2^2) \tau^2 + \frac{4}{25} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2,$$

$$P_3(\tau, \xi_1, \xi_2) = \tau \left(\tau^2 - \frac{16}{19} (\xi_1^2 + \xi_2^2)\right), \qquad P_4(\tau, \xi_1, \xi_2) = \tau^2 - \frac{2}{7} (\xi_1^2 + \xi_2^2), \qquad P_5 = \tau^2$$

Получили нестрого гиперболический пучок из шести полиномов: полиномы P_j пучка — нестрого гиперболические, и корни соседних нестрого разделяют друг друга (кратный корень только $\tau=0$):

$$[P_0, P_1](\tau, \xi) = \tau^2 \left(\tau^8 - \frac{29}{4} \tau^6 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{39}{4} \tau^4 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 - \frac{11}{4} \tau^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^3 + 3(\xi_1^2 + \xi_2^2)^4 \right),$$

$$\min_{\tau^2 + |\xi|^2 = 1} \left(\tau^8 - \frac{29}{4} \tau^6 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{39}{4} \tau^4 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 - \frac{11}{4} \tau^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^3 + 3(\xi_1^2 + \xi_2^2)^4 \right) = 0.63046179,$$

$$\min_{\tau^2 + |\xi|^2 = 1} [P_1, P_2] = \frac{33}{20}, \quad \min_{\tau^2 + |\xi|^2 = 1} [P_2, P_3] = \frac{581}{475}, \quad \min_{\tau^2 + |\xi|^2 = 1} [P_3, P_4] = \frac{163}{133}, \quad \min_{\tau^2 + |\xi|^2 = 1} [P_4, P_5] = \frac{2}{7}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Волевич Л. Р., Радкевич Е. В. Устойчивые пучки гиперболических полиномов и задачи Коши для гиперболических уравнений с малым параметром при старших производных// Тр. Моск. мат. об-ва. 2004.-65.- С. 69-113.
- 2. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.
- 3. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
- 4. Годунов С. Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: НГУ, 1994.
- 5. 3ахарченко П. А., Радкевич Е. В. О свойствах представления уравнения Фоккера—Планка в базисе функций Эрмита. Докл. РАН. 2004. 395, № 1. С. 36–39.
- 6. *Радкевич Е. В.* Корректность математических моделей механики сплошных сред и термодинамика// Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. 3. С. 5–32.
- 7. Levermore C. D. Moment closure hierarchies for kinetic theories// J. Statist. Phys. -1996.-83.-C. 1021-1065.
- 8. Müller I., Ruggeri T. Extended Thermodynamics. Springer-Verlag, 1993.
- 9. *Sakamoto P.* Mixed problems for hyperbolic equations I, II// J. Math. Kyoto Univ. -1970. -3, N 10. C. 349-373, 403-417.

П. А. Захарченко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: hekex@mail.ru

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2005 г. Д. Ю. КАРАМЗИН

Аннотация. Статья посвящена исследованию задачи импульсного оптимального управления с фазовыми ограничениями типа неравенств и геометрическими ограничениями управления, определяемыми измеримым многозначным отображением. Получены условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина и установлены условия его невырожденности.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи и основные определения	74
2. Некоторые обозначения и понятия	79
3. Леммы и предложения	83
4. Редукции \hat{R}_1 , R_2 и v -задача	94
5. Простейшая задача	95
6. Линейно выпуклые задачи. Теорема существования решения. Принцип максимума	
для задачи с концевыми ограничениями	99
7. Задача с фазовыми ограничениями	
8. Условия невырожденности и завершение доказательства принципа максимума	115
9. Общая нелинейная задача импульсного управления	117
10. Заключение	131
Список литературы	133

1. Постановка задачи и основные определения

Настоящая статья посвящена изучению задачи импульсного управления с векторной мерой. Вначале на двух простых примерах из приложений поясним, откуда берутся импульсные управления, и, главное, покажем принципиальное различие между векторным и скалярным случаями.

Начнем с задачи ракетодинамики. Известная задача о переводе космического корабля с одной орбиты на другую при минимальном расходе топлива схематически, упрощенно моделируется следующим образом (см. [17]):

$$J(u) = \int_{0}^{1} u(t)dt \to \min, \quad \dot{x} = x + u, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad u(t) \geqslant 0.$$
 (1.1)

Здесь скаляр u — скорость сжигания топлива, за счет которого создается сила тяги, а x — положение материальной точки. Ракетный двигатель космического корабля способен сжигать топливо с очень высокой скоростью, развивая огромную силу тяги. Поэтому предположение о неограниченности управления сверху реалистично.

Теперь, чтобы строго математически формализовать задачу (1.1), мы должны описать класс управлений. Если в качестве класса управлений взять одно из пространств L_p , $1\leqslant p\leqslant \infty$, то в нем инфимум функционала (1.1) достигаться не будет, а минимизирующая последовательность абсолютно непрерывных траекторий будет сходиться к разрывной функции. Такое явление объясняется следующим. С одной стороны, в L_p при p>1 множество допустимых управлений в задаче (1.1) не ограничено, а ограничено оно лишь в L_1 . С другой стороны, в задаче (1.1) минимизируется

именно норма управления в L_1 , однако единичный шар в L_1 уже не является слабым секвенциальным компактом. Значит, нельзя гарантировать существование решения ни в одном классе L_p , $p\geqslant 1$. В таких вырожденных случаях принято осуществлять процедуру пополнения или расширения задачи, а пополненный класс управлений называть импульсным. При этом главный вопрос: в какой метрике понимать сходимость управлений, т.е. относительно какой метрики производить пополнение? На примере задачи (1.1) осуществим такую процедуру пополнения.

Прежде всего заметим, что всякое обычное управление u(t) задачи (1.1), т.е. измеримую суммируемую функцию, можно рассматривать как элемент (обозначим его μ) пространства $C^*[0,1]$, если положить $\frac{d\mu}{dt}=u(t)$. $(C^*[0,1]-$ пространство, топологически сопряженное к C[0,1], и его элементами являются борелевские меры.) Таким образом, каждому допустимому управлению u(t)в задаче (1.1) отвечает абсолютно непрерывная неотрицательная борелевская мера μ с плотностью u(t), причем $\|\mu\|_{TV} = \|u\|_{L_1}$, $\|\mu\|_{TV}$ — полная вариация меры. Теперь, как легко видеть, существование решения задачи (1.1) можно гарантировать в более широком классе управлений $C_+^*[0,1]$ классе борелевских неотрицательных мер. (Это следствие слабой-* секвенциальной компактности шара в $C^*[0,1]$). Кроме того, множество абсолютно непрерывных борелевских мер слабо-* всюду плотно в $C^*[0,1]$, и, значит, пополнение корректно: оно производится относительно слабой-* топологии и приводит ко всему множеству неотрицательных борелевских мер (что существенно для физической интерпретации, ведь каждому импульсному управлению должна отвечать некоторая последовательность обычных управлений). Кроме того, корректность означает, что каждому импульсному управлению отвечает единственная фазовая траектория x(t), которая в расширенной задаче уже не является абсолютно непрерывной функцией и может претерпевать разрывы (если, например, в правой части динамической системы имеется мера Дирака).

Однако в рассмотренном примере управление скалярно. Все коренным образом меняется, если в расширяемой (пополняемой) задаче управление — это векторная функция. В таком случае (если к тому же еще нарушается вводимое ниже условие Фробениуса) описанная выше процедура пополнения не проходит. Оказывается, что для векторных управлений в расширенной задаче уже нельзя ограничиться классом только векторных мер, а импульсное управление превращается в объект с более широкими свойствами, чем просто векторная мера. Следующий пример из экономики демонстрирует такую задачу, не пополняемую в пространство векторных мер.

Модель оптимизации расходов на рекламу двух товаров имеет вид [17]

$$\int_{0}^{1} [\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)] dt \to \min, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(1 - x_1)u_1 - bx_1, & x_1(0) \in (0, 1), \\ \dot{x}_2 = c\left(\frac{1 - x_2}{x_1}\right)u_2 - dx_2, & x_2(0) \in (0, x_1(0)), \end{cases} u_1 \geqslant 0, \quad u_2 \geqslant 0.$$

Здесь u_1 , u_2 — текущие расходы на рекламу товаров (деньги/ед. времени), x_1 , x_2 — объемы продаж. Оказывается, что описанная выше процедура пополнения для этой задачи не корректна, так как приводит к тому, что векторной мере будет отвечать, вообще говоря, уже целая воронка решений, состоящая более чем из одной траектории. В настоящей работе предложены методы, позволяющие исследовать указанный класс задач.

Итак, будем изучать следующую задачу оптимального импульсного управления

$$J(p, u, \mu, \{v_r\}) = e_0(p) \to \min,$$
 (1.2)

$$dx = f(x, u, t)dt + g(x, t)d\mu, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1.3}$$

$$e_1(p) \leqslant 0, \quad e_2(p) = 0,$$
 (1.4)

$$\varphi(x,t) \leqslant 0,\tag{1.5}$$

$$u(t)\in U(t)\subset\mathbb{R}^m$$
 п.в. $t, \quad \mathrm{Range}(\mu)\subset K,$ $p=(x_0,x_1,t_0,t_1), \quad x_0=x(t_0), \quad x_1=x(t_1).$

Здесь: $e_1,\ e_2,\ \varphi$ — вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^{k_j},\ j=1,2,3$, соответственно, g — матрица, имеющая k_4 столбцов и n строк, $t \in \mathbb{R}^1$ – время, $\mu - k_4$ -мерная борелевская вектор-мера, заданная на отрезке времени $T=[t_0,t_1]$ и принимающая значения в конусе $K,~\{v_r\}$ — семейство измеримых вектор-функций, рассматриваемых на отрезке [0,1], зависящее от параметра $r \in T$ и определенным образом связанное с векторной мерой μ (как именно, указано ниже), x — фазовая переменная, принимающая значения в n-мерном арифметическом пространстве \mathbb{R}^n , запись «п.в. t» означает «для почти всех t в смысле меры Лебега на прямой». Вектор u, принимающий значения в \mathbb{R}^m и отвечающий регулярному параметру управления, называется управлением. В качестве класса допустимых управлений рассматриваются существенно ограниченные измеримые функции u(t) такие, что $u(t) \in U(t)$ п.в. t. Пара $(\mu; \{v_r\})$ отвечает нерегулярному или так называемому *импульсному управлению*. Класс импульсных управлений определяется ниже. Вектор $p \in \mathbb{R}^{2n+2}$ называется концевым.

Функции e_0 , e_1 , e_2 , φ , g, задающие минимизируемый функционал, концевые и фазовые ограничения, а также матрицу при управляющей векторной мере, непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных, вектор-функция f непрерывно дифференцируема по x для п.в. t, измерима по t при любых фиксированных (x,u) вместе со своими частными производными по x и на любом ограниченном множестве, f и ее частные производные по x ограничены и непрерывны по (x, u) для п.в. t равномерно по t. Многозначное отображение U(t) измеримо и ограничено, т.е. $U(t) \subseteq B$, где B ограничено. Множество U(t) замкнуто для п.в. t. Конус K выпуклый и замкнутый.

Ниже дается определение решения уравнения (1.3) (см. также [17, 29, 30, 41]). Возьмем вектор

$$\Delta \in K, \ \Delta = (\Delta^1, \dots, \Delta^{k_4})$$
 и число $\gamma \geqslant |\Delta| = \sum_{j=1}^{k_4} |\Delta^j|$. Тогда элементами множества $\mathcal{H}_K(\Delta; \gamma) \subset L^{k_4}_\infty([0,1])$ являются измеримые существенно ограниченные вектор-функции $v = (v^1, \dots, v^{k_4})$, заданные на отрезке $[0,1]$ и принимающие значения в конусе K , такие, что

1)
$$\sum_{j=1}^{k_4} |v^j(s)| = \gamma$$
 п.в. в $s \in [0,1];$
2) $\int_0^1 v^j(s) ds = \Delta^j, \ j = 1, \dots, k_4.$

Отсюда видно, что множество $\mathcal{H}_K(\Delta; \gamma)$ всегда не пусто при $\gamma = |\Delta|$, а при $\gamma > |\Delta|$ это множество может быть как пустым, так и непустым (в зависимости от выбранного конуса K и соотношения чисел γ и $|\Delta|$).

Если μ — векторная мера, то

- $|\mu| = \sum_{j=1}^{\kappa_4} |\mu^j|$, где $|\mu^j|(B) = \sup \sum_k |\mu^j(B_k)|$, $B = \sqcup B_k$, т.е. мера $|\mu^j|$ есть вариация заряда
- $Ds(\mu) = \{r \in T : |\mu|(\{r\}) > 0\}$ дискретный носитель μ ;
- μ_{c} ее непрерывная составляющая, т.е. векторная неатомическая мера, компонентами которой служат непрерывные составляющие компонент μ ;
- $\mu(\{r\})$ вектор из K, равный значению μ на одноточечном множестве $\{r\}$.

Следующее понятие играет ключевую роль в дальнейшем изложении. Семейство векторфункций $\{v_r\}$, зависящее от параметра $r \in T$, будем называть *присоединенным* к векторной мере μ , если существует семейство неотрицательных чисел $\{\gamma_r\}_{r\in T},\ \gamma_r\geqslant |\mu|(\{r\}),\$ в котором не более чем счетное число элементов отлично от нуля, такое, что $\sum \gamma_r < \infty$ и $v_r \in \mathcal{H}_K(\mu(\{r\}); \gamma_r) \ \forall r \in T$.

Импульсным управлением в задаче (1.2)–(1.5) будем называть пару $\mathbf{q}=(\mu;\{v_r\})$, где $\mu-$ векторная мера со значениями в конусе K, а $\{v_r\}$ — некоторое присоединенное к μ семейство функций. Вариацией импульсного управления ${\bf q}=(\mu;\{v_r\})$ будем называть скалярную борелевскую меру $|{f q}|=|\mu_c|+\sum \gamma_r\delta_r$. Здесь δ_r означает меру Дирака, сосредоточенную в точке r. Из определения присоединенного семейства сразу вытекает, что ${\rm Ds}(\mu)\subseteq {\rm Ds}(|{f q}|)$ (заметим, что вложение может быть строгим). Кроме того, $v_r=0$, как только $r\notin {\rm Ds}(|{f q}|)$. Таким образом, семейство $\{v_r\}$, по существу, зависит от параметра $r\in {\rm Ds}(|{f q}|)$ и имеет не более чем счетное число функций, отличных от нуля. Отметим также, что в случае, когда конус K вложен в положительный ортант, определение присоединенного семейства упростится. Действительно, тогда функции v_r неотрицательны, откуда $|{f q}|=|\mu|$, т.е. вариация импульсного управления совпадает с вариацией векторной меры (что, вообще говоря, неверно для произвольного конуса). Отсюда $v_r\neq 0 \Leftrightarrow r\in {\rm Ds}(\mu)$, если $K\subseteq \mathbb{R}_+^{k_4}$. Последнее утверждение также всегда верно для произвольного острого конуса.

Пусть $r \in T$, $v \in L^{k_4}_{\infty}([0,1])$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда функция $\alpha_r(\cdot) = \alpha_r(\cdot; x, v)$ определяется как решение следующей системы уравнений:

$$\dot{\alpha}_r = g(\alpha_r, r)v, \quad s \in [0, 1], \quad \alpha_r(0) = x.$$

Положим $\xi(x,r,v) = \alpha_r(1)$.

Перейдем непосредственно к определению решения. Зафиксируем произвольное импульсное управление $\mathbf{q}=(\mu;\{v_r\})$. Функция x(t), заданная на отрезке T, называется решением уравнения (1.3), отвечающим набору (x_0,u,\mathbf{q}) , если

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, u, s) ds + \int_{[t_0, t]} g(x, s) d\mu_c +$$

$$+ \sum_{r \in \text{Ds}(|\mathbf{q}|), r \leqslant t} \left[\xi(x(r^-), r, v_r) - x(r^-) \right] \quad \forall t > t_0, \quad x(t_0) = x_0.$$

$$(1.6)$$

Данное определение корректно в следующем смысле. Пусть μ_i — последовательность абсолютно непрерывных векторных мер, слабо сходящаяся к векторной мере μ , и пусть x_i — абсолютно непрерывная траектория, отвечающая μ_i , в силу (теперь уже обычного) дифференциального уравнения (1.3). Тогда существует присоединенное к μ семейство функций $\{v_r\}$ такое, что траектория x(t), отвечающая, в силу уравнения (1.6), импульсному управлению $\mathbf{q} = (\mu, \{v_r\})$, является предельной для $\{x_i\}$. Точнее, переходя к подпоследовательности, $x_i(t) \to x(t) \ \forall t \notin \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}|) \setminus \{t_0, t_1\}$.

И обратно: для любой функции x(t), являющейся решением в смысле (1.6), существует слабо сходящаяся к μ последовательность абсолютно непрерывных векторных мер такая, что последовательность соответствующих траекторий сходится к x(t). Строгие формулировки и доказательства приведенных фактов содержатся в § 3.

Зафиксируем μ и начнем перебирать всевозможные присоединенные к μ семейства функций $\{v_r\}$, каждый раз пытаясь находить при этом с помощью уравнения (1.6) некоторую новую траекторию x(t). В результате получим некоторое множество решений, которое обозначим $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mu)$. Из вышесказанного следует, что, во-первых, построенным множеством ${\mathcal P}$ исчерпывается любой способ аппроксимации μ абсолютно непрерывными мерами, т.е. если для функции x существует абсолютно непрерывная аппроксимация ее решениями уравнения (1.3), то $x \in \mathcal{P}$, и, во-вторых, множество ${\cal P}$ не содержит «лишних» решений, т.е. таких решений, для которых не существует никаких аппроксимаций. Следовательно, приходим к выводу: множество ${\cal P}$ есть в точности так называемая интегральная воронка решений, возникающая при аппроксимации μ абсолютно непрерывными мерами. Итак, произвольная векторная мера μ порождает, вообще говоря, целый «мешок» траекторий, каждая из которых претендует на звание «решения» уравнения (1.3). Чтобы определиться точно, какая именно из траекторий в «мешке» будет называться решением, из нашей интегральной воронки необходимо выделить ветвь, что собственно и делается с помощью введения присоединенного к μ семейства функций $\{v_r\}$. Зафиксировав управление u, меру μ и некоторое присоединенное к ней семейство $\{v_r\}$, по тройке $(u, \mu, \{v_r\})$ и начальному значению x_0 мы однозначно находим траекторию x(t). Присоединенное семейство $\{v_r\}$ отражает, как мы видим, способ аппроксимации μ абсолютно непрерывными мерами и представляет собой в каком-то смысле «схему взаимодействия компонент векторной меры на траектории разрыва системы». Из сказанного выше становится ясно,

что такая «схема взаимодействия» должна быть (как и векторная мера) тоже включена в параметр управления, и это отвечает данной выше концепции импульсной составляющей.

Далее отметим следующий, хотя и частный, но весьма важный для приложений случай, когда выполняется так называемое условие Фробениуса. Говорят, что для системы (1.3) выполнено условие Фробениуса, если векторные поля g^j попарно коммутируют (здесь g^j — столбцы матрицы g), т.е.

$$g_x^j(x,t)g^i(x,t) \equiv g_x^i(x,t)g^j(x,t) \quad \forall i,j.$$

В ранних работах по импульсным управлениям это условие часто предполагалось выполненным априори (см., например, [17,18]). Что же дает условие Фробениуса? Оказывается, что в таком случае описанная выше интегральная воронка решений $\mathcal{P}(\mu)$ вырождается и представляет собой для любой векторной меры μ единственную траекторию ([18, следствие леммы 4.5, с. 159]). Тогда, как легко понять, импульсное управление и есть сама векторная мера, а введение присоединенного семейства уже излишне. Тем самым, в случае Фробениуса ситуация значительно упрощается, и данное выше определение решения превращается в классическое, хорошо известное определение, которое можно найти в [17,18]. Когда же условия Фробениуса нет, то интегральная воронка $\mathcal{P}(\mu)$ состоит, вообще говоря, из «большого количества» траекторий, что показывает нижеследующий пример.

Пример 1.1. Пусть $n=1,\ k_4=2,\ K=\mathbb{R}^2,\ T=[0,1].$ Рассмотрим следующую динамическую систему с векторной мерой $\mu=(\mu_1,\mu_2)$

$$dx = xd\mu_1 + x^2d\mu_2, \quad x(0) = 1.$$

Возьмем $\mu=0$ и покажем, что интегральная воронка $\mathcal{P}(0)$ содержит, по крайней мере, две различные траектории (их, конечно, в ней будет значительно больше, целый континуум). Одна траектория находится тривиально — это траектория $x(t)\equiv 1$, отвечающая нулевому присоединенному семейству: $v_r\equiv 0 \ \forall r$. Построим вторую траекторию $\tilde{x}(\cdot)$. Положим $v_r\equiv 0 \ \forall r>0, \ \gamma_0=2$ и

$$v_0^1(s) = \begin{cases} 0, & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ -2, & s \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ 1, & s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \quad v_0^2(s) = \begin{cases} 2, & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ 0, & s \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ -1, & s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Найдем решение $\alpha(s)$ присоединеной в точке 0 системы. Легко видеть, что

$$\alpha(s) = \frac{1}{1-2s}, \quad s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \quad \text{if} \quad \alpha(s) = 2\sqrt{e}e^{-2s}, \quad s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right].$$

Теперь заметим, что $\alpha(1/2)=2/\sqrt{e}\neq 1$, в то время как $\alpha=1$ есть точка покоя нашей системы на оставшемся отрезке [1/2,1]. Отсюда $\alpha(1)=c\neq 1$, и следовательно, $\tilde{x}(t)=c$ при t>0, т.е. траектория, отвечающая построенному присоединенному семейству, не равна тождественно единице, что и требовалось показать.

Данный пример интересен еще и тем, что он показывает, как мере, не имеющей атомарной составляющей, в силу уравнения (1.3), может отвечать разрывная траектория (такое оказалось возможно, поскольку конус K в нашем примере не острый). Это еще раз говорит о том, что импульсное управление в задаче с векторной мерой есть понятие более широкое, чем сама векторная мера.

Чтобы завершить постановку задачи, остается дать определение траектории, удовлетворяющей фазовым ограничениям (1.5). Если $\phi(x,t)$ — непрерывная скалярная функция, то положим 1

$$gc \sup_{t \in T} \phi(x, t) = \max_{t \in T} \max_{s \in [0, 1]} \phi(\alpha_t(s; x(t^-), v_t), t).$$

 $^{^{1}\}mathrm{gc}\,\mathrm{sup}=\mathrm{graph}$ completion supremum, т.е. буквально: «супремум пополнения графика».

Неравенство (1.5) теперь следует понимать в обобщенном смысле: $\varphi(x,t) \leq 0 \Leftrightarrow \gcd \varphi^{j}(x,t) \leq 0$, $j=1,\ldots,k_3$. Это означает, что траектория x(t) удовлетворяет фазовым ограничениям (1.5) тогда и только тогда, когда

- 1) $\varphi(x(t),t) \leqslant 0 \ \forall t \in [t_0,t_1];$
- 2) $\varphi(\alpha_r(s), r) \leq 0 \ \forall s \in [0, 1] \ \forall r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}|)$

(см. также [17, 29, 30]).

Тройка $(p, u, \mathbf{q}), \mathbf{q} = (\mu, \{v_r\}),$ называется процессом управления, если $\exists x(t): x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_0$ x_1 и x, u, \mathbf{q} удовлетворяют (1.3). Процесс называется допустимым, если для него выполнены все ограничения рассматриваемой задачи. Допустимый процесс (p^*, u^*, \mathbf{q}^*) называется оптимальным, если для любого допустимого процесса (p, u, \mathbf{q}) выполняется неравенство $e_0(p^*) \leq e_0(p)$.

Для задачи (1.2)–(1.5) требуется получить необходимые условия оптимальности в форме невырождающегося (информативного) принципа максимума Понтрягина (ПМ) [32].

Введем основные определения и предположения, которые будут использоваться.

Определение 1.1. Концевые ограничения называются регулярными, если для любого вектора $p = (x_0, x_1, t_0, t_1)$, удовлетворяющего (1.4), выполняются следующие условия:

- 1) векторы $\frac{\partial e_2^j}{\partial p}(p),\ j=1,\ldots,k_2$, линейно независимы; 2) существует вектор $\bar{p}\in\mathbb{R}^{2n+2}$ такой, что

$$\frac{\partial e_2}{\partial p}(p)\bar{p} = 0, \quad \left\langle \frac{\partial e_1^j}{\partial p}(p), \bar{p} \right\rangle > 0 \quad \forall j: \ e_1^j(p) = 0.$$

Определение 1.2. Фазовые ограничения называются *регулярными*, если для любых (x,t), удовлетворяющих (1.5), существует вектор $q = q(x, t) \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\langle \varphi_x^j(x,t), q \rangle > 0 \quad \forall j : \varphi^j(x,t) = 0.$$

Определение 1.3. Пусть точка $p^* = (x_0^*, x_1^*, t_0^*, t_1^*)$ удовлетворяет концевым ограничениям (1.4), и выполнены неравенства $\varphi(x_k^*,t_k^*)\leqslant 0,\, k=0,1.$ Будем говорить, что в точке p^* фазовые ограничения согласованы с концевыми, если существует $\varepsilon>0$ такое, что

$$\{p \in \mathbb{R}^{2n+2}: |p-p^*| \le \varepsilon, \ e_1(p) \le 0, \ e_2(p) = 0\} \subseteq \{p: \ \varphi(x_k, t_k) \le 0, \ k = 0, 1\}.$$

Подробнее о введенных в определениях 1.1-1.3 понятиях см. [1, с. 91-94].

Введем в рассмотрение предположение гладкости.

Предположение Γ). Функция f непрерывно дифференцируема по совокупности переменных, а многозначное отображение $U(\cdot)$ постоянно, т.е. $U(t) \equiv U$ для некоторого компакта U.

Определение 1.4. Пусть выполнено предположение Γ). Допустимую траекторию $x(t), t \in [t_0, t_1]$ будем называть управляемой в концевых точках (относительно фазовых ограничений), если найдутся векторы $u_k \in U$, $m_k \in K$ такие, что

$$\left\langle \varphi_x^j(x_k,t_k),f(x_k,u_k,t_k)+g(x_k,t_k)m_k\right\rangle +\varphi_t^j(x_k,t_k)<0\quad\forall j:\ \varphi^j(x_k,t_k)=0,$$
 где $x_k=x(t_k),\ k=0,1.$

Если $g\equiv 0$ или μ из класса абсолютно непрерывных векторных мер с плотностью в L_{∞} , то определение 1.4 превращается в известное определение управляемости для связанной с (1.2)-(1.5) обычной задачи оптимального управления [1, с. 112].

2. Некоторые обозначения и понятия

Введем некоторые обозначения и понятия, которые будут использоваться в дальнейшем.

Пусть $T = [t_0, t_1]$ — заданный отрезок на числовой оси; тогда C(T) означает банахово пространство непрерывных на T функций $f:T \to \mathbb{R}^1$ с обычной нормой $\|f\|_C = \max_{t \in T} |f(t)|; \ V(T) - \max_{t \in T} |f(t)|$ пространство функций, имеющих ограниченную вариацию на T и непрерывных справа на интервале $(t_0,t_1);\ V^n(T)$ — пространство n-мерных вектор-функций $x(t)=(x^1(t),\dots,x^n(t))$ таких, что $x^j \in V(T), \ j=1,\dots,n; \ C^*(T)$ — пространство, топологически сопряженное к C(T). Известно, что элементами $C^*(T)$ служат борелевские заряды на T, т.е. счетно-аддитивные функции множеств, заданные на $\sigma(T)$, где $\sigma(T)-\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств T. Точнее, всякий линейный непрерывный функционал на C(T) имеет вид

$$S(f) = \int_{T} f(t)d\mu,$$

где $\mu-$ борелевский заряд на T, причем $\|S\|=|\mu|(T)$ (см. [22]). Здесь $|\mu|-$ вариация заряда μ . Вариацией борелевского заряда μ называется борелевская мера (т.е. неотрицательный заряд) $|\mu|=\mu^++\mu^-$, где μ^+ , μ^-- дизъюнктные борелевские меры из разложения Жордана заряда μ : $\mu=\mu^+-\mu^-$. Полной вариацией заряда μ называется величина $\|\mu\|=|\mu|(T)$, т.е. норма элемента μ в $C^*(T)$ (см. [24]). Известно также, что $C^*(T)$ изоморфно $V_0(T)=\{g\in V(T):g(t_0)=0\}$ с нормой $\|g\|=\mathrm{Var}\,|_{t_0}^{t_1}[g]$ [22]; здесь $\mathrm{Var}\,|_a^b[g]$ означает вариацию функции g на сегменте [a,b] (см. [22]). Обозначим далее через $C_+^*(T)$ множество борелевских мер, заданных на T, а через $C_K^*(T)-$ множество k_4 -векторных борелевских мер, принимающих значения в выпуклом замкнутом конусе K. Последнее означает, что $\mu(B)\in K$ $\forall B\in\sigma(T)$. Запись $\mu_1\leqslant\mu_2$, где $\mu_1,\mu_2\in C_K^*(T)$, означает, что $\mu_2^j-\mu_1^j\in C_+^*(T)$, $j=1,\ldots,k_4$.

что $\mu_2^j - \mu_1^j \in C_+^*(T), \ j=1,\dots,k_4.$ Пусть $g \in V(T)$ и $s \in T$. Положим $g(s^+) = \lim_{t \to s+} g(t), \ g(s^-) = \lim_{t \to s-} g(t)$ — правый и левый пределы функции в точке соответственно. Через c, c_1, c_2, \dots , и т.д. будем обозначать положительные константы.

Если $\mu \in C^*(T)$ — борелевский заряд на $T=[t_0,t_1]$, то его функция распределения $F(t;\mu)$ определяется формулой

$$F(t;\mu) = \int_{[t_0,t]} d\mu = \mu([t_0,t]), \quad t \in (t_0,t_1], \quad F(t_0;\mu) = 0.$$

Из счетной аддитивности борелевского заряда μ вытекает, что $F(t;\mu) \in V_0(T)$. Если $\mu \in C_+^*(T)$, то $F(t;\mu)$ монотонно неубывающая, непрерывная справа на (t_0,t_1) функция, причем $F(t_1;\mu) = \|\mu\|$. И, обратно: любая функция $g \in V(T)$ определяет борелевский заряд $\vartheta[g]$ по формуле [22, теорема 6, с. 29]

$$\vartheta[g]([t_0, t]) = g(t^+) - g(t_0), \quad t \in T.$$

Таким образом, $\vartheta[F(t;\mu)]=\mu$. Меру, порожденную длиной, обозначим через $\mathcal L$. По определению $\mathcal L=\vartheta[t]$. Меру Дирака в точке r будем обозначать $\delta(r)$. Если $x\in V^n(T)$, то $\vartheta[x]$ — векторная мера, компонентами которой служат заряды $\vartheta[x^j],\ j=1,\dots,n$, и соответственно, если $\mu\in C_K^*(T)$, то $F(t;\mu)$ — векторная функция, компоненты которой суть функции распределения компонент μ . Вариация вектор-меры (вектор-функции) определяется как сумма вариаций ее компонент.

Когда будет ясно, о каких функциях идет речь, для краткости будем писать F(t) вместо $F(t;\mu)$ и $F_i(t)$ вместо $F(t;\mu_i)$. Функции $f\in V(T)$ считаются определенными на всей числовой оси. Значения f вне отрезка T определяются по непрерывности константами: $f(t)=f(t_1)$, если $t>t_1$ и $f(t)=f(t_0)$, если $t< t_0$. Аналогично борелевские заряды $\mu\in C^*(T)$ продолжим на всю прямую, положив $\mu(B)=\mu(B\cap T)$ для произвольного борелевского множества $B\subset \mathbb{R}^1$.

Пусть $\mu \in C_K^*(T)$, тогда компонентами векторных мер μ_c и μ_d служат непрерывные и соответственно дискретные составляющие компонент μ . По определению $\mu = \mu_c + \mu_d$; $\mu_c, \mu_d \in C_K^*(T)$. Носитель векторной меры $\sup(\mu)$ определяется как носитель вариации: $\sup(\mu) = \sup(|\mu|)$. Носитель борелевской меры на отрезке, в свою очередь, определяется как множество точек роста ее функции распределения. Введем обозначения: $\operatorname{Ds}(\mu) = \{r \in T : |\mu|(\{r\}) > 0\} - \operatorname{Дискретный}$ носитель векторной меры, $\operatorname{Cont}(\mu) = [T \setminus \operatorname{Ds}(\mu)] \cup \{t_0\} \cup \{t_1\}$ — множество точек непрерывности функции распределения $F(t;\mu)$, включая концы отрезка $[t_0,t_1]$; ясно, что $\operatorname{Cont}(\mu) \cup \operatorname{Ds}(\mu) = T$.

Слабая-* сходимость в $C^*(T)$ определяется так: последовательность зарядов $\mu_i \in C^*(T)$ слабо сходится к заряду $\mu \in C^*(T)$ (обозначается $\mu_i \stackrel{w}{\to} \mu$), если

$$\int_{T} f(t) d\mu_{i} \to \int_{T} f(t) d\mu \quad \forall f \in C(T).$$

Последовательность векторных мер слабо сходится, если слабо сходятся все компоненты. Запись $(\mu_i, |\mu_i|) \stackrel{w}{\to} (\mu, \nu)$ означает, что помимо слабой сходимости самих мер $\mu_i \stackrel{w}{\to} \mu$ имеет место еще и слабая сходимость вариаций $|\mu_i| \stackrel{w}{\to} \nu$.

Приведем ряд известных утверждений, которыми будем пользоваться.

- Если $\mu_i \in C_K^*(T)$ и $\mu_i \stackrel{w}{\to} \mu$, то 1) $\mu \in C_K^*(T)$ (проверяется непосредственно) и 2) $\|\mu_i\| \leqslant \text{const}$ $\forall i$ (теорема Банаха—Штейнгауза [33]).
- Если $\mu_i \in C_K^*(T)$ и $(\mu_i, |\mu_i|) \stackrel{w}{\to} (\mu, \nu)$, то 1) $|\mu| \leqslant \nu$ (см. [17, с. 238]) и 2) $F(t; \mu_i) \to F(t; \mu)$ $\forall t \in \mathrm{Cont}(\nu)$ [1, лемма 7.1, с. 134].
- Пусть $f_i \in V(T)$, $f_i(t) \to \tilde{f}(t) \ \forall t \in T$. Тогда, если $\mathrm{Var} \, |_T[f_i] \leqslant c \ \forall i$, то $\exists f \in V(T) : \mathrm{Var} \, |_T[f] \leqslant c$, $f(t) = \tilde{f}(t)$ п.в. и $\vartheta[f_i] \overset{w}{\to} \vartheta[f]$ (1-я теорема Хелли [24, с. 359]).
- В пространстве $C^*(T)$ замкнутый единичный шар $B_1 = \{ \mu \in C^*(T) : \|\mu\| \leqslant 1 \}$ слабо-* секвенциально компактен [24, теорема 3, с. 199].
- Пусть $f_i \in V(T)$ и $\operatorname{Var}|_T[f_i] \leqslant c \ \forall i$. Тогда существует подпоследовательность $\{f_{i_k}\}$, сходящаяся в каждой точке отрезка T (2-я теорема Хелли [24, с. 360]).

Рассмотрим две функции $f,g\in V(T)$. Функция f — борелевская 1 и, следовательно, измерима относительно борелевской меры $|\vartheta[g]|$. К тому же f ограничена. Тогда существует интеграл Лебега—Стильтьеса функции f по заряду $\vartheta[g]$

$$\int_{T} f(t) \, d\vartheta[g].$$

Предположим теперь, что $\mathrm{Ds}(\vartheta[f])\cap\mathrm{Ds}(\vartheta[g])=\varnothing$. В таком случае определен интеграл Римана—Стильтьеса функции f(t) по функции g(t)

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) \, dg(t),$$

и его значение совпадает со значением интеграла Лебега—Стильтьеса [22, с. 41]. Интеграл Римана—Стильтьеса можно интегрировать по частям [22, задача 224]:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) dg(t) = f(t_1)g(t_1) - f(t_0)g(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} g(t) df(t).$$

Тем самым, формула интегрирования по частям справедлива и для интеграла Лебега-Стильтьеса

$$\int_{T} f(t) \, d\vartheta[g] = f(t_1)g(t_1) - f(t_0)g(t_0) - \int_{T} g(t) \, d\vartheta[f],$$

как только функции f и g не имеют общих точек разрывов на отрезке $[t_0,t_1]$. Пусть $f_i\in V(T)$: $f_i(t)\to f(t)\ \forall t\in \mathrm{Cont}(\vartheta[f])$. Тогда $f_i\to f$ п.в. относительно меры $|\vartheta[g]|$. Действительно, множество $\mathrm{Ds}(\vartheta[f])$ имеет нулевую $|\vartheta[g]|$ -меру, так как дискретные носители борелевских зарядов $\vartheta[f]$ и $\vartheta[g]$ не пересекаются. Если $\sup_{t\in T}|f_i(t)|\leqslant c\ \forall i$, то по теореме Лебега [22, с. 43] осуществим предельный переход под знаком интеграла:

$$\int_T f_i(t) \, d\vartheta[g] \to \int_T f(t) \, d\vartheta[g].$$

 $^{^{1}}$ Действительно, f представима в виде суммы двух монотонных функций, которые, в свою очередь, являются борелевскими по определению.

Пусть
$$x(t)=\int\limits_{[t_0,t]}f(s)\,d\mu,\,t>t_0,\,x(t_0)=0,$$
 где $f\in V(T),\,\mu\in C^*(T).$ В этом случае будем гово-

рить, что функция x порождается зарядом μ . Тогда $x \in V(T)$, и заряд $\vartheta[x]$ абсолютно непрерывен относительно меры $|\mu|$. Действительно, для функции x справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{s \in [a,b]} |x(s) - x(a)| \leqslant \operatorname{Var}|_a^b[x] \leqslant \sup_{s \in [a,b]} |f(s)| \times |\mu|([a,b]) \quad \forall a, b \in T, \quad a \leqslant b, \tag{2.1}$$

вытекающее из свойств интеграла Римана—Стильтьеса [24, с. 356].

Будем говорить, что вариация функции $x \in V(T)$ мажорируется мерой $\nu \in C_+^*(T)$, если $\mathrm{Var}\,|_a^b[x] \leqslant c\nu([a,b]) \; \forall a,b \in T,\; a \leqslant b,\;$ или, по-другому, $|\vartheta[x]| \leqslant c\nu.$ Например, если функция x порождается зарядом μ , то вариация x мажорируется $|\mu|$. Пусть $|\vartheta[x]| \leqslant c\nu$. Тогда выполняются следующие условия:

- а) функция x непрерывна в каждой точке множества $(t_0,t_1)\cap {
 m Cont}(
 u);$
- б) если $g: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ липшицевая функция, то g(x) также мажорируется ν .

Пусть $x_i \in V(T)$, $x_i(t) \to \tilde{x}(t) \ \forall t \in T$, $\nu_i \in C_+^*(T)$, $\nu_i \stackrel{w}{\to} \nu$. Будем говорить, что последовательность вариаций функций x_i мажорируется последовательностью мер $\{\nu_i\}$, если $|\vartheta[x_i]| \leqslant c\nu_i$ $\forall i$. Тогда $\mathrm{Var}\,|_a^b[\tilde{x}] \leqslant c\nu([a,b]) \ \forall a \leqslant b,^1$ и точки непрерывности $F(t;\nu)$ суть точки непрерывности функции \tilde{x} . Легко видеть, что существует функция $x \in V(T)$ такая, что $x(t) = \tilde{x}(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\nu)$, $|\vartheta[x]| \leqslant c\nu$, т.е. $x_i(t) \to x(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\nu)$, но здесь x уже не произвольная функция, а элемент пространства V(T).

Если функция $\varphi: T \to \mathbb{R}^1$ неотрицательна, непрерывна и

$$\varphi(t) \leqslant c \int_{t_0}^t \varphi(s)ds + b, \quad b \geqslant 0, \quad t \in T,$$

то имеет место неравенство Гронуолла [11, с. 450]: $\varphi(t) \leqslant be^c$.

Пусть $u\in L^m_\infty(T),\ u(t)\in U\subseteq \mathbb{R}^m$ п.в. $t,\ |U|\leqslant c,\ \mathbf{q}=(\mu;\{v_r\}),\$ где $\mu\in C^*_K(T)$ и $\{v_r\}-$ присоединенное к μ семейство функций (определение см. в § 1). Рассмотрим уравнение для задачи оптимального импульсного управления

$$dx = f(x, u, t)dt + g(x, t)d\mathbf{q}, \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$
 (2.2)

Для доказательства утверждений, приведенных в § 3, требования относительно функций f,g, выдвинутые в § 1, являются слишком сильными, и их можно ослабить. Предположим, что в уравнении (2.2) функция f липшицева по x для п.в. t в каждом шаре равномерно по (x,u,t), измерима по t при любых фиксированных (x,u), непрерывна по (x,u) для п.в. t, и для любого ограниченного множества $B \subset \mathbb{R}^n \times U$ функция $\sup_{(x,u) \in B} |f(x,u,t)|$ суммируема на T. Функция g

липшицева по (x, t) в каждом шаре.

Пусть $x \in V^n(T)$. Положим $D(t) = Ds(|\mathbf{q}|) \cap [t_0, t]$ и определим функцию

$$\Phi(x,t) = \sum_{r \in D(t)} [\alpha_r(1) - x(r^-)], \tag{2.3}$$

где $\dot{\alpha}_r = g(\alpha_r, r)v_r, s \in [0, 1], \alpha_r(0) = x(r^-).$

Так как x(t) ограничена, то ряд (2.3) сходится абсолютно в каждой точке отрезка T и представляет собой ограниченную функцию в силу требований, наложенных выше на g. Функция $x \in V^n(T)$ называется решением уравнения (2.2), отвечающим набору (x_0, u, \mathbf{q}) , если

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x, u, s) ds + \int_{[t_0, t]} g(x, s) d\mu_c + \Phi(x, t), \quad t \in (t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0.$$

 $^{^1}$ Следствие неравенства $\operatorname{Var}|_a^b[\tilde{x}] \leqslant \liminf_{i \to \infty} \operatorname{Var}|_a^b[x_i].$

В следующем параграфе на множестве всех импульсных управлений вводится метрика, относительно которой осуществимы корректные предельные переходы в уравнении (2.2). Здесь, не трогая вопрос о метрике, укажем на следующий полезный факт, вытекающий из доказанной в § 3 леммы 3.2. Рассмотрим последовательность импульсных управлений \mathbf{q}_i таких, что $\|\mathbf{q}_i\| \leqslant \mathrm{const}^1$, и пусть $u_i \to u$ п.в., $x_{0,i} \to x_0$, а $x_i(t) \in V^n(T)$ — решение уравнения

$$dx_i = f(x_i, u_i, t)dt + g(x_i, t)d\mathbf{q}_i, \quad t \in T, \quad x_i(t_0) = x_{0,i}.$$

Тогда, если $\operatorname{gc\,sup}|x_i(t)|\leqslant \operatorname{const}$, то найдется импульсное управление \mathbf{q} такое, что, переходя к подпоследовательности, имеем $x_i(t)\to x(t)\ \forall t\in \operatorname{Cont}(|\mathbf{q}|)$, где x(t) — траектория, отвечающая набору (x_0,u,\mathbf{q}) .

При этом утверждать, что $\sup_{t \in T} |x_i(t)| \to \sup_{t \in T} |x(t)|$, $i \to \infty$, нельзя, однако имеет место такая сходимость: $\gcd_{t \in T} |x_i(t)| \to \gcd_{t \in T} |x(t)|$.

3. Леммы и предложения

Лемма 3.1. Пусть имеются слабо сходящаяся последовательность зарядов $\mu_i \in C^*(T)$ такая, что $(\mu_i, |\mu_i|) \stackrel{w}{\to} (\mu, \nu)$, и последовательность функций $f_i \in V(T)$, относительно которых выполняются следующие условия:

- 1) существует слабо сходящаяся последовательность мер $\eta_i \in C_+^*(T)$, $\eta_i \stackrel{w}{\to} \eta$, такая, что $\mathrm{Ds}(\nu) \cap \mathrm{Ds}(\eta) = \varnothing$ и $|\vartheta[f_i]| \leqslant c\eta_i \ \forall i;$
- 2) $f_i(t) \to f(t) \ \forall t \in \text{Cont}(\eta)$, ede $f \in V(T)$.

Тогда

$$A_i = \int_T f_i(t) d\mu_i \to \int_T f(t) d\mu.$$

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству собственно утверждения леммы, отметим следующие два простых факта.

1. Пусть $\mu_i \in C^*(T), \; (\mu_i, |\mu_i|) \xrightarrow{w} (\mu, \nu), \; t_i \to s \in T.$ Тогда

$$\max\{F(s^{-};\mu), F(s^{+};\mu)\} - \nu(\{s\}) \leqslant \liminf_{t_{i} \to s} F(t_{i};\mu_{i}) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{t_{i} \to s} F(t_{i};\mu_{i}) \leqslant \min\{F(s^{-};\mu), F(s^{+};\mu)\} + \nu(\{s\}). \tag{3.1}$$

Действительно, известно, что $F_i(t) = F(t;\mu_i) \in V_0(T)$ и $F_i(t) \to F(t) = F(t;\mu)$ $\forall t \in \mathrm{Cont}(\nu)$. Последний факт несложно выводится из [1, лемма 7.1, с. 134] и представления функции F в виде суммы двух монотонных функций, одна из которых — ее вариация. Далее пусть для определенности $F(s^-) \leqslant F(s^+)$. Последовательность $\{F_i(t_i)\}$ ограничена. Выделим подпоследовательность $F_i(t_i) \to a$. Предположим, что $a > F(s^-) + \nu(\{s\})$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $s - \varepsilon \in \mathrm{Cont}(\nu)$. При достаточно больших i имеем $t_i > s - \varepsilon$. Следовательно, $F_i(s - \varepsilon) - F_i(t_i) + |\mu_i|([s - \varepsilon, t_i]) \geqslant 0$. Переходя к пределу при $i \to \infty$, получим, что $F(s - \varepsilon) + \nu([s - \varepsilon, s]) \geqslant a$. Устремляя теперь ε к нулю, приходим к противоречию: $F(s^-) + \nu(\{s\}) \geqslant a > F(s^-) + \nu(\{s\})$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

2. Пусть $\mu_i \in C^*(T)$, $(\mu_i, |\mu_i|) \stackrel{w}{\to} (\mu, \nu)$, $\varepsilon \geqslant 0$, и K — замкнутое подмножество T такое, что $\nu(\{t\}) \leqslant \varepsilon \ \forall t \in K$, т.е. K не содержит атомов меры ν величиной, большей ε . Тогда

$$\limsup_{i \to \infty} \sup_{t \in K} |F(t; \mu_i) - F(t; \mu)| \leq \varepsilon.$$
(3.2)

Действительно, построим последовательность точек t_i так, чтобы

$$|F_i(t_i) - F(t_i)| + \frac{1}{i} \geqslant \sup_{t \in K} |F_i(t) - F(t)|.$$

¹Здесь и далее $\|\mathbf{q}\| = |\mathbf{q}|(T)$.

Пользуясь компактностью множества K, переходя к подпоследовательности, имеем $t_i \to s$, где $s \in K$. Теперь (3.2) вытекает из (3.1).

Перейдем непосредственно к доказательству. При этом для простоты будем считать, что $\mathrm{Ds}(\mu_i) \cap \mathrm{Ds}(\eta_i) = \varnothing$. Такое предположение не ограничит общности рассуждений. Действительно, в силу условия $\mathrm{Ds}(\nu) \cap \mathrm{Ds}(\eta) = \varnothing$ и слабой сходимости, имеем $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N = N(\varepsilon) \colon |\mu_i| (\mathrm{Ds}(\mu_i) \cap \mathrm{Ds}(\eta_i)) \leqslant \varepsilon \; \forall i \geqslant N$.

Покажем, что существует последовательность абсолютно непрерывных зарядов $\hat{\mu}_i$ такая, что

1) $(\hat{\mu}_i, |\hat{\mu}_i|) \xrightarrow{w} (\mu, \nu);$

$$2) \quad \left| \hat{A}_i - A_i \right| o 0$$
 при $i o \infty$, где $\hat{A}_i = \int\limits_{\mathbb{T}} f_i(t) d\hat{\mu}_i.$

Для каждого i рассмотрим слабо сходящуюся к μ_i последовательность абсолютно непрерывных мер $\{\mu_{i,\tau}\}: (\mu_{i,\tau}, |\mu_{i,\tau}|) \stackrel{w}{\to} (\mu_i, |\mu_i|), \ \tau \to \infty$. Пусть $\{\phi_k\}$ — счетное, всюду плотное в $C^2(T)$ множество функций. Для каждого i выберем номер τ_i так, чтобы выполнялось

$$\sum_{k=1}^{i} \left| \int_{T} \phi_k(t) d(\mu_{i,\tau_i}, |\mu_{i,\tau_i}|) - \int_{T} \phi_k(t) d(\mu_i, |\mu_i|) \right| + \left| A_i - \int_{T} f_i(t) d\mu_{i,\tau_i} \right| \leqslant \frac{1}{i}.$$
 (3.3)

Покажем, что такой номер au_i всегда существует. Интегрируя по частям, при каждых (i, au) имеем

$$\left| A_i - \int_T f_i(t) \, d\mu_{i,\tau} \right| \le \left| f_i(t_1) [F(t_1; \mu_{i,\tau}) - F_i(t_1)] \right| + \int_T \left| F(t; \mu_{i,\tau}) - F_i(t) \right| d\vartheta[f_i].$$

Поскольку $(\mu_{i,\tau}, \mu_{i,\tau}) \xrightarrow{w} (\mu_i, |\mu_i|)$, то $F(t; \mu_{i,\tau}) \to F_i(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\mu_i)$ при $\tau \to \infty$. Но множество $\mathrm{Ds}(\mu_i)$ по сделанному предположению имеет нулевую $|\vartheta[f_i]|$ -меру. Тогда $F(t; \mu_{i,\tau}) \to F_i(t) \ |\vartheta[f_i]|$ - п.в. Теперь, используя теорему Лебега, несложно указать номер τ_i так, чтобы выполнялось (3.3).

п.в. Теперь, используя теорему Лебега, несложно указать номер τ_i так, чтобы выполнялось (3.3). Положим $\hat{\mu}_i = \mu_{i,\tau_i}$. Тогда из (3.3) следует, что $(\hat{\mu}_i,|\hat{\mu}_i|) \stackrel{w}{\to} (\mu,\nu)$ и $|\hat{A}_i - A_i| \to 0$ при $i \to \infty$. Из неравенства треугольника имеем

$$\left| \int_{T} f_i(t) \, d\hat{\mu}_i - \int_{T} f(t) \, d\mu \right| \leqslant \left| \int_{T} f_i(t) \, d(\hat{\mu}_i - \mu) \right| + \left| \int_{T} \left[f_i(t) - f(t) \right] d\mu \right|. \tag{3.4}$$

Второе слагаемое справа стремится к нулю по теореме Лебега. Действительно, $f_i(t) \to f(t)$ μ -п.в. К тому же f_i равномерно ограничены, так как их вариации мажорируются слабо сходящейся последовательностью мер.

Таким образом, осталось доказать, что $\int\limits_T f_i(t) d(\hat{\mu}_i - \mu) \to 0$. Положим $\hat{F}_i(t) = F(t; \hat{\mu}_i)$. Интегрируя по частям, выводим

$$\int_{T} f_i(t) d(\hat{\mu}_i - \mu) = f_i(t_1) [\hat{F}_i(t_1) - F(t_1)] - \int_{T} [\hat{F}_i(t) - F(t)] d\vartheta [f_i].$$

Из слабой сходимости $\hat{F}_i(t_1) o F(t_1)$. Докажем, что $\int\limits_T [\hat{F}_i(t) - F(t)] d\vartheta[f_i] o 0.$

Существуют две возможности: $\mathrm{Ds}(\nu)=\varnothing$ и $\mathrm{Ds}(\nu)\ne\varnothing$. Пусть $\mathrm{Ds}(\nu)=\varnothing$. Тогда мера μ непрерывна, и следствие из неравенства (3.2) с $\varepsilon=0$, K=T завершает доказательство. Пусть $\mathrm{Ds}(\nu)\ne\varnothing$. Фиксируем достаточно малое $\varepsilon>0$. Найдется конечное непустое множество точек $s_j\in\mathrm{Ds}(\nu)$, $j=1,\ldots,N,\ N=N(\varepsilon)\geqslant 1$, таких, что $\nu(\{s_j\})\geqslant \varepsilon$. Поскольку $\mathrm{Ds}(\nu)\cap\mathrm{Ds}(\eta)=\varnothing$, то $\forall j\leqslant N$ $\exists \delta_j>0: \eta(C_j)\leqslant \varepsilon N^{-1}$, где $C_j=[s_j-\delta_j,s_j+\delta_j]$, C_j попарно не пересекаются и $s_j\pm\delta_j\in\mathrm{Cont}(\eta)$. Пусть O_j — окрестность точки s_j такая, что $O_j\subset C_j$. Тогда $O=\bigcup_{j=1}^N O_j$ — открытое множество.

Следовательно, $K=T\setminus O$ замкнуто. При этом $O\subset C$, где $C=\bigcup_{j=1}^N C_j$ и $\eta(O)\leqslant \eta(C)\leqslant \varepsilon$. Отсюда

$$\left| \int_{T} \left[\hat{F}_{i}(t) - F(t) \right] d\vartheta[f_{i}] \right| \leq \int_{K} \left| \hat{F}_{i}(t) - F(t) \right| d|\vartheta[f_{i}]| + \int_{C} \left| \hat{F}_{i}(t) - F(t) \right| d|\vartheta[f_{i}]|.$$

Используя (3.2) и условие $|\vartheta[f_i]| \leqslant c\eta_i \ \forall i$, приходим к оценке

$$\lim \sup_{i \to \infty} \left| \int_{T} [\hat{F}_{i}(t) - F(t)] d\vartheta[f_{i}] \right| \leq \lim \sup_{i \to \infty} \left(\sup_{t \in K} |\hat{F}_{i}(t) - F(t)| |\vartheta[f_{i}]|(K) \right) +$$

$$+ \lim \sup_{i \to \infty} \left(\sup_{t \in C} |\hat{F}_{i}(t) - F(t)| |\vartheta[f_{i}]|(C) \right) \leq \varepsilon c ||\eta|| + 2\varepsilon c ||\nu|| \leq c_{1}\varepsilon.$$

Но $\varepsilon>0$ произвольно, следовательно, правая часть в (3.4) стремится к нулю. Лемма доказана.

Замечание. В условиях леммы 3.1 отказаться от требования мажорируемости вариаций функций f_i слабо сходящейся последовательностью мер, заменив его, скажем, на более слабое условие равномерной ограниченности по вариации, нельзя.

Пример 3.1. Пусть T=[0,1], $\mu_i=\delta(t_i)$ — последовательность мер Дирака, сосредоточенных в точках $t_i=\frac{1}{i}$. Рассмотрим следующую последовательность функций $\{f_i\}$ (горбики):

$$f_i(t) = \begin{cases} it, & t \in [0, i^{-1}], \\ 2 - it, & t \in [i^{-1}, 2i^{-1}], \\ 0, & t \in [2i^{-1}, 1]. \end{cases}$$

Ясно, что $\mu_i \stackrel{w}{\to} \mu = \delta(0)$, а $f_i(t) \to 0 \ \forall t \in [0,1]$. Тем не менее $\int\limits_{[0,1]} f_i(t) d\mu_i = 1 \ \forall i$, в то время как

 $\int\limits_{[0,1]}f(t)d\mu=0$. Дело в том, что для построенных в примере последовательностей $\{\mu_i\}$ и $\{f_i\}$ не

существует последовательности мер $\{\eta_i\}$, удовлетворяющей условиям леммы 3.1. Действительно, $|\vartheta[f_i]| \stackrel{w}{\to} \eta = 2\delta(0)$, но $\mathrm{Ds}(\mu) \cap \mathrm{Ds}(\eta) = \{0\} \neq \varnothing$.

Предложение 3.1. Пусть выполнены все условия леммы 3.1. Положим

$$x_i(t) = \int_{[t_0,t]} f_i(s) d\mu_i, \quad x(t) = \int_{[t_0,t]} f(s) d\mu, \quad t \in (t_0,t_1], \quad x_i(t_0) = x(t_0) = 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

и рассмотрим сходящуюся последовательность точек $\{t_i\}$, $t_i \to s \in T$. Тогда если $s \notin \mathrm{Ds}(\nu)$, то $x_i(t_i) \to x(s)$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $s \pm \varepsilon \in \mathrm{Cont}(\nu) \cap \mathrm{Cont}(\eta)$, и рассмотрим разность

$$x_i(s+\varepsilon) - x_i(t_i) = \int_{[t_i, s+\varepsilon]} f_i(t) d\mu_i = A_{i,\varepsilon}.$$

Из (2.1) следует $|A_{i,\varepsilon}| \leq c |\mu_i| ([t_i, s + \varepsilon]) \ \forall i$. Переходя к пределу, получим

$$-c\nu([s,s+\varepsilon]) \leqslant \liminf_{i \to \infty} [x_i(s+\varepsilon) - x_i(t_i)] \leqslant \limsup_{i \to \infty} [x_i(s+\varepsilon) - x_i(t_i)] \leqslant c\nu([s,s+\varepsilon]).$$

По лемме 3.1 $x_i(s+\varepsilon) \to x(s+\varepsilon)$ при $i \to \infty$. Поэтому

$$x(s+\varepsilon)-c\nu([s,s+\varepsilon]) \leqslant \liminf_{i\to\infty} x_i(t_i) \leqslant \limsup_{i\to\infty} x_i(t_i) \leqslant x(s+\varepsilon)+c\nu([s,s+\varepsilon]).$$

Устремив $\varepsilon \to 0$, завершим доказательство.

Предложение 3.2. Рассмотрим вектор-функцию $x(t): x \in V^n(T)$, $|\vartheta[x]| \leqslant c\nu$, и скалярную функцию $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. Тогда если ϕ липшицева, то вариация суперпозиции $\phi(x,\cdot)$ мажорируется мерой $\nu + \mathcal{L}$.

Доказательство. По определению вариации функции на отрезке

$$\operatorname{Var} \Big|_{a}^{b} [g(x,t)] = \sup_{S_{N}} \sum_{k=1}^{N} \Big| \phi(x(s_{k}), s_{k}) - \phi(x(s_{k-1}), s_{k-1}) \Big|.$$

Здесь верхняя грань берется по всем возможным конечным разбиениям отрезка [a,b]. Воспользуемся липшицевостью ϕ и тем, что $|\vartheta[x]| \leqslant c\nu$.

$$\sum_{k=1}^{N} \left| \phi(x^{1}(s_{k}), \dots, x^{n}(s_{k}), s_{k}) - \phi(x^{1}(s_{k-1}), \dots, x^{n}(s_{k-1}), s_{k-1}) \right| \leqslant$$

$$\leq c_1 \left(\sum_{j=1}^n \operatorname{Var} \left| a^b [x^j] + b - a \right) \leq \operatorname{const}[\nu([a, b]) + \mathcal{L}([a, b])].$$

Предложение доказано.

Предложение 3.3. Если для некоторого фиксированного набора (x_0, u, \mathbf{q}) , $\mathbf{q} = (\mu, \{v_r\})$, решение уравнения (2.2) существует, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют функции $x,y \in V^n(T), x \neq y$, и x,y удовлетворяют (2.2). По определению решения

$$|x(t) - y(t)| \le \int_{t_0}^t |f(x, u, s) - f(y, u, s)| ds + \int_{[t_0, t]} |g(x, s) - g(y, s)| d|\mu_c| + |\Phi(x, t) - \Phi(y, t)| \quad \forall t \in T.$$

Используя неравенство Гронуолла, приходим к оценке

$$\sup_{s \in [t_0, t]} |x(s) - y(s)| \le \int_{[t_0, t]} c|x(s) - y(s)| (d|\mu_c| + ds) + \sum_{s \in D(t)} c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})}|x(s^-) - y(s^-)| \le c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|(\{s\})e^{c|\mathbf{q}|$$

$$\leq c \sup_{s \in [t_0, t]} |x(s) - y(s)| \times (|\mu_c|([t_0, t]) + t - t_0) + c_1 \sum_{s \in D(t)} |\mathbf{q}|(\{s\})A_s,$$

где
$$A_s = \left| x(s^-) - y(s^-) \right|, \ s \in D(t), \ D(t) = \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}|) \cap [t_0, t], \ c_1 = ce^{c\|\mathbf{q}\|}.$$
 Обозначим $\phi(t) = \sup_{s \in [t_0, t]} \left| x(s) - y(s^-) \right|$

 $y(s)|, \ \gamma(t) = c(|\mu_c|([t_0,t]) + t - t_0).$ Пронумеруем атомы меры $|\mathbf{q}|$ на $[t_0,t]$ в порядке убывания их величины. Получим последовательность $a_j = |\mathbf{q}|(\{s_j\}), \ s_j \in D(t), \ j \in \mathbb{N}$. При этом может оказаться, что мера $|\mathbf{q}|$ не имеет или имеет лишь конечное число атомов $s_j, \ j = 1, \ldots, p, \ p \geqslant 1$ на отрезке $[t_0,t]$. В первом случае положим $a_j = 0 \ \forall j$, во втором $a_j = 0 \ \forall j > p$. По построению

 $a_{j+1}\leqslant a_j,\ a_j\to 0+,\ j\to\infty$ и $\sum_{j=1}^\infty a_j\leqslant \|\mathbf{q}\|.$ Теперь в новых обозначениях полученное неравенство примет вид

$$\phi(t) \leqslant \phi(t)\gamma(t) + c_1 \sum_{j=1}^{\infty} a_j A_{s_j}. \tag{3.5}$$

Наша задача — оценить ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_j A_{s_j}$.

Фиксируем $\varepsilon>0$. Поскольку $A_{s_j}\leqslant\phi(t)$ $\forall j$, то существует натуральное число $N=N(\varepsilon)$ такое,

что
$$\sum_{j=N+1}^\infty a_j A_{s_j} \leqslant arepsilon \phi(t)$$
. Оценим частичную сумму $S_N = \sum_{j=1}^N a_j A_{s_j}$. При этом, не ограничивая

общности, можно считать, что $s_i < s_{i+1}, j = 1, \dots, N-1$. Из (3.5) вытекает

$$A_{s_1} \leqslant \phi(t)\gamma(t) + c_1\varepsilon\phi(t) = Q(t),$$

$$A_{s_2} \leqslant Q(t) + a_1 A_{s_1} \leqslant Q(t)(1 + a_1),$$

$$A_{s_3} \leq Q(t) + a_1 A_{s_1} + a_2 A_{s_2} \leq Q(t) + a_1 Q(t) + a_2 (1 + a_1) Q(t) = Q(t)(1 + a_1)(1 + a_2),$$

и так далее. Наконец,

$$A_{s_N} \leqslant Q(t) \prod_{j=1}^{N-1} (1 + a_j).$$

Таким образом,

$$S_N \leqslant Q(t) \sum_{j=1}^N a_j \prod_{i=1}^{j-1} (1 + a_i).$$

Произведение $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j)$ сходится, так как сходится числовой ряд $\sum_{j=1}^{\infty}\ln(1+a_j)\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}a_j\leqslant \|\mathbf{q}\|$ [21,

с. 58]. Тогда $S_N \leqslant Q(t) \sum_{j=1}^N a_j e^{\|\mathbf{q}\|} \leqslant Q(t) \|\mathbf{q}\| e^{\|\mathbf{q}\|}$. Теперь из (3.5) следует

$$\phi(t) \leq \phi(t)\gamma(t) + c_1 \left[\varepsilon \phi(t) + Q(t) \|\mathbf{q}\| e^{\|\mathbf{q}\|} \right]$$

Отсюда

$$\phi(t) \leqslant \phi(t) [\gamma(t) + \varepsilon c_1] [1 + c_1 \|\mathbf{q}\|e^{\|\mathbf{q}\|}].$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, окончательно имеем

$$\phi(t) \leqslant c \left[1 + c \|\mathbf{q}\| e^{c(1+\|\mathbf{q}\|)} \right] (|\mu_c|([t_0, t]) + t - t_0)\phi(t) \quad \forall t \in T.$$
(3.6)

Единственность теперь вытекает из непрерывности борелевской меры $|\mu_c|$. Действительно, существует $s_1 > t_0$, $c \left[1+c\|\mathbf{q}\|e^{c(1+\|\mathbf{q}\|)}\right] (|\mu_c|([t_0,s_1])+s_1-t_0) < 1$. Тогда $\phi(s_1)=0$, и на отрезке $[t_0,s_1]$ решения x(t) и y(t) совпадают. На отрезке $[s_1,t_1]$ выполнены условия предложения. Применяя описанную процедуру к отрезку $[s_1,t_1]$, найдем s_2 такое, что x(t)=y(t) $\forall t\in[s_1,s_2]$ и т.д. Легко видеть, что за конечное число шагов можно пройти весь отрезок T. Тогда $x(t)\equiv y(t)$. Что и требовалось доказать.

Предложение 3.4. Пусть x(t) — решение (2.2) и, кроме того, функции f, g липшицевы c константой c>0 по x равномерно по $(x,u,t)\in\mathbb{R}^n\times U\times T$. Тогда

$$|x(t)| \leqslant k_1 |x_0| + k_2 \quad \forall t \in T, \tag{3.7}$$

ede
$$k_1 = b_1^p$$
, $k_2 = \sum_{j=1}^p b_1^{j-1} b_2$, $p = [2(\|\mathbf{q}\| + 1)b_3] + 1$,

$$b_1 = 2(1 + c\|\mathbf{q}\|e^{c(1+\|\mathbf{q}\|)}), \quad b_2 = b_1c_1\|\mathbf{q}\|(1 + e^{c\|\mathbf{q}\|}), \quad b_3 = \frac{cb_1}{2}, \quad c_1 = \max_{s \in T} |g(0,s)|.$$

Доказательство. Положим $\phi(t)=\sup_{s\in[t_0,t]}|x(s)|,\ \gamma(t)=c\big(|\mu_c|\big([t_0,t]\big)+t-t_0\big).$ Рассуждая так же, как и при доказательстве предложения 3.3, имеем

$$\phi(t) \leq |x_0| + \phi(t)\gamma(t) + c_1\|\mathbf{q}\| + c_1\|\mathbf{q}\|e^{c\|\mathbf{q}\|} + ce^{c\|\mathbf{q}\|} \sum_{j=1}^{\infty} a_j A_{s_j},$$

 $^{^1}$ Иначе, перенумеровав конечный набор чисел a_j , s_j , $j=1,\ldots,N-1$, добъемся требуемого. Легко видеть, что такое переобозначение не повлияет на ход доказательства.

где $A_s = |x(s^-)|$, a_j , s_j были введены выше. Положим $c_2 = |x_0| + c_1 \|\mathbf{q}\| (1 + e^{c\|\mathbf{q}\|})$. Фиксируем $\varepsilon > 0$; $\exists N = N(\varepsilon): \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j A_{s_j} \leqslant \varepsilon \phi(t)$. Частичная сумма ряда $S_N = \sum_{j=1}^N a_j A_{s_j} \leqslant Q(t) \|\mathbf{q}\| e^{\|\mathbf{q}\|}$, где $Q(t) = \phi(t) \gamma(t) + c_2 + c e^{c\|\mathbf{q}\|} \varepsilon \phi(t)$. Устремив $\varepsilon \to 0$, получим аналогичное (3.6) неравенство

$$\phi(t) \leq b_3 \phi(t) (|\mu_c|([t_0, t]) + t - t_0) + c_3, \quad c_3 = \frac{c_2 b_1}{2} = \frac{b_1 |x_0| + b_2}{2}$$

Выберем теперь s_1 так, чтобы $|\mu_c|\big([t_0,s_1]\big)+s_1-t_0=(2b_3)^{-1}$. Если такого s_1 не существует, возьмем $s_1=t_1$. Тогда $|x(t)|\leqslant b_1|x_0|+b_2$ $\forall t\in[t_0,s_1]$. Применив описанную процедуру к отрезку $[s_1,t_1]$, оценим x(t) на следующем отрезке $[s_1,s_2]$ и т.д. Весь отрезок $[t_0,t_1]$ будет исчерпан за p шагов. Тем самым найдутся числа k_1,k_2 , удовлетворяющие (3.7). Предложение доказано.

Предложение 3.5. Рассмотрим последовательность абсолютно непрерывных векторных мер $\mu_i \in C_K^*(T)$ такую, что $\mu_i \stackrel{w}{\to} \mu$, последовательность управлений $u_i \to u$ п.в., последовательность векторов $x_{0,i} \to x_0 \in \mathbb{R}^n$ и соответствующую им последовательность решений $x_i \in V^n(T)$, удовлетворяющих уравнению

$$x_i(t) = x_{0,i} + \int_{t_0}^t f(x_i, u_i, s) \, ds + \int_{[t_0, t]} g(x_i, s) \, d\mu_i, \quad t \in T.$$
(3.8)

Пусть $|x_i(t)| \leqslant \text{const.}$ Обозначим через $\mathcal{P}(\{\mu_i\})$ множество предельных траекторий, отвечающее аппроксимации $\{\mu_i\}$, т.е. множество функций x(t) из $V^n(T)$ таких, что из $\{x_i\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к x(t) для п.в. t. Тогда $\mathcal{P}(\{\mu_i\}) \neq \varnothing$, и для любой траектории x(t) из $\mathcal{P}(\{\mu_i\})$ существует присоединенное к μ семейство $\{v_r\}$ такое, что x(t) есть решение (2.2), отвечающее набору (x_0, u, \mathbf{q}) , где $\mathbf{q} = (\mu; \{v_r\})$. При этом, выбирая подпоследовательность, $x_i(t) \to x(t) \ \forall t \in \text{Cont}(|\mathbf{q}|)$ и $\max_{t \in T} |x_i(t)| \to \gcd|x(t)|$.

Доказательство. Поскольку μ_i сходятся слабо, то $\|\mu_i\| \leqslant \mathrm{const.}$ Переходя к подпоследовательности, имеем $|\mu_i| \stackrel{w}{\to} \nu \in C_+^*(T)$. Далее, поскольку x_i равномерно ограничены, из (2.1) вытекает, что последовательность вариаций x_i мажорируется слабо сходящейся последовательностью $\{|\mu_i| + \mathcal{L}\}$. Из предложения 3.2 следует, что $|\vartheta[g(x_i,t)]| \leqslant c(|\mu_i| + \mathcal{L})$. Переходя к подпоследовательности, имеем $x_i(t) \to \tilde{x}(t) \ \forall t \in T$ (2-я теорема Хелли). Найдем функцию $x \in V^n(T)$ такую, что $x(t) = \tilde{x}(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\nu)$. Функция x(t) существует, поскольку $\mathrm{Var}\,|_a^b[\tilde{x}] \leqslant c(\nu + \mathcal{L})([a,b]) \ \forall a \leqslant b$. Покажем, что x(t) удовлетворяет (2.2) для некоторого присоединенного к μ семейства функций. При этом, не ограничивая общности, будем считать, что $|m_i| > 0$ п.в., где m_i означает плотность μ_i .

Покажем, что существуют последовательность абсолютно непрерывных мер $\{\bar{\mu}_i\}$ и последовательность натуральных чисел $k_i\geqslant i$ такие, что 1) $(\bar{\mu}_i,|\bar{\mu}_i|)\stackrel{w}{\to} (\mu_d,\nu_d)$ и 2) $|\mu_{k_i}-\bar{\mu}_i|\stackrel{w}{\to} \nu_c$ при $i\to\infty$.

Если $Ds(\nu) = \emptyset$, то положим $\bar{\mu}_i = 0$, $k_i = i \ \forall i$.

Пусть $\mathrm{Ds}(\nu) \neq \varnothing$. Рассмотрим упорядоченную по включению цепочку множеств $D_i, i \in \mathbb{N},$ таких, что $D_{i-1} \subseteq D_i \subseteq \mathrm{Ds}(\nu)$ и $\sum_{r \in \mathrm{Ds}(\nu) \setminus D_i} \nu(\{r\}) \leqslant \frac{1}{i}$; здесь $D_0 = \varnothing$. Определим множества

 $S_{r,i} = [r - h_i, r + h_i], r \in D_i$, как систему замкнутых попарно не пересекающихся окрестностей точек r таких, что

1)
$$h_i > 0$$
, $h_i \to 0$ при $i \to \infty$;

$$x_i(t) = x_{0,i} + \int_{t_0}^t [f(x_i, u_i, s) - p_i(s)] ds + \int_{t_0}^t g(x_i, s) d\tilde{\mu}_i,$$

где $p_i(s) = i^{-1}g(x_i, s)m$ (тогда $p_i(s) \to 0$ равномерно на T).

¹В противном случае будем рассматривать последовательность мер $\tilde{\mu}_i = \mu_i + i^{-1} m \mathcal{L}_i$, где $m \in K$, $d\mathcal{L}_i = dt$ $\forall t: |m_i(t)| = 0$ и 0 в противном случае, а (3.8) преобразуем к виду

2)
$$\nu(S_i) - \sum_{r \in D_i} \nu(\{r\}) + \sum_{r \in D_i} \left| \mu(S_{r,i}) - \mu(\{r\}) \right| \leqslant \frac{1}{i}$$
, где $S_i = \bigcup_{r \in D_i} S_{r,i}$; 3) $r \pm h_i \in \text{Cont}(\nu)$.

Существование такого множества S_i вытекает из регулярности μ, ν . Далее номер $k_i \geqslant i$ выберем так, чтобы $\sum_{r \in D_i} \left(\left| |\mu_{k_i}|(S_{r,i}) - \nu(S_{r,i}) \right| + \left| \mu_{k_i}(S_{r,i}) - \mu(S_{r,i}) \right| \right) \leqslant \frac{1}{i}$. Это возможно в силу слабой

сходимости. Положим $\bar{\mu}_i(B) = \mu_{k_i}(B \cap S_i)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^1$. Нетрудно проверяется, что $(\bar{\mu}_i, |\bar{\mu}_i|) \stackrel{w}{\to} (\mu_d, \nu_d)$. Следовательно, $(\mu_{k_i} - \bar{\mu}_i, |\mu_{k_i} - \bar{\mu}_i|) \stackrel{w}{\to} (\mu_c, \nu_c)$. Из исходной последовательности троек (x_i, u_i, μ_i) с помощью построенных чисел k_i выберем

Из исходной последовательности троек (x_i, u_i, μ_i) с помощью построенных чисел k_i выберем подпоследовательность, которую будем обозначать прежним индексом (i). Перепишем уравнение (3.8) в виде

$$x_i(t) = x_{0,i} + \int_{t_0}^t f(x_i, u_i, s) \, ds + \int_{[t_0, t]} g(x_i, s) \, d(\mu_i - \bar{\mu}_i) + \int_{[t_0, t]} g(x_i, s) \, d\bar{\mu}_i, \quad t \in T, \quad \forall i.$$

Положим

$$x_i^c(t) = x_{0,i} + \int_{t_0}^t f(x_i, u_i, s) \, ds + \int_{[t_0, t]} g(x_i, s) \, d(\mu_i - \bar{\mu}_i);$$
$$x_i^d(t) = \int_{[t_0, t]} g(x_i, s) \, d\bar{\mu}_i, \quad t \in T, \quad \forall i.$$

Таким образом, $x_i(t) = x_i^c(t) + x_i^d(t) \ \forall t \in T$. По теореме Лебега и лемме 3.1 $x_i^c(t) \to x_c(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^t f(x,u,s) ds + \int\limits_{[t_0,t]}^t g(x,s) d\mu_c \ \forall t \in T, \ i \to \infty$. Положим $x_d = x - x_c$. Ясно, что $x_i^d(t) \to x_d(t)$

 $\forall t \in \mathrm{Cont}(\nu)$. Покажем, что $x_d = \Phi(x,t)$ для некоторого присоединенного к μ семейства $\{v_r\}$. Действительно, пусть $t \in \mathrm{Cont}(\nu)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем номер $N = N(\varepsilon)$ так, чтобы $\sum_{r \in \mathrm{Ds}(\nu) \setminus D_N} \nu(\{r\}) \leqslant \varepsilon$. В таком случае

$$\lim_{i \to \infty} \sup \left| \sum_{r \in D(N,t)} \int_{S_{r,i}} g(x_i, s) m_i(s) \, ds - x_i^d(t) \right| \leqslant \operatorname{const} \varepsilon. \tag{3.9}$$

Здесь и далее $D(N,t)=\{r\in D_N: r\leqslant t\}$; вектор $m_i(s)$ — плотность меры μ_i . Обозначим $r_i^-=r-h_i$. Для $r\in D(N,t)$ рассмотрим на отрезке $S_{r,i}$ уравнение

$$x_i^d(s) = x_i^d(r_i^-) + \int_{r_i^-}^s g(x_i, \tau) m_i(\tau) d\tau, \quad s \in S_{r,i}.$$
 (3.10)

При достаточно больших i определим функции 1

$$\pi_{r,i}(\tau) = \frac{F(\tau; |\mu_i|) - F(r_i^-; |\mu_i|)}{|\mu_i|(S_{r,i})}, \quad r \in D(N, t).$$
(3.11)

Функция $\pi_{r,i}$ переводит отрезок $S_{r,i}$ в отрезок [0,1], является абсолютно непрерывной и строго

возрастающей:
$$\frac{d\pi_{r,i}}{d\tau} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k_4} |m_i^j(\tau)|}{|\mu_i|(S_{r,i})} > 0$$
. Следовательно, существует обратная функция $\theta_{r,i}:[0,1] \to 0$

 $^{^1}$ Номера i нужно брать, начиная с некоторого i_0 так, чтобы $t \notin S_{r,i} \ \forall i \geqslant i_0, \ r \in D(N,t).$

 $S_{r,i},\ \theta_{r,i}=(\pi_{r,i})^{-1}.$ Совершая в (3.10) замену переменной $\omega=\pi_{r,i}(\tau)$ и преобразовывая, приходим к уравнению

$$\alpha_{r,i}(s) = x_i^d(r_i^-) + x_i^c(\theta_{r,i}(s)) + \int_0^s g(\alpha_{r,i}(\omega), \theta_{r,i}(\omega)) v_{r,i}(\omega) d\omega, \quad s \in [0, 1], \quad r \in D(N, t),$$

где
$$\alpha_{r,i}(\omega) = x_i(\theta_{r,i}(\omega)), \ v_{r,i}^j(\omega) = \frac{m_i^j(\theta_{r,i}(\omega))|\mu_i|(S_{r,i})}{\sum_{k=1}^{k_4} |m_i^k(\theta_{r,i}(\omega))|}, \ j=1,\dots,k_4.$$
 Легко видеть, что $\theta_{r,i}(\omega) \to r$

равномерно на [0,1], и, в силу предложения $3.1,\,x_i^c(\theta_{r,i}(\omega))\to x_c(r)$ равномерно на [0,1] при $i\to\infty$. Из соображений компактности, переходя к подпоследовательности, получаем, что $v_{r,i}\stackrel{w}{\to}v_r$ слабо в $L_2^{k_4}([0,1]),\,\alpha_{r,i}\to\alpha_r$ равномерно в $C^n([0,1])$. При этом функции v_r будут присоединенными к μ . Из последнего уравнения при $i\to\infty$ имеем

$$\alpha_r(s) = x(r^-) + \int_0^s g(\alpha_r, r) v_r d\omega, \quad s \in [0, 1], \quad r \in D(N, t).$$

(Здесь используется, что по построению $x_i^d(r_i^-) o x_d(r^-)$). Отсюда и из (3.9) следует, что

$$\left| x_d(t) - \sum_{r \in D(N,t)} [\alpha_r(1) - x(r^-)] \right| \leqslant \operatorname{const} \varepsilon \implies x_d(t) = \Phi(x(t),t).$$

Остается проверить, что $\max_{t \in T} |x_i(t)| \to \gcd \sup_{t \in T} |x(t)|$. Действительно, неравенство

$$\liminf_{i \to \infty} \max_{t \in T} |x_i(t)| \geqslant \gcd\sup_{t \in T} |x(t)|$$

очевидно. Другое неравенство $\limsup_{i\to\infty} \max_{t\in T} |x_i(t)| \leqslant \gcd\sup_{t\in T} |x(t)|$ выводится с помощью предложения 3.1. Предложение доказано.

3.1. Множество $\mathcal{I}(T)$ и метрика ρ_w . Пусть $\mathcal{V}_K(\mu)\subseteq C_+^*(T)$ означает множество скалярных борелевских мер ν таких, что $\exists \mu_i\in C_K^*(T): (\mu_i,|\mu_i|)\xrightarrow{w} (\mu,\nu)$. Отметим, что $|\mu|\in \mathcal{V}_K(\mu)$ и $\nu\geqslant |\mu|\ \forall \nu\in \mathcal{V}_K(\mu)$. Импульсным управлением назовем тройку $\mathbf{q}=(\mu;\nu;\{v_r\})$, где $\nu\in \mathcal{V}_K(\mu)$ и $v_r\in \mathcal{H}_K(\mu(\{r\});\nu(\{r\}))$. Скалярную меру ν будем называть вариацией импульсного управления \mathbf{q} и обозначать $|\mathbf{q}|$. Множество всех импульсных управлений, заданных на отрезке T, обозначим $\mathcal{I}(T)$. Пусть $\mathbf{q}=(\mu;\nu;\{v_r\})$. По мерам μ,ν для каждого i найдем множества $D_i,\,S_i,\,S_{r,i},\,r\in D_i,$ а также числа $h_i,\,r_i^-$, как в предложении 3.5. Положим $m_{d,i}^A(t)=\frac{1}{2h_i}v_r\big((2h_i)^{-1}(t-r_i^-)\big)$, если $t\in S_{r,i},\,r\in D_i$, и $m_{d,i}^A(t)=0$, если $t\notin S_i$. Пусть $\mu_{d,i}^A$ —абсолютно непрерывная векторная мера с плотностью $m_{d,i}^A$. Очевидно, что $(\mu_{d,i}^A,|\mu_{d,i}^A|)\xrightarrow{w}(\mu_d,\nu_d)$. При каждом i рассмотрим абсолютно непрерывную векторную меру $\mu_{c,i}^A$ с плотностью $m_{c,i}^A$ такую, что $\mu_{c,i}^A(S_i)=0$, $|m_{c,i}^A|>0$ п.в. на $T\setminus S_i$ и $(\mu_{c,i}^A,|\mu_{c,i}^A|)\xrightarrow{w}(\mu_c,\nu_c)$, $i\to\infty$. Возьмем $\mu_i^A=\mu_{c,i}^A+\mu_{d,i}^A$. Полученное семейство абсолютно непрерывных векторных мер $\mu_i^A=\mu_i^A[\mathbf{q}]$ будем называть $annpo\kappa cumupyouqum$ импульсное управление \mathbf{q} .

Пусть $\mathbf{q} \in \mathcal{I}(T)$ и $\{\mu_i^A[\mathbf{q}]\}$ — произвольное аппроксимирующее \mathbf{q} семейство. По определению при каждом i функция $F(t;|\mu_i^A|)$ строго возрастает на T. Положим $\pi_i(t) = F(t;|\mu_i^A|) \|\mu_i^A\|^{-1}$, $i \in \mathbb{N}, t \in T$. Функция π_i абсолютно непрерывна, строго возрастает на отрезке T, отображая его в сегмент [0,1]. К тому же $\dot{\pi}_i > 0$ п.в. Следовательно, существует обратная функция θ_i :

 $^{^1}$ Для некоторых конкретных конусов K о множестве $\mathcal{V}_K(\mu)$ можно сказать больше. Например, если K вложен в один из ортантов, то $\mathcal{V}_K(\mu) = \{|\mu|\}$. Если K – полупространство или все пространство, то $\mathcal{V}_K(\mu) = \{\nu : \nu \geqslant |\mu|\}$. Наконец, если K – острый, т.е. $\exists h \in \mathbb{R}^{k_4}$, |h| = 1, $\exists \alpha > 0$: $\langle h, x \rangle \geqslant \alpha |x| \ \forall x \in K$, то можно утверждать, что $\nu \leqslant \alpha^{-1} |\mu| \ \forall \nu \in \mathcal{V}_K(\mu)$.

[0,1] o T, которая тоже строго возрастает и абсолютно непрерывна [31, с. 256, задача 13]. Пусть $\mathcal{F}_i(s) = F(\theta_i(s); \mu_i^A)$. Несложно устанавливается, что функции \mathcal{F}_i сходятся равномерно в $C^{k_4}([0,1])$ к некоторой k_4 -векторной функции, которую обозначим $\mathcal{F}^{.1}$ Из построения вытекает, что $\mathcal{F}^j(t)$

ж некоторой
$$k_4$$
-векторной функции, которую обозначим \mathcal{F} . Из построения вытекает, что $\mathcal{F}^j(t)$ липшицева, $\mathcal{F}^j(0) = 0$, $\mathcal{F}^j(1) = F(t_1, \mu^j)$, $j = 1, \dots, k_4$ и $\sum_{j=1}^{k_4} \left| \frac{d\mathcal{F}^j}{dt}(t) \right| = \|\mathbf{q}\|$. Функция \mathcal{F}^j является,

по существу, деформированной функцией распределения меры, «растянутой» в местах быстрого и «сжатой» в местах медленного роста функции $F^j(t;\mu)$. Более того, каждому атому r меры $|\mathbf{q}|$ на отрезке [0,1] отвечает некоторый сегмент $[a_r,b_r]\subseteq [0,1]$, на котором функция $\mathcal F$ с точностью до некоторого коэффициента сжатия равна присоединенной к μ в точке r функции v_r . Заметим, что длина отрезка $[a_r,b_r]$ равна $|\mathbf{q}|(\{r\})\|\mathbf{q}\|^{-1}$, а точка, например, b_r есть в точности $|\mathbf{q}|([t_0,r])\|\mathbf{q}\|^{-1}$. Значит, числа a_r , b_r зависят только от $|\mathbf{q}|$ и r и не зависят от семейства $\{v_r\}$.

Таким образом, каждому импульсному управлению $\mathbf{q}=(\mu;\nu;\{v_r\})$ поставлена в соответствие пара векторных функций (F,\mathcal{F}) , где $F(t)=F(t;\tilde{\mu})$ — функция распределения векторной меры $\tilde{\mu}=(\mu,\nu)$, а функция $\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}(t;\mathbf{q})$ строится, как показано выше. Легко видеть, что такое соответствие будет взаимно однозначным: в паре (F,\mathcal{F}) по функции F находим векторную меру (μ,ν) и, тем самым, упомянутые выше отрезки $[a_r,b_r]$, в то время как функция \mathcal{F} своими значениями на $[a_r,b_r]$ определяет присоединенное к μ семейство $\{v_r\}$. На оставшемся множестве $[0,1]\setminus\bigcup_r [a_r,b_r]$ функция \mathcal{F} получается из $F(t;\mu)$ с помощью разрывной замены времени; ее значения на этом множестве целиком определяются функцией $F(t;\tilde{\mu})$.

Пусть $\mathbf{q}_1=(\mu_1;\nu_1;\{v_{r,1}\})$ и $\mathbf{q}_2=(\mu_2;\nu_2;\{v_{r,2}\})$ — два элемента из $\mathcal{I}(T)$. Определим расстояние между \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 по формуле

$$\rho_w(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \max_{s \in [0, 1]} |l| \mathcal{F}_1(s) - \mathcal{F}_2(s)| + \int_{t_0}^{t_1} |F_1(t) - F_2(t)| \, ds + |\tilde{\mu}_1(T) - \tilde{\mu}_2(T)|,$$

где $F_k(t) = F(t; \tilde{\mu}_k)$, $\tilde{\mu}_k = (\mu_k, \nu_k)$, $\mathcal{F}_k(t) = \mathcal{F}(t; \mathbf{q}_k)$, k = 1, 2. Легко проверить, что функция ρ_w обладает всеми свойствами метрики, тем самым, $M_w = (\mathcal{I}(T); \rho_w)$ — метрическое пространство. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Пространство M_w является полным метрическим пространством. Более точно, M_w есть пополнение множества абсолютно непрерывных векторных мер $(\mu, |\mu|)$, заданных на T, в метрике ρ_w .

Доказательство проводится стандартным образом и вытекает непосредственно из определений. Сходимость элементов в метрике ρ_w будем обозначать, как и слабую сходимость мер, символом $\stackrel{w}{\to}$. Таким образом, запись $\mathbf{q}_i \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}$ означает $\rho_w(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}) \to 0$. Каждая абсолютно непрерывная векторная мера μ может рассматриваться как элемент $\mathcal{I}(T)$, если положить $\nu = |\mu|$. В связи с этим запись $\mu_i \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}$, где μ_i абсолютно непрерывны, будет означать $(\mu_i, |\mu_i|) \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}$.

Отметим некоторые простые свойства метрики ρ_w :

- ullet для любой аппроксимирующей ${f q}$ последовательности $\mu_i^A[{f q}] \stackrel{w}{
 ightarrow} {f q};$
- если $\mathbf{q}_i = (\mu_i; \nu_i; \{v_{r,i}\})$ и $\mathbf{q}_i \xrightarrow{w} \mathbf{q} = (\mu; \nu; \{v_r\})$, то $(\mu_i, \nu_i) \xrightarrow{w} (\mu, \nu)$, т.е. функция ρ_w метризует слабую сходимость векторных мер;
- множество $B_c = \{\mathbf{q}: \|\mathbf{q}\| \leqslant c\}$ компактно в ρ_w -метрике.

Следующее свойство метрики ρ_w является основным.

Дополнение к предложению 3.5. Предположим, что в условии предложения 3.5 последовательность абсолютно непрерывных векторных мер μ_i ρ_w -сходится к некоторому элементу $\mathbf{q} \in \mathcal{I}(T)$. Тогда множество $\mathcal{P}(\{\mu_i\})$ состоит ровно из одной траектории — решения (2.2), отвечающего импульсному управлению \mathbf{q} . Таким образом, из ρ_w -сходимости абсолютно непрерывных мер вытекает сходимость соответствующих траекторий в каждой точке множества $\mathrm{Cont}(|\mathbf{q}|)$.

 $^{^1}$ Легко заметить, что предельная функция $\mathcal F$ не зависит от выбора аппроксимирующей $\mathbf q$ последовательности и определяется единственным образом.

Утверждение вытекает непосредственно из доказательства предложений 3.3 и 3.5 и определения ρ_w -метрики.

Теорема 3.1. Если функции f, g удовлетворяют условию предложения 3.4, то решение уравнения (2.2), отвечающее набору (x_0, u, \mathbf{q}) , существует u единственно.

Доказательство. Рассмотрим элемент $\mathbf{q} \in \mathcal{I}(T)$. Возьмем аппроксимирующую \mathbf{q} последовательность $\mu_i^A = \mu_i^A[\mathbf{q}]$. Поскольку $\mu_i^A \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}$, то утверждение теоремы вытекает из предложений 3.3–3.5 (дополнение), а также из теоремы существования для обычных дифференциальных уравнений [35].

Лемма 3.2. Пусть $\mathbf{q}_i \overset{w}{\to} \mathbf{q}$, $u_i \to u$ n.s., $x_{0,i} \to x_0$, $x_i(t)$ — решение (2.2), отвечающее набору $(x_{0,i},u_i,\mathbf{q}_i)$. Тогда если $\gcd |x_i(t)| \leqslant \operatorname{const}$, то $x_i(t) \to x(t) \ \forall t \in \operatorname{Cont}(|\mathbf{q}|)$, где x(t) — решение (2.2) с данными (x_0,u,\mathbf{q}) . При этом $\gcd |x_i(t)| \to \gcd |x_i(t)|$.

Доказательство. Поскольку x_i равномерно ограничены, то из (2.1) вытекает, что последовательность вариаций x_i мажорируется слабо сходящейся последовательностью $\{|\mathbf{q}_i| + \mathcal{L}\}$. Переходя к подпоследовательности, имеем $x_i(t) \to x(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(|\mathbf{q}|)$. Покажем, что x(t) удовлетворяет уравнению (2.2) с данными (x_0, u, \mathbf{q}) .

Для каждого номера i рассмотрим аппроксимирующее \mathbf{q}_i семейство абсолютно непрерывных векторных мер $\{\mu_{i,\tau}^A[\mathbf{q}_i]\}$. Пусть $\{t_k\},\ k\in\mathbb{N},$ — счетное всюду плотное в T множество точек таких, что $t_k\in X=\mathrm{Cont}(|\mathbf{q}|)\cap [\bigcap_{i=1}^\infty\mathrm{Cont}(|\mathbf{q}_i|)]$. Такое всюду плотное множество существует, так как $T\setminus X$ счетно.

Пусть $x_{i,\tau}$ — решение уравнения

$$x_{i,\tau}(t) = x_{0,i} + \int_{t_0}^t f(x_{i,\tau}, u_i, s) \, ds + \int_{[t_0, t]} g(x_{i,\tau}, s) \, d\mu_{i,\tau}^A[\mathbf{q}_i], \quad t \in T.$$
(3.12)

При каждом i для достаточно больших τ это решение существует в силу требований, наложенных на f,g, и предложений 3.3–3.5. Действительно, пусть $c=\gcd\sup|x_i(t)|+1$. Произведем «срезку» функций f,g. Положим

$$\tilde{f}(x,u,t) = \begin{cases} f(x,u,t), & |x| \leqslant c, \\ f(x_p,u,t), & |x| > c, \end{cases} \qquad \tilde{g}(x,t) = \begin{cases} g(x,t), & |x| \leqslant c, \\ g(x_p,t), & |x| > c, \end{cases}$$

где x_p — проекция вектора x на сферу |x|=c. Теперь \tilde{f} , \tilde{g} удовлетворяют условию предложения 3.4, и следовательно, по теореме 3.1 для каждого τ существует решение $x_{i,\tau}$ уравнения (3.12), в котором вместо функций f, g подставлены \tilde{f} , \tilde{g} . В силу предложения 3.4, все решения $x_{i,\tau}$ ограничены равномерно по τ . Тогда из предложений 3.3, 3.5 при больших τ имеем $|x_{i,\tau}(t)| \leqslant c$, и, тем самым, решение (3.12) существует.

Используя предложение 3.5, для каждого i выберем номер τ_i так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{i} |x_{i,\tau_i}(t_k) - x_i(t_k)| + \left| \max_{t \in T} |x_{i,\tau_i}(t)| - \operatorname{gc} \sup_{t \in T} |x_i(t)| \right| + \rho_w(\mu_{i,\tau_i}^A[\mathbf{q}_i], \mathbf{q}_i) \leqslant \frac{1}{i}.$$

Положим $\hat{\mu}_i = \mu_{i,\tau_i}^A$, $\hat{x}_i = x_{i,\tau_i}$. По построению $\hat{\mu}_i \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}$. Согласно предложению 3.5, существует решение \hat{x} уравнения (2.2) на отрезке T, отвечающее набору (x_0,u,\mathbf{q}) и $\hat{x}_i(t) \to \hat{x}(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(|\mathbf{q}|)$. Но по построению $\hat{x}_i(t_k) \to x(t_k)$, $i \to \infty$, $k = 1,2,\ldots$. Тогда из неравенства $|\vartheta[\hat{x}_i]| \leqslant \mathrm{const}(|\hat{\mu}_i| + \mathcal{L})$ вытекает $\hat{x}_i(t) \to x(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(|\mathbf{q}|)$. Следовательно, $\hat{x} = x$ и x(t) — решение (2.2), отвечающее набору (x_0,u,\mathbf{q}) .

Справедливость леммы для всей последовательности x_i вытекает теперь из теоремы единственности (предложение 3.3).

3.2. Оператор \mathbf{Pr} , функция ϱ и признак ρ_w -сходимости в $\mathcal{I}(T)$. Наряду с множеством $\mathcal{I}(T)$, будем рассматривать множество $2k_4$ -мерных импульсных управлений $\mathcal{I}_D(T)$, элементы которого будем обозначать через \mathbf{q}_D . По определению \mathbf{q}_D «вдвое длиннее», чем $\mathbf{q} \in \mathcal{I}(T)$, т.е. $\mathbf{q}_D = (\mu_D; \nu_D; \{v_{D,r}\})$, где мера μ_D имеет размерность $2k_4$. Положим $\mathcal{D}(T) = \mathcal{I}(T) \times \mathcal{I}(T)$. Каждый элемент множества $\mathcal{D}(T)$ может автоматически рассматриваться как элемент множества $\mathcal{I}_D(T)$. Действительно, если $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in \mathcal{D}(T)$, $\mathbf{q}_1 = (\mu_1; \nu_1; \{v_{r,1}\})$, $\mathbf{q}_2 = (\mu_2; \nu_2; \{v_{r,2}\})$, то элемент $\mathbf{q}_D = ((\mu_1, \mu_2); \nu_1 + \nu_2; \{(v_{r,1}, v_{r,2})\})$ принадлежит $\mathcal{I}_D(T)$. Таким образом, имеет место строгое вложение $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{I}_D(T)$.

Введем в рассмотрение оператор проектирования $\Pr_k:\mathcal{I}_D(T)\to\mathcal{I}(T),\ k=1,2.$ Для абсолютно непрерывной векторной меры $\mu_D=(\mu_1,\mu_2),\ \mu_1,\mu_2\in C_K^*(T),$ размерности $2k_4$ положим $\Pr_k(\mu_D,|\mu_D|)=(\mu_k,|\mu_k|),\ k=1,2,$ т.е. в качестве значения оператора берем либо первые, либо последние k_4 компонент.

Далее на все пространство $\mathcal{I}_D(T)$ оператор \Pr_k непрерывно доопределим (по непрерывности) следующим образом. Пусть $\mathbf{q}_D \in \mathcal{I}_D(T)$. Рассмотрим произвольную последовательность абсолютно непрерывных векторных мер $\mu_{D,i} = (\mu_{1,i},\mu_{2,i})$ (размерности $2k_4$) такую, что $\mu_{D,i} \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}_D$. Несложно устанавливается, что последовательность абсолютно непрерывных векторных мер $\Pr_k(\mu_{D,i},|\mu_{D,i}|) = (\mu_{k,i},|\mu_{k,i}|)$ сходится в метрике ρ_w . Ее предел обозначим через \mathbf{q}_k . Легко видеть, что этот предел не зависит от способа аппроксимации элемента \mathbf{q}_D абсолютно непрерывными мерами. Положим $\Pr_k(\mathbf{q}_D) = \mathbf{q}_k$. Оператор \Pr_k по построению ρ_w -непрерывен, т.е. если $\mathbf{q}_{D,i} \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}_D$ при $i \to \infty$, то $\Pr_k(\mathbf{q}_{D,i}) \stackrel{w}{\to} \Pr_k(\mathbf{q}_D)$. Еще два свойства оператора \Pr_k :

- 1) $|\mathbf{q}_D| = |\Pr_1(\mathbf{q}_D)| + |\Pr_2(\mathbf{q}_D)|$;
- 2) если $\mathbf{q}_D \in \mathcal{D}(T)$ и $\mathbf{q}_D = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$, то $\Pr_k(\mathbf{q}_D) = \mathbf{q}_k$, k = 1, 2.

Введем в рассмотрение функцию $\varrho: \mathcal{I}_D(T) \to \mathbb{R}_+$. Положим

$$\varrho(\mathbf{q}_D) = \int_{[t_0, t_1]} |y_1 - y_2|^2 d|\mathbf{q}_D| + \int_{t_0}^{t_1} |z_1 - z_2|^2 dt + |z_1(t_1) - z_2(t_1)|^2.$$

Здесь $\mathbf{q}_D \in \mathcal{I}_D(T)$,

$$\begin{cases} d(y_1, y_2) = E d\mathbf{q}_D, & y_k(t_0) = 0, \\ dz_k = d|\Pr_k(\mathbf{q}_D)|, & z_k(t_0) = 0, \quad k = 1, 2, \end{cases}$$

где E — единичная матрица размерности $2k_4 \times 2k_4$; запись (y_1, y_2) означает $2k_4$ -мерный вектор, имеющий первыми k_4 компонентами вектор y_1 и, соответственно, последними k_4 компонентами вектор y_2 . Интегрирование по мере $|\mathbf{q}_D|$ производится согласно данным выше правилам. Например, если x(t) есть решение (1.3), отвечающее тройке (p, u, \mathbf{q}) , то по определению

$$\phi(\mathbf{q}) = \int_{[t_0, t_1]} g_0(x, t) \, d|\mathbf{q}| = \int_{[t_0, t_1]} g_0(x, t) \, d\nu_c + \sum_{r \in Ds(\nu)} \int_0^1 g_0(\alpha_r, r) \nu(\{r\}) \, ds, \quad \nu = |\mathbf{q}|.$$

При этом функционал $\phi(\mathbf{q})$ ρ_w -непрерывен, т.е. если $\mathbf{q}_i \xrightarrow{w} \mathbf{q}$, то $\phi(\mathbf{q}_i) \to \phi(\mathbf{q})$ (см. доказательство предложения 3.5 и леммы 3.2).

Теперь укажем на один очень удобный признак ρ_w -сходимости, который везде далее будем использовать. Рассмотрим последовательность управлений $\mathbf{q}_{D,i} \in \mathcal{D}(T)$, $\mathbf{q}_{D,i} = (\mathbf{q}_{1,i},\mathbf{q}_{2,i})$. Предположим, что 1) $\mathbf{q}_{2,i} \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}$, 2) $\varrho(\mathbf{q}_{D,i}) \to 0$ при $i \to \infty$. Тогда $\mathbf{q}_{1,i} \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}$ при $i \to \infty$. Действительно, используя свойство ρ_w -компактности импульсных управлений, переходя к подпоследовательности, получаем $\mathbf{q}_{D,i} \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}_D$. Применяя лемму 3.2, имеем $\varrho(\mathbf{q}_{i,D}) \to \varrho(\mathbf{q}_D) = 0$. Из свойств функции ϱ выводим, что $\mathbf{q}_D = (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ для некоторого $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{I}(T)$, и следовательно, $\mathbf{q}_D \in \mathcal{D}(T)$. Тогда из свойства ρ_w -непрерывности оператора Pr вытекает, что $\mathbf{q}_D = (\mathbf{q}, \mathbf{q})$, что и требовалось установить. Заметим, что признак можно немного обобщить:

если
$$\Pr_k(\mathbf{q}_{D,i}) \stackrel{w}{ o} \mathbf{q}$$
 и $\varrho(\mathbf{q}_{D,i}) o 0$, то $\mathbf{q}_{D,i} \stackrel{w}{ o} (\mathbf{q},\mathbf{q}) \in \mathcal{D}(T)$.

Замечание. Если $\mathbf{q}_i \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}$, то, вообще говоря, неверно, что $\varrho(\mathbf{q}_{D,i}) \to 0$, где $\mathbf{q}_{D,i} = (\mathbf{q}_i,\mathbf{q}) \in$ $\mathcal{D}(T)$, т.е. функция ϱ не дает необходимого условия ρ_w -сходимости. Действительно, меру Дирака, например, нельзя приблизить абсолютно непрерывными мерами с помощью функции ϱ . Здесь возникает аналогия с сильной сходимостью мер, однако заметим, что из условия $\varrho(\mathbf{q}_{D,i}) \to 0$ сходимость мер $|{f q}_i|$ по норме вариации, вообще говоря, не следует. Пример строится при K= $[0,+\infty)$ следующим образом. Положим $m_i(t)=2$, если $t\in [s_{i,k-1},s_{i,k}]$ при четном k, где $s_{i,k}=$ $t_0 + \frac{k}{i}(t_1 - t_0), \, k = 0, \dots, i$, и $m_i(t) = 0$ в противном случае. Пусть μ_i — мера с плотностью m_i . Тогда, очевидно, $\mu_i \stackrel{w}{\to} \mathcal{L}$, откуда, учитывая, что $|m_i| \leqslant 2$, имеем $\varrho(\mu_i, \mathcal{L}) \to 0$. Но $\|\mu_i - \mathcal{L}\| \to t_1 - t_0 > 0$. т.е. сильной сходимости нет.

Подытожим рассуждения пп. 3.1, 3.2. На множестве импульсных управлений $\mathcal{I}(T)$ введена метрика ho_w . Относительно сходимости в этой метрике осуществимы корректные предельные переходы в уравнении с векторной мерой. С помощью функции ϱ установлен удобный признак ρ_w сходимости. Множество абсолютно непрерывных векторных мер $(\mu, |\mu|)$ является ρ_w -всюду плотным в $\mathcal{I}(T)$. Импульсное управление есть с точностью до изометрии последовательность абсолютно непрерывных векторных мер, фундаментальная в ρ_w -метрике.

4. РЕДУКЦИИ R_1 , R_2 И v-ЗАДАЧА

В этом параграфе представлены две редукции, которые используются на различных этапах доказательства ПМ. Редукция R_1 формулируется для скалярного случая $k_4=1,\,\mu\geqslant 0$, и позволяет получать условия трансверсальности по времени для задачи, в которой зависимость $f,\ U$ от tвсего лишь измерима. Редукция R_2 (v-задача) формулируется для произвольного конуса K и используется для доказательства невырождающегося ПМ. С ее помощью также можно вывести условия трансверсальности по времени, правда работает она только в условиях гладкости.

Редукция R_1 . Пусть $K = [0, +\infty)$. Наряду с исходной задачей (1.2)–(1.5), которую будем обозначать через (P), рассмотрим задачу (P_1) :

$$(P_1)$$
:
$$\begin{cases} e_0(p) \to \min, \\ dx = f(x,u,t)dt + g(x,t)d\mu, \\ d\alpha_k = g(\alpha_k,\theta_k)dv_k, \quad \alpha_k(t_{1-k}) = x_k, \\ d\theta_k = 0, \quad \theta_k = t_k, \quad k = 0,1, \quad t \in [t_0,t_1], \\ e_1(p) \leqslant 0, \quad e_2(p) = 0, \\ \varphi(x,t) \leqslant 0, \quad \varphi(\alpha_k,\theta_k) \leqslant 0, \quad k = 0,1, \\ u(t) \in U(t) \text{ п.в. } t, \quad \mu, v_k \geqslant 0, \quad k = 0,1, \\ p = (\xi_0,\xi_1,t_0,t_1), \quad x_k = x(t_k), \quad \xi_k = \alpha_k(t_k), \quad k = 0,1. \end{cases}$$
 ожение **4.1.** $3a\partial auu$ (P) u (P_1) эквивалентны. Это означает, что для каж

Предложение 4.1. Задачи (P) и (P_1) эквивалентны. Это означает, что для каждого допустимого процесса (p, u, μ) задачи (P) существует допустимый процесс $(\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{\mu}, v_0, v_1)$ задачи (P_1) такой, что $e_0(p) = e_0(\tilde{p})$. И наоборот.

оДоказательство. Пусть (p,u,μ) — допустимый процесс в задаче (P). Построим соответствующий ему допустимый процесс $(\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{\mu}, v_0, v_1)$ в задаче (P_1) . Положим $\tilde{u} = u$, $\tilde{\mu} = \mu - \sum_{k=0,1} \mu(\{t_k\})\delta(t_k)$, $\tilde{x}_0 = x(t_0^+)$, $\tilde{x}_1 = x(t_1^-)$, $v_k = \mu(\{t_k\})(t_1 - t_0)^{-1}\mathcal{L}$, $\tilde{t}_k = t_k$, k = 0, 1. Легко видеть, что $(\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{\mu}, v_0, v_1)$ —

допустимый процесс в (P_1) , и $e_0(p) = e_0(\tilde{p})$.

Обратно, пусть $(\tilde{p},\tilde{u},\tilde{\mu},v_0,v_1)$ — допустимый в (P_1) процесс. Возьмем $u=\tilde{u},~\mu=\tilde{\mu}+$ $\sum_{k=0,1}\|v_k\|\delta(t_k),\ x_k=\alpha_k(t_k)=\xi(\tilde{x}_k,t_k,(-1)^{k+1}\|v_k\|),\ t_k=\tilde{t}_k,\ k=0,1.\ \text{Процесс}\ (p,u,\mu)-\text{допу-}$

стимый в (P), и $e_0(p) = e_0(\tilde{p})$.

Предложение доказано.

Редукция R_1 позволяет ограничиться рассмотрением задачи, в которой управляющая мера не имеет атомов в концах отрезка времени.

Редукция R_2 . Редукция R_2 есть редукция к так называемой v-задаче [1]. Пусть выполнено предположение Γ). Введем в рассмотрение задачу (P_2) (v-задача):

$$\begin{cases} e_{0}(p) \to \min, \\ dx = (v+1)f(x,u,\chi)dt + g(x,\chi)d\mathbf{q}, & t \in [t_{0},t_{1}], \\ d\chi = (v+1)dt, \\ e_{1}(p) \leqslant 0, & e_{2}(p) = 0, & \varphi(x,\chi) \leqslant 0, \\ p = (x_{0},x_{1},\chi_{0},\chi_{1}), & u(t) \in U, & |v(t)| \leqslant 1/2 \text{ п.в. } t, \\ \mathbf{q} = (\mu;\{v_{r}\}), & \operatorname{Range}(\mu) \subset K. \end{cases}$$

Предложение 4.2. $3a \partial a u u (P) u (P_2)$ эквивалентны.

Доказательство. Пусть процесс $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \chi_0, \chi_1, \tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{u}, v, \tilde{\mu}, \{\tilde{v}_r\})$ допустим в (P_2) . Так как $3/2 \geqslant \dot{\chi} \geqslant 1/2 > 0$ п.в., то χ строго возрастает на отрезке $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$. Следовательно, существует обратная функция $\pi(t) = \chi^{-1}(t), \ t \in [\chi(\tilde{t}_0), \chi(\tilde{t}_1)]$, которая тоже строго возрастает и абсолютно непрерывна [31]. Положим $t_0 = \chi(\tilde{t}_0), \ t_1 = \chi(\tilde{t}_1), \ x_0 = \tilde{x}_0, \ u(t) = \tilde{u}(\pi(t)), \ F(t;\mu) = F(\pi(t);\tilde{\mu}), \ v_r = \tilde{v}_{\pi(r)}, \ r \in T$. Функция u(t) будет измеримой, так как $\chi(t)$ абсолютно непрерывна, и значит, переводит измеримые множества в измеримые [31]. Покажем, что $x(t) = \tilde{x}(\pi(t))$. Действительно, совершая замену подынтегральной переменной $\tau = \pi(s)$, имеем

$$\tilde{x}(\pi(t)) = \tilde{x}_0 + \int_{\tilde{t}_0}^{\pi(t)} (v+1) f(\tilde{x}, \tilde{u}, \chi) d\tau + \int_{[\tilde{t}_0, \pi(t)]} g(\tilde{x}, \chi) d(\tilde{\mu}; {\{\tilde{v}_{\pi(r)}\}}) =$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, u, s) ds + \int_{[t_0, t]} g(x, s) d(\mu; {\{v_r\}}) = x(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Отсюда следует, что $(p, u, \mu, \{v_r\})$ — допустимый процесс в (P), и $e_0(p) = e_0(\tilde{p})$.

Обратно, пусть (p,u,\mathbf{q}) — допустимый процесс в (P). Положим v=0. Тогда процесс $(p,t_0,t_1,u,0,\mathbf{q})$ будет допустимым в (P_2) . При этом значение минимизируемой функции $e_0(p)$ не изменится. Предложение доказано.

В предположении гладкости редукция R_2 позволяет исходную задачу (P) свести к автономной задаче со свободным временем.

5. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА

В этом параграфе на фиксированном отрезке времени $T=[t_0,t_1]$ исследуется задача без ограничений

$$J(p, u, \mathbf{q}) = e_0(p) \to \min,$$

$$dx = f(x, u, t)dt + g(x, t)d\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = (\mu; \{v_r\}),$$

$$u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^m \text{ n.B. } t, \quad \text{Range}(\mu) \subset K,$$

$$p = (x_0, x_1), \quad x_0 = x(t_0), \quad x_1 = x(t_1).$$

$$(5.1)$$

Введем в рассмотрение функции

$$H(x, u, \psi, t) = \langle f(x, u, t), \psi \rangle, \quad Q(x, \psi, t) = \psi^{\top} g(x, t).$$

Функция H называется функцией Понтрягина. Векторная функция Q по определению является строкой, и ее производная по x есть матрица, имеющая столбцы $g_x^{j\top}(x,t)\psi,\ j=1,\ldots,k_4$, а производная по ψ совпадает с матрицей g(x,t).

Теорема 5.1. Пусть (p^*,u^*,\mathbf{q}^*) , $\mathbf{q}^*=(\mu^*;\{v_r^*\})$ — решение задачи (5.1). Тогда существует функция $\psi\in V^n(T)$ такая, что

1) пара (x^*, ψ) является решением гамильтоновой системы с векторной мерой

$$\begin{cases} dx^* &= H_{\psi}(t)dt + Q_{\psi}(t)d\mathbf{q}^* \\ d\psi &= -H_x(t)dt - Q_x(t)d\mathbf{q}^*, \quad t \in T; \end{cases}$$
(5.2)

2) выполнены условия трансверсальности

$$\psi_0 = \frac{\partial e_0}{\partial x_0}(p^*), \qquad \psi_1 = -\frac{\partial e_0}{\partial x_1}(p^*);$$

3) выполнено условие максимума для обычных управлений

$$\max_{u \in U(t)} H(u,t) = H(t) \text{ n.s. } t;$$

4) выполнено условие максимума для импульсных управлений

$$Q(t) \in K^{\circ} \quad \forall t \in T, \qquad Q_r(s) \in K^{\circ} \quad \forall s \in [0, 1], \quad \forall r \in \text{Ds}(|\mathbf{q}^*|),$$

$$\int_T \langle Q(t), d\mathbf{q}^* \rangle = 0.$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения: $\psi_k = \psi(t_k), \ k = 0, 1,$

$$H(t, u) = H(x^*(t), u, \psi(t), t), \qquad H(t) = H(t, u^*(t)),$$

 $Q(t) = Q(x^*(t), \psi(t), t), \qquad H_x(t) = H_x(x^*(t), u^*(t), \psi(t), t), \dots$

и т.д. Иными словами, если у функций H, Q или их частных производных какие-нибудь из аргументов x, ψ , u опущены, то вместо них подставлены $x^*(t)$, $\psi(t)$, $u^*(t)$. В условии 4) индекс r у функции Q означает, что вместо ее аргументов подставлены значения $\alpha_r^*(s)$, $\sigma_r(s)$ и r соответственно. Здесь функции (α_r^*, σ_r) , $r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|)$ отвечают решению системы (5.2) на разрыве в точке r. По определению это означает, что пара (α_r^*, σ_r) удовлетворяет следующей автономной гамильтоновой системе:

$$\begin{cases}
\dot{\alpha}_r^* = g(\alpha_r^*, r)v_r^*, & \alpha_r^*(0) = x^*(r^-), \\
\dot{\sigma}_r = -\sum_{j=1}^{k_4} g_x^{j\top}(\alpha_r^*, r)\sigma_r v_r^{*j}, & \sigma_r(0) = \psi(r^-), \quad s \in [0, 1], \quad r \in \text{Ds}(|\mathbf{q}^*|).
\end{cases}$$
(5.3)

Далее, конус K° в условии 4) есть нормальный к K конус в нуле или поляра и определяется так:

$$K^{\circ} = N_K(0) = \{ y \in \mathbb{R}^{k_4} : \langle x, y \rangle \leqslant 0 \ \forall x \in K \}.$$

Замечание. На траектории разрыва системы условие 4) может быть записано в более привычной форме условия максимума

$$\max_{v \in S_r} \langle Q_r(s), v \rangle = \langle Q_r(s), v_r^*(s) \rangle = 0 \quad \text{п.в. в } s \in [0, 1],$$
 (5.4)

где
$$S_r = K \cap \{v : |v| = \gamma_r\}, \, \gamma_r = |\mathbf{q}^*|(\{r\}).^1$$

Доказательство. Пусть (p^*, u^*, \mathbf{q}^*) — оптимальный процесс. Не ограничивая общности, будем считать, что $e_0(p^*)=0$. Рассмотрим последовательность абсолютно непрерывных векторных мер $\{\bar{\mu}_i\}$ такую, что $\bar{\mu}_i \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}^*$. Через \bar{m}_i обозначим плотность меры $\bar{\mu}_i$. При достаточно больших i на отрезке T существует решение (обозначим его \bar{x}_i), отвечающее набору $(x_0^*, u^*, \bar{\mu}_i)$, и $|\bar{x}_i(t)| \leqslant \mathrm{const} \ \forall i$. Положим $\bar{p}_i = (x_0^*, \bar{x}_i(t_1))$. По лемме $3.2 \ \bar{x}_i(t) \to x^*(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(|\mathbf{q}^*|)$ и $\max_{t \in T} |\bar{x}_i(t)| \to \mathrm{gc} \sup_{t \in T} |x^*(t)|$.

Тогда $\bar{p}_i \to p^*$. Из оптимальности следует, что $e_0(\bar{p}_i) \geqslant 0$. Обозначим $\varepsilon_i = \sqrt{e_0(\bar{p}_i)}$. Тогда $\varepsilon_i \to 0+$ при $i \to \infty$.

¹Здесь и везде далее примем следующее соглашение относительно норм в конечномерном пространстве \mathbb{R}^k . Если $x \in \mathbb{R}^k$, то запись |x| означает сумму модулей координат, а $|x|^2$ — сумму квадратов координат.

Положим $K_i(t) = K \cap \{m: |m| \leqslant |\bar{m}_i(t)| + i\}, \ c = \gcd\sup_{t \in T} |x^*(t)| + 1$ и для каждого $i \in \mathbb{N}$ рассмотрим обычную задачу оптимального управления

Емогрим обычную задачу оптимального управления
$$\begin{cases} \phi_i(p,u,m) = e_0(p) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left| y - \bar{y}_i \right|^2 (|m| + |\bar{m}_i|) \, dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} |z - \bar{z}_i|^2 \, dt + |z_1 - \bar{z}_{1,i}|^2 \to \min, \\ \dot{x} = f(x,u,t) + g(x,t)m, \\ \dot{y} = m, \quad \dot{y}_i = \bar{m}_i, \quad y_0 = \bar{y}_{0,i} = 0, \\ \dot{z} = |m|, \quad \dot{\bar{z}}_i = |\bar{m}_i|, \quad z_0 = \bar{z}_{0,i} = 0, \quad t \in T, \\ u(t) \in U(t), \quad m(t) \in K_i(t) \text{ п.в. } t, \\ \max_{t \in T} |x(t)| \leqslant c, \quad p = (x_0, x_1). \end{cases}$$
 (5.5)

Пусть X_i обозначает множество троек a=(p,u,m), удовлетворяющих условиям задачи (5.5). Множество X_i не пусто, так как содержит тройку $\bar{a}_i=(\bar{p}_i,u^*,\bar{m}_i)$. Введем на X_i метрику

$$\rho(a_1, a_2) = |p_1 - p_2| + \int_{t_0}^{t_1} |u_1 - u_2| dt + \int_{t_0}^{t_1} |m_1 - m_2| dt.$$

Легко видеть, что теперь X_i — полное метрическое пространство (поскольку является замкнутым подмножеством банахова пространства $\mathbb{R}^{2n} \times L_1^m \times L_1^{k_4}$).

Для любого допустимого процесса (p,u,m) задачи (5.5) $\phi_i(p,u,m)\geqslant 0$, причем $\phi_i(\bar{a}_i)=\varepsilon_i^2$. Применим вариационный принцип Экланда [23, с. 246]. Для каждого $i\in\mathbb{N}$ существует процесс $a_i=(p_i,u_i,m_i)$ такой, что

- 1) $\phi_i(a_i) \leqslant \phi_i(\bar{a}_i) = \varepsilon_i^2$;
- 2) $\rho(a_i, \bar{a}_i) \leqslant \varepsilon_i$;
- 3) процесс (p_i, u_i, m_i) является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \phi_{i}(p, u, m) + \varepsilon_{i} \left(|p - p_{i}| + \int_{t_{0}}^{t_{1}} \left[|u - u_{i}| + |m - m_{i}| \right] dt \right) \to \min, \\ \dot{x} = f(x, u, t) + g(x, t)m, \\ \dot{y} = m, \quad \dot{y}_{i} = \bar{m}_{i}, \quad y_{0} = \bar{y}_{0, i} = 0, \\ \dot{z} = |m|, \quad \dot{z}_{i} = |\bar{m}_{i}|, \quad z_{0} = \bar{z}_{0, i} = 0, \quad t \in T, \\ u(t) \in U(t), \quad m(t) \in K_{i}(t) \text{ п.в. } t, \\ \max_{t \in T} |x(t)| \leqslant c, \quad p = (x_{0}, x_{1}). \end{cases}$$

$$(5.6)$$

При больших i задача (5.6) — обычная задача оптимального управления без ограничений с недифференцируемым терминальным функционалом $\varepsilon_i|p-p_i|$. Применим к задаче (5.6) негладкий вариант ПМ, доказанный в [23, с. 195]. Для каждого $i\in\mathbb{N}$ найдутся абсолютно непрерывные функции ψ_i , ζ_i и ζ_i , а также векторы $h_{k,i}$, k=0,1, $|h_{k,i}|\to 0$ при $i\to\infty$, такие, что выполняется

$$\dot{\psi}_{i} = -\frac{\partial H_{i}}{\partial x}(t) - \frac{\partial Q_{i}}{\partial x}(t)m_{i}, \quad t \in T,$$

$$\psi_{i}(t_{0}) = \frac{\partial e_{0}}{\partial x_{0}}(p_{i}) + h_{0,i}, \qquad \psi_{i}(t_{1}) = -\frac{\partial e_{0}}{\partial x_{1}}(p_{i}) + h_{1,i},$$

$$\dot{\zeta}_{i} = 2(y_{i} - \bar{y}_{i})(|m_{i}| + |\bar{m}_{i}|), \quad \zeta_{i}(t_{1}) = 0,$$

$$\dot{\varsigma}_{i} = 2(z_{i} - \bar{z}_{i}), \qquad \varsigma_{i}(t_{1}) = -2(z_{1,i} - \bar{z}_{1,i}),$$

$$\max_{u \in U(t)} \left[H_{i}(u, t) - \varepsilon_{i} |u - u_{i}(t)| \right] = H_{i}(t) \text{ п.в. } t,$$
(5.7)

$$\max_{m \in K_i(t)} \left[\left\langle m, Q_i(t) + \zeta_i(t) \right\rangle + |m| \left(\varsigma_i(t) - |y_i(t) - \bar{y}_i(t)|^2 \right) - \varepsilon_i |m - m_i(t)| \right] =$$

$$= \langle m_i(t), Q_i(t) + \zeta_i(t) \rangle + |m_i(t)| (\varsigma_i(t) - |y_i(t) - \bar{y}_i(t)|^2) \text{ п.в. } t.$$
 (5.8)

Здесь нижний индекс i у функций H, Q, а также их частных производных означает, что в эти функции вместо аргументов x, u, ψ подставлены значения $x_i(t)$, $u_i(t)$ и $\psi_i(t)$ соответственно; тройка (x_i, y_i, z_i) — оптимальная траектория в задаче (5.6). Меру с плотностью m_i обозначим через μ_i .

Из условий вариационного принципа следует, что $p_i o p^*$, $u_i o u^*$ сильно в L_1 , а также

$$\int\limits_T \left(|y_i - \bar{y}_i|^2 (|m_i| + |\bar{m}_i|) + |z_i - \bar{z}_i|^2 \right) dt + |z_{1,i} - \bar{z}_{1,i}|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Тогда из признака ρ_w -сходимости вытекает, что $\mu_i \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}^*$ (см. п. 3.2).

В силу ограничений задачи (5.6) и предложения 3.4, $|x_i(t)| + |\psi_i(t)| \leqslant \text{const } \forall i$. По лемме 3.2 $\psi_i(t) \to \psi(t) \ \forall t \in \text{Cont}(|\mathbf{q}^*|)$. При этом $\psi_i(t_0) \to \psi_0$, $\psi_i(t_1) \to \psi_1$. Условия 1), 2) теоремы доказаны. Переходя к пределу в (5.7), получаем условие 3).

Докажем условие 4). Из леммы 3.2 имеем $Q_i(t) \to Q(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(|\mathbf{q}^*|)$ и $|\zeta_i| + |\varsigma_i| \to 0$ равномерно в C(T). Рассмотрим условие максимума (5.8). Воспользуемся следствием метода точного штрафа [23, с. 55]. Тогда из (5.8) вытекает, что

$$Q_i(t) + h_i \in N_i(t)$$
 п.в. t ,

где $N_i(t)$ — нормальный конус к множеству $K_i(t)$ в точке $m_i(t)$; вектор h_i из \mathbb{R}^{k_4} такой, что $|h_i| \to 0$ при $i \to \infty$. Положим $A_i = \{t: |m_i(t)| = |\bar{m}_i(t)| + i\}$. Для выпуклого замкнутого конуса K имеет место включение $N_K(x) \subseteq N_K(0) \ \forall x \in K$. Следовательно, $N_i(t) \subseteq K^\circ \ \forall t \in T \setminus A_i$. С другой стороны, $\mathcal{L}(A_i) \to 0$ при $i \to \infty$ (так как $\|\mu_i\| + \|\bar{\mu}_i\| \to 2\|\mathbf{q}^*\| < \infty$). Отсюда в пределе имеем $Q(t) \in K^\circ \ \forall t \in (t_0, t_1)$ (так как Q_i сходятся к Q почти всюду, а компоненты Q(t) суть непрерывные справа на (t_0, t_1) функции).

Подставляя в левую часть (5.8) значение m=0, приходим к неравенству

$$\left\langle m_i(t), Q_i(t) + \zeta_i(t) \right\rangle + \left| m_i(t) \right| \left(\zeta_i(t) - \left| y_i(t) - \bar{y}_i(t) \right|^2 \right) \geqslant -\varepsilon_i |m_i(t)| \text{ п.в. } t.$$

Интегрируя и переходя к пределу (с помощью леммы 3.2, учитывая, что $||m_i||_{L_1} \leqslant \text{const}$) при $i \to \infty$, имеем

$$\int_{T} \langle Q(t), d\mathbf{q}^* \rangle \geqslant 0. \tag{5.9}$$

Равенство (5.4) для каждого $r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|)$ получается предельным переходом из условия (5.8). При этом (5.8) нужно записать в форме интегрального условия максимума, а под знаком интеграла сделать замену переменной (см. п. 3.1)

$$\pi_i(t) = \frac{F(t; |\mu_i| + |\bar{\mu}_i|)}{\|\mu_i\| + \|\bar{\mu}_i\|}, \quad t \in T,$$

(функция π_i будет строго возрастающей, поскольку векторную меру $\bar{\mu}_i$ можно всегда выбрать так, чтобы $|\bar{m}_i(t)|>0$ п.в. t). Условие максимума (5.4) также легко может быть получено непосредственно методом приращений с помощью игольчатой вариации присоединенного управления v_r^* , как это делается в случае обычной задачи [1].

Теперь стандартным способом из свойств гамильтоновой системы, (5.4) и теоремы Демьянова [14, теорема 3.1, с. 35] 1 устанавливается, что $\max_{v \in S_r} \langle Q_r(s), v \rangle \equiv \text{const.}$ Отсюда, учитывая, что $Q(t) \in K^{\circ}$ п.в., выводим $Q_r(s) \in K^{\circ}$ $\forall s \in [0,1]$ $\forall r \in \text{Ds}(|\mathbf{q}^*|)$, откуда следует, что $Q(t) \in K^{\circ}$ $\forall t \in T$. Наконец, объединяя полученный результат с (5.9), приходим к условию 4).

¹Или см., например, рассуждения в [32].

6. Линейно выпуклые задачи. Теорема существования решения. Принцип максимума ДЛЯ ЗАДАЧИ С КОНЦЕВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Пусть функция $f_0: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ отвечает тем же требованиям, что и f. Рассмотрим задачу

$$J(p,u) = e_0(p) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u,t) dt \to \min$$
 (6.1)

при ограничениях (1.3)-(1.5). В этом и двух последующих параграфах будем считать выполненными дополнительные предположения ЛВ:

- а) для любых фиксированных (x,t) вектор-функция f линейна (аффинна) по переменной u, функция f_0 выпукла по u;
- б) для п.в. t множество U(t) выпукло и замкнуто.

Задачи, для которых выполнены предположения ЛВ, будем называть линейно выпуклыми (ЛВ-

Наложим дополнительно на задачу (6.1) ограничения вида

$$|p|\leqslant c,\quad \gcd\sup|x(t)|\leqslant c,\quad |U(t)|\leqslant c\quad \text{п.в. }t,\quad \|\mathbf{q}\|\leqslant c, \tag{6.2}$$

где c — некоторое положительное число. Положим $T_c = [-c, c]$.

Теорема 6.1. Если в ЛВ-задаче (6.1), (6.2) существует допустимый процесс, то существует и оптимальный процесс.

Доказательство. Пусть $\{(p_i,u_i,\mathbf{q}_i)\}$ — минимизирующая последовательность задачи (6.1). Используя ограничения (6.2), компактность шара в конечномерном пространстве, слабую секвенциальную компактность шара в гильбертовом пространстве и ρ_w -компактность множества $B_c =$ $\{ \mathbf{q} \in \mathcal{I}(T_c) : \|\mathbf{q}\| \leqslant c \}$, перейдем к подпоследовательности и найдем тройку (p, u, \mathbf{q}) такую, что

- 1) $p_i \to p = (x_0, x_1, t_0, t_1);$ 2) $u_i \stackrel{w}{\to} u$ слабо в $L_2^m([t_0, t_1]);$ 3) $\mathbf{q}_i \stackrel{w}{\to} \mathbf{q} \in \mathcal{I}(T_c).$

По лемме $3.2^1 \ x_i(t) \to x(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(|\mathbf{q}|)$ и $\mathrm{gc} \sup \varphi^j(x_i,t) \to \mathrm{gc} \sup \varphi^j(x,t)$ при $i \to \infty \ \forall j$, где x(t) — решение (1.3), отвечающее набору (p, u, \mathbf{q}) . Следовательно, пара (x, p) удовлетворяет ограничениям (1.4), (1.5).

Из теоремы Мазура [20, с. 177] следует, что $u(t) \in U(t)$ п.в., а функционал J(p,u) слабо полунепрерывен снизу по u, т.е.

$$J(p, u) \leqslant \liminf_{i \to \infty} J(p_i, u_i).$$

Таким образом, процесс (p, u, \mathbf{q}) допустим в задаче (6.1), и значение функционала на нем достигает инфимума.

Далее линейно выпуклые задачи будем изучать при дополнительном предположении: $k_4 = 1$, $K = [0, +\infty)$, т.е. для случая, когда импульсное управление— скалярная неотрицательная борелевская мера. Но прежде чем перейти к изучению непосредственно ЛВ-задач, сделаем одно необходимое дополнение к теореме 5.1 и докажем условия трансверсальности по времени.

 $^{^{1}}$ Лемма 3.2, очевидно, верна и в том случае, когда управления сходятся слабо, а f линейна по u (доказательство аналогично).

Предложение 6.1. Пусть $K = [0, +\infty)$ и (p^*, u^*, \mathbf{q}^*) есть решение задачи (5.1) с нефиксированным временем, $p^* = (x_0^*, x_1^*, t_0^*, t_1^*)$. Тогда, помимо условий теоремы 5.1 (которые выполняются на отрезке $T^* = [t_0^*, t_1^*]$), имеют место условия трансверсальности по времени

$$\begin{cases}
\operatorname{ess \lim\sup} \max_{t \to t_k^*} \max_{u \in U(t)} H(\beta_k^*, u, \gamma_k, t) + (-1)^{k+1} \left[\Delta_k^* \int_0^1 \langle g_t(\alpha_k^*, t_k^*), \sigma_k \rangle \, ds - \frac{\partial e_0}{\partial t_k}(p^*) \right] \geqslant 0, \\
\operatorname{ess \lim\inf} \max_{t \to t_k^*} \max_{u \in U(t)} H(\beta_k^*, u, \gamma_k, t) + (-1)^{k+1} \left[\Delta_k^* \int_0^1 \langle g_t(\alpha_k^*, t_k^*), \sigma_k \rangle \, ds - \frac{\partial e_0}{\partial t_k}(p^*) \right] \leqslant 0, \\
\left[\Delta_k^* \int_0^1 \langle g_t(\alpha_k^*, t_k^*), \sigma_k \rangle \, ds - \frac{\partial e_0}{\partial t_k}(p^*) \right] \leqslant 0,
\end{cases}$$
(6.3)

ess
$$\liminf_{t \to t_k^*} \max_{u \in U(t)} H(x_k^*, u, \psi_k, t) + (-1)^k \frac{\partial e_0}{\partial t_k}(p^*) \le 0, \quad k = 0, 1.$$
 (6.4)

Здесь и далее приняты следующие обозначения: $\Delta_k^* = \mu^*(\{t_k^*\})$, $\psi_k = \psi(t_k^*)$, k = 0, 1,

$$\beta_0^* = x^*(t_0^{*+}), \quad \beta_1^* = x^*(t_1^{*-}), \quad \gamma_0 = \psi(t_0^{*+}), \quad \gamma_1 = \psi(t_1^{*-}).$$

Функции (α_k^*, σ_k) , k = 0, 1, в условии (6.3) удовлетворяют (5.3) при $r = t_k^*$.

Доказательство. Условия трансверсальности по времени будем доказывать, опираясь на [1].

Докажем (6.3). Сначала предположим, что мера μ^* не имеет атомов в точках t_k^* , т.е. $\Delta_k^*=0$, k=0,1. Будем доказывать (6.3) при k=1. Фиксируем $\varepsilon>0$ так, чтобы $t_1^*-\varepsilon\in \mathrm{Cont}(\mu^*)$, и пусть $T_\varepsilon=[t_1^*-\varepsilon,t_1^*]$. На отрезке $[t_0^*,t_1^*-\varepsilon]$ определим меру $\mu_\varepsilon:=\mu^*+\mu^*(T_\varepsilon)\delta(t_1^*-\varepsilon)$. Положим $p_{\varepsilon}=(x_0^*,x_{\varepsilon}(t_1^*-\varepsilon),t_0^*,t_1^*-\varepsilon)$, где x_{ε} — траектория, отвечающая тройке $(x_0^*,u^*,\mu_{\varepsilon})$ (при достаточно малых ε она существует). Из оптимальности процесса (p^*, u^*, μ^*) имеем

$$e_0(p_{\varepsilon}) - e_0(p^*) \geqslant 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \left\langle \frac{\partial e_0}{\partial x_1}(p^*), \Delta x_{\varepsilon} \right\rangle - \varepsilon \frac{\partial e_0}{\partial t_1}(p^*) + o(|\Delta x_{\varepsilon}|) + o(\varepsilon) \geqslant 0,$$
 (6.5)

где $\Delta x_{\varepsilon} = x_{\varepsilon}(t_1^* - \varepsilon) - x_1^*$. Положим $\xi_{\varepsilon}^* = \xi(x^*(t_1^* - \varepsilon), t_1^* - \varepsilon, \mu^*(T_{\varepsilon}))$, и пусть $\Delta x_{\varepsilon} = \Delta x_{\varepsilon}^1 + \Delta x_{\varepsilon}^2$, где

$$\Delta x_{\varepsilon}^{1} = -\int_{T_{\varepsilon}} f(x^{*}, u^{*}, t) dt, \qquad \Delta x_{\varepsilon}^{2} = \xi_{\varepsilon}^{*} - \left(x^{*}(t_{1}^{*} - \varepsilon) + \int_{T_{\varepsilon}} g(x^{*}, t) d\mu^{*} \right).$$

Оценка $|\Delta x_{arepsilon}^1|\leqslant \mathrm{const}\,arepsilon$ очевидна. Покажем, что $|\Delta x_{arepsilon}^2|\leqslant \mathrm{const}\,arepsilon\mu^*(T_{arepsilon})$. Поскольку $|\Delta x_{arepsilon}^2|=0$, когда $\mu^*(T_{\varepsilon})=0$, предположим, что $\mu^*(T_{\varepsilon})>0 \ \forall \varepsilon$.

Построим последовательность абсолютно непрерывных мер $\{\mu_i\}$ с плотностью $m_i>0$ п.в., определенных на сегменте T_{ε} , таких, что $\mu_i \stackrel{w}{\to} \mu^*$ на T_{ε} и $\mu_i(T_{\varepsilon}) = \mu^*(T_{\varepsilon})$. Пусть x_i есть продолжение решения x^* на сегмент $T_{arepsilon}$, отвечающее мере μ_i (такое продолжение существует при достаточно больших i). По лемме $3.2 \ x_i(t) \to x^*(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\mu^*)$. Тогда $\Delta x_{\varepsilon,i} = x_{\varepsilon}(t_1^* - \varepsilon) - x_i(t_1^*) \to \Delta x_{\varepsilon}$, $\Delta x_{\varepsilon,i}^1 \to \Delta x_{\varepsilon}^1$ и $\Delta x_{\varepsilon,i}^2 \to \Delta x_{\varepsilon}^2$ при $i \to \infty$, где

$$\Delta x_{\varepsilon,i}^1 = -\int_{T_{\varepsilon}} f(x_i, u^*, t) dt, \qquad \Delta x_{\varepsilon,i}^2 = \xi_{\varepsilon}^* - \left(x^*(t_1^* - \varepsilon) + \int_{T_{\varepsilon}} g(x_i, t) m_i dt \right).$$

Чтобы оценить $|\Delta x_{\varepsilon,i}^2|$, рассмотрим уравнение

$$\dot{x}_{2,i} = g(x_{1,i} + x_{2,i}, t)m_i, \quad t \in T_{\varepsilon}, \qquad x_{2,i}(t_1^* - \varepsilon) = x^*(t_1^* - \varepsilon). \tag{6.6}$$

Здесь
$$x_{1,i}(t) = \int\limits_{t_1^*-arepsilon}^t f(x_i,u^*, au)d au$$
 и $x_i = x_{1,i} + x_{2,i}.$

Рассмотрим функции

$$\pi_i(t) = \frac{F(t; \mu_i) - F(t_1^* - \varepsilon; \mu_i)}{\mu^*(T_{\varepsilon})}, \quad t \in T_{\varepsilon}.$$

Функция $\pi_i:T_{\varepsilon}\to [0,1]$ абсолютно непрерывна и $\frac{d\pi_i}{dt}>0$. Поэтому существует обратная функция $\pi_i^{-1}:[0,1]\to T_{\varepsilon}$, которая тоже абсолютно непрерывна и строго возрастает. Делая замену переменной $s=\pi_i(t)$ в (6.6) и положив $\alpha_i(s)=x_{2,i}(\pi_i^{-1}(s))$, приходим к уравнению

$$\dot{\alpha}_i = g(x_{1,i}(\pi_i^{-1}(s)) + \alpha_i, \pi_i^{-1}(s))\mu^*(T_{\varepsilon}), \quad s \in [0,1], \quad \alpha_i(0) = x^*(t_1^* - \varepsilon).$$

По определению $\xi_{arepsilon}^*=lpha(1)$, где lpha(s) удовлетворяет уравнению

$$\dot{\alpha} = g(\alpha, t_1^* - \varepsilon)\mu^*(T_\varepsilon), \quad s \in [0, 1], \quad \alpha(0) = x^*(t_1^* - \varepsilon).$$

Отсюда
$$|\alpha_i(s) - \alpha(s)| \leqslant \mu^*(T_\varepsilon) \int\limits_0^s c\Big(|\alpha_i(\tau) - \alpha(\tau)| + \int\limits_{T_\varepsilon} |f(x_i, u^*, \theta)| d\theta + \varepsilon\Big) d\tau \ \forall s.$$

По неравенству Гронуолла $|\Delta x_{\varepsilon,i}^2| = |\alpha_i(1) - \alpha(1)| \leqslant \operatorname{const} \varepsilon \mu^*(T_\varepsilon)$, и поэтому

$$|\Delta x_{\varepsilon}^2| \leqslant \operatorname{const} \varepsilon \mu^*(T_{\varepsilon}) = o(\varepsilon).$$

Последнее справедливо, поскольку $\mu^*(T_{\varepsilon}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

В силу полученных оценок, а также уже доказанных условий трансверсальности (условие 2) теоремы 5.1), неравенство (6.5) принимает вид

$$\left\langle \psi_1, \int_{T_{\varepsilon}} f(x^*, u^*, t) dt \right\rangle - \varepsilon \frac{\partial e_0}{\partial t_1} (p^*) + o(\varepsilon) \geqslant 0.$$

Отсюда выводим

$$\int_{t_1^*-\varepsilon}^{t_1^*} \max_{u \in U(t)} H(u, \psi_1, t) dt - \varepsilon \frac{\partial e_0}{\partial t_1}(p^*) + o(\varepsilon) \ge 0,$$

разделив неравенство на $\varepsilon > 0$, при $\varepsilon \to 0$ получаем

ess
$$\limsup_{t \to t_1^*} \max_{u \in U(t)} H(x_1^*, u, \psi_1, t) - \frac{\partial e_0}{\partial t_1}(p^*) \ge 0,$$

что соответствует первому неравенству в (6.3).

Получим второе неравенство. Положим $\mu^*([t_1^*,+\infty))=0$. Продолжим управление u^* вправо за точку t_1^* допустимым образом так, что

$$u^*(t) \in \operatorname*{Argmax}_{u \in U(t)} H(x_1^*, u, \psi_1, t), \quad t > t_1^*.$$

Продолжим решение (1.3), отвечающее построенному u^* , на отрезок $[t_1^*, t_1^* + \delta]$ для достаточно малого $\delta > 0$. Положим $p_{\varepsilon} = (x_0^*, x^*(t_1^* + \varepsilon), t_0^*, t_1^* + \varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0; \delta]$. Проводя теперь рассуждения, аналогичные приведенным выше, но не слева от точки t_1^* , а справа от нее, получим условие (6.3) теоремы при k=1. Случай k=0 рассматривается аналогично.

Теперь покажем, что условия (6.3) выполняются при $\Delta_k^* > 0$, k = 0, 1. Для этой цели воспользуемся редукцией R_1 (см. § 4) исходной задачи (P) и рассмотрим редуцированную задачу (P_1) .

Если процесс (p^*, u^*, μ^*) — решение (P), то процесс $(\beta_0^*, \beta_1^*, t_0^*, t_1^*, u^*, \Delta_0^*, \Delta_1^*, \tilde{\mu})$ — решение (P_1) . Здесь $\tilde{\mu} = \mu^* - \sum_{k=0}^1 \Delta_k^* \delta(t_k^*)$, и β_0^*, β_1^* введены выше. Мера $\tilde{\mu}$ не имеет атомов в точках $t_k^*, k = 0, 1$, и ΠM для такой задачи был только что получен.

$$(P_1): \begin{cases} e_0(p) \to \min, \\ dx = f(x, u, t)dt + g(x, t)d\mu, \quad d\Delta_k = 0, \quad \Delta_k \geqslant 0, \quad k = 0, 1, \\ p = (\xi_0, \xi_1, t_0, t_1), \quad \xi_k = \xi(x_k, t_k, (-1)^{k+1}\Delta_k). \end{cases}$$

 $^{^{1}}$ Здесь (P), (P_{1}) — задачи, рассмотренные в § 4, но без концевых ограничений. Более точно, если задача (P) без ограничений, то (P_{1}) вводится следующим образом (равносильное определение):

Применяя ПМ к задаче (P_1) , заключаем, что существует функция $\psi^R \in V^n(T^*)$ такая, что

$$d\psi^R = -H_x(\tilde{x}, \psi^R, t)dt - Q_x(\tilde{x}, \psi^R, t)d\tilde{\mu}, \quad t \in T^*,$$

$$\begin{cases} \psi_0^R = \xi_x^{\top}(\beta_0^*, t_0^*, -\Delta_0^*) \frac{\partial e_0}{\partial x_0}(p^*), \\ \psi_1^R = -\xi_x^{\top}(\beta_1^*, t_1^*, \Delta_1^*) \frac{\partial e_0}{\partial x_1}(p^*), \end{cases}$$
(6.7)

$$\left\langle \xi_{\Delta}(\beta_k^*, t_k^*, (-1)^{k+1} \Delta_k^*), \frac{\partial e_0}{\partial x_k}(p^*) \right\rangle = 0, \quad k = 0, 1,$$

$$(6.8)$$

 $\max_{u \in U(t)} H(\tilde{x}(t),u,\psi^R(t),t) = H(\tilde{x}(t),u^*(t),\psi^R(t),t) \quad \text{ fi.b.},$

$$Q(\tilde{x}(t), \psi^{R}(t), t) \leq 0, \quad t \in T^{*},$$

$$Q(\tilde{x}(t), \psi^{R}(t), t) = 0 \quad \forall t \in \operatorname{supp}(\tilde{\mu}),$$

$$\begin{cases} \operatorname{ess \ lim \ sup \ } \max_{t \to t_k^*} H(\beta_k^*, u, \psi_k^R, t) + (-1)^k \left[\frac{\partial e_0}{\partial t_k}(p^*) + \left\langle \xi_t(\beta_k^*, t_k^*, (-1)^{k+1} \Delta_k^*), \frac{\partial e_0}{\partial x_k}(p^*) \right\rangle \right] \geqslant 0, \\ \operatorname{ess \ lim \ } \inf_{t \to t_k^*} \max_{u \in U(t)} H(\beta_k^*, u, \psi_k^R, t) + (-1)^k \left[\frac{\partial e_0}{\partial t_k}(p^*) + \left\langle \xi_t(\beta_k^*, t_k^*, (-1)^{k+1} \Delta_k^*), \frac{\partial e_0}{\partial x_k}(p^*) \right\rangle \right] \leqslant 0, \end{cases}$$

Здесь \tilde{x} — оптимальная траектория в задаче (P_1) , матричная функция ξ_x и векторные функции ξ_Δ , ξ_t являются производными ξ по x, Δ и t соответственно.

Ясно, что $\tilde{x}(t)=x^*(t)$ $\forall t\in (t_0^*,t_1^*)$ и $\tilde{x}(t_k^*)=\beta_k^*$, k=0,1. Возьмем $\psi(t)=\psi^R(t)$ $\forall t\in (t_0^*,t_1^*)$, $\psi(t_k^*)=(-1)^k\frac{\partial e_0}{\partial x_k}(p^*)$, k=0,1, и покажем, что ψ удовлетворяет условиям 1)–4) теоремы 5.1 и условию (6.3). Их, очевидно, достаточно проверить только в двух точках t_k^* , k=0,1.

Пусть k=1 (случай k=0 аналогичен) и (α_1^*,σ_1) — решение (5.3) при $r=t_1^*$. Известно, что функции (ξ_x,ξ_Δ,ξ_t) определяются как решения следующих систем ОДУ:

$$(\xi_x, \xi_\Delta, \xi_t)(\beta_1^*, t_1^*, \Delta_1^*) = (\bar{\xi}_x, \bar{\xi}_\Delta, \bar{\xi}_t)(1),$$

где $(\bar{\xi}_x, \bar{\xi}_\Delta, \bar{\xi}_t)(0) = (E, 0, 0)$ (E - n-мерная единичная матрица), и для $s \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}}_x(s) &= g_x(\alpha_1^*(s), t_1^*) \bar{\xi}_x(s) \Delta_1^*, \\ \dot{\bar{\xi}}_{\Delta}(s) &= g_x(\alpha_1^*(s), t_1^*) \bar{\xi}_{\Delta}(s) \Delta_1^* + g(\alpha_1^*(s), t_1^*), \\ \dot{\bar{\xi}}_t(s) &= g_x(\alpha_1^*(s), t_1^*) \bar{\xi}_t(s) \Delta_1^* + g_t(\alpha_1^*(s), t_1^*) \Delta_1^*. \end{cases}$$

Из (6.7) заключаем, что $\sigma_1(1)=\psi_1$. Таким образом, условия 1)–3) доказаны.

Чтобы доказать условие 4), покажем, что $\langle \sigma_1, g(\alpha_1^*, t_1^*) \rangle \equiv 0$. В самом деле, непосредственным вычислением, учитывая, что $\frac{d}{ds} \langle \sigma_1, g(\alpha_1, t_1^*) \rangle = 0 \ \forall s \in [0, 1]$, получаем

$$\frac{d}{ds}\langle \sigma_1, \bar{\xi}_{\Delta} \rangle = \langle \sigma_1, g(\alpha_1^*, t_1^*) \rangle = \text{const} \quad \forall s \in [0, 1].$$

С другой стороны, из (6.8), по определению ξ_{Δ} , находим, что

$$\langle \sigma_1(0), \bar{\xi}_{\Delta}(0) \rangle = \langle \sigma_1(1), \bar{\xi}_{\Delta}(1) \rangle = 0.$$

Следовательно, $\langle \sigma_1, \bar{\xi}_\Delta \rangle \equiv 0$, тогда $\langle \sigma_1, g(\alpha_1^*, t_1^*) \rangle \equiv 0$ на [0,1], т.е. условие 4) доказано. Условие (6.3) вытекает из равенства

$$\frac{d}{ds}\langle \sigma_1, \bar{\xi}_t \rangle = \langle \sigma_1, g_t(\alpha_1^*, t_1^*) \rangle \Delta_1^*.$$

Неравенства (6.4) выводятся точно так же, как их аналог в (6.3).

Предложение доказано.

Замечание. При выводе неравенств (6.4) условие $K = [0, +\infty)$ использовано не было, следовательно, условия трансверсальности по времени в форме (6.4) доказаны для случая произвольного конуса K.

(6.14)

В оставшейся части этого параграфа исследуем ЛВ-задачу (1.2)-(1.4), т.е. задачу с концевыми ограничениями, но без фазовых. Примем обозначение

$$l(p,\lambda) = \sum_{j=0}^{2} \langle e_j(p), \lambda_j \rangle, \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2).$$

 Φ ункция l называется малым лагранжианом.

Теорема 6.2. Пусть (p^*, u^*, μ^*) — оптимальный процесс в ЛВ-задаче (1.2)–(1.4). Тогда существуют число $\lambda_0\geqslant 0$, векторы $\lambda_j\in\mathbb{R}^{k_j}$, j=1,2, и функция $\psi\in V^n(T^*)$ такие, что выполняются следующие условия:

$$d\psi = -H_x(t)dt - Q_x(t)d\mu^*, \quad t \in T^*; \tag{6.9}$$

$$\psi_0 = \frac{\partial l}{\partial x_0}(p^*, \lambda), \qquad \psi_1 = -\frac{\partial l}{\partial x_1}(p^*, \lambda); \tag{6.10}$$

$$\lambda_1 \geqslant 0, \qquad \langle \lambda_1, e_1(p^*) \rangle = 0; \tag{6.11}$$

$$\max_{u \in U(t)} H(u,t) = H(t) \text{ n.s. } t;$$

$$Q(t) \leqslant 0 \quad \forall t, \qquad Q(t) = 0 \quad \forall t \in \text{supp}(\mu^*);$$

$$(6.12)$$

$$Q(t) \leqslant 0 \quad \forall t, \qquad Q(t) = 0 \quad \forall t \in \text{supp}(\mu^*);$$
 (6.13)

$$\begin{cases} \operatorname{ess\, lim\, sup\, max}_{t \to t_k^*} H(\beta_k^*, u, \gamma_k, t) + (-1)^{k+1} \left[\Delta_k^* \int_0^1 \left\langle g_t(\alpha_k^*, t_k^*), \sigma_k \right\rangle ds - -\frac{\partial l}{\partial t_k}(p^*, \lambda) \right] \geqslant 0, \\ \operatorname{ess\, lim\, inf\, max}_{t \to t_k^*} \prod_{u \in U(t)} H(\beta_k^*, u, \gamma_k, t) + (-1)^{k+1} \left[\Delta_k^* \int_0^1 \left\langle g_t(\alpha_k^*, t_k^*), \sigma_k \right\rangle ds - -\frac{\partial l}{\partial t_k}(p^*, \lambda) \right] \leqslant 0, \end{cases}$$

$$|\lambda| = 1. \tag{6.15}$$

Более того, неравенства (6.14) могут быть заменены на

ess
$$\liminf_{t \to t_k^*} \max_{u \in U(t)} H(x_k^*, u, \psi_k, t) + (-1)^k \frac{\partial l}{\partial t_k}(p^*, \lambda) \le 0, \quad k = 0, 1.$$
 (6.16)

Однако нельзя гарантировать, что оба условия (6.14) и (6.16) будут выполняться одновременно, т.е. имеются две теоремы — две разные версии ПМ.

Доказательство. Для доказательства используется метод штрафов [1]. Пусть процесс (p^*,u^*,μ^*) — решение ЛВ-задачи (1.2)–(1.4). Вначале предположим, что $\Delta_k^*=0,\,k=0,1.$

Применим метод штрафов. Для этого возьмем произвольное натуральное i и определим функцию $e_{0,i}$ формулой

$$e_{0,i}(p) = e_0(p) + |p - p^*|^2 + i(|e_1^+(p)|^2 + |e_2(p)|^2).$$

Здесь для произвольного вектора $a=(a^1,\ldots,a^r)$ через a^+ обозначается вектор с координатами $(a^j)^+ = \max(0, a^j), j = 1, \dots, r.$

Пусть $F(t) = F(t; \mu^*)$ — функция распределения оптимальной меры. Возьмем $c = \gcd\sup |x^*(t)| +$

 $\|\mu^*\| + |p^*| + 1$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ составим штрафную задачу

$$\begin{cases} J_{i}(p, u, \mu) = e_{0,i}(p) + |y_{1} - F(t_{1}^{*})|^{2} + \varepsilon \int_{t_{0}}^{t_{1}} \left[|u - u^{*}(t)|^{2} + |y - F(t)|^{2} \right] dt \to \min, \\ dx = f(x, u, t) dt + g(x, t) d\mu, \quad dy = d\mu, \quad y_{0} = 0, \quad t \in [t_{0}, t_{1}], \\ \max\{|p|, \gcd |x|, y_{1}\} \leqslant c, \quad u(t) \in U(t) \text{ п.в. } t, \quad \mu \geqslant 0. \end{cases}$$

$$(6.17)$$

Эту задачу будем называть i-задачей.

По теореме 6.1 каждая из *i*-задач имеет решение. Обозначим его (p_i, u_i, μ_i) , и пусть (x_i, y_i) оптимальные траектории в i-задаче. Используя соображения компактности, переходя к подпоследовательности, найдем процесс (p,u,μ) такой, что $p_i \to p,\ u_i \stackrel{w}{\to} u$ слабо в $L_2^m(T_c),\ \mu_i \stackrel{w}{\to} \mu$ слабо-* в $C^*(T_c)$. (Здесь $T_c = [-c,c]$, управления u_i доопределяются на T_c произвольным допустимым способом, а меры μ_i — нулем.) По лемме $3.2 \ x_i(t) \to x(t), \ y_i(t) \to y(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\mu)$. Докажем, что $p = p^*, \ u = u^*, \ \mu = \mu^*$.

Покажем, что (p, u, μ) — допустимый в задаче (1.2)–(1.4) процесс. Действительно, в силу наложенных ограничений,

$$|e_1^+(p_i)|^2 + |e_2(p_i)|^2 \leqslant \frac{\text{const}}{i}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $i \to \infty$, получаем, что p удовлетворяет (1.4). Таким образом, (p, u, μ) — допустимый процесс, и поэтому $e_0(p) \geqslant e_0(p^*)$.

Далее,

Здесь

$$J_i(p_i, u_i, \mu_i) \leqslant J_i(p^*, u^*, \mu^*) = e_0(p^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_0(p_i) + |p_i - p^*|^2 + |y_{1,i} - F(t_1^*)|^2 + \varepsilon \int_{t_0}^{t_{1,i}} (|u_i - u^*(t)|^2 + |y_i - F(t)|^2) dt \leqslant e_0(p^*).$$

Перейдем в полученном неравенстве к пределу при $i \to \infty$, используя слабую полунепрерывность снизу по u левой части. Имеем

$$e_0(p) + |p - p^*|^2 + |y_1 - F(t_1^*)|^2 + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} (|u - u^*(t)|^2 + |y - F(t)|^2) dt \le e_0(p^*).$$

Отсюда, поскольку уже известно, что $e_0(p) \geqslant e_0(p^*)$, выводим $p=p^*$, $u=u^*$ и $\mu=\mu^*$. Кроме того, $\|u_i-u^*\|_{L_2} \to 0$. Переходя к подпоследовательности, получаем $u_i \to u^*$ п.в.

При больших i все неравенственные ограничения задачи (6.17) являются строгими. Поэтому к i-задаче применимы необходимые условия теоремы 5.1. В силу теоремы 5.1 и предложения 6.1, существуют функция $\psi_i \in V^n(T_i)$, абсолютно непрерывная функция $\zeta_i \in C(T_i)$ и число $\lambda_{0,i} > 0$, для которых имеет место:

$$\begin{split} |\lambda_i| + \operatorname{gc}\sup_{t \in T_i} |\psi_i(t)| &= 1, \\ d\psi_i = -H_x^i(t)dt - Q_x^i(t)d\mu_i, \quad t \in T_i, \\ \psi_{0,i} &= \frac{\partial l}{\partial x_0}(p_i,\lambda_i) + 2\lambda_{0,i}(x_{0,i} - x_0^*), \qquad \psi_{1,i} = -\frac{\partial l}{\partial x_1}(p_i,\lambda_i) - 2\lambda_{0,i}(x_{1,i} - x_1^*), \\ d\zeta_i &= 2\lambda_{0,i}\varepsilon[y_i - F(t)]dt, \qquad \zeta_i(t_{1,i}) = -2\lambda_{0,i}(y_{1,i} - F(t_1^*)), \\ \max_{u \in U(t)} \left(H_i(u,t) - \lambda_{0,i}\varepsilon|u - u^*(t)|^2\right) &= H_i(t) - \lambda_{0,i}\varepsilon|u_i(t) - u^*(t)|^2 \text{ fi.b. } t, \\ Q_i(t) + \zeta_i(t) \leqslant 0 \quad \forall t, \qquad Q_i(t) + \zeta_i(t) = 0 \quad \forall t \in \operatorname{supp}(\mu_i), \\ \operatorname{ess\ lim\ sup\ max}_{t \to t_{k,i}} \left[H(\beta_{k,i}, u, \gamma_{k,i}, t) - \lambda_{0,i}\varepsilon|u - u^*(t)|^2\right] + \\ + (-1)^k \left[\frac{\partial l}{\partial t_k}(p_i, \lambda_i) + 2\lambda_{0,i}(t_{k,i} - t_k^*)\right] \geqslant O(\varepsilon) + O(\Delta_{k,i}), \quad k = 0, 1, \\ \operatorname{ess\ liminf\ max}_{t \to t_{k,i}} \left[H(\beta_{k,i}, u, \gamma_{k,i}, t) - \lambda_{0,i}\varepsilon|u - u^*(t)|^2\right] + \\ + (-1)^k \left[\frac{\partial l}{\partial t_k}(p_i, \lambda_i) + 2\lambda_{0,i}(t_{k,i} - t_k^*)\right] \leqslant O(\varepsilon) + O(\Delta_{k,i}), \quad k = 0, 1. \\ \lambda_{1,i} = 2i\lambda_{0,i}e_1^+(p_i), \qquad \lambda_{2,i} = 2i\lambda_{0,i}e_2(p_i), \qquad \lambda_i = (\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}); \\ T_i = [t_{0,i}, t_{1,i}], \qquad \Delta_{k,i} = \mu_i(\{t_{k,i}\}), \quad k = 0, 1, \\ \beta_{0,i} = x_i(t_{0,i}^+), \qquad \beta_{1,i} = x_i(t_{1,i}^-), \qquad \gamma_{0,i} = \psi_i(t_{0,i}^+), \qquad \gamma_{1,i} = \psi_i(t_{1,i}^-). \end{split}$$

Индекс i у функций H и Q (а также их частных производных) означает, что в них вместо части переменных x,u,ψ подставлены значения $x_i(t),u_i(t)$ или $\psi_i(t)$ соответственно.

Семейство $\{Q_i\}$ равностепенно непрерывно. Действительно, функции Q_i липшицевы с одной и той же для всех i константой. Выделяя подпоследовательность, получаем, что $Q_i(t) \to Q(t)$ равномерно. Очевидно также, что $\zeta_i \to 0$ равномерно при $i \to \infty$.

Пользуясь леммой 3.2, а также условием $\Delta_k^* = 0$, k = 0, 1, из которого вытекает, что $\Delta_{k,i} \to 0$ при $i \to \infty$, перейдем к пределу в необходимых условиях i-задачи сначала при $i \to \infty$, а потом (повторяя процедуру) при $\varepsilon \to 0$ и получим условия (6.9)–(6.15).

Теорема доказана для случая, когда $\Delta_k^*=0$, k=0,1. Если $\Delta_k^*>0$, то с помощью редукции R_1 (см. § 4) приходим к условиям трансверсальности по времени (6.14). Условия (6.16) независимо от значений Δ_k^* доказываются, как выше, и получаются предельным переходом из неравенств (6.4), выписанных для i-задачи. Редукцию R_1 при этом использовать не нужно.

Теорема доказана.

7. Задача с фазовыми ограничениями

Введем обозначение

$$W^{j}(x,t) = \langle \varphi_{x}^{j}(x,t), g(x,t) \rangle, \quad j = 1, \dots, k_{3}.$$

При доказательстве условий трансверсальности по времени в задаче с фазовыми ограничениями нам понадобится некоторое предположение монотонности.

Предположение М). Пусть $x^*(t)$ — исследуемая оптимальная траектория, заданная на отрезке $[t_0^*,t_1^*]$. Обозначим $E_0^*=(x_0^{*+},t_0^*),\ E_1^*=(x_1^{*-},t_1^*).$ При каждых E=(x,t) и $\Delta>0$ на отрезке [0,1] рассмотрим функцию $\alpha(s)=\alpha(s;E,\Delta)$, являющуюся решением соответствующей присоединенной системы, т.е. $\dot{\alpha}=g(\alpha,t)\Delta,\ \alpha(0)=x.$ Пусть $\varphi^j(E_k^*)=W^j(E_k^*)=0$ при каких-нибудь $j=1,\ldots,k_3$ и k=0,1. Тогда потребуем, чтобы функция $W^j(\alpha(s),t)$ монотонно не убывала на отрезке [0,1] при всех E,Δ таких, что $|E-E_k^*|+\Delta\leqslant\delta$ для некоторого фиксированного $\delta>0.$ Если $W^j(E_k^*)\neq 0$, то число δ выберем так, чтобы $W^j(\alpha(s),t)\neq 0$ $\forall s\in [0,1]$ $\forall E:|E-E_k^*|+\Delta\leqslant\delta.$

Расшифруем монотонность функции W^j в предположении M) в терминах производных. Для этого предположим, что функция φ дважды непрерывно дифференцируема. Тогда предположение M) будет выполняться, если найдется $\delta>0$ такое, что

$$\dot{W}^{j}(E) \geqslant 0 \quad \forall E: |E - E_k^*| \leqslant \delta \quad \forall j, k: \varphi^{j}(E_k^*) = W^{j}(E_k^*) = 0, \tag{7.1}$$

где $\dot{W}^j = \langle g_x g, \varphi_x^j \rangle + \langle g, \varphi_{xx}^j g \rangle$.

Проанализируем условие (7.1). Условие (7.1) выполнено для тех индексов j, для которых $\varphi^j(E_k^*)=0$, но $W^j(E_k^*)\neq 0$ или $\dot{W}^j(E_k^*)>0$. Условие (7.1) также верно для задач, в которых фазовые ограничения выпуклы на траекториях присоединенной системы. Примером такой задачи может служить:

- ullet линейная задача: g не зависит от x, arphi зависит от x линейно;
- обычная задача: $g \equiv 0$ (в обоих случаях $\dot{W}^j \equiv 0$);
- ullet задача, в которой функция g не зависит от x, а матрица $arphi_{xx}^{\jmath}$ неотрицательно определена.

Теорема 7.1. Пусть (p^*, u^*, μ^*) — решение ЛВ-задачи (1.2)—(1.5), и фазовые ограничения согласованы с концевыми. Тогда существуют число $\lambda_0 \geqslant 0$, векторы $\lambda_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$, вектор-функция $\psi \in V^n(T^*)$, вектор-мера $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^{k_3})$, $\eta^j \in C^*_+(T^*)$: $\mathrm{Ds}(\mu^*) \cap \mathrm{Ds}(\eta^j) = \varnothing$ $\forall j$, а для каждой точки $r \in \mathrm{Ds}(\mu^*)$ существуют своя вектор-функция $\sigma_r \in V^n([0,1])$ и своя вектор-мера $\eta_r = (\eta^1_r, \ldots, \eta^{k_3}_r)$, $\eta^j_r \in C^*_+([0,1])$, $j = 1, \ldots, k_3$, такие, что

1) функции ψ и σ_r , $r \in \mathrm{Ds}(\mu^*)$, удовлетворяют уравнениям

$$\psi(t) = \psi_0 - \int_{t_0^*}^t H_x(s) \, ds - \int_{[t_0^*, t]} Q_x(s) \, d\mu_c^* + \int_{[t_0^*, t]} \varphi_x^\top(x^*, s) \, d\eta + \Sigma(\psi, t), \quad t \in (t_0^*, t_1^*],$$

$$\Sigma(\psi, t) = \sum_{r \in \text{Ds}(\mu^*), \ r \leqslant t} [\sigma_r(1) - \psi(r^-)],$$

$$\begin{cases} d\alpha_r^* = g(\alpha_r^*, r) \Delta_r^* ds, \\ d\sigma_r = -g_x^{\top}(\alpha_r^*, r) \sigma_r \Delta_r^* ds + \varphi_x^{\top}(\alpha_r^*, r) d\eta_r, \quad s \in [0, 1], \\ \alpha_r^*(0) = x^*(r^-), \quad \sigma_r(0) = \psi(r^-), \quad \Delta_r^* = \mu^*(\{r\}); \end{cases}$$

2) выполнены условия трансверсальности

$$\psi_0 = \frac{\partial l}{\partial x_0}(p^*, \lambda), \qquad \psi_1 = -\frac{\partial l}{\partial x_1}(p^*, \lambda);$$

3) для каждого атома r меры μ^* имеет место

$$\langle g(\alpha_r^*(s), r), \sigma_r(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in [0, 1],$$

$$\operatorname{supp}(\eta_r^j) \subseteq \{ s \in [0,1] : \varphi^j(\alpha_r^*(s), r) = W^j(\alpha_r^*(s), r) = 0 \} \quad \forall j;$$

4) выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\langle \lambda_1, e_1(p^*) \rangle = 0,$$

$$\varphi^j(x^*(t),t) = 0 \quad \eta^j$$
-n.s. $\forall j$;

5) выполнено условие максимума регулярного гамильтониана

$$\max_{u \in U(t)} H(u,t) = H(t) \text{ n.s. } t;$$

6) выполнено условие максимума импульсного гамильтониана

$$Q(t) \leqslant 0 \quad \forall t, \qquad Q(t) = 0 \quad \mu^*$$
-n.s.;

7) выполнено неравенство

$$\operatorname{ess} \liminf_{t \to t_k^*} \max_{u \in U(t)} H(x_k^*, u, \psi_k, t) + (-1)^k \frac{\partial l}{\partial t_k}(p^*, \lambda) \leqslant 0, \quad k = 0, 1;$$

8) выполнено условие нетривиальности

$$|\lambda| + ||\eta|| + \sum_{r \in Ds(\mu^*)} ||\eta_r|| = 1.$$

Если, кроме того, выполнено предположение M) и $\Delta_k^* = 0$, $k = 0, 1^1$, то неравенства в n. 7) можно заменить на более полные условия трансверсальности по времени:

$$\begin{cases}
\operatorname{ess \lim \sup} \max_{u \in U(t)} H(x_k^*, u, \psi_k, t) + (-1)^k \frac{\partial l}{\partial t_k} (p^*, \lambda) \geqslant 0, \\
\operatorname{ess \lim \inf} \max_{t \to t_k^*} \max_{u \in U(t)} H(x_k^*, u, \psi_k, t) + (-1)^k \frac{\partial l}{\partial t_k} (p^*, \lambda) \leqslant 0,
\end{cases}$$

$$(7.2)$$

И снова, как и в теореме 6.2, нельзя утверждать, что условие из п. 7) и (7.2) выполняются одновременно, т.е. опять имеем два варианта ΠM .

Предварительно докажем следующее предложение.

Предложение 7.1. Пусть $f_i \in C([0,1])$, $f_i \to f$ равномерно, $\eta_i \in C_+^*([0,1])$, $\eta_i \xrightarrow{w} \eta$, причем $\sup p(\eta) \subseteq W_0 = \{t: f(t) = 0\}$. Положим

$$x_i(t) = \int_{[0,t]} f_i(s)d\eta_i, \quad t > 0, \quad x_i(0) = 0.$$

Тогда если функция f липшицева, то $\operatorname{Var} \left| {}_{0}^{1}[x_{i}]
ightarrow 0.$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $S(W_0, \varepsilon)$, являющееся ε -окрестностью W_0 . Из липшицевости f вытекает, что $|f(t)|\leqslant \mathrm{const}\, \varepsilon \ \forall t\in S(W_0,\varepsilon)$. Из слабой сходимости следует, что $\eta_i(T\setminus S(W_0,\varepsilon))\to 0$ при $i\to\infty$. Из равномерной сходимости следует, что $||f_i - f||_C \leqslant \varepsilon$ при больших i. Тогда для любых a < b

$$\left| \int_{[a,b)} f_i(s) d\eta_i \right| \leqslant c \left[\varepsilon \eta_i([a,b)) + \eta_i([a,b) \cap [T \setminus S(W_0,\varepsilon)]) \right].$$

Отсюда и из определения вариации функции на отрезке вытекает, что $\limsup_{i \to \infty} \operatorname{Var} \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} [x_i] \leqslant \operatorname{const} \varepsilon.$

Но $\varepsilon > 0$ произвольно, следовательно, $\operatorname{Var} \left| {}_{0}^{1}[x_{i}] \to 0$. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 7.1. Сначала докажем наиболее трудный второй вариант теоремы, т.е. с условиями трансверсальности по времени (7.2).

Пусть (p^*, u^*, μ^*) — решение задачи (1.2)-(1.5). Возьмем $\delta > 0$ из предположения M) настолько малым, чтобы одновременно выполнялось определение 1.3. По этому δ , пользуясь непрерывностью μ^* в точках t_k^* , k=0,1, найдем точки $t_{0,\delta}>t_0^*$, $t_{1,\delta}< t_1^*$ и малое $\varepsilon>0$ такие, чтобы $(\mu^*+\mathcal{L})([t_0^*,t_{0,\delta}+\varepsilon]\cup[t_{1,\delta}-\varepsilon,t_1^*])<\delta/2$. Определим функцию φ_δ^+ формулой

$$arphi_{\delta}^+(x,t) = egin{cases} arphi^+(x,t), & t_{0,\delta} < t < t_{1,\delta}, \ 0 & ext{в противном случае}. \end{cases}$$

Компоненты φ_{δ}^+ неотрицательны и полунепрерывны снизу. Положим $F(t)=F(t;\mu^*),\ c=\gcd\sup|x^*|+|p^*|+\|\mu^*\|+1,$ возьмем произвольные $i,A\in\mathbb{N},$ и составим штрафную задачу

$$\begin{cases} J_{i,A}(p,u,\mu) = e_{0}(p) + |p-p^{*}|^{2} + |y_{1} - F(t_{1}^{*})|^{2} + A \int_{t_{0}}^{t_{1}} |\varphi^{+}(x,t)|^{2} dt + \\ + A \int_{[t_{0},t_{1}]} |\varphi_{\delta}^{+}(x,t)|^{2} d\mu + i^{-1} \int_{t_{0}}^{t_{1}} [|u-u^{*}(t)|^{2} + |y-F(t)|^{2}] dt \to \min, \\ dx = f(x,u,t)dt + g(x,t)d\mu, \quad dy = d\mu, \quad y_{0} = 0, \quad t \in [t_{0},t_{1}], \\ e_{1}(p) \leq 0, \quad e_{2}(p) = 0, \\ |p-p^{*}| \leq \delta/2, \quad \mu([t_{0},t_{0,\delta}+\varepsilon) \cup (t_{1,\delta}-\varepsilon,t_{1}]) \leq \delta/2, \\ \max\{gc \sup |x|,y_{1}\} \leq c, \quad u(t) \in U(t) \text{ fi.b. } t, \quad \mu \geqslant 0. \end{cases}$$

Функционал $J_{i,A}$ слабо полунепрерывен снизу по (u,μ) . Поэтому по теореме 6.1 при каждых $i,A\in\mathbb{N}$ задача (7.3) имеет решение. Обозначим его через $(p_{i,A},u_{i,A},\mu_{i,A})$, и пусть $(x_{i,A},y_{i,A})$ соответствующие оптимальные траектории. Пользуясь соображениями компактности, при фиксированном i перейдем к подпоследовательности и найдем процесс (p,u,μ) такой, что $p_{i,A} \to p$, $u_{i,A} \stackrel{w}{\to} u$ слабо в $L_2^m(T_c)$, $\mu_{i,A} \stackrel{w}{\to} \mu$ слабо-* в $C^*(T_c)$ при $A \to \infty$. (Здесь $T_c = [-c,c]$, см. § 6.) При этом $x_{i,A}(t) \to x(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\mu)$. Докажем, что $p = p^*$, $u = u^*$, $\mu = \mu^*$ (при любом фиксирован-HOM i).

Покажем, что (p, u, μ) — допустимый процесс. Действительно, в силу наложенных ограничений,

$$\int_{T_{i,A}} |\varphi^+(x_{i,A},t)|^2 dt + \int_{T_{i,A}} |\varphi^+_{\delta}(x_{i,A},t)|^2 d\mu_{i,A} \leqslant \frac{\text{const}}{A}.$$

Переходя здесь (с помощью леммы 3.2) к пределу при $A \to \infty$, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} |\varphi^+(x,t)|^2 dt + \int_{[t_0,t_1]} |\varphi^+_{\delta}(x,t)|^2 d\mu = 0.$$

Отсюда, пользуясь согласованностью фазовых ограничений с концевыми и предположением M), выводим $\gcd \varphi^j(x,t) \leqslant 0, \ j=1,\ldots,k_3$. Таким образом, (p,u,μ) — допустимый процесс. Следовательно, $e_0(p) \geqslant e_0(p^*)$. Далее,

$$J_{i,A}(p_{i,A}, u_{i,A}, \mu_{i,A}) \leqslant J_{i,A}(p^*, u^*, \mu^*) = e_0(p^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_0(p_{i,A}) + |p_{i,A} - p^*|^2 + |y_{1,i,A} - F(t_1^*)|^2 + A \int_{T_{i,A}} |\varphi^+(x_{i,A}, t)|^2 dt +$$

$$+A \int_{T_{i,A}} |\varphi_{\delta}^+(x_{i,A}, t)|^2 d\mu_{i,A} + \frac{1}{i} \int_{T_{i,A}} (|u_{i,A} - u^*(t)|^2 + |y_{i,A} - F(t)|^2) dt \leqslant e_0(p^*).$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $A \to \infty$, пользуясь слабой полунепрерывностью по u левой части. Получим

$$e_{0}(p) + \limsup_{A \to \infty} \left[A \int_{T_{i,A}} |\varphi^{+}(x_{i,A},t)|^{2} dt + A \int_{T_{i,A}} |\varphi^{+}_{\delta}(x_{i,A},t)|^{2} d\mu_{i,A} \right] +$$

$$+ |p - p^{*}|^{2} + |y_{1} - F(t_{1}^{*})|^{2} + \frac{1}{i} \int_{T_{i,A}}^{t_{1}} (|u - u^{*}(t)|^{2} + |y - F(t)|^{2}) dt \leq e_{0}(p^{*}).$$

Но, вместе с тем, $e_0(p)\geqslant e_0(p^*).$ Отсюда $p=p^*,\ u=u^*,\ \mu=\mu^*$ и

$$A\int_{T_{i,A}} |\varphi^+(x_{i,A},t)|^2 dt + A\int_{T_{i,A}} |\varphi^+_{\delta}(x_{i,A},t)|^2 d\mu_{i,A} \to 0, \quad A \to \infty \quad \forall i.$$

Учитывая доказанное, для каждого i выберем номер A_i такой, что

$$|p_{i,A_i} - p^*|^2 + ||u_{i,A_i} - u^*||_{L_2}^2 + ||y_{i,A_i} - F(t)||_{L_2}^2 +$$

$$+ A_i \int_{T_{i,A_i}} |\varphi^+(x_{i,A_i},t)|^2 dt + A_i \int_{T_{i,A_i}} |\varphi^+_{\delta}(x_{i,A_i},t)|^2 d\mu_{i,A_i} \leqslant \frac{1}{i}.$$

Выделенную диагональную последовательность обозначим (p_i, u_i, μ_i) , т.е., сокращая запись, положим

$$p_i = p_{i,A_i}, \quad u_i = u_{i,A_i}, \quad \mu_i = \mu_{i,A_i}.$$
 (7.4)

Переходя к подпоследовательности, получим $p_i \to p^*$, $u_i \to u^*$ п.в., $\mu_i \xrightarrow{w} \mu^*$ при $i \to \infty$. При этом $x_i(t) = x_{i,A_i}(t) \to x^*(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\mu^*)$. Заменим в (7.3) произвольный номер A на специально выбранный A_i . Полученную задачу назовем i-задачей.

При больших i все дополнительные неравенственные ограничения i-задачи являются строгими. Тем самым, к i-задаче применимы необходимые условия теоремы $6.2.^1$ По теореме 6.2 для каждого i существуют функции $\psi_i \in V^n(T_i), \; \zeta_i \in C(T_i), \;$ число $\lambda_{0,i} \geqslant 0$ и векторы $\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}$ такие, что

$$d\psi_i = -H_x^i(t)dt - Q_x^i(t)d\mu_i + \varphi_x^{\top}(x_i, t)d\eta_i, \quad t \in T_i,$$
(7.5)

$$\psi_{0,i} = \frac{\partial l}{\partial x_0}(p_i, \lambda_i) + 2\lambda_{0,i}(x_{0,i} - x_0^*), \qquad \psi_{1,i} = -\frac{\partial l}{\partial x_1}(p_i, \lambda_i) - 2\lambda_{0,i}(x_{1,i} - x_1^*),$$

$$d\zeta_i = \frac{2\lambda_{0,i}}{i}[y_i - F(t)]dt, \qquad \zeta_i(t_{1,i}) = -2\lambda_{0,i}[y_{1,i} - F(t_1^*)],$$
(7.6)

$$\lambda_{1,i} \geqslant 0, \quad \langle e_1(p_i), \lambda_{1,i} \rangle = 0,$$

$$\max_{u \in U(t)} [H_i(u,t) - \lambda_{0,i} i^{-1} |u - u^*(t)|^2] = H_i(t) - \lambda_{0,i} i^{-1} |u_i(t) - u^*(t)|^2 \text{ п.в. } t,$$
(7.7)

¹Так как φ_{δ}^+ — разрывная функция, то i-задача не является стандартной. Однако теорема 6.2 для нее доказывается аналогично. При этом условия (7.5)–(7.11) справедливы независимо от того, имеет мера μ_i атомы в точках $t_{k,\delta}$ или нет. Это есть следствие полунепрерывности снизу функции $[\varphi_{\delta}^+]^2$ и того, что множество нулей производной такой функции содержит в себе множество нулей самой функции.

$$Q_i(t) + \zeta_i(t) - \lambda_{0,i} A_i |\varphi_{\delta}^+(x_i(t), t)|^2 \leqslant 0 \quad \forall t, \tag{7.8}$$

$$Q_i(t) + \zeta_i(t) - \lambda_{0,i} A_i |\varphi_{\delta}^+(x_i(t), t)|^2 = 0 \quad \forall t \in \operatorname{supp}(\mu_i),$$
(7.9)

ess $\limsup_{t \to t_{k,i}} \max_{u \in U(t)} [H(\beta_{k,i}, u, \gamma_{k,i}, t) - \lambda_{0,i} i^{-1} |u - u^*(t)|^2] - \lambda_{0,i} A_i |\varphi^+(\beta_{k,i}, t_{k,i})|^2 +$

$$+(-1)^k \left[\frac{\partial l}{\partial t_k} (p_i, \lambda_i) + 2\lambda_{0,i} (t_{k,i} - t_k^*) \right] \geqslant 1(i), \quad k = 0, 1, \tag{7.10}$$

ess $\liminf_{t \to t_{k,i}} \max_{u \in U(t)} [H(\beta_{k,i}, u, \gamma_{k,i}, t) - \lambda_{0,i} i^{-1} |u - u^*(t)|^2] - \lambda_{0,i} A_i |\varphi^+(\beta_{k,i}, t_{k,i})|^2 +$

$$+(-1)^{k} \left[\frac{\partial l}{\partial t_{k}} (p_{i}, \lambda_{i}) + 2\lambda_{0,i} (t_{k,i} - t_{k}^{*}) \right] \leqslant 1(i), \quad k = 0, 1,$$

$$|\lambda_{i}| + \gcd \sup_{t \in T_{i}} |\psi_{i}(t)| + ||\eta_{i}|| = 1.$$
(7.11)

Здесь $T_i = [t_{0,i}, t_{1,i}]; \lambda_i = (\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}); \eta_i = (\eta_i^1, \dots, \eta_i^{k_3})$ — векторная мера, компоненты которой определяются через свои функции распределения следующим образом:

$$F(t;\eta_i^j) = 2\lambda_{0,i}A_i \int_{[t_{0,i},t]} [\varphi^j(x_i,t)]^+ ds + 2\lambda_{0,i}A_i \int_{[t_{0,i},t]} [\varphi^j_\delta(x_i,t)]^+ d\mu_i, \quad j = 1,\dots,k_3;$$

$$\beta_{0,i} = x_i(t_{0,i}^+), \quad \beta_{1,i} = x_i(t_{1,i}^-), \quad \gamma_{0,i} = \psi_i(t_{0,i}^+), \quad \gamma_{1,i} = \psi_i(t_{1,i}^-);$$

выражение 1(i) означает последовательность чисел, сходящуюся к нулю при $i \to \infty$; индекс i у функций H и Q (а также их частных производных) означает, что в них вместо части опущенных переменных x, u, ψ подставлены значения $x_i(t), u_i(t)$ или $\psi_i(t)$ соответственно.

В силу (7.11), $\zeta_i \to 0$ равномерно. Из (7.11), используя соображения компактности, переходя к подпоследовательности, имеем $\lambda_i \to \lambda$, $\eta_i^j \stackrel{w}{\to} \tilde{\eta}^j$, $j=1,\ldots,k_3$, $i\to\infty$. Положим $\eta(B)=\tilde{\eta}(B)-\tilde{\eta}(B\cap \mathrm{Ds}(\mu^*))$ для любого борелевского $B\subseteq\mathbb{R}^1$, $\tilde{\eta}=(\tilde{\eta}^1,\ldots,\tilde{\eta}^{k_3})$. Таким образом, $\eta=(\eta^1,\ldots,\eta^{k_3})$ — векторная мера такая, что $\mathrm{Ds}(\mu^*)\cap\mathrm{Ds}(\eta)=\varnothing$.

Из (2.1) и (7.11) вытекает, что вариации ψ_i ограничены равномерно по i. Переходя к подпоследовательности, имеем $\psi_i(t) \to \psi_H(t) \ \forall t \in T^*, \ i \to \infty$ (вторая теорема Хелли). Найдем функцию $\psi \in V^n(T^*)$ такую, что $\psi(t) = \psi_H(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\mu^*) \cap \mathrm{Cont}(\eta)$. Существование такой функции $\psi(t)$ вытекает из оценки $\mathrm{Var}\,|_{t_1}^{t_2}[\psi_H] \leqslant c(\mu^* + |\tilde{\eta}| + \mathcal{L})([t_1,t_2]) \ \forall t_1 \leqslant t_2$, которая получается из неравенства $|\vartheta[\psi_i]| \leqslant c(\mu_i + |\eta_i| + \mathcal{L})$ предельным переходом при $i \to \infty$.

Докажем, что $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Для этого построим семейство абсолютно непрерывных мер $\{\hat{\mu}_i\}$, $i\in\mathbb{N}$, аппроксимирующее все (за исключением условий трансверсальности по времени (7.10)) необходимые условия оптимальности в i-задаче, следующим образом.

Пусть $\{t_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, — счетное всюду плотное в T^* множество точек таких, что $t_k\in X=\mathrm{Cont}(\mu^*)\cap\mathrm{Cont}(\eta)\cap\left[\bigcap_{i=1}^\infty\mathrm{Cont}(\mu_i)\right]$ (такое всюду плотное множество существует, поскольку $T^*\setminus X$

счетно как счетное объединение счетных множеств); $\{\phi_k\}$ — счетное всюду плотное в $C(T_c)$ множество функций. Для каждого i существует последовательность абсолютно непрерывных мер $\mu_{i,\tau}$ такая, что $\mu_{i,\tau} \stackrel{w}{\to} \mu_i$ на $T_i, \; \mu_{i,\tau} \stackrel{w}{\to} \mu_i$ на $[t_{0,i},t_{0,\delta}], \; \mu_{i,\tau} \stackrel{w}{\to} \mu_i$ на $[t_{1,\delta},t_{1,i}]$ при $\tau \to \infty$, а функция распределения $F(t;\mu_{i,\tau})$ строго возрастает на T_c при всех τ .

Пусть пара $x_{i,\tau}, \psi_{i,\tau}$ удовлетворяет системе¹

$$\begin{cases} dx_{i,\tau} = f(x_{i,\tau}, u_i, t)dt + g(x_{i,\tau}, t)d\mu_{i,\tau}, \\ d\psi_{i,\tau} = -H_x(x_{i,\tau}, u_i, \psi_{i,\tau}, t)dt - Q_x(x_{i,\tau}, \psi_{i,\tau}, t)d\mu_{i,\tau} + \varphi_x^\top(x_{i,\tau}, t)d\eta_{i,\tau}, \\ x_{i,\tau}(t_{0,i}) = x_i(t_{0,i}), \quad \psi_{i,\tau}(t_{0,i}) = \psi_i(t_{0,i}), \end{cases}$$

 $^{^{1}}$ Для каждого i при больших τ решение этой системы существует (см. аналогичные рассуждения при доказательстве леммы 3.2).

где мера $\eta_{i,\tau}^{\jmath}$ задается своей функцией распределения:

$$F(t; \eta_{i,\tau}^j) = 2\lambda_{0,i} A_i \int_{[t_{0,i},t]} [\varphi^j(x_{i,\tau},t)]^+ ds + 2\lambda_{0,i} A_i \int_{[t_{0,i},t]} [\varphi^j_{\delta}(x_{i,\tau},t)]^+ d\mu_{i,\tau}, \quad j = 1,\dots, k_3.$$

Пользуясь леммой 3.2, выберем номер τ_i так, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\begin{bmatrix}
\sum_{j=1}^{k_{3}} \sum_{k=1}^{i} \left[\left| \int_{T_{i}} \phi_{k}(t) d(\mu_{i,\tau_{i}} - \mu_{i}) \right| + \left| \int_{T_{i}} \phi_{k}(t) d(\eta_{i,\tau_{i}}^{j} - \eta_{i}^{j}) \right| \right] + \\
+ \sum_{k=1}^{i} \left| \psi_{i,\tau_{i}}(t_{k}) - \psi_{i}(t_{k}) \right| + \left| \gcd \sup_{t \in T_{i}} \left| \psi_{i}(t) \right| - \max_{t \in T_{i}} \left| \psi_{i,\tau_{i}}(t) \right| \right| + \\
+ \left| \int_{T_{i}} \tilde{Q}_{i}(x_{i,\tau_{i}}, \psi_{i,\tau_{i}}, t) d\mu_{i,\tau_{i}} - \int_{T_{i}} \tilde{Q}_{i}(x_{i}, \psi_{i}, t) d\mu_{i} \right| + \\
+ \sum_{j=1}^{k_{3}} \left| \int_{T_{i}} \varphi^{j}(x_{i,\tau_{i}}, t) d\eta_{i,\tau_{i}}^{j} - \int_{T_{i}} \varphi^{j}(x_{i}, t) d\eta_{i}^{j} \right| + \\
+ \max_{t \in T_{i}} \left| \tilde{Q}_{i}(x_{i,\tau_{i}}, \psi_{i,\tau_{i}}, t) - \tilde{Q}_{i}(x_{i}, \psi_{i}, t) \right| + \left| \psi_{i,\tau_{i}}(t_{1,i}) - \psi_{i}(t_{1,i}) \right| \leqslant \frac{1}{i}.
\end{bmatrix}$$

$$(7.12)$$

Здесь $\tilde{Q}_i(x, \psi, t) = Q(x, \psi, t) - \lambda_{0,i} A_i |\varphi_{\delta}^+(x, t)|^2$

Положим $\hat{\psi}_i=\psi_{i,\tau_i},\,\hat{x}_i=x_{i,\tau_i},\,\hat{\mu}_i=\mu_{i,\tau_i},\,\hat{\eta}_i=\eta_{i,\tau_i}.$ Переходя к подпоследовательности, получаем $\hat{\psi}_i(t) \to \psi_A(t) \ \forall t \in T^*.$

Покажем, что $\psi_A(t)=\psi(t)$ $\forall t\in \mathrm{Cont}(\mu^*)\cap\mathrm{Cont}(\eta)$. Действительно, так как $|\vartheta[\psi_i]|\leqslant$ $c(\mu_i + |\eta_i| + \mathcal{L})$, то функция $\psi(t)$ непрерывна на множестве $\mathrm{Cont}(\mu^*) \cap \mathrm{Cont}(\eta) \cap (t_0^*, t_1^*)$. То же можно сказать и про функцию ψ_A . Тогда из (7.12) вытекает, что $\psi_A(t) = \psi(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\mu^*) \cap \mathrm{Cont}(\eta)$. При этом, очевидно, $\hat{x}_i(t) \to x^*(t) \ \forall t \in \text{Cont}(\mu^*), \ \hat{\mu}_i \overset{w}{\to} \mu^*, \ \hat{\eta}_i^j \overset{w}{\to} \tilde{\eta}^j, \ j=1,\ldots,k_3, \ \text{при } i \to \infty.$ Докажем 1).

Покажем, что существуют последовательности абсолютно непрерывных мер $\{\bar{\mu}_i\}, \{\bar{\eta}_i^j\}, j =$ $1,\dots,k_3$, а также последовательность натуральных чисел $k_i\geqslant i$ такие, что 1) $\bar{\mu}_i\stackrel{w}{\to}\mu_d^*, \bar{\eta}_i^j\stackrel{w}{\to}\tilde{\eta}^j-\eta^j$ при $i \to \infty \ \forall j; \ 2) \ \hat{\mu}_{k_i} \geqslant \bar{\mu}_i, \ \hat{\eta}_{k_i}^j \geqslant \bar{\eta}_i^j \ \forall i, j.$

Если $\mathrm{Ds}(\mu^*)=\varnothing$, то положим $\bar{\mu}_i=\bar{\eta}_i^j=0,\ k_i=i\ \forall i,j.$ Пусть $\mathrm{Ds}(\mu^*)\neq\varnothing$. Рассмотрим упорядоченную по включению цепочку множеств D_i таких, что $D_0=\varnothing,\ D_{i-1}\subseteq D_i\subseteq \mathrm{Ds}(\mu^*)$ и $\sum_{r\in \mathrm{Ds}(\mu^*)\setminus D_i}\mu^*(\{r\})\leqslant rac{1}{i},\ i\in\mathbb{N}.$ Определим множества $S_{r,i}=0$

 $[r-h_i,r+h_i],\ r\in D_i$ как систему замкнутых попарно не пересекающихся окрестностей точек r

1) $h_i > 0$, $h_i \to 0$ при $i \to \infty$;

2)
$$\left| \mu^*(S_i) - \sum_{r \in D_i} \mu^*(\{r\}) \right| + \sum_{j=1}^{k_3} \left| \tilde{\eta}^j(S_i) - \sum_{r \in D_i} \tilde{\eta}^j(\{r\}) \right| \leqslant \frac{1}{i}$$
, fige $S_i = \bigcup_{r \in D_i} S_{r,i}$;

Существование такого множества S_i вытекает из регулярности борелевских мер $\mu^*, \tilde{\eta}^j, j =$ $1,\ldots,k_3$. Последовательность $k_i\geqslant i$ выберем так, чтобы

$$\sum_{r \in D_i} \left[\left| \hat{\mu}_{k_i}(S_{r,i}) - \mu^*(S_{r,i}) \right| + \sum_{i=1}^{k_3} \left| \hat{\eta}_{k_i}^j(S_{r,i}) - \tilde{\eta}^j(S_{r,i}) \right| \right] \leqslant \frac{1}{i}.$$

Это осуществимо в силу слабой сходимости мер. Положим $\bar{\mu}_i(B)=\hat{\mu}_{k_i}(B\cap S_i), \ \bar{\eta}_i(B)=\hat{\eta}_{k_i}(B\cap S_i)$ для любого борелевского множества $B\subseteq\mathbb{R}^1$, $\bar{\eta}_i=\{\bar{\eta}_i^1,\ldots,\bar{\eta}_i^{k_3}\}$. Легко видеть, что $\bar{\mu}_i\stackrel{w}{\to}\mu_d^*$, $ar{\eta}_i^j \stackrel{w}{ o} \tilde{\eta}^j - \eta^j$ при $i \to \infty$ (и, следовательно, $\hat{\mu}_{k_i} - \bar{\mu}_i \stackrel{w}{ o} \mu_c^*$, $\hat{\eta}_{k_i}^j - \bar{\eta}_i^j \stackrel{w}{ o} \eta^j$), $j = 1, \dots, k_3$. Очевидно также, что $\hat{\mu}_{k_i} - \bar{\mu}_i \in C_+^*(T_c)$, $\hat{\eta}_{k_i}^j - \bar{\eta}_i^j \in C_+^*(T_c)$ $\forall i, j$.

Из последовательностей $\{\hat{\mu}_i\}$, $\{\hat{\eta}_i\}$, $\{\hat{x}_i\}$, $\{\hat{\psi}_i\}$, $\{u_i\}$ и $\{T_i\}$ с помощью построенных чисел k_i выберем подпоследовательности, которые обозначим (как и исходные) прежним индексом i.

Перепишем уравнения (1.3), (7.5) в виде

$$\begin{cases} \hat{x}_i(t) = x_{0,i} + \int\limits_{t_{0,i}}^t f(\hat{x}_i, u_i, s) \, ds + \int\limits_{[t_{0,i},t]} g(\hat{x}_i, s) \, d(\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i) + \int\limits_{[t_{0,i},t]} g(\hat{x}_i, s) \, d\bar{\mu}_i, \\ \hat{\psi}_i(t) = \psi_{0,i} - \int\limits_{t_{0,i}}^t \hat{H}_x^i(s) \, ds - \int\limits_{[t_{0,i},t]} \hat{Q}_x^i(s) \, d(\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i) - \int\limits_{[t_{0,i},t]} \hat{Q}_x^i(s) \, d\bar{\mu}_i + \int\limits_{[t_{0,i},t]} \varphi_x^\top(\hat{x}_i, s) \, d(\hat{\eta}_i - \bar{\eta}_i) + \int\limits_{[t_{0,i},t]} \varphi_x^\top(\hat{x}_i, s) \, d\bar{\eta}_i, \quad t \in T_i. \end{cases}$$

Здесь и далее индекс i и «крышка» у функций H и Q (а также их частных производных) означает, что в них вместо части опущенных переменных x, u, ψ подставлены значения $\hat{x}_i(t), u_i(t)$ или $\hat{\psi}_i(t)$ соответственно. Положим

$$\hat{x}_{i}^{c}(t) = x_{0,i} + \int_{t_{0,i}}^{t} f(\hat{x}_{i}, u_{i}, s) \, ds + \int_{[t_{0,i},t]} g(\hat{x}_{i}, s) d(\hat{\mu}_{i} - \bar{\mu}_{i}), \qquad \hat{x}_{i}^{d}(t) = \int_{[t_{0,i},t]} g(\hat{x}_{i}, s) \, d\bar{\mu}_{i},$$

$$\hat{\psi}_{i}^{\eta}(t) = \psi_{0,i} - \int_{t_{0,i}}^{t} \hat{H}_{x}^{i}(s) \, ds - \int_{[t_{0,i},t]} \hat{Q}_{x}^{i}(s) \, d(\hat{\mu}_{i} - \bar{\mu}_{i}) + \int_{[t_{0,i},t]} \varphi_{x}^{\top}(\hat{x}_{i}, s) \, d(\hat{\eta}_{i} - \bar{\eta}_{i}),$$

$$\hat{\psi}_{i}^{d}(t) = -\int_{[t_{0,i},t]} \hat{Q}_{x}^{i}(s) \, d\bar{\mu}_{i} + \int_{[t_{0,i},t]} \varphi_{x}^{\top}(\hat{x}_{i}, s) \, d\bar{\eta}_{i}, \quad t \in T_{i}.$$

Таким образом, $\hat{x}_i(t) = \hat{x}_i^c(t) + \hat{x}_i^d(t)$, $\hat{\psi}_i(t) = \hat{\psi}_i^{\eta}(t) + \hat{\psi}_i^d(t) \ \forall t \in T_i$. Учитывая, что $\hat{x}_i(t) \to x^*(t)$ $\forall t \in \mathrm{Cont}(\mu^*)$, по теореме Лебега и лемме 3.1 имеем

$$\hat{x}_i^c(t) \to x_c^*(t) = x_0^* + \int_{t_0^*}^t f(x^*, u^*, s) \, ds + \int_{[t_0^*, t]} g(x^*, s) d\mu_c^* \quad \forall t \in T^*, \quad i \to \infty.$$

Аналогично из леммы 3.1 следует, что

$$\hat{\psi}_i^{\eta}(t) \to \psi_{\eta}(t) = \psi_0 - \int_{t_0^*}^t H_x(s) \, ds - \int_{[t_0^*, t]} Q_x(s) \, d\mu_c^* + \int_{[t_0^*, t]} \varphi_x^{\top}(x^*, s) \, d\eta$$

 $\forall t \in \mathrm{Cont}(\eta), i \to \infty$. Положим $\psi_d = \psi - \psi_\eta$. Тогда $\hat{\psi}_i^d(t) \to \psi_d(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\mu^*) \cap \mathrm{Cont}(\eta)$. Покажем, что $\psi_d = \Sigma(\psi, t)$.

Действительно, пусть $t\in \mathrm{Cont}(\mu^*)\cap \mathrm{Cont}(\eta)$. Фиксируем $\varepsilon>0$. Выберем номер $N=N(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\sum_{r \in \mathrm{Ds}(\mu^*) \backslash D_N} \left[\mu^*(\{r\}) + |\tilde{\eta}|(\{r\}) \right] \leqslant \varepsilon.$$

В таком случае

$$\lim_{i \to \infty} \sup \left| \sum_{r \in D(N,t)} \left[\int_{S_{r,i}} -\hat{Q}_x^i(s) \, d\bar{\mu}_i + \int_{S_{r,i}} \varphi_x^\top(\hat{x}_i,s) \, d\bar{\eta}_i \right] - \hat{\psi}_i^d(t) \right| \leqslant \text{const } \varepsilon. \tag{7.13}$$

Здесь и далее $D(N,t) = \{r \in D_N : r \leqslant t\}.$

Положим $r_i^- = r - h_i$ и для $r \in D(N,t)$ рассмотрим на отрезке $S_{r,i}$ систему

$$\begin{cases}
\hat{x}_{i}^{d}(s) = \hat{x}_{i}^{d}(r_{i}^{-}) + \int_{[r_{i}^{-},s]} g(\hat{x}_{i}(\tau),\tau) d\bar{\mu}_{i}, \\
\hat{\psi}_{i}^{d}(s) = \hat{\psi}_{i}^{d}(r_{i}^{-}) - \int_{[r_{i}^{-},s]} g_{x}^{\top}(\hat{x}_{i}(\tau),\tau) \hat{\psi}_{i}(\tau) d\bar{\mu}_{i} + \int_{[r_{i}^{-},s]} \varphi_{x}^{\top}(\hat{x}_{i}(\tau),\tau) d\bar{\eta}_{i},
\end{cases}$$

$$(7.14)$$

При достаточно больших i определим функции¹

$$\pi_{r,i}(\tau) = \frac{F(\tau; \bar{\mu}_i) - F(r_i^-; \bar{\mu}_i)}{\bar{\mu}_i(S_{r,i})}, \quad r \in D(N,t), \quad \tau \in S_{r,i}.$$

Функция $\pi_{r,i}$ отображает сегмент $S_{r,i}$ в отрезок [0,1], является абсолютно непрерывной и строго возрастающей. Следовательно, существует строго возрастающая обратная функция $\theta_{r,i}:[0,1]\to S_{r,i},\ \theta_{r,i}=(\pi_{r,i})^{-1}.$ Производя в (7.14) с помощью теоремы из $[31,\ c.\ 244]$ замену подынтегральной переменной $\omega=\pi_{r,i}(\tau)$ и преобразовывая, приходим к системе

$$\alpha_{r,i}(s) = \hat{x}_{i}^{d}(r_{i}^{-}) + \hat{x}_{i}^{c}(\theta_{r,i}(s)) + \bar{\mu}_{i}(S_{r,i}) \int_{0}^{s} g(\alpha_{r,i}(\omega), \theta_{r,i}(\omega)) d\omega,$$

$$\sigma_{r,i}(s) = \hat{\psi}_{i}^{d}(r_{i}^{-}) + \hat{\psi}_{i}^{\eta}(\theta_{r,i}(s)) - \bar{\mu}_{i}(S_{r,i}) \int_{0}^{s} g_{x}^{\top}(\alpha_{r,i}(\omega), \theta_{r,i}(\omega)) \sigma_{r,i}(\omega) d\omega +$$

$$+ \int_{[0,s]} \varphi_{x}^{\top}(\alpha_{r,i}(\omega), \theta_{r,i}(\omega)) d\eta_{r,i}, \quad s \in [0,1], \quad r \in D(N,t),$$

где

$$\alpha_{r,i}(\omega) = \hat{x}_i(\theta_{r,i}(\omega)), \quad \sigma_{r,i}(\omega) = \hat{\psi}_i(\theta_{r,i}(\omega)), \quad F(\omega; \eta_{r,i}^j) = F(\theta_{r,i}(\omega); \bar{\eta}_i^j), \quad j = 1, \dots, k_3.$$

Легко видеть, что $\theta_{r,i}(\omega) \to r$ равномерно на [0,1], а, в силу предложения 3.1, и $\hat{x}_i^c(\theta_{r,i}(\omega)) \to x_c^*(r)$, $\hat{\psi}_i^{\eta}(\theta_{r,i}(\omega)) \to \psi_{\eta}(r)$ равномерно на [0,1] при $i \to \infty$. Из неравенства Гронуолла следует, что $\alpha_{r,i}$ — фундаментальная по i в $C^n([0,1])$ последовательность функций. Ее предел есть в точности функция α_r^* . Из соображений компактности следует, что существуют меры η_r^j и функция $\sigma_r \in V^n([0,1])$ такие, что после перехода к подпоследовательности имеем $\hat{\eta}_{r,i}^j \overset{w}{\to} \eta_r^j$, $j=1,\ldots,k_3,\ \sigma_{r,i}(s) \to \sigma_r(s)$ $\forall s \in \mathrm{Cont}(\eta_r)$. Переходя к пределу в последней системе при $i \to \infty$, имеем

$$\alpha_r^*(s) = x^*(r^-) + \mu^*(\{r\}) \int_0^s g(\alpha_r^*, r) d\omega,$$

$$\sigma_r(s) = \psi(r^-) - \mu^*(\{r\}) \int_0^s g_x^\top(\alpha_r^*, r) \sigma_r d\omega + \int_{[0,s]} \varphi_x^\top(\alpha_r^*, r) d\eta_r, \quad s \in [0, 1], \quad r \in D(N, t).$$

(Здесь используется, что по построению $\hat{x}_i^d(r_i^-) \to x^*(r^-) - x_c^*(r), \; \hat{\psi}_i^d(r_i^-) \to \psi_d(r^-).$) Отсюда и из (7.13) следует, что

$$\left| \psi_d(t) - \sum_{r \in D(N,t)} [\sigma_r(1) - \psi(r^-)] \right| \leqslant \text{const } \varepsilon.$$

Ho $\varepsilon > 0$ произвольно; по определению функции Σ это означает, что $\psi_d(t) = \Sigma(\psi, t)$.

Условия 1), 2) теоремы доказаны. Условие 8) получается простым противоречием: если $|\lambda_i| \to 0$, $\|\hat{\eta}_i\| \to 0$, то, очевидно, и $\max_{t \in T_i} |\hat{\psi}_i(t)| \to 0$ при $i \to \infty$ (следствие неравенства Гронуолла), и, тем самым, (7.11) нарушается при больших i.

¹Номера i нужно брать, начиная с некоторого i_0 так, чтобы $t \notin S_{r,i} \ \forall i \geqslant i_0, \ r \in D(N,t)$.

Докажем 3). Фиксируем $r \in Ds(\mu^*), j = 1, \dots, k_3$. Из метода штрафов и (7.12) следует

$$A_{i} \int_{T_{i}} |\varphi^{+}(\hat{x}_{i}, t)|^{2} dt + A_{i} \int_{T_{i}} |\varphi^{+}_{\delta}(\hat{x}_{i}, t)|^{2} d\hat{\mu}_{i} \to 0.$$
 (7.15)

Далее,

$$2A_i \int_{T_i} |\varphi^+(\hat{x}_i, t)|^2 dt + 2A_i \int_{T_i} |\varphi^+_{\delta}(\hat{x}_i, t)|^2 d\hat{\mu}_i \geqslant$$

$$\geqslant 2\lambda_{0,i} A_i \left(\int \varphi^j(\hat{x}_i, t) [\varphi^j(\hat{x}_i, t)]^+ dt + \int \varphi^j_{\delta}(\hat{x}_i, t) [\varphi^j_{\delta}(\hat{x}_i, t)]^+ d\hat{\mu}_i \right) = \int \varphi^j(\hat{x}_i, t) d\hat{\eta}_i^j \geqslant 0.$$

Тогда из (7.15) следует, что $\int\limits_{S_{r,i}} \varphi^j(\hat{x}_i,t) d\hat{\eta}_i^j \to 0$ при $i \to \infty$. Производя, как и выше, замену

подынтегральной переменной $s=\pi_{r,i}(t)$ и переходя к пределу, получаем $\int\limits_0^1 \varphi^j(\alpha_r^*,r)d\eta_r^j=0.$

Отсюда, учитывая $\varphi^j(\alpha_r^*(s),r) \leqslant 0$, имеем $\varphi^j(\alpha_r^*(s),r) = 0 \ \forall s \in \operatorname{supp}(\eta_r^j)$.

Покажем, что $Q(t) = Q(x^*(t), \psi(t), t) \leqslant 0 \ \forall t \in T^*$. Действительно, $\zeta_i \to 0$ равномерно на T^* . Обозначим $\hat{\kappa}_i(t) = \lambda_{0,i} A_i |\varphi_\delta^+(\hat{x}_i(t),t)|^2$. В силу (7.15), $\hat{\kappa}_i(t) \to 0$ сильно в $L_1(T^*)$; переходя к подпоследовательности, имеем $\hat{\kappa}_i(t) \to 0$ п.в. t. Из (7.8), (7.12) и непрерывности справа функции Q(t) на интервале $(t_{0,\delta},t_{1,\delta})$ следует $Q(t) \leqslant 0 \ \forall t \in T^*$.

Из (7.9), (7.12) следует, что
$$\int\limits_{T_i}\hat{Q}_i(t)d\hat{\mu}_i \to 0$$
, откуда $\int\limits_0^1 \left\langle g(\alpha_r^*,r),\sigma_r \right\rangle ds = 0$. Из (7.8), (7.12),

(7.15) и того, что $Q(t) \leqslant 0 \ \forall t$ (аналогичными вышеприведенным рассуждениями) несложно получить, что $q_r(s) = \left\langle g(\alpha_r^*(s),r),\sigma_r(s)\right\rangle \leqslant 0 \ \forall s \in [0,1]$. Следовательно, $q_r(s) = 0 \ \forall s \in (0,1)$. Покажем, что $q_r(0) = q_r(1) = 0$. Действительно, если $\eta_r\{0\} = 0$, то $q_r(0) = 0$. Пусть $\eta_r^j\{0\} > 0$ для некоторого $j = 1,\dots,k_3$. Тогда $\varphi^j(\alpha_r^*(0),r) = 0$ и $W^j(\alpha_r^*(0),r) \leqslant 0$, так как иначе нарушается фазовое ограничение. Но в таком случае $q_r(0) \geqslant 0$. Вместе с тем имеет место противоположное неравенство. Следовательно, $q_r(0) = W^j(\alpha_r^*(0),r) = 0$. Аналогично $q_r(1) = 0$. Условие 3) доказано.

Докажем 4). Поскольку $|\vartheta[\varphi^j(\hat{x}_i,t)]| \leqslant c(\hat{\mu}_i + \mathcal{L})$, то из леммы 3.1 следует, что

$$\int_{T_i} \varphi^j(\hat{x}_i, t) d[\hat{\eta}_i^j - \bar{\eta}_i^j] \to \int_{T_*} \varphi^j(x^*, t) d\eta^j, \quad i \to \infty, \quad j = 1, \dots, k_3.$$

С другой стороны, в силу (7.15), $\int\limits_{T_i} \varphi^j(\hat{x}_i,t) d[\hat{\eta}_i^j - \bar{\eta}_i^j] \to 0$. Теперь 4) вытекает из неположительности

функций $\varphi^{j}(x^{*},t), j=1,\ldots,k_{3}.$

Переходя к пределу в (7.7), получаем условие 5).

Покажем, как можно доказать 6) с помощью леммы 3.1. Из уже доказанного вытекает, что $\mathrm{Ds}(\vartheta[Q])\cap\mathrm{Ds}(\mu^*)=\varnothing$. Покажем, что $\mathrm{Var}\left|_0^1[q_{r,i}]\to 0$ при $i\to\infty$ $\forall r\in\mathrm{Ds}(\mu^*)$, где $q_{r,i}(s)=\langle\sigma_{r,i}(s),g(\alpha_{r,i}(s),\theta_{r,i}(s))\rangle,\ s\in[0,1]$. Действительно,

$$q_{r,i}(s) = q_{r,i}(0) + \sum_{j=1}^{k_3} \int_0^s W^j(\alpha_{r,i}, \theta_{r,i}) d\eta_{r,i}^j + \int_0^s \langle \sigma_{r,i}, g_t(\alpha_{r,i}, \theta_{r,i}) \rangle d\theta_{r,i}, \quad s \in [0, 1].$$

Отсюда
$$\operatorname{Var} \big|_0^1[q_{r,i}] \leqslant \sum_{j=1}^{k_3} \operatorname{Var} \big|_0^1 \left[\int\limits_0^s W^j(\alpha_{r,i},\theta_{r,i}) \, d\eta_{r,i}^j \right] + 1(i).$$

Но $W^j(\alpha_{r,i},\theta_{r,i}) \to W^j(\alpha_r^*,r)$ равномерно на [0,1] при $i \to \infty$, а, в силу вышедоказанного, $\eta_{r,i}^j \xrightarrow{w} \eta_r^j$: $\mathrm{supp}(\eta_r^j) \subseteq \{s: W^j(\alpha_r^*(s),r)=0\} \ \forall j$. Тогда из предложения 7.1 следует, что $\mathrm{Var}\left|_0^1[q_{r,i}] \to 0$. Следовательно, доказано, что

$$|\vartheta[\hat{Q}_i]| \leqslant c([\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i] + |\hat{\eta}_i - \bar{\eta}_i| + \mathcal{L}) + 1(i).$$

Используя лемму 3.1, (7.9), (7.12) и (7.15), выводим

$$1(i) = \int_{T_i} \hat{Q}_i(t) \, d\hat{\mu}_i + \int_{T_i} \hat{\kappa}_i(t) d\hat{\mu}_i \to \int_{T^*} Q(t) \, d\mu^* \, \Rightarrow \int_{T^*} Q(t) \, d\mu^* = 0.$$

Учитывая, что $Q(t) \leq 0 \ \forall t$, получаем 6).

Условия трансверсальности по времени (7.2) докажем для k=0. Вернемся к исходной последовательности решений (7.4) и рассмотрим условия (7.10). Заметим, что $\Delta_{0,i}=\mu_i(\{t_{0,i}\})\to 0$, так как μ^* непрерывна в точке t_0^* . Отсюда $x_{0,i}^+=\beta_{0,i}\to x_0^*$ и $\psi_{0,i}^+=\gamma_{0,i}\to\psi_0$ при $i\to\infty$. Обозначим $\kappa_i=\lambda_{0,i}A_i[\varphi^+(x_{0,i}^+,t_{0,i})]^2$ и покажем, что $\kappa_i\to 0$ при $i\to\infty$. Существуют две возможности: 1) у последовательности $\Delta_{0,i}$ существует подпоследовательность, состоящая из одних нулей; 2) $\Delta_{0,i}>0$ для всех i бо́льших некоторого i_0 . В первом случае, переходя к подпоследовательности, имеем $x_{0,i}^+=x_{0,i}$ и $\kappa_i=0$, в силу согласованности фазовых ограничений с концевыми.

Обратимся ко второму случаю.

При больших i функция $Q_i(t)$ абсолютно непрерывна в некоторой окрестности точки $t_{0,i}$, и ее производная там равна

$$\dot{Q}_i = \sum_{i=1}^{k_3} 2\lambda_{0,i} A_i [\varphi^j(x_i, t)]^+ W^j(x_i, t) + \omega_i(t), \tag{7.16}$$

где $\omega_i(t)$ — измеримая, существенно ограниченная функция, $\|\omega_i\|_{L_\infty}\leqslant \mathrm{const}\ \forall i.$

Так как $\Delta_{0,i} > 0$, то из (7.9) следует, что $Q_i(t_{0,i}) + \zeta_{0,i} = 0$. Отсюда и с помощью (7.8), интегрируя (7.16), по формуле Ньютона—Лейбница получаем

$$\sum_{j=1}^{k_3} \int_{t_{0,i}}^{t_{0,i}+\Delta} 2\lambda_{0,i} A_i [\varphi^j(x_i,s)]^+ W^j(x_i,s) \, ds \leqslant \text{const } \Delta.$$
 (7.17)

Разделив обе части (7.17) на $\Delta > 0$ и устремив последнее к нулю, выводим

$$\sum_{i=1}^{k_3} \lambda_{0,i} A_i [\varphi^j(x_{0,i}^+, t_{0,i})]^+ W^j(x_{0,i}^+, t_{0,i}) \leqslant \text{const}.$$
 (7.18)

Из предположения M) и согласованности фазовых ограничений с концевыми вытекает, что если $W^j(x_{0,i}^+,t_{0,i})\leqslant 0$, то $[\varphi^j(x_{0,i}^+,t_{0,i})]^+=0$. Тогда из (7.18) следует

$$\lambda_{0,i} A_i [\varphi^j(x_{0,i}^+, t_{0,i})]^+ W^j(x_{0,i}^+, t_{0,i}) \le \text{const}, \quad j = 1, \dots, k_3.$$
 (7.19)

Обозначим $\kappa_i^j = \lambda_{0,i} A_i [\varphi^{j+}(x_{0,i}^+,t_{0,i})]^2$. Ясно, что $\kappa_i = \sum_{j=1}^{k_3} \kappa_i^j$. Если $W^j(x_{0,i}^+,t_{0,i}) \leqslant 0$, то, как было

отмечено выше, $\kappa_i^j=0$. Пусть $\kappa_i^j>0$, тогда $W^j(x_{0,i}^+,t_{0,i})>0$. Далее,

$$\kappa_i^j = \lambda_{0,i} A_i [\varphi^+(x_{0,i}^+, t_{0,i})]^2 = \lambda_{0,i} A_i \left[\varphi^+(x_{0,i}, t_{0,i}) + \Delta_{0,i} \int_0^1 h[\varphi^j(\alpha_{0,i}, t_{0,i})] W^j(\alpha_{0,i}, t_{0,i}) ds \right]^2,$$

где h(t) — функция Хевисайда: h(t)=0 при $t\leqslant 0$ и h(t)=1 при t>0. Из последнего равенства, в силу согласованности фазовых ограничений с концевыми и предположения M), вытекает

$$\kappa_i^j \leqslant \lambda_{0,i} A_i \Delta_{0,i}^2 [W^j(x_{0,i}^+, t_{0,i})]^2.$$

Теперь из (7.19) следует

$$\kappa_i^j \leqslant \text{const} \, \frac{\lambda_{0,i} A_i \Delta_{0,i}^2}{[\lambda_{0,i} A_i \varphi^{j+} (x_{0,i}^+, t_{0,i})]^2} = \text{const} \, \frac{\Delta_{0,i}^2}{\kappa_i^j}.$$

Отсюда

$$(\kappa_i^j)^2 \leqslant \operatorname{const} \Delta_{0,i}^2 \to 0,$$

что и требовалось доказать. Переходя теперь к пределу в (7.10), получаем условие (7.2) теоремы. Теперь заметим, что предположение M) и ограничение $\Delta_k^*=0$, k=0,1, нужны только для доказательства условий трансверсальности по времени (7.2) и могут быть опущены при доказательстве условий 1)–8) теоремы. Покажем, как это сделать. Заменим в (7.3) штрафное слагаемое $\int_T [\varphi_\delta^+(x,t)]^2 d\mu$ на $\int_T [\varphi^+(x,t)]^2 d\mu$. Легко проверить, что замена функции φ_δ^+ на φ^+ никак не отражается на ходе рассуждений, доказывающих условия 1)–8) теоремы 7.1. Важно отметить, что при этом условие согласованности фазовых ограничений с концевыми, по-прежнему, существенно и не может быть выброшено: оно используется, во-первых, при выводе неравенств в условии 7) и, во-вторых, при доказательстве импульсного условия максимума, точнее для доказательства неравенств $Q(t_k^*) \leqslant 0$.

Теорема доказана.

8. Условия невырожденности и завершение доказательства принципа максимума

Здесь доказывается невырождающийся ΠM , который формулируется в условиях гладкости. В связи с этим нам потребуется следующее замечание.

Замечание. При выполнении предположения Г) условия 7) в теореме 7.1 принимают вид

$$\max_{u \in U} H(x_k^*, u, \psi_k, t_k^*) + (-1)^k \frac{\partial l}{\partial t_k}(p^*, \lambda) \leqslant 0, \quad k = 0, 1.$$
(8.1)

Теорема 8.1. Пусть (p^*, u^*, μ^*) — решение ЛВ-задачи (1.2)—(1.5), выполняется предположение Γ), фазовые ограничения согласованы с концевыми, фазовые и концевые ограничения регулярны, и оптимальная траектория управляема в концевых точках относительно фазовых ограничений. Тогда существуют число $\lambda_0 \geqslant 0$, векторы $\lambda_j \in \mathbb{R}^{k_j}$, $\lambda_1 \geqslant 0$, вектор-функция $\psi \in V^n(T^*)$, скалярная функция $\phi \in V(T^*)$, вектор-мера $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^{k_3})$, $\eta^j \in C_+^*(T^*)$: $\mathrm{Ds}(\mu^*) \cap \mathrm{Ds}(\eta^j) = \varnothing \ \forall j$, а для каждой точки $r \in \mathrm{Ds}(\mu^*)$ существуют свои вектор-функция $\sigma_r \in V^n([0,1])$, скалярная функция $\theta_r \in V([0,1])$ и вектор-мера $\eta_r = (\eta^1_r, \ldots, \eta^{k_3}_r)$, $\eta^j_r \in C_+^*([0,1])$, $j = 1, \ldots, k_3$, такие, что

$$\psi(t) = \psi_0 - \int_{t_0^*}^t H_x(s) \, ds - \int_{[t_0^*, t]} Q_x(s) \, d\mu_c^* + \int_{[t_0^*, t]} \varphi_x^\top(x^*, s) \, d\eta + \Sigma(\psi, t), \quad t \in (t_0^*, t_1^*],$$

$$\Sigma(\psi, t) = \sum_{r \in \mathrm{Ds}(\mu^*), \ r \leqslant t} [\sigma_r(1) - \psi(r^-)],$$

$$\phi(t) = \phi_0 + \int_{t_0^*}^t H_t(s) \, ds + \int_{[t_0^*, t]} Q_t(s) \, d\mu_c^* - \int_{[t_0^*, t]} \varphi_t^\top(x^*, s) \, d\eta + \Theta(\phi, t), \quad t \in (t_0^*, t_1^*],$$

$$\Theta(\phi, t) = \sum_{r \in \mathrm{Ds}(\mu^*), \ r \leqslant t} [\theta_r(1) - \phi(r^-)],$$

$$(8.2)$$

$$\begin{cases} d\alpha_r^* = g(\alpha_r^*, r) \Delta_r^* ds, \\ d\sigma_r = -g_x^\top (\alpha_r^*, r) \sigma_r \Delta_r^* ds + \varphi_x^\top (\alpha_r^*, r) d\eta_r, \\ d\theta_r = \left\langle g_t(\alpha_r^*, r), \sigma_r \right\rangle \Delta_r^* ds - \varphi_t^\top (\alpha_r^*, r) d\eta_r, \quad s \in [0, 1], \\ \alpha_r^*(0) = x^*(r^-), \quad \sigma_r(0) = \psi(r^-), \quad \theta_r(0) = \phi(r^-), \quad \Delta_r^* = \mu^*(\{r\}); \\ \psi_0 = \frac{\partial l}{\partial x_0} (p^*, \lambda), \qquad \psi_1 = -\frac{\partial l}{\partial x_1} (p^*, \lambda); \\ \phi_0 = -\frac{\partial l}{\partial t_0} (p^*, \lambda), \qquad \phi_1 = \frac{\partial l}{\partial t_1} (p^*, \lambda); \\ \left\langle g(\alpha_r^*(s), r), \sigma_r(s) \right\rangle = 0 \quad \forall s \in [0, 1], \\ \sup_{q \in \mathcal{Q}} \left\{ g(x_r^*(s), r), \sigma_r(s) \right\} = 0, \quad \forall s \in [0, 1], \\ \sup_{q \in \mathcal{Q}} \left\{ g(x_r^*(s), r), \sigma_r(s) \right\} = 0, \quad \forall s \in [0, 1], \\ \left\langle \lambda_1, e_1(p^*) \right\rangle = 0, \quad \varphi^j(x^*(t), t) = 0, \quad \eta^j - n.s. \quad \forall j; \\ \max_{q \in \mathcal{Q}} H(u, t) = H(t) \quad n.s. \quad t, \quad \max_{q \in \mathcal{Q}} H(u, t) = \phi(t) \quad \forall t \in (t_0^*, t_1^*); \\ Q(t) \leqslant 0 \quad \forall t, \quad Q(t) = 0, \quad \mu^* - n.s.; \\ \lambda_0 + \mathcal{L}(\{t : |\psi(t)| > 0\}) + \sum_{r \in \mathrm{Ds}(\mu^*)} \mathcal{L}(\{t : |\sigma_r(t)| > 0\}) \Delta_r^* = 1. \end{cases}$$

$$(8.4)$$

Замечание. Из условий теоремы 8.1 вытекают следующие условия трансверсальности по времени:

$$\max_{u \in U} H(\beta_k^*, u, \gamma_k, t_k^*) + (-1)^{k+1} \left[\Delta_k^* \int_0^1 \langle g_t(\alpha_k^*, t_k^*), \sigma_k \rangle dt - \int_{[0,1]} \varphi_t^\top (\alpha_k^*, t_k^*) d\eta_k - \varphi_t^\top (x_k^*, t_k^*) \eta(\{t_k^*\}) - \frac{\partial l}{\partial t_k} (p^*, \lambda) \right] = 0, \quad k = 0, 1.$$

Здесь и в теореме 8.1 приняты следующие обозначения:

$$\psi_k = \psi(t_k^*), \quad \phi_k = \phi(t_k^*), \quad \Delta_k^* = \mu^*(\{t_k^*\}), \quad k = 0, 1,$$
$$\beta_0^* = x^*(t_0^{*+}), \quad \beta_1^* = x^*(t_1^{*-}), \quad \gamma_0^* = \psi(t_0^{*+}), \quad \gamma_1^* = \psi(t_1^{*-}),$$

 α_k^* , σ_k и η_k — элементы присоединенной системы в точке t_k^* , k=0,1.

Доказательство. Воспользуемся схемой, предложенной в [1]. При этом ссылка на теорему 7.1 в доказательстве будет означать ее первый вариант, т.е. условия 1)-8).

Формулы (8.2) и (8.3) получаются применением теоремы 7.1 в условиях гладкости к v-задаче (редукция R_2 , § 4). Ее доказательство полностью аналогично проведенному в [1, с. 165].

Рассмотрим случай $\Delta_k^*=0,\,k=0,1$ (случай $\Delta_k^*>0$ аналогичен) и докажем (8.4). Предположим, что (8.4) нарушается. Тогда $\lambda_0=0,\,\psi(t)=0\,\,\forall t\in B^*,\,B^*=(t_0^*,t_1^*),\,$ так как функция ψ непрерывна справа на указанном интервале. Отсюда $\sigma_r(s)=0\,\,\forall s\in[0,1]\,\,\forall r\in\mathrm{Ds}(\mu^*).$ Используя регулярность фазовых ограничений, выводим, что $\eta(B^*)=0,\,\eta_r=0\,\,\forall r\in\mathrm{Ds}(\mu^*),\,$ а также

$$\varphi_x^{\top}(x_k^*, t_k^*)\eta(\{t_k^*\}) = -\frac{\partial l}{\partial x_k}(p^*, \lambda), \quad k = 0, 1.$$

Аналогично из (8.2) получаем

$$\langle \varphi_t(x_k^*, t_k^*), \eta(\{t_k^*\}) \rangle = -\frac{\partial l}{\partial t_k}(p^*, \lambda), \quad k = 0, 1.$$

Подставляя полученные выражения в неравенства (8.1), имеем

$$\max_{u \in U} H\left(x_k^*, u, (-1)^{k+1} \varphi_x^\top(x_k^*, t_k^*) \eta(\{t_k^*\}), t_k^*\right) + (-1)^{k+1} \left\langle \varphi_t(x_k^*, t_k^*), \eta(\{t_k^*\}) \right\rangle \leqslant 0, \quad k = 0, 1.$$

Точно так же, подставляя в неравенства $Q(t_k^*) \le 0$, получаем

$$\langle g(x_k^*, t_k^*), (-1)^{k+1} \varphi_x^\top (x_k^*, t_k^*) \eta(\{t_k^*\}) \rangle \leqslant 0, \quad k = 0, 1.$$

Теперь из условия управляемости траектории $x^*(t)$ в концевых точках вытекает, что $\eta(\{t_k^*\})=0$, $k=0,1\Rightarrow \frac{\partial l}{\partial p}(p^*,\lambda)=0$. Из регулярности концевых ограничений следует, что $\lambda=0$. Таким образом, получили противоречие с условием нетривиальности теоремы 7.1.

Теорема доказана.

Замечание. Для некоторого класса задач предположение управляемости (определение 1.4) может быть ослаблено. Пусть исследуемая задача такова, что все фазовые ограничения выпуклы на траекториях присоединенной системы. Будем говорить, что оптимальная траектория $x^*(t)$ управляема, если существуют точки $s_k \in [0,1], k=0,1$, такие, что определение 1.4 выполняется в $(\alpha_k^*(s_k),t_k^*)$. Действительно, в таком случае воспользуемся редукцией R_1 , но в редуцированной задаче (P_1) не будем накладывать дополнительных фазовых ограничений (это возможно, в силу сделанного предположения о выпуклости фазовых ограничений на разрывах системы). Оптимальная траектория в редуцированной задаче будет управляемой. Тогда, рассуждая, как и при доказательстве теоремы 8.1, можно получить даже более точное условие нетривиальности

$$\lambda_0 + \mathcal{L}(\{t : |\psi(t)| > 0\}) + \sum_{r \in Ds(\mu^*) \setminus \{t_0^*, t_1^*\}} \mathcal{L}(\{t : |\sigma_r(t)| > 0\}) \Delta_r^* = 1.$$
(8.5)

Последнее верно, так как в исследуемом случае функции σ_k (т.е. сопряженные к α_k^* переменные в редуцированной задаче) являются решениями линейных систем.

Примером задачи с отмеченными выше выпуклыми свойствами может служить линейная система: g не зависит от x, φ линейна по x. Кроме того, для линейной системы условие (8.5) принимает вид

$$\lambda_0 + \mathcal{L}(\{t : |\psi(t)| > 0\}) = 1.$$

9. Общая нелинейная задача импульсного управления

В этом параграфе избавимся от предположений линейной выпуклости, в которых были получены теоремы 6.2, 7.1, и осуществим доказательство ПМ для общей нелинейной задачи импульсного управления с векторной мерой (1.2)–(1.5). Здесь вначале эту задачу будем рассматривать на фиксированном отрезке времени $T=[t_0,t_1]$. Концевой вектор p в таком случае принимает вид $p=(x_0,x_1),\ p\in\mathbb{R}^{2n}$.

Теорема 9.1. Пусть (p^*, u^*, \mathbf{q}^*) — решение задачи (1.2)–(1.4). Тогда существуют число $\lambda_0 \geqslant 0$, векторы $\lambda_j \in \mathbb{R}^{k_j}$, j=1,2, и функция $\psi \in V^n(T)$ такие, что выполняются следующие условия:

$$d\psi = -H_x(t)dt - Q_x(t)d\mathbf{q}^*, \quad t \in T,$$

$$\psi_0 = \frac{\partial l}{\partial x_0}(p^*, \lambda), \qquad \psi_1 = -\frac{\partial l}{\partial x_1}(p^*, \lambda),$$

$$\lambda_1 \geqslant 0, \quad \langle \lambda_1, e_1(p^*) \rangle = 0,$$

$$\max_{u \in U(t)} H(u, t) = H(t) \text{ n.s. } t,$$

$$\gcd Q(t), m \geqslant 0 \quad \forall m \in K,$$

$$\int_T \langle Q(t), d\mathbf{q}^* \rangle = 0,$$

$$|\lambda| = 1.$$

Доказательство. Пусть (p^*, u^*, \mathbf{q}^*) , $\mathbf{q}^* = (\mu^*, \{v_r^*\})$, — решение задачи (1.2)—(1.4). Не ограничивая общности, будем считать, что $e_0(p^*) = 0$. Рассмотрим множество $\mathcal{I}_D^*(T)$, содержащее элементы $\mathbf{q}_D \in \mathcal{I}_D(T)$ такие, что $\Pr(\mathbf{q}_D) = \mathbf{q}^*$. В силу ρ_w -непрерывности оператора проектирования, множество $\mathcal{I}_D^*(T)$ является ρ_w -замкнутым. Возьмем произвольное импульсное управление $\mathbf{q}_D \in \mathcal{I}_D^*(T)$ и рассмотрим систему

$$\begin{cases}
d(y, y^*) = E d\mathbf{q}_D, & y(t_0) = y^*(t_0) = 0, \\
dz = d|\mathbf{q}_D|, & z(t_0) = 0, \\
d\varrho = |y - y^*|^2 d|\mathbf{q}_D| + |z - z^*|^2 dt, & \varrho(t_0) = |z(t_1) - z^*(t_1)|^2.
\end{cases}$$
(9.1)

Здесь E — единичная матрица размерности $2k_4 \times 2k_4$; запись (y,y^*) означает $2k_4$ -мерную функцию, первые k_4 компоненты которой — функция y и последние k_4 компоненты — функция y^* ; $z^*(t) = F(t; |\mathbf{q}_D^*|), \mathbf{q}_D^* = (\mathbf{q}^*, \mathbf{q}^*).$

Положим $c=\gcd\sup_{t\in T}|x^*(t)|+\|\mathbf{q}_D^*\|+1$ и рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}\times L_2^m(T)$, состоящее из троек (p,d,u). Обозначим через X подмножество его элементов (p,d,u), $p=(x_0,x_1)$, удовлетворяющих следующим требованиям: существует импульсное управление $\mathbf{q}_D\in\mathcal{I}_D^*(T)$ такое, что

- 1) $\|\mathbf{q}_D\| \leq c$;
- 2) на отрезке $[t_0, t_1]$ существует решение x(t) уравнения (1.3), отвечающее набору (x_0, u, \mathbf{q}_D) , такое, что $x_1 = x(t_1)$, $\gcd \sup_{t \in T} |x(t)| \leqslant c$ и $u(t) \in U(t)$ п.в.;
- 3) $d = \varrho(t_1)$, где $\varrho(t)$ решение системы (9.1), отвечающее элементу \mathbf{q}_D .

Решение уравнения (1.3) теперь понимается в смысле расширенной системы (9.1), т.е. как решение следующего эквивалентного исходному уравнения

$$dx = f(x, u, t)dt + (g(x, t), O)d\mathbf{q}_D,$$

где O — нулевая матрица размерности $k_4 \times n$.

Множество X непусто, так как содержит тройку $(p^*,0,u^*)$, отвечающую элементу \mathbf{q}_D^* . В силу наложенных ограничений, леммы 3.2, ρ_w -компактности импульсных управлений и ρ_w -непрерывности оператора Pr , множество X замкнуто и, следовательно, само является полным метрическим пространством с метрикой, индуцированной нормой $\sqrt{|p|^2+|d|^2+||u||^2}$, $(p,d,u)\in X.$

Зафиксируем $\varepsilon_i = i^{-1}$, $i \in \mathbb{N}$, и положим $e_{0,i}(p,d) = \left(e_0(p) + d + \varepsilon_i^3\right)^+$. На неотрицательном ортанте определим полунепрерывную снизу функцию

$$\Omega(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}, & \omega_1 + \omega_2 > 0, \\ 0, & \omega_1 = \omega_2 = 0. \end{cases}$$

Ha X рассмотрим функционал

$$\phi_i(p,d) = e_{0,i}(p,d) + \sum_{j=1}^{k_1} \Omega([e_1^{j+}(p)]^2, [e_{0,i}(p,d)]^2) + \sum_{j=1}^{k_2} \Omega([e_2^{j}(p)]^2, [e_{0,i}(p,d)]^2).$$

Функционал ϕ_i полунепрерывен снизу и неотрицателен. К тому же $\phi_i(p^*,0)=\varepsilon_i^3$. Применим гладкий вариационный принцип [19]. Для каждого i существуют тройка $a_i=(p_i,d_i,u_i)$, последовательность троек $a_{i,k}=(p_{i,k},d_{i,k},u_{i,k})$, сходящаяся в метрике X к a_i при $k\to\infty$, а также последовательность чисел $c_{i,k}\colon 0\leqslant c_{i,k}\leqslant 2^{-k},\ k\in\mathbb{N}$, такие, что, во-первых,

$$|p^* - p_{i,k}|^2 + |d_{i,k}|^2 + ||u^* - u_{i,k}||^2 \le \text{const } \varepsilon_i^2 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$
 (9.2)

1
Здесь и далее $\|u\|=\sqrt{\int\limits_{t_0}^{t_1}|u(t)|^2dt}.$

во-вторых, $\phi_i(p_i,d_i)\leqslant \varepsilon_i^3$, и, в-третьих, существует импульсное управление $\mathbf{q}_{D,i}\in\mathcal{I}_D^*(T)$ такое, что процесс $(p_i,\varrho_{1,i}=d_i,u_i,\mathbf{q}_{D,i})$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases}
\phi_{i}(p, \varrho_{1}) + \varepsilon_{i} \left(\chi_{1,i}(p, \varrho_{1}) + \int_{t_{0}}^{t_{1}} \chi_{2,i}(u, t) dt \right) \to \min, \\
dx = f(x, u, t) dt + (g(x, t), O) d\mathbf{q}_{D}, \\
d(y, y^{*}) = E d\mathbf{q}_{D}, \quad y_{0} = y_{0}^{*} = 0, \\
dz = d|\mathbf{q}_{D}|, \quad z_{0} = 0, \\
d\varrho = |y - y^{*}|^{2} d|\mathbf{q}_{D}| + |z - z^{*}|^{2} dt, \quad \varrho_{0} = |z_{1} - ||\mathbf{q}_{D}^{*}||^{2}, \quad t \in T, \\
|p - p_{i}| + |\varrho_{1} - d_{i}| \leqslant \delta_{i}, \quad \max\{gc \sup|x(t)|, ||\mathbf{q}_{D}||\} \leqslant c, \\
p = (x_{0}, x_{1}), \quad u(t) \in U(t), \quad \mathbf{q}_{D} \in \mathcal{I}_{D}^{*}(T).
\end{cases} \tag{9.3}$$

Здесь

$$\chi_{1,i}(p,\varrho_1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} [|p-p_{i,k}|^2 + |\varrho_1 - d_{i,k}|^2], \qquad \chi_{2,i}(u,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} |u-u_{i,k}(t)|^2.$$

Поясним, как выбирается δ_i . Так как $\phi_i(p_i,d_i)\leqslant \varepsilon_i^3$, то $e_{0,i}(p_i,d_i)>0$ при $\varepsilon_i<1$. Действительно, если $e_{0,i}(p_i,d_i)=0$, то $e_0(p_i)<0$ и, следовательно, нарушается какое-то из ограничений (1.4), например, e_1^j при j=1. Тогда $\Omega\big([e_1^{1+}(p_i)]^2,0\big)=1$, что невозможно при $\varepsilon_i<1$. Так как $e_{0,i}(p_i,d_i)>0$, то, в силу непрерывности функции $e_{0,i}(p,d)$, существует $\delta_i > 0$ такое, что $e_{0,i}(p,d) > 0 \ \forall (p,d)$: $|p-p_i|+|d-d_i| \leq \delta_i$.

Оптимальные траектории в задаче (9.3) обозначим через x_i , y_i , z_i и ϱ_i . Из (9.2), переходя к подпоследовательности, имеем $p_i o p^*$, $u_i o u^*$ п.в., $d_i o 0$ при $i o \infty$. Последнее означает, что $\varrho(\mathbf{q}_{D,i}) \to 0$. По признаку ρ_w -сходимости $\mathbf{q}_{D,i} \stackrel{w}{\to} (\mathbf{q}^*,\mathbf{q}^*)$. Тогда $x_i(t) \to x^*(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(|\mathbf{q}^*|)$, $\gcd\sup |x_i| \to \gcd\sup |x^*|$ при $i \to \infty$ (лемма 3.2), и при больших i все неравенственные ограничения задачи (9.3) являются строгими. Поэтому к ней применимы необходимые условия теоремы 5.1. В силу теоремы 5.1, существуют функции $\psi_i \in V^n(T)$, $\zeta_i \in V^{k_4}(T)$, $\varsigma_i, \theta_i \in C(T)$ и число $\lambda_{0,i} > 0$, для которы x^1

$$\begin{aligned} |\lambda_i| + \operatorname{gc}\sup_{t \in T} |\psi_i(t)| &= 1, \\ d\psi_i &= -H_x^i(t)dt - \left(Q_x^i(t), O\right)d\mathbf{q}_{D,i}, \quad t \in T, \\ (-1)^k \psi_{k,i} &= \frac{\partial l}{\partial x_k}(p_i, \lambda_i) - \kappa_i \frac{\partial e_0}{\partial x_k}(p_i) + \lambda_{0,i}\varepsilon_i \frac{\partial \chi_{1,i}}{\partial x_k}(p_i, \varrho_{1,i}), \quad k = 0, 1, \\ d\zeta_i &= -2\theta_i(y_i - y_i^*)d|\mathbf{q}_{D,i}|, \quad \zeta_i(t_1) = 0, \\ d\varsigma_i &= -2\theta_i(z_i - z^*)dt, \qquad \varsigma_i(t_1) = 2\theta_i(z_{1,i} - \|\mathbf{q}_D^*\|), \\ d\theta_i &= 0, \quad \theta_i(t_1) = -\lambda_{0,i} - \lambda_{0,i}\varepsilon_i \frac{\partial \chi_{1,i}}{\partial \varrho_1}(p_i, \varrho_{1,i}), \end{aligned}$$

$$\langle Q_i(t), m \rangle \leqslant h_i | m | \quad \forall m \in K \quad \forall t \in (t_0, t_1),$$

$$M_{r,i}(s) = \max_{v \in S_r} \left[\langle Q_{r,i}(s) + \zeta_{r,i}(s), v \rangle + |v| b_{r,i}(s) \right] = \left\langle Q_{r,i}(s) + \zeta_{r,i}(s), \frac{v_{r,i}(s)}{|v_{r,i}(s)|} \right\rangle + b_{r,i}(s)$$

$$(9.4)$$

для п.в. $s \in \Gamma_{r,i}^+, r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}_{D,i}|)$. Здесь $S_r = \{v \in K : |v| = 1\}, \Gamma_{r,i}^+ = \{s \in [0,1] : |v_{r,i}(s)| > 0\}$. По теореме Демьянова [14] из свойств гамильтоновой системы, равенства (9.4), используя условие $\dot{\alpha}_{r,i}(s) = \dot{\sigma}_{r,i}(s) = 0$ для п.в. $s \in [0,1] \setminus \Gamma_{r,i}^+$, а также условие $\|\zeta_{r,i}'\|_{L_\infty} + \|b_{r,i}'\|_{L_\infty} \leqslant 1(i) \to 0$ при $i \to \infty$, выводим, что $\|M_{r,i}'\|_{L_\infty} \leqslant 1(i)$ (равномерно по r). Отсюда, поскольку $\exists k \in \{0,1\}$: $\langle Q_{r,i}(k), m \rangle \leqslant h_i |m| \ \forall m \in K$, вытекает, что $\exists c_i \geqslant 0, c_i \rightarrow 0: \langle Q_{r,i}(s), m \rangle \leqslant c_i | m | \forall s \in [0,1] \ \forall m \in K \ \forall r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}_{D,i}|).$ Значит, верно (9.5).

 $^{^1}$ Задача (9.3) нестандартная, поскольку а) ее динамика содержит меру $|{f q}_D|$ и б) последние k_4 координат вектора ${f q}_D$ являются фиксированными: ${\sf Pr}_{\,2}({f q}_D) = {f q}^*.$ Однако теорема 5.1 для такой задачи доказывается точно так же. Объясним подробнее, откуда появляются числа $c_i\geqslant 0,\ c_i\to 0$ в правой части неравенства (9.5). Пусть $\mathbf{q}_{D,i}=$ $(\mu_{D,i};\nu_{D,i};\{(v_{r,i},v_{r,i}^*)\})$. Положим $b_i=\theta_i|y_i-y_i^*|^2+\varsigma_i,\ h_i=\gcd\sup[|b_i|+|\zeta_i|]$. Легко видеть, что $h_i\to 0$ при $i\to \infty$. Следуя доказательству теоремы 5.1, получим следующие условия:

$$\max_{u \in U(t)} (H_i(u, t) - \lambda_{0,i} \varepsilon_i \chi_{2,i}(u, t)) = H_i(t) - \lambda_{0,i} \varepsilon_i \chi_{2,i}(u_i(t), t) \text{ fi.b.},$$

$$\gcd_{t \in T} \langle Q_i(t), m \rangle \leqslant c_i |m| \quad \forall m \in K,$$

$$\int_{T} \langle (Q_i(t), \mathbf{0}), d\mathbf{q}_{D,i} \rangle + c_i \geqslant 0.$$
(9.5)

Здесь

$$\lambda_{1,i} = 2\lambda_{0,i} \frac{e_1^+(p_i)e_{0,i}^2(p_i)}{\left([e_1^+(p_i)]^2 + e_{0,i}^2(p_i)\right)^2}, \quad \lambda_{2,i} = 2\lambda_{0,i} \frac{e_2(p_i)e_{0,i}^2(p_i)}{\left([e_2^+(p_i)]^2 + e_{0,i}^2(p_i)\right)^2},$$

$$\lambda_i = (\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}), \quad \kappa_i = e_{0,i}^{-1}(p_i)\left(\langle \lambda_{1,i}, e_1^+(p_i) \rangle + \langle \lambda_{2,i}, e_2(p_i) \rangle\right);$$

числа $c_i\geqslant 0,\ c_i\to 0$ при $i\to\infty$; индекс i у функций H и Q (а также их частных производных) означает, что в них вместо части переменных $x,~u,~\psi$ подставлены значения $x_i(t),~u_i(t)$ или $\psi_i(t)$ соответственно; символ ${\bf 0}$ означает вектор из k_4 нулей.

Поскольку $\phi_i(p_i,d_i) \to 0$ при $i \to \infty$, то $\frac{|e_1^+(p_i)|}{e_{0,i}(p_i)}, \frac{|e_2(p_i)|}{e_{0,i}(p_i)} \to 0$. Отсюда $\kappa_i \to 0$ при $i \to \infty$. Используя этот факт, переходя с помощью леммы 3.2 к пределу в необходимых условиях i-задачи, получаем утверждение теоремы.

Теорема 9.2. Пусть (p^*, u^*, \mathbf{q}^*) , $\mathbf{q}^* = (\mu^*; \{v_r^*\})$, — решение задачи (1.2)–(1.5), и фазовые ограничения согласованы с концевыми. Тогда существуют число $\lambda_0\geqslant 0$, векторы $\lambda_j\in\mathbb{R}^{k_j}$, $j=1,2,\; \lambda_1\geqslant 0$, вектор-функция $\psi\in V^n(T)$, вектор-мера $\eta=(\eta^1,\ldots,\eta^{k_3})$, $\eta^j\in C_+^*(T)$: $\mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|)\cap\mathrm{Ds}(\eta)=arnothing$, а для каждой точки $r\in\mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|)$ существуют своя вектор-функция $\sigma_r \in V^n([0,1])$ и своя вектор-мера $\eta_r = (\eta_r^1, \dots, \eta_r^{k_3}), \ \eta_r^j \in C_+^*([0,1]),$ такие, что

$$\psi(t) = \psi_0 - \int_{t_0}^t H_x(s) \, ds - \int_{[t_0, t]} Q_x(s) \, d\mu_c^* + \int_{[t_0, t]} \varphi_x^\top(x^*, s) \, d\eta + \Phi(\psi, t), \quad t \in (t_0, t_1],$$

$$\Phi(\psi, t) = \sum_{r \in \text{Ds}(|\mathbf{q}^*|), r \leqslant t} [\sigma_r(1) - \psi(r^-)], \tag{9.6}$$

$$\begin{cases}
d\alpha_r^* = g(\alpha_r^*, r)v_r^* ds, \\
d\sigma_r = -\sum_{j=1}^{k_4} g_x^{j\top} (\alpha_r^*, r)\sigma_r v_r^{*j} ds + \varphi_x^{\top} (\alpha_r^*, r) d\eta_r, \quad s \in [0, 1], \\
\alpha_r^*(0) = x^*(r^-), \quad \sigma_r(0) = \psi(r^-), \\
\sup_{j=1} (\sigma_r^*) \subseteq \{s : \varphi^j(\alpha_r^*(s), r) = 0\}, \quad j = 1, \dots, k_3, \quad r \in \operatorname{Ds}(|\mathbf{q}^*|);
\end{cases}$$
(9.7)

 $\subset \{s: \varphi^j(\alpha_r^*(s), r) = 0\}, \quad j = 1, \dots, k_3, \quad r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|);$

$$\psi_0 = \frac{\partial l}{\partial x_0}(p^*, \lambda), \qquad \psi_1 = -\frac{\partial l}{\partial x_1}(p^*, \lambda); \tag{9.8}$$

$$\langle \lambda_1, e_1(p^*) \rangle = 0, \qquad \varphi^j(x^*(t), t) = 0 \quad \eta^j \text{-n.s.} \quad \forall j;$$

$$\max_{u \in U(t)} H(u, t) = H(t) \text{ n.s.};$$

$$(9.9)$$

$$\max_{u \in U(t)} H(u, t) = H(t) \, n.s.; \tag{9.10}$$

$$\operatorname{gc\,sup}\langle Q(t), m \rangle \leqslant 0 \quad \forall m \in K, \qquad \int_{T} \langle Q(t), d\mathbf{q}^* \rangle = 0;$$
 (9.11)

$$|\lambda| + ||\eta|| + \sum_{r \in \text{Ds}(|\mathbf{q}^*|)} ||\eta_r|| = 1.$$
 (9.12)

Замечание. Здесь операция $\gcd \sup u$ интегрирование в (9.11) понимаются в смысле сопряженной системы (9.7). Пусть $m_c^* = \frac{d\mu_c^*}{d|\mu_c^*|}$ — производная Радона—Никодима векторной меры μ_c^* по мере $|\mu_c^*|$. Тогда (9.11) означает следующее:

- 1) $Q(t) \in K^{\circ} \ \forall t \in T \ \text{if} \ Q_r(s) \in K^{\circ} \ \forall s \in [0,1] \ \forall r \in \text{Ds}(|\mathbf{q}^*|);$
- 2) $\langle Q(t), m_c^*(t) \rangle = 0 \mid \mu_c^* \mid \text{-п.в.} \text{ и } \langle Q_r(s), v_r^*(s) \rangle = 0 \text{ п.в. } s \in [0, 1] \ \forall r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|).$

Предварительно докажем два вспомогательных предложения.

Предложение 9.1. На отрезке [0,1] рассмотрим последовательность непрерывных неотрицательных функций $f_i \in C([0,1])$: $f_i \neq 0$, $f_i(0) = f_i(1) = 0$ $\forall i$, сходящуюся равномерно к липшицевой функции $f \neq 0$. Пусть последовательность положительных чисел y_i сходится к 0. Тогда

$$A_i = \int_{0}^{1} \frac{f_i(t)}{[f_i(t)]^2 + y_i} dt \to \infty.$$

Доказательство. Константу Липшица функции f обозначим через c>0. Так как $f\neq 0$, но f(0)=0, то найдутся точка $s\in [0,1)$ и число $\delta>0$ такие, что f(s)=0, f(t)>0 $\forall t\in (s,s+\delta]$. Зафиксируем $\varepsilon\colon 0<\varepsilon<\delta$. В силу равномерной сходимости,

$$\int_{s+\varepsilon}^{s+\delta} \frac{f_i(t)}{[f_i(t)]^2 + y_i} dt \to \int_{s+\varepsilon}^{s+\delta} \frac{1}{f(t)} dt.$$

В силу липшицевости, $f(t)\leqslant c|t-s|$. Но интеграл $\int\limits_s^{s+\delta} \frac{1}{c|t-s|}\,dt$ расходится. Тогда $A_i\to\infty$. Предложение доказано.

Предложение 9.2. На отрезке [0,1] рассмотрим последовательность абсолютно непрерывных неотрицательных функций $f_i \in C([0,1])$: $\|f_i'\|_{L_\infty} \leqslant c$, $f_i(0) = f_i(1) = 0$, сходящуюся равномерно к нулю. Пусть $y_i > 0$ и

$$A_i = \int_{0}^{1} \frac{f_i(t)}{[f_i(t)]^2 + e^{-\frac{1}{y_i}}} dt \to 0.$$

Тогда если $y_i o 0$, то $[f_i(t)]^2 e^{\frac{1}{y_i}} o 0$ равномерно при $i o \infty$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда $\exists \varepsilon > 0, \ \exists \tilde{t}_i \in (0,1): \ f_i(\tilde{t}_i) \geqslant 2\varepsilon e^{-\frac{1}{2y_i}} \ \forall i.$ Но поскольку $f_i(0) = 0$, а f_i непрерывны, то $\exists t_i \in (0,1): \ f_i(t_i) = 2\varepsilon e^{-\frac{1}{2y_i}} \ \forall i.$ Из условия $|f_i'(t)| \leqslant c \ \forall i$ выводим, что $\varepsilon e^{-\frac{1}{2y_i}} \leqslant f_i(t) \leqslant 3\varepsilon e^{-\frac{1}{2y_i}}$, как только $t \in O(t_i) = \{t: |t-t_i| \leqslant \varepsilon c^{-1} e^{-\frac{1}{2y_i}}\}$. Отсюда

$$A_{i} \geqslant \frac{1}{2} \int_{O(t_{i})} \frac{\varepsilon e^{-\frac{1}{2y_{i}}}}{9\varepsilon^{2} e^{-\frac{1}{y_{i}}} + e^{-\frac{1}{y_{i}}}} dt = \frac{\varepsilon^{2} c^{-1} e^{-\frac{1}{y_{i}}}}{9\varepsilon^{2} e^{-\frac{1}{y_{i}}} + e^{-\frac{1}{y_{i}}}} \to \frac{\varepsilon^{2} c^{-1}}{9\varepsilon^{2} + 1} > 0.$$

Получили противоречие. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 9.2. Пусть (p^*, u^*, \mathbf{q}^*) , $\mathbf{q}^* = (\mu^*, \{v_r^*\})$, — решение задачи (1.2)–(1.5). Не ограничивая общности, предположим, что $e_0(p^*) = 0$. Как и при доказательстве теоремы 9.1, введем множество $\mathcal{I}_D^*(T)$, состоящее из элементов $\mathbf{q}_D \in \mathcal{I}_D(T)$ таких, что $\Pr_2(\mathbf{q}_D) = \mathbf{q}^*$. В силу ρ_w -непрерывности оператора проектирования, множество $\mathcal{I}_D^*(T)$ является ρ_w -замкнутым.

Пусть $\varepsilon>0$ — число из определения согласованности фазовых ограничений с концевыми. Положим $c=\gcd\sup_{t\in T}|x^*(t)|+\|\mathbf{q}_D^*\|+1,\ \mathbf{q}_D^*=(\mathbf{q}^*,\mathbf{q}^*)$ и рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}\times L_2^m(T)$, состоящее из троек a=(p,d,u). Обозначим через X подмножество его элементов $(p,d,u),\ p=(x_0,x_1)$, для которых существует импульсное управление $\mathbf{q}_D\in\mathcal{I}_D^*(T)$ такое, что

1)
$$\|\mathbf{q}_D\| \le c$$
, $e_1(p) \le 0$, $e_2(p) = 0$, $|p - p^*| \le \varepsilon$;

- 2) на отрезке $[t_0,t_1]$ существует решение x(t) уравнения (1.3), отвечающее набору (x_0,u,\mathbf{q}_D) , такое, что $x_1=x(t_1),$ $\gcd |x(t)|\leqslant c$ и $u(t)\in U(t)$ п.в.;
- 3) $d = \varrho(t_1)$, где $\varrho(t)$ решение (9.1), отвечающее элементу \mathbf{q}_D .

Для каждой тройки $a \in X$ множество элементов \mathbf{q}_D , отвечающих условиям 1)-3), обозначим через $\mathcal{Q}_D(a)$. Множество X непусто, так как содержит тройку $a^* = (p^*, 0, u^*)$. Действительно, это так, поскольку множество $\mathcal{Q}_D(a^*)$ непусто: $\mathbf{q}_D^* \in \mathcal{Q}_D(a^*)$. В силу наложенных ограничений, леммы 3.2, ρ_w -компактности импульсных управлений и ρ_w -непрерывности оператора \Pr , множество X замкнуто и, следовательно, само является полным метрическим пространством с метрикой, индуцированной нормой $\sqrt{|p|^2 + |d|^2 + ||u||^2}$, $(p,d,u) \in X$.

Зафиксируем $\varepsilon_i=i^{-1},\ i\in\mathbb{N},\$ и положим $e_{0,i}(p,d)=\left(e_0(p)+d+\varepsilon_i^3\right)^+.$ Пусть $a=(p,u,d)\in X,$ $\mathbf{q}_D\in\mathcal{Q}_D(a),$ тогда $x(t;a,\mathbf{q}_D)$ — траектория, отвечающая, в силу уравнения (1.3), тройке $(p,u,\mathbf{q}_D).$ Сокращая запись, обозначим $\omega^j(t)=\varphi^{j+}(x(t;a,\mathbf{q}_D),t),\ \gamma_i=e_{0,i}(p,d)$ и для каждого $j=1,\ldots,k_3$ рассмотрим на пространстве X функционал

$$\Omega^{j}(a) = \begin{cases} \min_{\mathbf{q}_{D} \in \mathcal{Q}_{D}(a)} \int_{T} \frac{[\omega^{j}]^{2}}{[\omega^{j}]^{4} + e^{-\frac{1}{\gamma_{i}}}} [dt + d|\mathbf{q}_{D}|], & \gamma_{i} > 0, \\ 1, & \operatorname{gc} \sup \omega^{j} > 0, & \gamma_{i} = 0, \\ 0, & \operatorname{gc} \sup \omega^{j} = 0, & \gamma_{i} = 0. \end{cases}$$

Заметим, что в определении Ω^j минимум при $\gamma_i>0$ всегда достигается, так как множество $\mathcal{Q}_D(a)$ компактно в ρ_w -метрике. Покажем, что Ω^j полунепрерывен снизу на X. Для этого проведем некоторые дополнительные построения. Пусть $\mathbf{q}_D\in\mathcal{Q}_D(a),\ a\in X,\ x=x(t;a,\mathbf{q}_D)$ и $\mu_{D,i}^A=\mu_{D,i}^A[\mathbf{q}_D]$ произвольно выбранное аппроксимирующее импульсное управление \mathbf{q}_D семейство. Положим 1

$$\pi_i(t) = \frac{t - t_0 + F(t; |\mu_{D,i}^A|)}{t_1 - t_0 + ||\mu_{D,i}^A||}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad t \in T.$$

Функция π_i абсолютно непрерывна, строго возрастает на отрезке T, отображая его в сегмент [0,1]. Следовательно, существует обратная функция $\theta_i:[0,1]\to T$, которая также строго возрастает. Положим $\tilde{x}_i(s)=x(\theta_i(s);\tilde{a}_i)$, где $\tilde{a}_i=(x_0,u,\mu_{D,i}^A)$. Несложно устанавливается, что функции \tilde{x}_i сходятся равномерно в $C^n([0,1])$ к некоторой n-векторной функции, которую обозначим через \tilde{x} . Несложно проверить, что эта предельная функция не зависит от выбора аппроксимирующей \mathbf{q}_D последовательности и определяется единственным образом.

Функция $\tilde{x}(s) = \tilde{x}(s; a, \mathbf{q}_D)$ определена на отрезке [0,1], является на нем абсолютно непрерывной, причем $\left|\frac{d\tilde{x}}{dt}\right| \leqslant \mathrm{const}$, где константа const зависит только от числа c, заданного выше. Итак, каждой разрывной траектории $x = x(t; a, \mathbf{q}_D)$ импульсной системы (1.3) с помощью описанного выше преобразования, которое мы обозначим через \mathcal{F} , поставлена в соответствие некоторая обычная, абсолютно непрерывная траектория $\tilde{x} = \mathcal{F}[x]$. Далее нам понадобятся следующие два свойства преобразования \mathcal{F} :

- для непрерывной функции $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ имеем $\operatorname{gc\,sup} \phi(x,t) = \|\mathcal{F}[\phi(x,t)]\|_C$;
- ullet если $x_{0,i} \to x_0$, $\|u_i u\| \to 0$ и $\mathbf{q}_{D,i} \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}_D$, то, как это следует из леммы 3.2,

$$x_i(t) = x(t; x_{0,i}, u_i, \mathbf{q}_{D,i}) \rightarrow x(t) = x(t; x_0, u, \mathbf{q}_D) \quad \forall t \in \text{Cont}(|\mathbf{q}_D|).$$

Для преобразованных функций имеет место равномерная сходимость: $\|\mathcal{F}[x_i] - \mathcal{F}[x]\|_C \to 0$ при $i \to \infty$.

В силу согласованности фазовых ограничений с концевыми, $\tilde{\omega}^j(k)=0, \ k=0,1$, где $\tilde{\omega}^j(t)=\mathcal{F}[\omega^j(t;a,\mathbf{q}_D)], \ j=1,\ldots,k_3$, как только $a\in X$. Полунепрерывность снизу Ω^j вытекает теперь непосредственно из определения и предложения 9.1.

 $^{^{1}}$ Так называемая «разрывная замена времени» (см. [17,18,29,41,45]).

²Их доказательство несложно и вытекает непосредственно из определений (см., например, рассуждения § 3, а также похожие утверждения в [41, 45, 46]).

Рассмотрим на X следующий функционал:

$$\phi_i(a) = e_{0,i}(p,d) + \sum_{j=1}^{k_3} \Omega^j(a).$$

Функционал ϕ_i полунепрерывен снизу и неотрицателен. Кроме того, $\phi_i(a^*) = \varepsilon_i^3$. Применим гладкий вариационный принцип [19]. Для каждого i существуют процесс $a_i = (p_i, d_i, u_i)$, последовательность троек $a_{i,k} = (p_{i,k}, d_{i,k}, u_{i,k})$, сходящаяся в метрике X к a_i при $k \to \infty$, а также последовательность чисел $c_{i,k}$: $0 \leqslant c_{i,k} \leqslant 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что, во-первых,

$$|p^* - p_{i,k}|^2 + |d_{i,k}|^2 + ||u^* - u_{i,k}||^2 \le \text{const } \varepsilon_i^2 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$
 (9.13)

во-вторых, $\phi_i(a_i) \leqslant \varepsilon_i^3$, а в-третьих, существует импульсное управление $\mathbf{q}_{D,i} \in \mathcal{I}_D^*(T)$ такое, что процесс $(p_i, \varrho_{1,i} = d_i, u_i, \mathbf{q}_{D,i})$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} e_{0,i}(p,\varrho_{1}) + \sum_{j=1}^{k_{3}} \int_{T} \frac{[\varphi^{j+}(x,t)]^{2}}{[\varphi^{j+}(x,t)]^{4} + e^{-\frac{1}{\gamma}}} [dt + d|\mathbf{q}_{D}|] + \varepsilon_{i} \left(\chi_{1,i}(p,\varrho_{1}) + \int_{t_{0}}^{t_{1}} \chi_{2,i}(u,t)dt\right) \to \min, \\ dx = f(x,u,t)dt + (g(x,t),O)d\mathbf{q}_{D}, \\ d(y,y^{*}) = Ed\mathbf{q}_{D}, \quad y_{0} = y_{0}^{*} = 0, \\ dz = d|\mathbf{q}_{D}|, \quad z_{0} = 0, \\ d\varrho = |y - y^{*}|^{2}d|\mathbf{q}_{D}| + |z - z^{*}|^{2}dt, \quad \varrho_{0} = |z_{1} - \|\mathbf{q}_{D}^{*}\||^{2}, \\ d\gamma = 0, \quad \gamma_{0} = e_{0,i}(p,\varrho_{1}), \quad t \in T, \\ e_{1}(p) \leqslant 0, \quad e_{2}(p) = 0, \\ |p - p_{i}| + |\varrho_{1} - d_{i}| \leqslant \delta_{i}, \quad |p - p^{*}| \leqslant \varepsilon, \quad \max\{\text{gc sup } |x(t)|, \|\mathbf{q}_{D}\|\} \leqslant c, \\ p = (x_{0}, x_{1}), \quad u(t) \in U(t) \text{ II.B.}, \quad \mathbf{q}_{D} \in \mathcal{I}_{D}^{*}(T). \end{cases}$$

$$(9.14)$$

Здесь $z^*(t) = F(t; |\mathbf{q}_D^*|),$

$$\chi_{1,i}(p,\varrho_1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} \Big[|p - p_{i,k}|^2 + |\varrho_1 - d_{i,k}|^2 \Big], \qquad \chi_{2,i}(u,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} |u - u_{i,k}(t)|^2.$$

Поясним, как выбирается δ_i . Так как $\phi_i(a_i) \leqslant \varepsilon_i^3$, то $e_{0,i}(p_i,d_i) > 0$ при $\varepsilon_i < 1$. Действительно, если $e_{0,i}(p_i,d_i) = 0$, то $e_0(p_i) < 0$ и, следовательно, нарушается какое-то из ограничений (1.5), например, φ^j при j=1. Тогда $\Omega^j(a_i)=1$, что невозможно при $\varepsilon_i < 1$. Так как $e_{0,i}(p_i,d_i)>0$, то, в силу непрерывности функции $e_{0,i}(p,d)$, существует $\delta_i > 0$: $e_{0,i}(p,d)>0 \ \forall (p,d)\colon |p-p_i|+|d-d_i|\leqslant \delta_i$.

Оптимальные траектории в задаче (9.14) обозначим через x_i, y_i, z_i, ϱ_i и γ_i . Из (9.13), переходя к подпоследовательности, имеем $p_i \to p^*, u_i \to u^*$ п.в., $d_i \to 0$ при $i \to \infty$. Последнее означает, что $\varrho(\mathbf{q}_{D,i}) \to 0$. По признаку ρ_w -сходимости $\mathbf{q}_{D,i} \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}_D^*$. Тогда $x_i(t) \to x^*(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(|\mathbf{q}^*|),$ gc sup $|x_i| \to \mathrm{gc} \sup |x^*|$ при $i \to \infty$ (лемма 3.2). Таким образом, при больших i все неравенственные ограничения задачи (9.14) являются строгими. Поэтому к ней применимы необходимые условия теоремы 9.1. В силу теоремы 9.1, существуют функции $\psi_i \in V^n(T), \ \zeta_i \in V^{k_4}(T), \ \xi_i \in V(T),$ $\varsigma_i, \theta_i \in C(T)$, число $\lambda_{0,i} \geqslant 0$ и векторы $\lambda_{j,i} \in \mathbb{R}^{k_j}, \ j=1,2$, для которых 1

$$|\lambda_i| + \gcd\sup_{t \in T} |\psi_i(t)| + \sum_{j=1}^{k_3} \int_T n_i^j(t) \left[dt + d|\mathbf{q}_{D,i}| \right] = 1, \tag{9.15}$$

¹Задача (9.14) нестандартная, поскольку а) ее динамика содержит меру $|\mathbf{q}_D|$, б) последние k_4 координат вектора \mathbf{q}_D являются фиксированными: $\Pr_2(\mathbf{q}_D) = \mathbf{q}^*$. Однако теорема 9.1 для такой задачи доказывается точно так же. Откуда в правой части неравенства (9.19) появляются числа $c_i \geqslant 0$, $c_i \to 0$ (см. аналогичные рассуждения при доказательстве теоремы 9.1).

$$d\psi_{i} = -H_{x}^{i}(t)dt - \left(Q_{x}^{i}(t), O\right)d\mathbf{q}_{D,i} + \sum_{j=1}^{k_{3}} \varphi_{x}^{j}(x_{i}, t)\left(1 - h_{i}^{j}(t)\right)n_{i}^{j}(t)\left[dt + d|\mathbf{q}_{D,i}|\right], \quad t \in T, \quad (9.16)$$

$$(-1)^{k} \psi_{k,i} = \frac{\partial l}{\partial x_{k}} (p_{i}, \lambda_{i}) + \lambda_{0,i} \varepsilon_{i} \frac{\partial \chi_{1,i}}{\partial x_{k}} (p_{i}, \varrho_{1,i}), \quad k = 0, 1,$$

$$d\zeta_{i} = -2\theta_{i} (y_{i} - y^{*}) d|\mathbf{q}_{D,i}|, \quad \zeta_{i}(t_{1}) = 0,$$

$$d\varsigma_{i} = -2\theta_{i} (z_{i} - z^{*}) dt, \quad \varsigma_{i}(t_{1}) = 2\theta_{i} (z_{1,i} - ||\mathbf{q}_{D}^{*}||),$$

$$d\theta_{i} = 0, \quad \theta_{i}(t_{1}) = -\lambda_{0,i} - \lambda_{0,i} \varepsilon_{i} \frac{\partial \chi_{1,i}}{\partial \varrho_{1}} (p_{i}, \varrho_{1,i}),$$

$$(9.17)$$

$$d\xi_i = \sum_{j=1}^{k_3} \frac{\varphi^{j+}(x_i, t)}{2\gamma_i^2} n_i^j(t) [dt + d|\mathbf{q}_{D,i}|], \quad \xi_i(t_1) = 0,$$

$$\lambda_{1,i} \geqslant 0, \quad \langle e_1(p_i), \lambda_{1,i} \rangle = 0,$$

$$\max_{u \in U(t)} \left(H_i(u, t) - \lambda_{0,i} \varepsilon_i \chi_{2,i}(u, t) \right) = H_i(t) - \lambda_{0,i} \varepsilon_i \chi_{2,i}(u_i(t), t) \text{ п.в.}, \tag{9.18}$$

$$gc \sup \left[\langle Q_i(t), m \rangle - \kappa_i(t) | m | \right] \leqslant c_i | m | \quad \forall m \in K, \tag{9.19}$$

$$\int_{T} \left\langle (Q_i(t), \mathbf{0}), d\mathbf{q}_{D,i} \right\rangle + c_i \geqslant 0. \tag{9.20}$$

Здесь $\lambda_i = (\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}), \ c_i \geqslant 0, \ c_i \to 0; \ h_i^j(x,t) = [\varphi^{j+}(x,t)]^4 e^{\frac{1}{\gamma_i}},$

$$n_i^j(x,t) = 2\lambda_{0,i}\varphi^{j+}(x,t)e^{-\frac{1}{\gamma_i}}([\varphi^{j+}(x,t)]^4 + e^{-\frac{1}{\gamma_i}})^{-2}, \quad j = 1,\dots,k_3,$$

$$\kappa_i(x,t) = \lambda_{0,i} \sum_{j=1}^{k_3} \frac{[\varphi^{j+}(x,t)]^2}{[\varphi^{j+}(x,t)]^4 + e^{-\frac{1}{\gamma_i}}};$$

опущенный аргумент x у функций h_i , n_i и κ_i говорит о том, что на его место подставлено значение $x_i(t)$; индекс i у функций H и Q (а также их частных производных) означает, что в них вместо части переменных x, u, ψ подставлены значения $x_i(t),$ $u_i(t)$ или $\psi_i(t)$ соответственно; символ $\mathbf 0$ означает вектор из k_4 нулей. Положим также $h_i(x,t) = (h_i^1(x,t), \dots, h_i^{k_3}(x,t)),$ $n_i(x,t) = (n_i^1(x,t), \dots, n_i^{k_3}(x,t)).$

Из (9.15) и условия $\mathbf{q}_{D,i} \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}_D^*$ выводим $\gcd \sup |\zeta_i| + \|\varsigma_i\|_C \to 0$ при $i \to \infty$.

Пусть $j=1,\dots,k_3$. Из вариационного принципа мы знаем, что

$$\int_{T} \frac{[\omega_i^j]^2}{[\omega_i^j]^4 + e^{-\frac{1}{\gamma_i}}} \left[dt + d|\mathbf{q}_{D,i}| \right] \to 0, \tag{9.21}$$

где $\omega_i^j(t)=\varphi^{j+}(x_i,t)$. Рассмотрим теперь преобразованные функции $\tilde{\omega}_i^j=\mathcal{F}[\omega_i^j]$. Для них условие (9.21) принимает вид

$$\int_{0}^{1} \frac{[\tilde{\omega}_{i}^{j}]^{2}}{[\tilde{\omega}_{i}^{j}]^{4} + e^{-\frac{1}{\gamma_{i}}}} dt \to 0.$$

Из согласованности фазовых ограничений с концевыми следует $\tilde{\omega}_i^j(k) = \omega_i^j(t_k) = 0, \ k = 0, 1.$ Применяя предложение 9.2 к функциям $f_i = [\tilde{\omega}_i^j]^2$, получаем $\gcd \sup |h_i| \to 0$ при $i \to \infty$. Отсюда и из (9.15) выводим $\gcd \sup |\xi_i| \to 0$.

Положим $\eta_i=(\eta_i^1,\dots,\eta_i^{k_3})$, где борелевская мера $\eta_i^j\in C_+^*(T),\ j=1,\dots,k_3$, определяется следующим образом:

$$F(t;\eta_i^j) = \int_{t_0}^t n_i^j(s) [ds + d|\mathbf{q}_{D,i}|], \quad t \in (t_0, t_1], \quad F(t_0; \eta_i^j) = 0.$$

Из (9.15) и соображений компактности, переходя к подпоследовательности, получаем $\lambda_i \to \lambda$, $\eta_i \stackrel{w}{\to} \tilde{\eta}$, $i \to \infty$. Положим $\eta(B) = \tilde{\eta}(B) - \tilde{\eta}(B \cap \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|)) \ \forall B \in \sigma(T)$. Таким образом, $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{k_3})$ — векторная мера такая, что $\mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|) \cap \mathrm{Ds}(\eta) = \varnothing$.

Из (2.1), (9.15) вытекает, что вариации ψ_i равномерно ограничены. Пользуясь 2-й теоремой Хелли, переходя к подпоследовательности, имеем $\psi_i(t) \to \psi_H(t) \ \forall t \in T$. Найдем функцию $\psi \in V^n(T)$ такую, что $\psi(t) = \psi_H(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(|\mathbf{q}^*|) \cap \mathrm{Cont}(\eta)$. Существование такой функции $\psi(t)$ вытекает из оценки $\mathrm{Var}\,|_a^b[\psi_H] \leqslant c(|\mathbf{q}^*| + |\tilde{\eta}| + \mathcal{L})([a,b]) \ \forall a \leqslant b$, которая получается из неравенства $|\vartheta[\psi_i]| \leqslant c(|\mathrm{Pr}_1(\mathbf{q}_{D,i})| + |\eta_i| + \mathcal{L})$ при $i \to \infty$.

Докажем, что $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Для этого построим семейство абсолютно непрерывных мер $\{\hat{\mu}_i\}$, $i\in\mathbb{N}$, аппроксимирующее все необходимые условия оптимальности в i-задаче, следующим образом.

Пусть $\{t_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, — счетное, всюду плотное в T множество точек таких, что $t_k\in X=\mathrm{Cont}(|\mathbf{q}^*|)\cap\mathrm{Cont}(\eta)\cap\Big[\bigcap_{i=1}^\infty\mathrm{Cont}(|\mathbf{q}_i|)\Big]$. Для каждого i рассмотрим аппроксимирующую элемент

 $\mathbf{q}_{D,i}$ последовательность абсолютно непрерывных $2k_4$ -векторных мер $\mu_{D,i,\tau}=(\mu_{i,\tau},\mu_{i,\tau}^*)\stackrel{w}{\to} \mathbf{q}_{D,i}$, $\tau\to\infty$.

Пусть пара $(x_{i,\tau}, \psi_{i,\tau})$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} dx_{i,\tau} = f(x_{i,\tau}, u_i, t)dt + g(x_{i,\tau}, t)d\mu_{i,\tau}, \\ d\psi_{i,\tau} = -H_x(x_{i,\tau}, u_i, \psi_{i,\tau}, t)dt - Q_x(x_{i,\tau}, \psi_{i,\tau}, t)d\mu_{i,\tau} + \sum_{j=1}^{k_3} \varphi_x^{j\top}(x_{i,\tau}, t) \left(1 - h_i^j(x_{i,\tau}, t)\right)d\eta_{i,\tau}^j, \\ x_{i,\tau}(t_0) = x_i(t_0), \quad \psi_{i,\tau}(t_0) = \psi_i(t_0). \end{cases}$$

Здесь $\eta_{i, au} = (\eta^1_{i, au},\dots,\eta^{k_3}_{i, au})$ и

$$F(t; \eta_{i,\tau}) = 2\lambda_{0,i} \int_{t_0}^t n_i(x_{i,\tau}, s) [ds + d|\mu_{i,\tau}|].$$

Пользуясь леммой 3.2, выберем номер τ_i такой, что

$$\left[\begin{array}{l}
\rho_{w}(\mathbf{q}_{D,i},\mu_{D,i,\tau_{i}}) + \int_{T} \left| F(t;\eta_{i,\tau_{i}}) - F(t;\eta_{i}) \right| dt + \left| \eta_{i,\tau_{i}}(T) - \eta_{i}(T) \right| \leqslant \frac{1}{i}; \\
\sum_{k=1}^{i} \left| \psi_{i,\tau_{i}}(t_{k}) - \psi_{i}(t_{k}) \right| + \left| \operatorname{gc} \sup_{t \in T_{i}} \left| \psi_{i}(t) \right| - \max_{t \in T_{i}} \left| \psi_{i,\tau_{i}}(t) \right| \right| \leqslant \frac{1}{i}; \\
\left| \int_{T} \left\langle Q_{i}(x_{i,\tau_{i}}, \psi_{i,\tau_{i}}, t), d\mu_{i,\tau_{i}} \right\rangle - \int_{T} \left\langle \left(Q_{i}(x_{i}, \psi_{i}, t), \mathbf{0} \right), d\mathbf{q}_{D,i} \right\rangle \right| + \\
+ \left| \int_{T} \kappa_{i}(t) \left[dt + d |\mathbf{q}_{D,i}| \right] - \int_{T} \kappa_{i}(x_{i,\tau_{i}}, t) (dt + d |\mu_{D,i,\tau_{i}}|) \right| \leqslant \frac{1}{i}; \\
\left| \left| \left\| h_{i}(x_{i,\tau_{i}}, t) \right\|_{C} - \operatorname{gc} \sup \left| h_{i} \right| \right| \leqslant \frac{1}{i}.
\right\} \right] \right\}$$

$$(9.22)$$

Кроме того, пусть

$$gc \sup \left[\left\langle Q_i(x_{i,\tau_i}, \psi_{i,\tau_i}, t), m \right\rangle - \kappa_i(x_{i,\tau_i}, t) |m| \right] \leqslant 1(i) |m| \quad \forall m \in K.$$

Положим $\hat{\psi}_i = \psi_{i,\tau_i}$, $\hat{x}_i = x_{i,\tau_i}$, $\hat{\mu}_i = \mu_{i,\tau_i}$, $\hat{\mu}_{D,i} = \mu_{D,i,\tau_i}$ $\hat{\eta}_i = \eta_{i,\tau_i}$. Переходя к подпоследовательности, имеем $\hat{\psi}_i(t) \to \psi_A(t) \ \forall t \in T$.

Покажем, что $\psi_A(t) = \psi(t) \ \forall t \in \operatorname{Cont}(|\mathbf{q}^*|) \cap \operatorname{Cont}(\eta)$. Действительно, так как $|\vartheta[\psi_i]| \leq c(|\operatorname{Pr}_1(\mathbf{q}_{D,i})| + |\eta_i| + \mathcal{L})$, то функция $\psi(t)$ непрерывна на множестве $\operatorname{Cont}(|\mathbf{q}^*|) \cap \operatorname{Cont}(\eta) \setminus \{t_0, t_1\}$. То же можно сказать и про функцию ψ_A . Тогда из (9.22) вытекает, что $\psi_A(t) = \psi(t) \ \forall t \in \operatorname{Cont}(|\mathbf{q}^*|) \cap \operatorname{Cont}(\eta)$

 $\operatorname{Cont}(\eta)$. При этом, очевидно, из (9.22) следует, что $\hat{\mu}_{D,i} \stackrel{w}{\to} (\mathbf{q}^*, \mathbf{q}^*) \Rightarrow \hat{\mu}_i = \operatorname{Pr}_1(\hat{\mu}_{D,i}) \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}^*, \, \hat{\eta}_i \stackrel{w}{\to} \tilde{\eta}_i$ и тогда $\hat{x}_i(t) \to x^*(t) \ \forall t \in \text{Cont}(|\mathbf{q}^*|)$ при $i \to \infty$.

Докажем (9.6), (9.8).

Пусть $\nu^* = |\mathbf{q}^*|$. Покажем, что существуют последовательности абсолютно непрерывных векторных мер $\{\bar{\mu}_i\}$, $\{\bar{\eta}_i\}$, а также последовательность натуральных чисел $k_i\geqslant i$ такие, что

- 1) $(\bar{\mu}_i,|\bar{\mu}_i|)\stackrel{w}{\to}(\mu_d^*,\nu_d^*),\; \bar{\eta}_i\stackrel{w}{\to}\tilde{\eta}-\eta$ при $i\to\infty;$
- 2) $|\hat{\mu}_{k_i} \bar{\mu}_i| \stackrel{w}{\to} \nu_c^*, \ i \to \infty, \ \hat{\eta}_{k_i} \geqslant \bar{\eta}_i \ \forall i.$

Если $Ds(\nu^*) = \emptyset$, то положим $\bar{\mu}_i = \bar{\eta}_i = 0$, $k_i = i \ \forall i$.

Пусть $Ds(\nu^*) \neq \varnothing$. Рассмотрим упорядоченную по включению цепочку множеств D_i таких, что $D_0=\varnothing,\ D_{i-1}\subseteq D_i\subseteq Ds(\nu^*)$ и $\sum_{r\in Ds(\nu^*)\setminus D_i}\nu^*(\{r\})\leqslant \frac{1}{i},\ i\in\mathbb{N}.$ Определим множества $S_{r,i}=$

 $[r-arepsilon_i,r+arepsilon_i],\ r\in D_i$, как систему замкнутых попарно не пересекающихся окрестностей точек rтаких, что

- 2) $\sum_{r \in D_{i}} \left(\nu^{*}(S_{r,i}) \nu^{*}(\{r\}) + |\mu^{*}(S_{r,i}) \mu^{*}(\{r\})| + |\tilde{\eta}(S_{r,i}) \tilde{\eta}(\{r\})| \right) \leqslant \frac{1}{i};$ 3) $r \pm \varepsilon_{i} \in \text{Cont}(\nu^{*}) \cap \text{Cont}(\eta).$

Существование множества $S_{r,i}$ вытекает из регулярности мер ν^* , $\tilde{\eta}$. Последовательность $k_i\geqslant i$ выберем такую, что

$$\sum_{r \in D_i} (||\hat{\mu}_{k_i}|(S_{r,i}) - \nu^*(S_{r,i})| + |\hat{\mu}_{k_i}(S_{r,i}) - \mu^*(S_{r,i})| + |\hat{\eta}_{k_i}(S_{r,i}) - \tilde{\eta}(S_{r,i})|) \leqslant \frac{1}{i}.$$

Это осуществимо в силу слабой сходимости мер. Положим $\bar{\mu}_i(B) = \hat{\mu}_{k_i}(B \cap S_i), \ \bar{\eta}_i(B) = \hat{\eta}_{k_i}(B \cap S_i)$ для любого борелевского множества $B\subseteq\mathbb{R}^1$. Здесь $S_i=\bigcup_{i=1}^n S_{r,i}$. Легко видеть, что $(\bar{\mu}_i,|\bar{\mu}_i|)\stackrel{w}{\to}$

 $(\mu_d^*, \nu_d^*), \ \bar{\eta}_i \stackrel{w}{\to} \tilde{\eta} - \eta$ при $i \to \infty$ (и, следовательно, $|\hat{\mu}_{k_i} - \bar{\mu}_i| \stackrel{w}{\to} \nu_c^*, \ \hat{\eta}_{k_i} - \bar{\eta}_i \stackrel{w}{\to} \eta$). Очевидно также, что $\hat{\eta}_{k_i} \geqslant \bar{\eta}_i \ \forall i$.

Из последовательностей $\{\hat{\mu}_i\}$, $\{\hat{\eta}_i\}$, $\{\hat{x}_i\}$, $\{\hat{\psi}_i\}$, $\{u_i\}$ с помощью построенных чисел k_i выберем подпоследовательности, которые обозначим (как и исходные) прежним индексом i.

Перепишем уравнения (1.3), (9.16) в следующем виде:

$$\begin{cases} \hat{x}_i(t) = x_{0,i} + \int\limits_{t_0}^t f(\hat{x}_i, u_i, s) \, ds + \int\limits_{[t_0, t]} g(\hat{x}_i, s) \, d(\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i) + \int\limits_{[t_0, t]} g(\hat{x}_i, s) \, d\bar{\mu}_i, \\ \hat{\psi}_i(t) = \psi_{0,i} - \int\limits_{t_0}^t \hat{H}_x^i(s) \, ds - \int\limits_{[t_0, t]} \hat{Q}_x^i(s) \, d(\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i) - \int\limits_{[t_0, t]} \hat{Q}_x^i(s) \, d\bar{\mu}_i + \int\limits_{[t_0, t]} \varphi_x^\top(\hat{x}_i, s) \, d(\hat{\eta}_i - \bar{\eta}_i) + \int\limits_{[t_0, t]} \varphi_x^\top(\hat{x}_i, s) \, d\bar{\eta}_i + 1(t; i), \quad t \in T. \end{cases}$$

Здесь и далее индекс i и «крышка» у функций H и Q (а также их частных производных) означают, что в них вместо части опущенных переменных x, u, ψ подставлены значения $\hat{x}_i(t), u_i(t)$ или $\hat{\psi}_i(t)$ соответственно. Положим

$$\hat{x}_{i}^{c}(t) = x_{0,i} + \int_{t_{0}}^{t} f(\hat{x}_{i}, u_{i}, s) \, ds + \int_{[t_{0}, t]} g(\hat{x}_{i}, s) \, d(\hat{\mu}_{i} - \bar{\mu}_{i}), \qquad \hat{x}_{i}^{d}(t) = \int_{[t_{0}, t]} g(\hat{x}_{i}, s) \, d\bar{\mu}_{i},$$

¹Здесь $1(t;i) \to 0$ равномерно в $C^n(T)$ при $i \to \infty$.

$$\hat{\psi}_{i}^{\eta}(t) = \psi_{0,i} - \int_{t_{0}}^{t} \hat{H}_{x}^{i}(s) ds - \int_{[t_{0},t]} \hat{Q}_{x}^{i}(s) d(\hat{\mu}_{i} - \bar{\mu}_{i}) + \int_{[t_{0},t]} \varphi_{x}^{\top}(\hat{x}_{i},s) d(\hat{\eta}_{i} - \bar{\eta}_{i}) + 1(t;i),$$

$$\hat{\psi}_{i}^{d}(t) = -\int_{[t_{0},t]} \hat{Q}_{x}^{i}(s) d\bar{\mu}_{i} + \int_{[t_{0},t]} \varphi_{x}^{\top}(\hat{x}_{i},s) d\bar{\eta}_{i}, \quad t \in T.$$

Таким образом, $\hat{x}_i(t) = \hat{x}_i^c(t) + \hat{x}_i^d(t)$, $\hat{\psi}_i(t) = \hat{\psi}_i^{\eta}(t) + \hat{\psi}_i^d(t)$ $\forall t \in T$. Учитывая, что $\hat{x}_i(t) \to x^*(t)$ $\forall t \in \mathrm{Cont}(\nu^*)$, по теореме Лебега и лемме 3.1 имеем

$$\hat{x}_i^c(t) \to x_c^*(t) = x_0^* + \int_{t_0}^t f(x^*, u^*, s) \, ds + \int_{[t_0, t]} g(x^*, s) \, d\mu_c^* \quad \forall t \in T, \quad i \to \infty.$$

Аналогично из леммы 3.1 при $i
ightarrow \infty$ имеем

$$\hat{\psi}_{i}^{\eta}(t) \to \psi_{\eta}(t) = \psi_{0} - \int_{t_{0}}^{t} H_{x}(s) \, ds - \int_{[t_{0},t]} Q_{x}(s) \, d\mu_{c}^{*} + \int_{[t_{0},t]} \varphi_{x}^{\top}(x^{*},s) \, d\eta \quad \forall t \in \text{Cont}(\eta).$$

Положим $\psi_d = \psi - \psi_\eta$. Тогда $\hat{\psi}_i^d(t) \to \psi_d(t) \ \forall t \in \mathrm{Cont}(\nu^*) \cap \mathrm{Cont}(\eta)$. Покажем, что $\psi_d = \Sigma(\psi,t)$. Действительно, пусть $t \in \mathrm{Cont}(\nu^*) \cap \mathrm{Cont}(\eta)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что $\sum_{r\in \mathrm{Ds}(\nu^*)\backslash D_N} \left[\nu^*(\{r\})+|\tilde{\eta}|(\{r\})\right]\leqslant \varepsilon.$ В таком случае

$$\lim_{i \to \infty} \sup_{r \in D(N,t)} \left[\int_{S_{r,i}} -\hat{Q}_x^i(s) \, d\bar{\mu}_i + \int_{S_{r,i}} \varphi_x^\top(\hat{x}_i, s) \, d\bar{\eta}_i \right] - \hat{\psi}_i^d(t) \right] \leqslant \operatorname{const} \varepsilon. \tag{9.23}$$

Здесь и далее $D(N,t)=\{r\in D_N:\ r\leqslant t\}.$

Положим $r_i^- = r - \varepsilon_i$ и для $r \in D(N,t)$ рассмотрим на отрезке $S_{r,i}$ систему

$$\begin{cases}
\hat{x}_{i}^{d}(s) = \hat{x}_{i}^{d}(r_{i}^{-}) + \int_{[r_{i}^{-},s]} g(\hat{x}_{i}(\tau),\tau) d\bar{\mu}_{i}, \\
\hat{\psi}_{i}^{d}(s) = \hat{\psi}_{i}^{d}(r_{i}^{-}) - \int_{[r_{i}^{-},s]} g_{x}^{\top}(\hat{x}_{i}(\tau),\tau) \hat{\psi}_{i}(\tau) d\bar{\mu}_{i} + \int_{[r_{i}^{-},s]} \varphi_{x}^{\top}(\hat{x}_{i}(\tau),\tau) d\bar{\eta}_{i}.
\end{cases} (9.24)$$

При достаточно больших i определим функции¹

$$\pi_{r,i}(\tau) = \frac{F(\tau; |\bar{\mu}_i|) - F(r_i^-; |\bar{\mu}_i|)}{|\bar{\mu}_i|(S_{r,i})}, \quad r \in D(N, t), \quad \tau \in S_{r,i}.$$

Функция $\pi_{r,i}$ отображает сегмент $S_{r,i}$ в отрезок [0,1], является абсолютно непрерывной и строго возрастающей: $\frac{d\pi_{r,i}}{d\tau} = \frac{|\bar{m}_i(\tau)|}{|\bar{\mu}_i|(S_{r\,i})} > 0$ п.в. $(\bar{m}_i(\tau) -$ плотность $\bar{\mu}_i)$. Следовательно, существует обратная функция $\theta_{r,i}:[0,1] \to S_{r,i}, \; \theta_{r,i}=(\pi_{r,i})^{-1}$, которая также абсолютно непрерывна [31]. Производя в (9.24) замену подынтегральной переменной $\omega = \pi_{r,i}(\tau)$ и преобразовывая, приходим к системе

$$\alpha_{r,i}(s) = \hat{x}_i^d(r_i^-) + \hat{x}_i^c(\theta_{r,i}(s)) + \int_0^s g(\alpha_{r,i}(\omega), \theta_{r,i}(\omega)) v_{r,i}(\omega) d\omega,$$

$$\sigma_{r,i}(s) = \hat{\psi}_i^d(r_i^-) + \hat{\psi}_i^{\eta}(\theta_{r,i}(s)) - \int_0^s \sum_{j=1}^{k_4} g_x^{j\top}(\alpha_{r,i}(\omega), \theta_{r,i}(\omega)) \sigma_{r,i}(\omega) v_{r,i}^j(\omega) d\omega + \frac{1}{2} \int_0^s g(\alpha_{r,i}(\omega), \theta_{r,i}(\omega)) v_{r,i}(\omega) d\omega$$

 $^{^1}$ Номера i нужно брать, начиная с некоторого i_0 , так, чтобы $t \notin S_{r,i} \ \forall i \geqslant i_0, \ r \in D(N,t)$.

$$+ \int_{[0,s]} \varphi_x^{\top}(\alpha_{r,i}(\omega), \theta_{r,i}(\omega)) d\eta_{r,i}, \quad s \in [0,1], \quad r \in D(N,t),$$

где

$$\alpha_{r,i}(\omega) = \hat{x}_i(\theta_{r,i}(\omega)), \quad \sigma_{r,i}(\omega) = \hat{\psi}_i(\theta_{r,i}(\omega)), \quad F(\omega; \eta_{r,i}^j) = F(\theta_{r,i}(\omega); \bar{\eta}_i^j), \quad j = 1, \dots, k_3,$$

$$v_{r,i}^j(\omega) = \frac{\bar{m}_i^j(\theta_{r,i}(\omega))|\bar{\mu}_i|(S_{r,i})}{|\bar{m}_i(\theta_{r,i}(\omega))|}, \quad j = 1, \dots, k_4.$$

Из условия $\hat{\mu}_i \stackrel{w}{\to} \mathbf{q}^*$ вытекает, что $\int\limits_0^s v_{r,i} d\omega \to \int\limits_0^s v_r^* d\omega$ равномерно в $C^{k_4}([0,1])$. Отсюда $v_{r,i} \stackrel{w}{\to} v_r^*$

слабо в $L_2^{k_4}([0,1])$. Далее легко видеть, что $\theta_{r,i}(\omega) \to r$ равномерно на [0,1], а, в силу предложения 3.1, $\hat{x}_i^c(\theta_{r,i}(\omega)) \to x_c^*(r)$, $\hat{\psi}_i^{\eta}(\theta_{r,i}(\omega)) \to \psi_{\eta}(r)$ равномерно на [0,1] при $i \to \infty$. Из неравенства Гронуолла следует, что $\alpha_{r,i}$ — фундаментальная по i в $C^n([0,1])$ последовательность функций. Ее предел есть в точности функция $\alpha_r^*.^1$ Из соображений компактности следует, что существуют векторная мера η_r и функция $\sigma_r \in V^n([0,1])$ такие, что после перехода к подпоследовательности $\hat{\eta}_{r,i} \xrightarrow{w} \eta_r$, $\sigma_{r,i}(s) \to \sigma_r(s)$ $\forall s \in \mathrm{Cont}(\eta_r)$. Переходя к пределу в последней системе при $i \to \infty$, имеем

$$\alpha_r^*(s) = x^*(r^-) + \int_0^s g(\alpha_r^*, r) v_r^* d\omega,$$

$$\sigma_r(s) = \psi(r^-) - \int_0^s \sum_{j=1}^{k_4} g_x^{j\top}(\alpha_r^*, r) \sigma_r v_r^{*j} d\omega + \int_{[0, s]} \varphi_x^{\top}(\alpha_r^*, r) d\eta_r, \quad s \in [0, 1], \quad r \in D(N, t).$$

(Здесь используется, что по построению $\hat{x}_i^d(r_i^-) \to x^*(r^-) - x_c^*(r), \; \hat{\psi}_i^d(r_i^-) \to \psi_d(r^-)$.) Отсюда и из (9.23)

$$\left| \psi_d(t) - \sum_{r \in D(N,t)} [\sigma_r(1) - \psi(r^-)] \right| \leqslant \text{const } \varepsilon.$$

Но $\varepsilon > 0$ произвольно; по определению функции Σ это означает, что $\psi_d(t) = \Sigma(\psi, t)$.

В силу (9.22), $|\hat{\psi}_i(t_1) - \psi_i(t_1)| \to 0$. Тогда (9.8) получается из (9.17) при $i \to \infty$. Условия (9.6), (9.8) доказаны.

Докажем (9.7), (9.9). По построению мы знаем, что

$$\int_{T} \varphi(\hat{x}_i, t) \, d\hat{\eta}_i \geqslant 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $i \to \infty$ (с помощью рассуждений, проведенных выше), имеем

$$\int_{T} \varphi(x^*, t) d\eta + \sum_{r \in Ds(\nu^*)_{[0,1]}} \int_{[0,1]} \varphi(\alpha_r^*, s) d\eta_r \geqslant 0.$$

Учитывая, что $\gcd\sup \varphi^j(x^*,t)\leqslant 0,\ j=1,\ldots,k_3$, приходим к (9.7), (9.9).

Переходя к пределу в (9.18), получаем (9.10).

Докажем (9.11). Из (9.20), (9.22) следует, что

$$\int_{T} \left\langle \hat{Q}_i(t), d\hat{\mu}_i \right\rangle \geqslant 1(i) \to 0.$$

¹Следствие единственности решения.

Переходя здесь к пределу при $i \to \infty$, имеем $\int\limits_T \left\langle Q(t), d\mathbf{q}^* \right\rangle \ \geqslant \ 0.$ Покажем, почему

 $\gcd Q(t), m \leqslant 0 \ \forall m \in K$. Действительно, из (9.21), (9.22) следует, что $\kappa_i(\hat{x}_i, t) \to 0$ сильно в $L_1^{k_4}(T)$ и $\kappa_i(\alpha_{r,i}, s) \to 0$ сильно в $L_1^{k_4}([0,1])$. Выбирая подпоследовательность, имеем $\kappa_i(\hat{x}_i, t) \to 0$ п.в. и $\kappa_i(\alpha_{r,i}, s) \to 0$ п.в. Тогда, очевидно, из (9.19), (9.22) следует, что $Q(t) \in K^\circ$ п.в. в $t \in T$ и $Q_r(s) \in K^\circ$ п.в. в $s \in [0,1]$, откуда, в силу непрерывности справа компонент вектор-функции Q на (t_0, t_1) , выводим, что $Q(t) \in K^\circ \ \forall t \in (t_0, t_1)$, и аналогично $Q_r(s) \in K^\circ \ \forall s \in (0,1)$. В силу согласованности фазовых ограничений с концевыми, $\kappa_i(t_k) = 0$, $k = 0, 1 \ \forall i \Rightarrow Q(t_k) \in K^\circ$, k = 0, 1. Объединяя полученные условия, приходим к (9.11).

Условие (9.12) получается простым противоречием: если $|\lambda_i| \to 0$, $\|\hat{\eta}_i\| \to 0$, то, очевидно, $\max_{t \in T} |\hat{\psi}_i(t)| \to 0$ при $i \to \infty$ (следствие неравенства Гронуолла), и, тем самым, (9.15) нарушается при больших i. Теорема доказана.

9.1. Условия невырожденности. В этом пункте обратим внимание на условия, гарантирующие невырожденность ΠM , доказанного в теореме 9.2. Для этого задачу (1.2)–(1.5) будем рассматривать на нефиксированном отрезке времени, т.е. теперь снова, как и в §§ 6–8, концевой вектор $p=(x_0,x_1,t_0,t_1)$.

Теорема 9.3. Пусть (p^*, u^*, \mathbf{q}^*) — решение задачи (1.2)–(1.5), выполнено предположение Γ), фазовые ограничения согласованы с концевыми, фазовые и концевые ограничения регулярны и оптимальная траектория управляема в концевых точках относительно фазовых ограничений. Тогда существуют число $\lambda_0 \geqslant 0$, векторы $\lambda_j \in \mathbb{R}^{k_j}$, $j=1,2,\ \lambda_1 \geqslant 0$, вектор-функция $\psi \in V^n(T^*)$, скалярная функция $\phi \in V(T^*)$, вектор-мера $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^{k_3}),\ \eta^j \in C_+^*(T^*)$: $\mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|) \cap \mathrm{Ds}(\eta) = \varnothing$, а для каждой точки $r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|)$ существуют свои вектор-функция $\sigma_r \in V^n([0,1])$, скалярная функция $\theta_r \in V([0,1])$ и вектор-мера $\eta_r = (\eta^1_r, \ldots, \eta^{k_3}_r),\ \eta^j_r \in C_+^*([0,1])$, такие, что

$$\begin{split} \psi(t) &= \psi_0 - \int\limits_{t_0^*}^t H_x(s) \, ds - \int\limits_{[t_0^*,t]} Q_x(s) \, d\mu_c^* + \int\limits_{[t_0^*,t]} \varphi_x^\top(x^*,s) \, d\eta + \Sigma(\psi,t), \quad t \in (t_0^*,t_1^*], \\ \Sigma(\psi,t) &= \sum_{r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|), \, r \leqslant t} [\sigma_r(1) - \psi(r^-)], \\ \phi(t) &= \phi_0 + \int\limits_{t_0^*}^t H_t(s) \, ds + \int\limits_{[t_0^*,t]} Q_t(s) \, d\mu_c^* - \int\limits_{[t_0^*,t]} \varphi_t^\top(x^*,s) \, d\eta + \Theta(\phi,t), \quad t \in (t_0^*,t_1^*], \\ \Theta(\phi,t) &= \sum_{r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|), \, r \leqslant t} [\theta_r(1) - \phi(r^-)], \\ \begin{cases} d\alpha_r^* &= g(\alpha_r^*,r) v_r^* ds, \\ d\sigma_r &= -\sum_{j=1} g_r^{j\top} (\alpha_r^*,r) \sigma_r v_r^{j*} ds + \varphi_x^\top(\alpha_r^*,r) d\eta_r, \\ d\theta_r &= \langle g_t(\alpha_r^*,r) v_r^*, \sigma_r \rangle ds - \varphi_t^\top(\alpha_r^*,r) d\eta_r, \quad s \in [0,1], \\ \alpha_r^*(0) &= x^*(r^-), \quad \sigma_r(0) &= \psi(r^-), \quad \theta_r(0) &= \phi(r^-), \\ \sup (\eta_r^j) &\subseteq \{s : \varphi^j(\alpha_r^*(s),r) &= 0\}, \quad j = 1, \dots, k_3, \quad r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|); \end{cases} \\ \psi_0 &= \frac{\partial l}{\partial x_0}(p^*,\lambda), \qquad \psi_1 &= -\frac{\partial l}{\partial x_1}(p^*,\lambda); \\ \phi_0 &= -\frac{\partial l}{\partial t_0}(p^*,\lambda), \qquad \phi_1 &= \frac{\partial l}{\partial t_1}(p^*,\lambda); \\ \langle \lambda_1, e_1(p^*) \rangle &= 0, \qquad \varphi^j(x^*(t),t) &= 0 \quad \eta^j \text{-} n.s. \quad \forall j; \\ \max_{u \in U} H(u,t) &= H(t) \quad n.s. \ t, \qquad \max_{u \in U} H(u,t) &= \phi(t) \quad \forall t \in (t_0^*, t_1^*); \end{cases} \end{cases}$$

$$\gcd_{t \in T^*} \langle Q(t), m \rangle \leqslant 0 \quad \forall m \in K, \qquad \int_{T^*} \langle Q(t), d\mathbf{q}^* \rangle = 0;$$
$$\lambda_0 + \mathcal{L}(\{t : |\psi(t)| > 0\}) + \sum_{r \in \mathrm{Ds}(|\mathbf{q}^*|)} \mathcal{L}(\{t : |\sigma_r(t)| > 0\}) |\mathbf{q}^*|(\{r\}) = 1,$$

и имеют место неравенства (8.1).

Замечание. Из условий теоремы 9.3 вытекают следующие условия трансверсальности по времени:

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} H(\beta_k^*, u, \gamma_k, t_k^*) + (-1)^{k+1} \left[\int_0^1 \left\langle g_t(\alpha_k^*, t_k^*) v_k^*, \sigma_k \right\rangle dt - \int_{[0,1]} \varphi_t^\top(\alpha_k^*, t_k^*) d\eta_k - \right. \\ \left. \left. \left. - \varphi_t^\top(x_k^*, t_k^*) \eta(\{t_k^*\}) - \frac{\partial l}{\partial t_k} (p^*, \lambda) \right] = 0, \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

Здесь и в теореме 9.3 приняты следующие обозначения:

$$T^* = [t_0^*, t_1^*], \quad \psi_k = \psi(t_k^*), \quad \phi_k = \phi(t_k^*), \quad k = 0, 1,$$

$$\beta_0^* = x^*(t_0^{*+}), \quad \beta_1^* = x^*(t_1^{*-}), \quad \gamma_0^* = \psi(t_0^{*+}), \quad \gamma_1^* = \psi(t_1^{*-}),$$

 $\alpha_k^*,\,v_k^*,\,\sigma_k$ и η_k — элементы присоединенной системы в точке $t_k^*,\,k=0,1.$

Доказательство. Для задачи с нефиксированным временем ПМ, доказанный в теореме 9.2, может быть пополнен неравенствами (6.16). Действительно, в случае простейшей задачи эти неравенства уже доказаны (см. замечание к предложению 6.1). Для общей задачи условия (6.16) получаются простыми предельными переходами. При этом в доказательстве теорем 9.1, 9.2 множество $\mathcal{I}_D^*(T)$ следует заменить на ρ_w -замыкание множества $\mathcal{I}_D^*(T_c)$, состоящего из таких элементов $\mathbf{q}_D \in \mathcal{I}_D(T_c)$, $T_c = [-c,c]$, что существует отрезок $S = S(\mathbf{q}_D) \subseteq T_c$: $\sup p(|\Pr_2(\mathbf{q}_D)|) \subseteq S$ и сужение \mathbf{q}^* на S равно проекции \mathbf{q}_D : $\Pr_2(\mathbf{q}_D) = \mathbf{q}^*|_S$. Это нужно, чтобы для ε -задачи в теоремах 9.1, 9.2 можно было доказать неравенства (6.16). Дело в том, что вариация, применяемая для доказательства (6.16) в предложении 6.1, становится допустимой в ε -задаче, если ее рассматривать на множестве $\operatorname{cl} \mathcal{I}_D^*(T_c)$. Легко видеть, что такая замена множества $\mathcal{I}_D^*(T)$ на $\operatorname{cl} \mathcal{I}_D^*(T_c)$ не отразится на ходе остальных рассуждений, доказывающих теоремы 9.1, 9.2.

Теперь с помощью неравенств (6.16), а также условий $Q(t_k^*) \in K^\circ$, k = 0, 1, теорема доказывается точно так же, как теорема 8.1 (дословным повторением рассуждений, приведенных в § 8).

В завершение этого параграфа приведем пример, показывающий, что если условия управляемости (определение 1.4) нарушаются, то ПМ, доказанный в теореме 9.2, может вырождаться (см. также [1, пример 4.1, с. 111]).

Пример 9.1. Рассмотрим задачу

$$dx = 2td\mu, \quad t \in [0, 1]; \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1;$$

 $x \ge t^2, \quad \int_{[0, 1]} 1 \, d\mu \to \min.$

Покажем, что в этой задаче минимум достигается на мере Лебега $\mu^* = \mathcal{L}$, и, соответственно, оптимальной траекторией является парабола $x^*(t) = t^2$. Действительно, для этого достаточно доказать неравенство $F(t;\mu) \geqslant t \ \forall t \in [0,1]$ для любой допустимой меры μ . Имеем

$$x(t) \geqslant t^2 \Rightarrow \int_{[0,t]} 2t \, d\mu \geqslant t^2.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$2F(t;\mu)t \geqslant t^2 + 2\int_{[0,t]} F(s;\mu) \, ds \implies F(t;\mu) \geqslant \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \int_{[0,t]} F(s;\mu) \, ds. \tag{9.25}$$

Отсюда $F(t;\mu)\geqslant t/2$. Подставляя полученное неравенство в правую часть (9.25), приходим к более точной оценке $F(t;\mu)\geqslant 3t/4$. Повторяя процедуру, на n-ом шаге имеем $F(t;\mu)\geqslant (2^n-1)t/2^n$. Устремляя $n\to\infty$, окончательно приходим к оценке $F(t;\mu)\geqslant t$. Таким образом, $\mu^*=\mathcal{L}$.

Но ПМ для этой задачи вырождается. Действительно, условие (9.11) дает $2t\psi(t)-\lambda_0=0$ для п.в. $t\in[0,1]$. Отсюда при $t\to 0$, учитывая, что функция $\psi(t)$ ограничена, имеем $\lambda_0=0$. Следовательно, $\psi(t)=0$ $\forall t\in(0,1)$, т.е. условие (8.4) нарушается.

10. Заключение

Теория импульсного управления развивается с начала 60-х годов прошлого столетия и на сегодняшний день представляет собой достаточно широкую область знания. В ее становление свой вклад внесли работы (в нашей стране) А. В. Арутюнова, М. И. Гусева, В. А. Дыхты, С. Т. Завалищина, Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, Б. М. Миллера, А. Н. Сесекина (см. [13,17,18,25–27,29,30,37,38]) и работы таких зарубежных ученых, как А. Брессан, Ф. Л. Перейра, Ф. Рампацо, Г. Н. Сильва, Р. Б. Винтер, В. Ячимович (см. [37,39,41,45,46,49]), и этот список является далеко не полным и может быть продолжен.

Касательно тематики настоящей статьи, а это необходимые условия первого порядка и принцип максимума, наиболее интересно отметить работы [17,29,30,41,46,49]. Проведем краткое сравнение полученных здесь результатов с результатами авторов этих работ.

Вначале отметим, что ΠM для задачи импульсного управления с векторной мерой и без условия Фробениуса уже доказывался ранее [17,29,41]. Общей чертой всех упомянутых работ является то, что их авторы обходят стороной вопрос о пространстве импульсных управлений и его топологии, не давая четкого определения импульсного управления как элемента некоторого метрического пространства. Подход к определению решения уравнения (1.3) у них аналогичен и формулируется примерно так: функция x(t) называется обобщенным решением, если существует последовательность абсолютно непрерывных допустимых траекторий, сходящаяся к x(t) (см. [17,29]). Отличительной особенностью настоящей работы является следующее: 1) введено понятие импульсного управления как элемента пополненного пространства, и, соответственно, понятие близости импульсных управлений (т.е. пространство импульсных управлений наделено метрикой, см. § 3); 2) рассмотрен новый объект — дифференциальное уравнение с векторной мерой, в котором относительно только что построенной метрики оказываются уже возможными корректные предельные переходы. После этого вводится определение обобщенного решения как решения дифференциального уравнения с векторной мерой, отвечающего некоторому импульсному управлению. Оба указанных подхода к определению решения по смыслу равнозначны. Тем не менее возможность оперировать с метрикой пространства импульсных управлений дает некоторые преимущества, которые ниже проиллюстрируем сравнением наших теорем 9.2, 9.3 и [29, теоремы 1 (ПМ)].

В [29] автор использует так называемый метод разрывной замены времени, который позволяет исходную импульсную задачу свести к обычной задаче оптимального управления, в которой решение уже существует. Применяя ПМ к обычной задаче управления и расшифровывая его, автор получает ПМ для импульсных управлений. Преимуществом такого метода является его простота и наглядность. Однако этот метод имеет и ряд недостатков. В частности, требуется предположение гладкости и выпуклость векторграммы f(x, U, t). В теореме 9.2 мы избавлены от этих требований. Кроме того, теорема 1 из [29] несколько отличается от теорем 9.2, 9.3 самим видом условий ПМ. Прежде всего заметим различие в импульсных условиях максимума (см. (9.11)) в случае, когда один из концов траектории лежит на границе фазового ограничения: если, например, в теореме 9.2 имеем $\operatorname{gc}\sup\langle Q(t),m\rangle\leqslant 0\ \forall m\in K$, т.е. поточечное неравенство, и, значит, $\langle Q(t_k^*),m\rangle\leqslant 0\ \forall m\in K$, k=0,1 (неравенство верно и в концевых точках), то в [29] такое же условие выполнено всего лишь почти всюду и, значит, в концевых точках может не выполняться (так как функция Q(t)может претерпевать в них разрыв из-за меры η). Причина такого различия в том, что автор [29] пользуется классическими условиями оптимальности в форме Дубовицкого-Милютина [16] и в своей теореме не предполагает согласованности фазовых ограничений с концевыми. Предположение согласованности является, с одной стороны, чисто техническим (так как всегда может быть

достигнуто с помощью введения дополнительных концевых ограничений типа неравенств, индуцированных в концевых точках фазовыми ограничениями [1]), с другой стороны, оно существенно для невырождающегося ПМ, доказанного в теореме 9.3. Действительно, рассмотрим следующий пример.

Пример 10.1. Рассмотрим задачу

$$y(0) + \int_{[0,t_1]} 2 d\mu \to \min,$$

$$dx = d\mu, \quad dy = dt,$$

$$x(0) \le 0, \quad x(t_1) \ge 0, \quad y(t_1) = 1,$$

$$x(t) \ge t - 1 \quad \forall t \in [0,t_1].$$

Здесь, очевидно, решением (локальным) будет процесс $t_1^*=1, \ \mu^*=0, \ x(t)\equiv 0.$ Покажем, что для него теорема 9.3 не выполняется. На самом деле, имеем

$$\psi_x(t) = \psi_x(0) - \int_{[0,t]} d\eta, \quad t > 0, \quad \psi_y(t) \equiv \lambda_0.$$

Так как $H(t)=\psi_y(t)$, то из (6.16) следует $\lambda_0=0$. Тогда из (9.11) вытекает, что $\psi_x(t)-2\lambda_0\leqslant 0\Rightarrow \psi_x(0)\leqslant 0$. Но из условий трансверсальности на левом конце следует $\psi_x(0)\geqslant 0\Rightarrow \psi_x(t)=0\ \forall t\in [0,1)$. Теперь из условий трансверсальности по времени (см. замечание к теореме 9.3) вытекает, что $\eta(\{1\})=0$. Значит, $\psi_x\equiv 0$, и все множители Лагранжа равны нулю — противоречие.

В рассмотренном примере условие нетривильности (8.4) нарушилось, поскольку фазовое ограничение не согласовано с концевым при $x=0,\,t=1.$

В отличие от нашей теоремы 9.3, ПМ, доказанный в [29], вырождается. Действительно, автор в своей теореме не предполагает условий управляемости и согласованности, каждое из которых, как было показано выше (примеры 9.1 и 10.1), является существенным, и без них ПМ вырождается. И, значит, в некоторых случаях (например, всегда для автономной задачи с фиксированными концами, лежащими на границе фазового ограничения) теорема из [29] превращается в тривиальное утверждение, и, вообще говоря, становится неприменимой. Это же замечание касается и остальных работ других авторов по импульсным управлениям, исследующих задачи с фазовыми ограничениями.

Проблема невырожденности ПМ — это большая и сложная проблема, стоящая как в обычных, так и в импульсных задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. По-видимому, впервые проблема невырожденности ПМ для задач с фазовыми ограничениями как самостоятельная проблема была поставлена и частично изучена в [4], где было замечено, что ПМ в форме Дубовицкого—Милютина [16] для некоторых классов задач не информативен и удовлетворяется тривиальным образом. В дальнейшем проблемой невырожденности ПМ для обычных (неимпульсных) задач занимались А. В. Арутюнов [1, 3–7], С. М. Асеев [8, 36], В. И. Благодатских [8], А. Я. и В. А. Дубовицкие [15], А. С. Матвеев [28], Н. Т. Тынянский [4], М. М. А. Ферейра, Р. Б. Винтер [50]. Отметим также, что первый вариант ПМ для задач с фазовыми ограничениями, полученный Р. В. Гамкрелидзе в 1959 г. (см. [32]), заведомо не вырождается и всегда информативен. Однако его сложно сравнивать с последующими ПМ (например, в форме Дубовицкого—Милютина), так как они доказаны при несхожих предположениях и имеют разные условия. С работами, в которых поднимается проблема невырожденности для импульсных задач с фазовыми ограничениями, автор не знаком. Подход к изучению невырожденности в настоящей работе во многом основан на методах, предложенных в [1].

Завершая сравнение с результатами из [29], отметим, что в [29] автор разобрал более сложный и общий случай, когда в расширенной задаче матрица-функция g при управляющей импульсной функции зависит не только от x и t, но и от обычного измеримого управления u, что несомненно следует отнести к достоинствам работы [29].

¹Здесь будем говорить, что ПМ вырождается, если нарушено условие (8.4).

В заключение я выражаю искреннюю благодарность моему учителю профессору А. В. Арутюнову за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-00193, 05-01-01109) и Программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ, НШ-1889.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Арутнонов А. В. Условия экстремума. М.: Факториал, 1997.
- 2. *Арутнюнов А. В.* Расширения и возмущения задач оптимального управления// Тр. Мат. ин-та РАН. 1998.-220.- С. 27-34.
- 3. *Арутнов А. В.* Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности// Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ/ ВИНИТИ. 1989. 27. С. 147–235.
- 4. Арутюнов А. В., Тынянский Н. Т. О принципе максимума в задаче с фазовыми ограничениями// Изв. АН СССР. Сер. техн. киберн. -1984.-4.- С. 60-68.
- 5. *Арутнюнов А. В.* К необходимым условиям оптимальности в задаче с фазовыми ограничениями// Докл. AH СССР. 1985. 280, № 5. С. 1033–1037.
- 6. Арутнов А. В. Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями// Тр. ин-та прикл. мат. Тбил. ун-та. 1988. 27. С. 46–59.
- 7. *Арутнонов А. В.* Принцип максимума и необходимые условия второго порядка в задаче оптимального управления при наличии запаздываний// Сообщ. АН Груз.ССР. 1986. 122, № 2. С. 265–268.
- 8. *Арутнонов А. В., Асеев С. М., Благодатских В. И.* Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями// Мат. сб. 1993. 184, № 6. С. 3–32.
- 9. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление// Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985. *169*. С. 194—252.
- 10. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. M.: Наука, 1977.
- 11. Васильев Φ . П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
- 12. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1977.
- 13. Гусев М. И. Об оптимальном управлении обобщенными процессами при невыпуклых фазовых ограничениях// В кн.: Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975.
- 14. Демьянов В. Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: ЛГУ, 1974.
- 15. Дубовицкий А. Я., Дубовицкий В. А. Необходимые условия сильного минимума в задачах оптимального управления с вырождением концевых и фазовых ограничений// Успехи мат. наук. 1985. 40, № 2. С. 175–176.
- 16. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений// Докл. АН СССР. 1963. 149, № 4. С. 759–762; Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1965. 5, № 3. С. 395–453.
- 17. Дыхта В. А., Самсонюк О. Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000.
- 18. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991.
- 19. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Несколько замечаний о вариационных принципах// Мат. заметки. 1997. 61, № 2. С. 305–311.
- 20. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- 21. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Математический анализ. М.: Наука, 1984.
- 22. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.
- 23. Kларк Φ . Оптимизация и негладкий анализ. M.: Наука, 1988.
- 24. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
- 25. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- 26. Куржанский А. Б. Оптимальные системы с импульсными управлениями// В кн.: Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. С. 131–156.
- 27. *Куржанский А. Б., Осипов Ю. С.* К управлению линейной системой обобщенными воздействиями// Дифференц. уравнения. 1969. 5, № 8. С. 1360–1370.
- 28. *Матвеев А. С.* О необходимых условиях экстремума в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями// Дифференц. уравнения. 1987. 23, № 4. С. 629–639.

- 29. *Миллер Б. М.* Условия оптимальности в задачах обобщенного управления// Автомат. и телемех. 1992. -5. -C. 50-58.
- 30. *Миллер Б. М.* Обобщенные решения в нелинейных задачах оптимизации с импульсными управлениями. І. Проблема существования решения. ІІ. Представление решений с помощью дифференциальных уравнений с мерой// Автомат. и телемех. 1995. 4. С. 62–76; 1995. 5. С. 56–70.
- 31. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
- 32. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
- 33. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- 34. Φ илиппов A. Φ . О некоторых вопросах оптимального регулирования// Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. 1959. 2. С. 25–38.
- 35. Филиппов A. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью// Мат. сб. 1966. 51, № 2. С. 100–128.
- 36. Arutyunov A. V., Aseev S. M. Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints// SIAM J. Contr. and Optimiz. 1997. 35, № 3. C. 930–952.
- 37. Arutyunov A. V., Jacimovic V., Pereira F. L. Second order necessary conditions of optimality for impulsive control problems// Int. J. Dynam. Syst. -2003. -9, N 1. C. 131-153.
- 38. Arutyunov A. V., Dykhta V. A., Pereira F. L. Necessary conditions for impulsive nonlinear optimal control problems without a priori normality assumptions// J. Optimiz. Theory and Appl (в печати).
- 39. *Bressan A., Rampazzo F.* Impulsive control systems with commutative vector fields// J. Optimiz. Theory and Appl. 1991. 71. C. 67–83.
- 40. Pereira F. L. A maximum principle for impulsive control problems with state constraints// Comput. and Math. Appl. -2000. -19, № 2. C. 137–155.
- 41. Pereira F. L. and Silva G. N. Necessary conditions of optimality for vector-valued impulsive control problems// Syst. and Contr. Lett. $-2000.-40-C.\ 205-215.$
- 42. *Pereira F. L., Silva G. N.* Stability for impulsive control systems// Dynam. Syst. -2002. -17. -C. 421–434.
- 43. *Pereira F. L., Coimbra de Matos A., Silva G. N.* Hamilton—Jacobi conditions for an impulsive control problem. In: Nonlinear Control Systems, Fevereiro, 2002. C. 1297–1302.
- 44. Pereira F. L., Silva G. N. Necessary conditions of optimality for vector-valued impulsive control problems// Syst. and Contr. Lett. -2000.-40.-C. 205-215.
- 45. Silva G. N., Vinter R. B. Measure differential inclusions// J. Math. Anal. and Appl. -1996.-202.-C. 727-746.
- 46. *Silva G.N., Vinter R. B.* Necessary conditions for optimal impulsive control provlems// SIAM J. Contr. and Optimiz. 1997. 35. C. 1829–1846.
- 47. Silva G. N., Litvinchev I. S., Rojas-Medar M., Brandao A. J. V. State constraints in optimal impulsive controls// Comput. and Math. Appl. -2000.-19, $\mathbb{N} 2.-C$. 179-206.
- 48. Vinter R. B., Pereira F. L. Necessary conditions for optimal control problems with discontinuous trajectories// J. Econ. Dyn. and Contr. -1986. -10. -10. -10. -10.
- 49. Vinter R. B., Pereira F. L. A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories// SIAM J. Contr. and Optimiz. -1988. -26. -C. 205-229.
- 50. *Vinter R. B., Ferreira M. M. A.* When is the maximum principle for state constrained problems nondegenerate?// J. Math. Anal. and Appl. 1994. 187. C. 438–467.

Д. Ю. Карамзин

Вычислительный центр РАН

E-mail: asd@mech.math.msu.su

ПОЛНОТА ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ В НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ВЕСОМ

© 2005 г. **А. И. КОЗКО**

Аннотация. Исследуется вопрос о полноте ортогональных систем в несимметричных пространствах со знакочувствительным весом. Получены теоремы общего вида. В частности, найдены необходимые и достаточные условия на α , β , q_1 , q_2 , при которых известные ортогональные системы являются всюду плотными в несимметричных пространствах $L_{(\alpha,\beta);q}([0,1])$.

Теорема. Пусть α , β , q_1 , $q_2 \in [1,+\infty]$. Ортогональные системы: тригонометрическая, алгебра-ическая, система Хаара, система всплесков Мейера, всплески Шеннона—Котельникова, всплески Стремберга и Лемарье—Баттла, система Уолша и система Франклина плотны в несимметричных пространствах $L_{(\alpha,\beta);\mathbf{q}}([0,1])$ тогда и только тогда, когда либо $\max\{\alpha,\beta,q_1,q_2\}<+\infty$, либо $\max\{\alpha,\beta\}<+\infty$, $q_1=q_2=+\infty$.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение	135
2.	Построение множеств A , B меры $2/3$, $1/3$ соответственно, таких, что $A \cap B = \varnothing$,	
	и пересечение любого отрезка $[a,b]$ как с A , так и с B имеет положительную меру	140
3.	Основные результаты	141
	Список литературы	145

1. Введение

По-видимому, первым, кто начал рассматривать пространства с несимметричными нормами, был М. Г. Крейн [27, с. 197] (1938 г.). Он указал на целесообразность рассмотрения пространств с несимметричными нормами: такие пространства, например, естественно возникли в задаче о чебышевских ужах.

Определение 1.1. Пусть B — пространство-конус (т.е. если $x,y \in B$, то $x+y \in B$ и $\alpha x \in B$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}_+$). Функционал $\|\cdot\|: B \to \mathbb{R}_+$ назовем несимметричной нормой, если справедливо¹

- 1) $||x| \geqslant 0$, для любого $x \in B$, причем $||x| = 0 \iff x = 0$ для $x \in B$;
- 2) $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|, \ x \in B, \ \alpha \in \mathbb{R}_+ := [0; +\infty);$
- 3) $||x + y| \le ||x| + ||y|, x, y \in B$.

Различные вопросы геометрической теории приближений в пространствах с несимметричными нормами рассматривались в работах А. Бронстеда [43,45], Е. Асплунда, и А. Р. Алимова [1–3,40,41].

Интерес к задачам теории приближения в пространствах с несимметричными нормами был обусловлен развитием теории односторонних приближений. Ее основы были заложены в работах Г. Фройда [46] (1955 г.) и Т. Ганелиуса [47] (1956 г.). Затем в работах Р. Бояника, Р. Де Вора [44], В. Ф. Бабенко, А. А. Лигуна [6], А. С. Андреева, В. А. Попова, Б. Сендова [4,42], А. Ю. Шадрина [38] и других (см. также [26,36,51], [50, с. 76]) были получены прямые и обратные теоремы для

¹Чуть ниже мы отметим, что данное определение совпадает с определением неотрицательных сублинейных функционалов p(x), удовлетворяющих условию p(x) = 0 тогда и только тогда, когда x есть ноль пространства B.

136 А. И. КОЗКО

односторонних приближений с помощью усредненного модуля гладкости, введенного Е. П. Долженко и Е. А. Севастьяновым [14] в 1976 г.

Выяснилось, что «мостиком» между наилучшими приближениями и наилучшими односторонними приближениями оказались приближения в пространствах с несимметричными нормами. Этот факт заметил в 1982 г. В. Ф. Бабенко [7].

Пусть f — действительнозначная функция; положим $f^+(x) = \max\{f(x),0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x),0\}$. Тогда $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. В. Ф. Бабенко в своей работе исследовал следующие несимметричные нормы:

$$||f||_{(\alpha,\beta):p} = ||\alpha f^{+} + \beta f^{-}||_{p}, \tag{1.1}$$

где $\alpha,\beta>0,\ 1\leqslant p\leqslant\infty.$ Заметим, что если $\alpha=\beta,$ то в терминах приближения возникает обычное L_p -приближение, а в случае $\alpha\to\infty$ либо $\beta\to\infty$ возникает L_p -одностороннее приближение (см. [7]).

Данное замечание породило новый всплеск интереса в 80–90-х гг. к экстремальным задачам в несимметричных нормах в работах В. Ф. Бабенко [8–10], В. Ф. Бабенко и В. А. Кофанова [12], О. В. Полякова [30,31], А. А. Шумейко [39] и других.

В 1983 г. В. Ф. Бабенко в [8] ввел, по-видимому, впервые следующие классы несимметричных норм:

$$\lambda(f) = \lambda_{p,q;\psi}(f) = \psi(\|f^+\|_p, \|f^-\|_q), \tag{1.2}$$

где $1\leqslant p,\ q\leqslant \infty,\ \psi(u,v)$ — произвольная несимметричная и монотонная (т.е. $|u_1|\leqslant |u_2|,\ |v_1|\leqslant |v_2|\Longrightarrow \psi(u_1,v_1)\leqslant \psi(u_2,v_2))$ норма на плоскости, и доказал теорему двойственности для элементов пространства $W^r(\lambda)$ (т.е. 2π -периодических функций f таких, что $f^{(r-1)}\in AC(\mathbb{T}),\ \lambda(f^{(r)})=\lambda_{p,q;\psi}(f^{(r)})\leqslant 1)$ в несимметричной норме $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta);1}$, а также подсчитал поперечник по Колмогорову $d_{2n-1}(W^r(\lambda),L_1)$ и привел некоторые результаты для норм (1.2), которые обобщают неравенства Колмогорова [24], Хермандера [48] (см. также [11,13]. Отметим книгу Н. П. Корнейчука [25] (§§ 1.4.5, 3.3.3, 5.4.4, 7.2.6, 8.1.6), в которой собраны результаты по различным задачам с (α,β) -несимметричной нормой (1.1), и также отметим результаты по знакочувствительной аппроксимации (т.е. в пространствах с несимметричной нормой и с весом) в работах Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянова [15,16] и А.-Р. К. Рамазанова [32–34].

Вопросы теории приближения в несимметричных пространствах с весами, «знакочувствительная аппроксимация» изучались в работах Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянова [15–18] и А.-Р. К. Рамазанова [32–34]. Пусть $\boldsymbol{\varrho}=(\varrho_+,\varrho_-),\;\varrho_+(x)$ и $\varrho_-(x)$ — неотрицательные функции, которые могут принимать значения $+\infty$. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов и А.-Р. К. Рамазанов работали со следующей несимметричной нормой:

$$\psi_{\varrho,+\infty}(f) = \|f\|_{\varrho,C([a,b])} := \max_{x \in [a,b]} \{ \varrho_+(x) f^+(x) + \varrho_-(x) f^-(x) \}. \tag{1.3}$$

Ими исследовались задачи существования и единственности элемента наилучшего приближения алгебраическими полиномами на отрезке и чебышевскими подпространствами (L — чебышевское подпространство на [a,b], если каждый элемент (функция) из L, не равный тождественно нулю, имеет на [a,b] не более n-1 нулей, где $n=\dim L$). Так доказана следующая теорема.

Теорема (Долженко, Севастьянов, [17]). Пусть L — чебышевское подпространство на [0,1] и $\boldsymbol{\varrho}=(\varrho_+,\varrho_-)$ — ограниченный вес на [0,1]. Тогда для наличия у каждой функции $f\in C([0,1])$ хотя бы одного элемента наилучшего приближения $l^*\in L$ необходимо и достаточно, чтобы

$$W(\boldsymbol{\varrho}, L) := \sup_{l \in L, l \neq 0} \frac{\psi_{1, +\infty}(l)}{\psi_{\boldsymbol{\varrho}, +\infty}(l)} = \sup_{l \in L, l \neq 0} \frac{\|l\|_{C([0, 1])}}{\|l\|_{\boldsymbol{\varrho}, C([0, 1])}} < +\infty.$$
(1.4)

Величина (1.4), введенная Е. П. Долженко и Е. А. Севастьяновым, была названа ими свободой системы (ϱ , L). При помощи несимметричной нормы (1.3) в терминах свободы системы (1.4) Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов (см. [18, с. 55]) установили необходимые и достаточные условия существования ужей и избыточных ужей 2 для чебышевской системы $L = \overline{\{\phi_k(x)\}_{k=1}^n}$ на отрезке

 $^{^1}$ В частности, множество всех тригонометрических полиномов \mathcal{T}_n степени не выше чем n является чебышевским.

²Ужом для пары функций

[a,b]. Единственность наилучшего элемента в знакочувствительной аппроксимации при помощи (1.3) дана в [35] в терминах знакочувствительного веса.

Вопросы об элементе наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой независимо от Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова изучали также В. М. Тихомиров и Г. Г. Магарил-Ильяев [29, 37], где в общем случае с помощью выпуклого анализа дан критерий для элемента наилучшего приближения. Результаты [29] получены в пространствах B для неотрицательных сублинейных функционалов p(x), т.е. функционалов, обладающих следующими свойствами:

- 1) $p(x) \geqslant 0$ для любых $x \in B$;
- 2) $p(\alpha x) = \alpha p(x), x \in B, \alpha \in \mathbb{R}_+;$
- 3) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ для любых $x, y \in B$.

В наших терминах это есть несимметричная норма.

Авторы в [29] на основе выпуклого анализа построили необычайно изящную теорию. В качестве следствий данной теории получены многие известные результаты такие, как неравенства Колмогорова, Бернштейна, Маркова, результаты о нахождении полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, об оптимальном восстановлении линейных функционалов и многие другие.

Также изучалась следующая несимметричная норма (частный случай (1.2), где $\psi(u,v)=u+v$):

$$||f||_{p,q} = ||f^+||_p + ||f^-||_q, \tag{1.5}$$

где $0 < p, q \leqslant \infty$. В частности, при p = q получается норма, эквивалентная $\|\cdot\|_p$. Несимметричная норма (1.5) исследовалась в [20–22,49], в которых были найдены точные порядки по n неравенств типа Джексона—Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа в многомерном случае \mathbb{T}^d (\mathbb{R}^d), а также точные порядки для дробных производных (случай \mathbb{T}^d) для тригонометрических полиномов, т.е. найдены нормы операторов $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$, действующих из одной несимметричной нормы в другую.

Определение 1.2. Обозначим через Ψ класс несимметричных монотонных норм ψ на плоскости, удовлетворяющих условию $\psi(u,v)=\psi(v,u).$

Таким образом, $\psi \in \Psi$ означает, что

- (i) $\psi(\boldsymbol{w}) \geqslant 0$ для любого $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$, причем $\psi(\boldsymbol{w}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{w} = (0;0)$ для $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$;
- (ii) $\psi(\alpha \boldsymbol{w}) = \alpha \psi(\boldsymbol{w}), \ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2, \ \alpha \in \mathbb{R}_+;$
- (iii) $\psi(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \psi(u_1 + u_2, v_1 + v_2) \leqslant \psi(\mathbf{w}_1) + \psi(\mathbf{w}_2) = \psi(u_1, v_1) + \psi(u_2, v_2), \ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^2;$
- (iv) $\psi(u, v) = \psi(v, u)$;
- (v) $|u_1| \leqslant |u_2|, |v_1| \leqslant |v_2| \Longrightarrow \psi(u_1, v_1) \leqslant \psi(u_2, v_2).$

Определение 1.3. Введем еще один класс $\tilde{\Psi} \subset \Psi$ несимметричных норм на плоскости, удовлетворяющих помимо условий (i)–(v) условию

(vi)
$$\lim_{u,v>0;\,(u,v)\to(+0,+0)} \psi(u,v) = \psi(0,0) = 0.$$

Стоит отметить, что условие (vi) означает, что функция $\psi \in \Psi$ непрерывна справа, т.е. справедливо

$$\lim_{u,v>0; (u_0+u,v_0+v)\to(+u_0,+v_0)} \psi(u_0+u,v_0+v) = \psi(u_0,v_0). \tag{1.6}$$

Действительно, пусть функция ψ принадлежит классу $\tilde{\Psi}$. Тогда из неравенства

$$\psi(u_0, v_0) \le \psi(u_0 + u, v_0 + v) \le \psi(u_0, v_0) + \psi(u, v)$$

и (vi) вытекает (1.6).

 $g,\,G,\,-\infty\leqslant g(x)< G(x)\leqslant +\infty,$ называется полином z(x) по чебышевской системе $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^n,$ если $g(x)\leqslant z(x)\leqslant G(x)$ и имеется набор из m=n точек $x_1< x_2< \cdots < x_m$ таких, что с ростом k от 1 до m точки $M_k=(x_k,z(x_k))$ попеременно попадают то на замыкание графика $\Gamma(g)$ функции g, то на замыкание графика $\Gamma(G)$ функции G. Набор $\{x_k\}_{k=1}^m$ называется альтернансом ужа z. Непрерывность и конечность функций g и G не предполагаются. Если для z(x) существует альтернанс с m>n точками, то z(x) называется избыточным ужом.

138 А. И. КОЗКО

В работе будет рассматриваться следующая несимметричная норма, порождаемая функцией $\psi \in \Psi$, обладающей свойствами (i)-(v), парой $\mathbf{q}=(q_1,q_2)$ элементов расширенной числовой прямой $(1\leqslant q_1,\,q_2\leqslant +\infty)$ и знакочувствительным весом $\mathbf{\varrho}=(\varrho_+(x),\varrho_-(x))$ — парой произвольных неотрицательных измеримых функций ϱ_+ и ϱ_- , которые могут, вообще говоря, принимать и бесконечные значения. Эта «норма» задается формулой

$$\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}(f) = \psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}(f^+, f^-) = \psi(\|\varrho_+(\cdot)f^+(\cdot)\|_{L_{q_1}(\mathbb{T})}, \|\varrho_-(\cdot)f^-(\cdot)\|_{L_{q_2}(\mathbb{T})}). \tag{1.7}$$

И, как нетрудно убедиться, она содержит в себе упомянутые выше «нормы» (1.2) и (1.3). Класс измеримых по Лебегу на [0,1] функций f, для которых $\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}(f)<+\infty$, обозначим через $L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}}([0,1])$. Таким образом, $L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}}([0,1])$ — пространство-конус (из включения $f\in L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}}([0,1])$, вообще говоря, не следует, что $-f\in L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}}([0,1])$). В дальнейшем будем считать, что $0\cdot (\pm\infty)=0,\ a\cdot (\pm\infty)=\pm\infty$ для любого a>0.

Пример 1.1. Положим $\varrho_{+}(x) \equiv \varrho_{-}(x) \equiv 1$. Тогда получаем несимметричную норму

$$\psi_{1,q} = \psi(\|f_+\|_{q_1}, \|f_-\|_{q_2})$$

(см. (1.2)).

Пример 1.2. Положим $\psi(u,v) = u + v$. Тогда

$$\psi_{\varrho,\infty}(f) = \|\varrho_{+}(\cdot)f^{+}(\cdot)\|_{\infty} + \|\varrho_{-}(\cdot)f^{-}(\cdot)\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} \{\varrho_{+}(x)f^{+}(x) + \varrho_{-}(x)f^{-}(x)\},$$

и приходим к метрике (1.3).

Пример 1.3. Положим $q_1=q_2:=q$, $\varrho_+(x)=\varrho_-(x):=\varrho(x)$, $\psi(u,v)=(u^q+v^q)^{1/q}$. Тогда $\psi_{\varrho,q}(f)=\|\varrho(\cdot)f(\cdot)\|_q$, и получаем обычные весовые классы $L_{\varrho,q}([0,1])$.

Пример 1.4. Положим $q_1=q_2:=q$; для некоторого множества $A\subseteq [0,1]$ определим знакочувствительные веса

$$\varrho_{+}(x) = \begin{cases} +\infty, & x \in A, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus A, \end{cases}$$

 $\varrho_-(x) \equiv 1$, $\psi(u,v) = (u^q + v^q)^{1/q}$. Тогда в терминах наилучшего приближения $E_n(f,L_{\psi_{\varrho;q}})$ мы должны приближать функцию f односторонним образом на множестве A в обычной $L_q([0,1])$ норме, а на всем оставшемся множестве $[0,1]\setminus A$ просто в $L_q([0,1])$ норме.

Введенный с помощью несимметричных норм (1.7) класс пространств $L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}}([0,1])$ весьма обширен, причем значительная и, вероятно, наиболее важная его часть (см. примеры) порождается симметрическими функциями ψ , т.е. удовлетворяющими условию $\psi(u,v)=\psi(v,u)$. Основной результат будет получен как раз для таких «норм».

В работе исследуются вопросы наилучшего приближения на классах функций в пространствах с несимметричной нормой. Пусть $n \in \mathbb{R}$; обозначим через \mathcal{T}_n множество всех тригонометрических полиномов степени не выше, чем n. Пусть $1 \leqslant p_1, p_2, q_1, q_2 \leqslant +\infty, \ r \in \mathbb{R}$. Положим $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2),$ $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$. Будем писать $f \in BW^r_{\psi_{\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{p}}}(\mathbb{T})$, если у функции f существует r-1 производная, и она является абсолютно непрерывной на торе \mathbb{T} , причем $f^{(r)} \in L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{p}}}$ и $\psi_{\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{p}}(f^{(r)}) \leqslant 1$. Положим

$$E_n\big(BW^r_{\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{p}}}(\mathbb{T}),L_{\psi_{\boldsymbol{\bar{\varrho}},\boldsymbol{q}}}(\mathbb{T})\big) = \sup_{f \in BW^r_{\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{p}}}(\mathbb{T})} E_n\big(f,L_{\psi_{\boldsymbol{\bar{\varrho}},\boldsymbol{q}}}(\mathbb{T})\big) = \sup_{f \in BW^r_{\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{p}}}(\mathbb{T})} \inf_{t \in \mathcal{T}_n} \psi_{\boldsymbol{\bar{\varrho}},\boldsymbol{q}}(f(\cdot) - t(\cdot)).$$

Автором в [23] получен следующий результат о скорости наилучшего приближения тригонометрическими полиномами для дифференцируемых функций.

Теорема (A). Пусть $1\leqslant p_1,p_2,q_1,q_2\leqslant \infty$, $r\in\mathbb{N};\ \psi\in\Psi$ — несимметричная и монотонная норма на плоскости, удовлетворяющая условию $\psi(u,v)=\psi(v,u);\ \boldsymbol\varrho=(\varrho_+,\varrho_-),\ \tilde{\boldsymbol\varrho}=(\tilde\varrho_+,\tilde\varrho_-)$ — знакочувствительные веса, удовлетворяющие условиям: $\varrho_\pm,\ \tilde\varrho_\pm$ — измеримые функции такие, ито $\varrho_+(x)\geqslant 0,\ \varrho_-(x)\geqslant 0,\ \tilde\varrho_+(x)\geqslant 1,\ \tilde\varrho_-(x)\geqslant 1$ для всех $x\in\mathbb{T}$. Тогда справедливо неравенство

$$E_n(BW_{\psi_{\varrho,p}}^r(\mathbb{T}), L_{\psi_{\tilde{\varrho},q}}(\mathbb{T})) \leqslant 8K_r(n+1)^{-r}C_{\varrho,\tilde{\varrho},p,q}(n),$$

где

$$\begin{split} C_{\boldsymbol{\varrho},\tilde{\boldsymbol{\varrho}},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}(n) &= \min \big\{ C_{\boldsymbol{\varrho},\tilde{\boldsymbol{\varrho}}_+,\boldsymbol{p},q_1}(n), C_{\boldsymbol{\varrho},\tilde{\boldsymbol{\varrho}}_-,\boldsymbol{p},q_2}(n) \big\}, \\ C_{\boldsymbol{\varrho},\tilde{\boldsymbol{\varrho}}_\pm,\boldsymbol{p},q_1}(n) &= \max \big\{ JN_{\boldsymbol{\varrho}_+,\tilde{\boldsymbol{\varrho}}_\pm,p_1,q_1}(n), JN_{\boldsymbol{\varrho}_-,\tilde{\boldsymbol{\varrho}}_\pm,p_2,q_1}(n) \big\}, \end{split}$$

 $JN_{\varrho_{\pm},\tilde{\varrho}_{\pm},p,q}(n):=\sup_{t\in\mathcal{T}_n}rac{\| ilde{arrho}_{\pm}t\|_q}{\|arrho_{\pm}t\|_p}$ — величины, возникающие из неравеств Джексона—Никольского, и K_r — константа Фавара.

Для величин Джексона—Никольского в [5, с. 539] приведены оценки

$$JN_{1,1,p,q}(n) := \sup_{t \in \mathcal{T}_{p}, t \neq 0} \frac{\|t\|_q}{\|t\|_p} \leqslant 2n^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^+}, \quad p, q \in [1, +\infty],$$

Из данного неравенства и теоремы (А) вытекает, что в случае выполнения условий:

- а) $|\tilde{\varrho}_{+}(x)|\leqslant C,\ |\varrho_{\pm}(x)|\geqslant c_0>0$ для $x\in\mathbb{T}$ либо
 - б) $|\tilde{\varrho}_{-}(x)| \leqslant C$, $|\varrho_{\pm}(x)| \geqslant c_0 > 0$ для $x \in \mathbb{T}$

справедлива оценка $C_{m{\varrho},m{\check{\varrho}},m{p},m{q}}(n)\leqslant 2C\cdot c_0^{-1}\cdot n^{(\max\{1/p_1,1/p_2\}-\max\{1/q_1,1/q_2\})^+}$. Таким образом, если знакочувствительные веса удовлетворяют условию а) либо б), то из теоремы (A) получаем неравенство

$$E_n(BW_{\psi_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}}}^r(\mathbb{T}), L_{\psi_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}}}(\mathbb{T})) \leqslant 16K_r \cdot C \cdot c_0^{-1} \cdot (n+1)^{-r+(\max\{1/p_1,1/p_2\}-\max\{1/q_1,1/q_2\})^+}. \tag{1.8}$$

В [23] было показано, что неравенство в теореме (А) дает точные в смысле порядка оценки. Так, было показано, что выполняется следующее утверждение.

Теорема (В). Пусть $1\leqslant p_1,p_2,q_1,q_2\leqslant \infty$, $r\in\mathbb{N}$, $\omega=(\max\{1/p_1,1/p_2\}-\max\{1/q_1,1/q_2\})^+$, $\omega_1=(1/p-1/q)^+$. Тогда справедливы неравенства 1

$$C_{r,n}n^{-r+\omega} \leqslant E_{n-1}(BW_{p_{1},p_{2}}^{r}(\mathbb{T}),L_{q_{1},q_{2}}(\mathbb{T})) \leqslant 8K_{r}n^{-r+\omega},$$

$$C_{r}\min\{\alpha,\beta\}n^{-r+\omega_{1}} \leqslant E_{n-1}(BW_{p}^{r}(\mathbb{T}),L_{(\alpha,\beta),q}(\mathbb{T})) \leqslant 8K_{r}\min\{\alpha,\beta\}n^{-r+\omega_{1}},$$

$$C_{r}n^{-r+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)^{+}} \leqslant E_{n-1}(BW_{p}^{r}(\mathbb{T}),L_{q}(\mathbb{T})) \leqslant 8K_{r}n^{-r+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)^{+}},$$

$$C_{r}n^{-r+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)^{+}} \leqslant E_{n-1}^{\pm}(BW_{p}^{r}(\mathbb{T}),L_{q}(\mathbb{T})) \leqslant 8K_{r}n^{-r+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)^{+}},$$

еде E_{n-1}^{\pm} — наилучшее одностороннее приближение функции соответственно снизу и сверху, т.е. $E_{n-1}^+(f)_q:=\inf_{t\in\mathcal{T}_{n-1},\,t(x)\geqslant f(x)}\|f-t\|_q$ и $E_{n-1}^-(f)_q:=\inf_{t\in\mathcal{T}_{n-1},\,t(x)\leqslant f(x)}\|f-t\|_q$, K_r — константа Фавара, и для $C_{r,n}$ выполнено неравенство

$$C_{r,n} \geqslant \frac{1}{108r^2}, \quad r, n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что $8K_r \leqslant 4\pi = 12.56...$

Из теоремы (В) и оценки (1.8), в частности, вытекает, что в случае ограниченности одного из знакочувствительных весов $\tilde{\varrho}_+(x)$ или $\tilde{\varrho}_-(x)$, т.е. при выполнении условия а) или б), самой «наихудшей» в смысле приближения несимметричной нормой является норма $\|f\|_{q_1,q_2} = \|f^+\|_{q_1} + \|f^-\|_{q_2}$.

^{^1}В этой теореме нормы и несимметричные нормы рассматриваются на торе $\mathbb{T}=[-\pi,\pi].$ Т.е. $f\in BW^r_{p_1,p_2}(\mathbb{T}),$ если $\left((1/2\pi)\int\limits_{\mathbb{T}}|(f^{(r)}(x))^+|^{p_1}\right)^{1/p_1}+\left((1/2\pi)\int\limits_{\mathbb{T}}|(f^{(r)}(x))^-|^{p_2}\right)^{1/p_2}\leqslant 1,$ и $f\in L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}),$ если $\left((1/2\pi)\int\limits_{\mathbb{T}}|(f^{(r)}(x))^+|^{q_1}\right)^{1/q_1}+\left((1/2\pi)\int\limits_{\mathbb{T}}|(f^{(r)}(x))^-|^{q_2}\right)^{1/q_2}<+\infty,$ $f\in BW^r_p(\mathbb{T}),$ если $\left((1/2\pi)\int\limits_{\mathbb{T}}|f^{(r)}(x)|^p\right)^{1/p}\leqslant 1,$ и $f\in L_{(\alpha,\beta),q}(\mathbb{T}),$ если $\left((1/2\pi)\int\limits_{\mathbb{T}}|\alpha(f^{(r)}(x))^++\beta(f^{(r)}(x))^-|^q\right)^{1/q}<+\infty.$

140 А. И. КОЗКО

В случае ограниченности одного из знакочувствительных весов из неравенства (1.8), в частности, вытекает, что для дифференцируемых функций справедлив аналог теоремы Вейерштрасса, т.е. дифференцируемую функцию можно приблизить в несимметричном пространстве $L_{\psi_{\varrho,q}}(\mathbb{T})$ с любой наперед заданной точностью. Если отказаться от условия дифференцируемости функции, то дело обстоит несколько иначе, а именно, уже не любую функцию, например, самого «наихудшего» несимметричного пространства $L_{q_1,q_2}(\mathbb{T})$, можно приблизить тригонометрическими полиномами с любой наперед заданной точностью. В работе найдены условия на знакочувстительные веса ϱ_+ , ϱ_- и пару $\mathbf{q}=(q_1,q_2)$, при которых справедлив аналог теоремы Вейерштрасса, т.е. произвольную функцию из $L_{\psi_{\varrho,q}}([0,1])$ можно приблизить при помощи ортогональных систем в несимметричном пространстве относительно $\psi_{\varrho,q}$. В частности, получены необходимые и достаточные условия на α , β , q_1 , q_2 , при которых ортогональные системы (тригонометрическая, алгебраическая, система Хаара, система всплесков Мейера, всплески Шеннона—Котельникова, всплески Стремберга и Лемарье—Баттла, система Уолша и система Франклина) являются всюду плотными в несимметричном пространстве $L_{(\alpha,\beta);q}([0,1])$.

2. Построение множеств A, B меры 2/3, 1/3 соответственно, таких, что $A \cap B = \emptyset$, и пересечение любого отрезка [a,b] как с A, так и с B имеет положительную меру

Построение множества K_1 . Рассмотрим отрезок [0,1], удалим из него интервал длиной 1/4 от длины отрезка [0,1] так, чтобы середина интервала находилась в середине отрезка [0,1], т.е. в точке 1/2. Затем с оставшимися отрезками [0,3/8], [5/8,1] поступим следующим образом: удалим из них по интервалу длиной $1/4^2$ от длины отрезка [0,1] так, чтобы середина удаленного интервала находилась в середине соответствующего отрезка, т.е. в точках 3/16, 13/16. У оставшихся четырех отрезков удалим интервалы длиной $1/4^3$ от длины отрезка [0,1] так, чтобы середина удаленного интервала находилась в середине соответствующего отрезка (см. рис. 1). Продолжая этот процесс до бесконечности, получаем множество $K_1 \subset [0,1]$ такое, что

$$\mu(K_1) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2^2}{4} + \frac{4^3}{4} + \frac{8^4}{4} + \dots\right) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$K_1$$

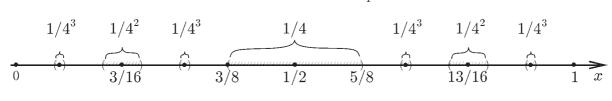
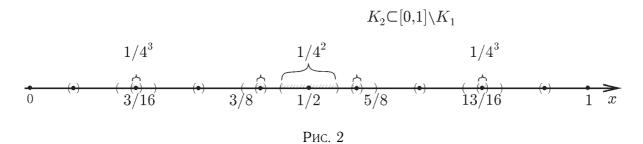


Рис. 1

Построение множества K_2 . Теперь рассмотрим множество $[0,1]\backslash K_1$, оно состоит из интервалов, удаленных при построении множества K_1 . С каждым интервалом этого множества поступим так же, как и ранее с отрезком [0,1], т.е., например, из интервала (3/8,5/8) удалим интервал длиной 1/4 от его длины (т.е. 1/16) так, чтобы середина интервала находилась в середине интервала (3/8,5/8); затем из оставшихся двух интервалов удалим интервал длиной $1/4^2$ от длины интервала (3/8,5/8) и т.д. Получим множество $K_2\subset [0,1]\backslash K_1$, $\mu(K_2)=1/2^2$ (см. рис. 2).

Множество $[0,1]\setminus (K_1\cup K_2)$ состоит из удаленных интервалов, с каждым из которых проделаем ту же операцию, что и со всем отрезком [0,1]. После всех удалений останется множество K_3 такое, что $K_3\cap K_1=\varnothing$, $K_3\cap K_2=\varnothing$, $\mu(K_3)=1/2^3$. Продолжая такую операцию, получим множества K_4,K_5,K_6,\ldots такие, что $K_i\cap K_j=\varnothing$, $i\neq j$, $\mu(K_j)=1/2^j$.

¹Существование непересекающихся множеств таких, что пересечение каждого с произвольным интервалом имеет положительную меру, было известно еще Лузину (см. [28]). Здесь строятся подобные множества, обладающие дополнительными свойствами, необходимыми для доказательства теоремы.



Построение множеств A, B. Положим $A=K_1\coprod K_3\coprod K_5\coprod \ldots$, $B=K_2\coprod K_4\coprod K_6\coprod \ldots$ Тогда $\mu(A)=1/2+1/2^3+1/2^5+\cdots=\frac{1/2}{1-1/4}=2/3$ и $\mu(B)=1/2^2+1/2^4+1/2^6+\cdots=\frac{1/4}{1-1/4}=1/3$. Множества A и B всюду плотны на [0,1], т.к. для любого $[a,b]\subseteq [0,1]$ найдется

1-1/4 интервал $(a_1,b_1)\subseteq [a,b]$ длиной $1/4^j$, удаленный при получении множества K_j . Тогда множество $K_l\cap (a_1,b_1)$ непусто для $l=j+1,j+2,\ldots$, откуда пересечение множеств (a_1,b_1) и K_{j+1} по построению множеств K_l имеет меру $1/(2\cdot 4^j)$, и пересечение множеств (a_1,b_1) и K_{j+2} имеет меру $1/4^{j+1}$. Таким образом, $\mu((a_1,b_1)\cap A)\geqslant 1/4^{j+1}$ и $\mu((a_1,b_1)\cap B)\geqslant 1/4^{j+1}$.

3. Основные результаты

Теорема 3.1. Пусть ϱ_+ , ϱ_- — измеримые функции такие, что $\varrho_\pm(x)\geqslant 1$ для $x\in[0,1]$, $q_1,q_2\in[1;+\infty]$, ψ — несимметричная на плоскости норма из класса Ψ . Обозначим через $C^*[0,1]$ класс непрерывных почти всюду функций на отрезке. Тогда для величины

$$E^*(\tilde{f}, L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{q}}}) := \inf_{g \in C^*[0, 1]} \psi_{\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{q}}(f - g)$$

в каждом из следующих случаев:

- 1) $\varrho_{+}(x) = +\infty$ для всех x из некоторого интервала $(\alpha^{+}, \beta^{+}) \subset [0, 1]$ длиной $\mu(\alpha^{+}, \beta^{+}) > 0$;
- 1') $\varrho_{-}(x) = +\infty$ для всех x из некоторого интервала $(\alpha^{-}, \beta^{-}) \subset [0, 1]$ длиной $\mu(\alpha^{-}, \beta^{-}) > 0$;
- 2) $q_1 = +\infty, \ q_2 \neq +\infty,$
- 3) $q_1 \neq +\infty$, $q_2 = +\infty$

существует функция $h(x) \in L_{\psi_{\mathbf{0},\mathbf{0}}}[0,1]$ такая, что для случаев 1) и 1')

$$E^*(\tilde{f}, L_{\psi_{\mathbf{0},\mathbf{q}}}[0,1]) \geqslant \psi(0,\mu^*) > 0,$$

$$E^*(\tilde{f}, L_{\psi_{\varrho,q}}[0,1]) \geqslant \psi(0,1/3) > 0.$$

Докажем сначала вспомогательную лемму.

Лемма 3.1. Пусть знакочувствительный вес отсутствует, т.е. $\varrho_+(x) \equiv \varrho_-(x) \equiv 1$ для $x \in [a,b]$ или, что то же самое, $\varrho = 1$, $q = (q,+\infty)$, т.е. $q_1 = q$, $q_2 = +\infty$. Отрезок [a,b] такой, что существует $j \in \mathbb{N}$, для которого выполнено $\mu([a,b] \cap A) =: \mu_A^* > 0$ и $\mu([a,b] \cap B) =: \mu_B^* > 0$, где множнства A и B всюду плотны на отрезке [a,b]. Положим

$$ilde{f}(x) = egin{cases} 1, & x \in A, \\ 0 & \textit{в противном случае}. \end{cases}$$

Тогда в обозначениях теоремы справедливо

$$E^*(\tilde{f}, L_{\psi_{1,q}}[a, b]) \geqslant \psi(0, \mu_A^*/2), \quad q = (q, +\infty), \quad 1 \leqslant q < +\infty.$$

Доказательство. ¹ Предположим противное, т.е. существует функция g(x), непрерывная почти всюду на [0,1], такая, что $\psi_{\mathbf{1},\mathbf{q}}(\tilde{f}-g)<\psi(0,\mu_A^*/2)$. Тогда $\psi(0,\mu_A^*/2)>\psi_{\mathbf{1},\mathbf{q}}(\tilde{f}-g)=\psi(\|(\tilde{f}-g)\|_{\mathbf{1}})$

 $^{^{1}}$ Все нормы в данной лемме рассматриваются на отрезке [a,b], т.е. под $\|h\|_q$ понимаем $\left(\int\limits_{[a,b]}|h(x)|^qdx\right)^{1/q}$.

142 А. И. КОЗКО

 $g)^+\|_q,\|(ilde{f}-g)^-\|_{+\infty})\geqslant \psi(0,\|(ilde{f}-g)^-\|_{+\infty}).$ Таким образом, из свойств функции $\psi\in\Psi$ получаем $\|(ilde{f}-g)^-\|_{+\infty}<\mu_A^*/2$. В точке $x\in B$ имеем $ilde{f}(x)-g(x)=-g(x)$. Докажем, что $g(x)<\mu_A^*/2$ для $x\in B$. Возможны два случая: либо $g(x)\leqslant 0$, но тогда сразу все доказано, либо g(x) положительна, но из $(ilde{f}(x)-g(x))^-=(-g(x))^-=g(x)$ вытекает $g(x)<\mu_A^*/2$, и, таким образом, неравенство для точек из B доказано. Так как множество точек $x\in B$ всюду плотно в отрезке [0,1], причем положительной меры $\mu(B)=\mu_B^*>0$, то из непрерывности почти всюду функции g(x) следует, что $g(x)<\mu_A^*/2$ почти всюду на отрезке [0,1]. Тогда

$$\psi_{1,q}(\tilde{f}-g) = \psi(\|(\tilde{f}-g)^+\|_q, \|(\tilde{f}-g)^-\|_{+\infty}) \geqslant \psi(\|(\tilde{f}-g)^+\|_1, 0),$$

НО

$$\|(\tilde{f}-g)^+\|_1 = \left(\int_{A\cap[a,b]} (\tilde{f}(x)-g(x))^+ dx\right) \geqslant \frac{\mu_A^*}{2}.$$

Отсюда следует, что $\psi_{1,q}(\tilde{f}-g)\geqslant \psi(0,\mu_A^*/2)$. Полученное противоречее завершает доказательство. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Для доказательства теоремы для случаев 2) $q_1 = +\infty$, $q_2 \neq +\infty$ и 3) $q_1 \neq +\infty$, $q_2 = +\infty$, достаточно сослаться на лемму. Действительно, например, в случае, когда $q_1 \neq +\infty$, $q_2 = +\infty$, имеем

$$E^*(\tilde{f}, L_{\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{q}}[0, 1]) \geqslant E^*(\tilde{f}, L_{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{q}}[0, 1]) \geqslant \mu(([0, 1] \cap A)/2) = \psi\left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Аналогично в случае, когда $q_1 = +\infty$, $q_2 \neq +\infty$, получаем

$$E^*(-\tilde{f}, L_{\varrho,q}[0,1]) \geqslant E^*(-\tilde{f}, L_{1,q}[0,1]) \geqslant \mu(([0,1] \cap A)/2) = \psi\left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Докажем справедливость теоремы для случаев 1) и 1'). Рассмотрим для определённости случай 1'). Предположим противное, т.е. существует функция g(x), непрерывная почти всюду на [0,1], такая, что $\psi_{\varrho,q}(\tilde{f}-g)<\psi(0,\mu^*)$. Докажем, что в данном случае необходимо, чтобы приближение было снизу почти всюду на интервале (α^-,β^-) , т.е. $g(x)\leqslant \tilde{f}(x)$ для почти всех $x\in(\alpha^-,\beta^-)$. Предположим, что это не выполнено, т.е. $g(x)\geqslant \tilde{f}(x)$ для множества положительной меры из (α^-,β^-) . Тогда

$$\psi_{\varrho,q}(\tilde{f}-g) = \psi(\|\varrho_{+}(\tilde{f}-g)^{+}\|_{q_{1}}, \|\varrho_{-}(\tilde{f}-g)\|_{q_{2}}) \geqslant$$

$$\geqslant \psi(+\infty, \|\varrho_{-}(\tilde{f}-g)^{-}\|_{q_{2}}) \geqslant \psi(+\infty, 0) = \psi(0, +\infty) > \psi(0, \mu^{*}).$$

Таким образом, неравенство $g(x)\leqslant \tilde{f}(x)$ для почти всех $x\in (\alpha^-,\beta^-)$ доказано. При построении множеств A и B было доказано, что для любого отрезка $[\alpha^-,\beta^-]$ (а следовательно, и интервала (α^-,β^-)) найдется такое натуральное число $j\in\mathbb{N}$, что выполняется следующее: $\mu((\alpha^-,\beta^-)\cap A)\geqslant 1/4^{j+1},\,\mu((\alpha^-,\beta^-)\cap B)\geqslant 1/4^{j+1}.$ Кроме того, множества A и B всюду плотны в интервале (α^-,β^-) . Функция $\tilde{f}(x)$ равна нулю на всюду плотном множестве B положительной меры $\mu((\alpha^-,\beta^-)\cap B)>0$, тогда из непрерывности почти всюду функции g(x) следует, что $g(x)\leqslant 0$ почти всюду. Из сказанного выше получаем

$$\psi(\tilde{f} - g)_{\varrho,q} = \psi(\|\varrho_{+}(\tilde{f} - g)^{+}\|_{q_{1}}, \|\varrho_{-}(\tilde{f} - g)^{-}\|_{q_{2}}) \geqslant \psi(\|(\tilde{f} - g)^{+}\|_{q_{1}}, \|(\tilde{f} - g)^{-}\|_{q_{2}}) \geqslant$$

$$\geqslant \psi(\|(\tilde{f} - g)^{+}\|_{1}, 0) \geqslant \psi\left(\int_{A \cap (\alpha^{-}, \beta^{-})} (\tilde{f} - g)^{+} dx, 0\right) \geqslant \psi\left(\int_{A \cap (\alpha^{-}, \beta^{-})} (\tilde{f})^{+} dx, 0\right) =$$

$$= \psi(\mu(A \cap (\alpha^{-}, \beta^{-})), 0) = \psi(0, \mu(A \cap (\alpha^{-}, \beta^{-}))) = \psi(0, \mu^{*}).$$

Таким образом, для случая 1') теорема доказана. Случай 1) аналогичен, только в качестве функции h(x) надо выбирать $-\tilde{f}(x)$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Пусть система $\Phi = \{\phi_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ такова, что для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $\phi_n(x)$ непрерывна почти всюду. Обозначим через Φ_n линейную оболочку функций $\{\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$. Тогда для величины $E_n^*(\tilde{f}, L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{q}}}) := \inf_{\phi \in \Phi_n} \psi_{\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{q}}(f - \phi)$ в каждом из следующих случаев

- 1) $\varrho_+(x) = +\infty$ для всех x из некоторого интервала $(\alpha^+, \beta^+) \subset [0, 1]$ длиной $\mu(\alpha^+, \beta^+) > 0$;
- $1') \ \varrho_{-}(x) = +\infty$ для всех x из некоторого интервала $(\alpha^{-}, \beta^{-}) \subset [0, 1]$ длиной $\mu(\alpha^{-}, \beta^{-}) > 0$;
- 2) $q_1 = +\infty, q_2 \neq +\infty;$
- 3) $q_1 \neq +\infty, q_2 = +\infty$

существует функция $h(x) \in L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}}[0,1]$ такая, что для случаев 1) и 1')

$$E_n^*(\tilde{f}, L_{\psi_{\alpha,\alpha}}[0,1]) \geqslant \psi(0,\mu^*) > 0,$$

где $\mu^* = \mu(A \cap (\alpha^+, \beta^+))$ для 1) и $\mu^* = \mu(A \cap (\alpha^-, \beta^-))$ для 1'), а для случаев 2) и 3)

$$E_n^*(\tilde{f}, L_{\psi_{\varrho,q}}[0,1]) \geqslant \psi\left(0, \frac{1}{3}\right) > 0.$$

Следствие 3.2. Пусть система $\Phi = \{\phi_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ такова, что для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $\phi_n(x)$ непрерывна почти всюду. Обозначим через Φ_n линейную оболочку функций $\{\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$. Тогда в каждом из следующих случаев

- 1) $\max\{\alpha, \beta\} = +\infty$;
- 2) $q_1 = +\infty, q_2 \neq +\infty;$
- 3) $q_1 \neq +\infty, q_2 = +\infty$

существует функция $h(x) \in L_{(\alpha,\beta);\boldsymbol{q}}$ такая, что

$$E_n(h, L_{(\alpha,\beta);\mathbf{q}}) = \inf_{\phi \in \Phi_n} \|h - \phi\|_{(\alpha,\beta);\mathbf{q}} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Доказательство. Несимметричная норма $\|f\|_{(\alpha,\beta);\mathbf{q}} = \alpha \cdot \|f^+\|_{q_1} + \beta \cdot \|f^-\|_{q_2}$ задается функцией $\psi(u,v) = u+v$. Отсюда в случаях 2) и 3) утверждение тривиально вытекает из теоремы. Случай 1) означает, что либо $\varrho_+(x) \equiv +\infty$ для всех $x \in [0,1]$, либо $\varrho_-(x) \equiv +\infty$ для всех $x \in [0,1]$. Рассмотрим сначала случай $\varrho_+(x) \equiv +\infty$ для всех $x \in [0,1]$. Тогда выполняется условие 1) следствия из теоремы, т.е. $E_n^*(\tilde{f}, L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}}[0,1]) \geqslant \mu(A \cap (\alpha^+,\beta^+))$, где интервал $(a^+,b^+) = (0,1)$. Но, согласно построению множеств A и B, имеем $\mu(A \cap (0,1)) = 2/3$. Таким образом, доказано, что $E_n^*(\tilde{f}, L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}}[0,1]) > 1/3$. Случай $\varrho_-(x) \equiv +\infty$ для всех $x \in [0,1]$ доказывается аналогично предыдущему. Следствие доказано.

Следствие 3.3. Для ортогональных систем: тригонометрической, алгебраической, системы Хаара, системы всплесков Мейера¹, всплесков Шеннона—Котельникова

$$\psi(x) = \frac{2\sin\frac{\pi}{2}(x+1/2)\cos\frac{3\pi}{2}(x+1/2)}{\pi(x+1/2)},$$

всплесков Стремберга и Лемарье—Баттла, системы Уолша, системы Франклина и Фабера— Шаудера функцию $\tilde{f}(x)$ приблизить с точностью менее, чем 2/5 в пространстве $L_{q,+\infty}[0,1]$, $1\leqslant q<+\infty$, невозможно, а следовательно, данные системы не плотны в несимметричном пространстве $L_{q,+\infty}[0,1]$, $1\leqslant q<+\infty$.

 $\{0,1,2,\ldots,l=0,1,\ldots,2^k-1\}$ является периодизацией на отрезок [0,1]. Разложение

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{2^k - 1} d_{k,l} \tilde{\psi}_{k,l}(x)$$

понимается в смысле соответствующего пространства.

 $[\]overline{}^1$ Поскольку рассматривается отрезок [0,1], то имеется ввиду периодизация данных систем всплесков, т.е. пусть $\psi(x)$ — всплеск из \mathbb{R}^1 . Обозначим $\mathcal{P}[\psi] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(\cdot - k), \ \tilde{\psi}_{k,l}(x) = \mathcal{P}[2^{k/2}\psi(2^kx - l)],$ тогда система $\{1, \tilde{\psi}_{k,l}(x), k = 1\}$

144 А. И. КОЗКО

Теорема 3.2. Пусть $q_1,q_2\in[1,+\infty]$, система $\Phi=\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ является полной в $L_q([0,1])$ для всех $1\leqslant q<+\infty$ и $\psi\in\tilde{\Psi}-$ несимметричная на плоскости норма. Тогда данная система полна и в несимметричном пространстве $L_{\psi_{\mathbf{p};\mathbf{q}}}$, если

$$|\varrho_{\pm}(x)| \leqslant C = ext{Const}$$
 для почти всех x из $[0,1]$, $\max\{q_1,q_2\} < +\infty$,

т.е. при условиях конечности величин q_1 , q_2 и ограничености почти всюду знакочувствительных весов $\varrho_{\pm}(x)$ на [0,1] справедлив аналог теоремы Вейеритрасса: $\lim_{n\to +\infty}\inf_{\phi\in\Phi_n}\psi_{\boldsymbol{\varrho};\boldsymbol{q}}(f-\phi)=0$ для любой функции $f\in L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho};\boldsymbol{q}}}$.

Доказательство. Пусть $f \in L_{\psi_{\boldsymbol{\varrho};\boldsymbol{q}}}([0,1])$, где $q_1,q_2 \in [1,+\infty)$. Предположим для определенности, что $q_1 \leqslant q_2$. Тогда $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, где $\varrho_+ f^+ \in L_{q_1}, \ \varrho_- f^- \in L_{q_2}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует функция ϕ вида $\gamma_1 \phi_1 + \cdots + \gamma_s \phi_s$, для которой справедливо $\|f - \phi\|_{L_{\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{q}}} \leqslant \varepsilon$. Из свойства vi) класса $\tilde{\Psi}$ вытекает, что можно подобрать $\delta := \delta(\varepsilon)$ так, что $\psi(0,\delta) + \psi(\delta,\delta) + \psi(\delta,\delta) < \varepsilon$. Введем функцию срезки

$$f_N^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ для } x \in [0,1]: \ f^+(x) \leqslant N, \\ N & \text{ для } x \in [0,1]: \ f^+(x) > N, \end{cases}$$

где $N \in \mathbb{N}$. Покажем, что константу N можно выбрать так, что

$$\|\varrho_{+}(f^{+} - f_{N}^{+})\|_{q_{1}} < \delta. \tag{3.1}$$

Для суммируемой функции $g(x) := (\varrho_+(x)f^+(x))^{q_1}$ положим

$$A_n := \{x : x \in [0,1], n \leqslant g(x) < n+1\}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Из свойств интеграла Лебега и неотрицательности g(x) вытекает равенство

$$\int_{[0,1]} g(x) \, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{A_k} g(x) \, dx.$$

В силу сходимости ряда, конечности q_1 , выберем $N \in \mathbb{N}$ так, что

$$\left(\sum_{k=N}^{+\infty} \int_{A_k} g(x) \, dx\right)^{1/q_1} < \delta.$$

Для выбранного таким образом N имеем

$$\|\varrho_{+}(x)(f^{+} - f_{N}^{+})\|_{q_{1}} = \left(\sum_{k=N}^{+\infty} \int_{A_{k}} (\varrho_{+}(x) \cdot (f^{+}(x) - N))^{q_{1}} dx\right)^{1/q_{1}} \le \left(\sum_{k=N}^{+\infty} \int_{A_{k}} (\varrho_{+}(x) \cdot f^{+}(x))^{q_{1}} dx\right)^{1/q_{1}} = \left(\sum_{k=N}^{+\infty} \int_{A_{k}} g(x) dx\right)^{1/q_{1}} < \delta.$$

Таким образом, оценка (3.1) доказана. Выберем функции ϕ^* и ϕ^{**} из линейной оболочки системы функций $\{\phi_1(x),\ldots,\phi_n,\ldots\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\|\varrho_+ \cdot (f_N^+ - \phi^*)\|_{q_2} \leqslant \delta,\tag{3.2}$$

$$\|\varrho_{-}\cdot(f^{-}-\phi^{**})\|_{q_{2}}\leqslant\delta. \tag{3.3}$$

 $^{^1}$ Такой выбор возможен, в силу предположения полноты системы Φ в пространстве $L_{q_2}([0,1])$. Действительно, теперь f_N^+ — ограниченная функция, а следовательно, f_N^+ , $f^- \in L_{q_2}([0,1])$, и из ограниченности почти всюду знакочувствительных весов имеем $\|\varrho_+\cdot (f_N^+-\phi^*)\|_{q_2}\leqslant C\cdot \|f_N^+-\phi^*\|_{q_2}$, а $\|f_N^+-\phi^*\|_{q_2}$ можно сделать сколь угодно малым благодаря полноте системы Φ . По тем же соображениям справедливо и второе неравенство (3.3).

Положив $\phi = \phi^* - \phi^{**}$, оценим разность между функцией f и полиномом ϕ (по системе Φ) при помощи неравенств (3.1), (3.2), (3.3).

$$\begin{split} \|f-\phi\|_{L_{\varrho,q}([0,1]))} &= \psi_{\varrho,q}(f^+ - f_N^+ + f_N^+ - \phi^* + \phi^{**} - f^-) \leqslant \\ &\leqslant \psi_{\varrho,q}(f^+ - f_N^+) + \psi_{\varrho,q}(f_N^+ - \phi^*) + \psi_{\varrho,q}(\phi^{**} - f^-) = \\ &= \psi(\|\varrho_+(f^+ - f_N^+)\|_{q_1}, \|\varrho_+(f^+ - f_N^+)\|_{q_2}) + \psi(\|\varrho_+(f_N^+ - \phi^*)\|_{q_1}, \|\varrho_-(f_N^+ - \phi^*)\|_{q_2}) + \\ &\quad + \psi(\|\varrho_+(\phi^{**} - f^-)\|_{q_1}, \|\varrho_-(\phi^{**} - f^-)\|_{q_2}) \leqslant \\ &\leqslant \psi(0,\delta) + \psi(\|\varrho_+(f_N^+ - \phi^*)\|_{q_2}, \|\varrho_-(f_N^+ - \phi^*)\|_{q_2}) + \psi(\|\varrho_+(\phi^{**} - f^-)\|_{q_2}, \|\varrho_-(\phi^{**} - f^-)\|_{q_2}) \leqslant \\ &\leqslant \psi(0,\delta) + \psi(\delta,\delta) + \psi(\delta,\delta). \end{split}$$

Теперь из свойства vi) класса $\tilde{\Psi}$ вытекает, что можно подобрать δ так, что $\psi(0,\delta)+\psi(\delta,\delta)+\psi(\delta,\delta)<\varepsilon$. Теорема доказана.

Следствие 3.4. Пусть $\alpha, \beta, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$. Ортогональные системы: тригонометрическая, алгебраическая, система Хаара, система всплесков Мейера, всплески Шеннона—Котельникова, всплески Стремберга и Лемарье—Баттла, система Уолша и система Франклина плотны в несимметричных пространствах $L_{(\alpha,\beta);\mathbf{q}}([0,1])$ тогда и только тогда, когда либо $\max\{\alpha,\beta,q_1,q_2\}<+\infty$, либо $\max\{\alpha,\beta\}<+\infty$, $q_1=q_2=+\infty$.

Доказательство. Случай, когда $\max\{\alpha,\beta\}<+\infty,\ q_1=q_2=+\infty,$ тривиален. Докажем, что ортогональные системы из утверждения всюду плотны в случае, когда $\max\{\alpha,\beta,q_1,q_2\}<+\infty.$ Хорошо известно [19], что ортогональные системы: тригонометрическая, алгебраическая, система Хаара, система всплесков Мейера, всплески Шеннона—Котельникова, всплески Стремберга и Лемарье—Баттла, система Уолша и система Франклина плотны в пространствах $L_q([0,1]),$ $1\leqslant q\leqslant +\infty.$ Следовательно, из теоремы 3.2 вытекает полнота данных систем и в $L_{(\alpha,\beta);\mathbf{q}}([0,1])$ для $\max\{\alpha,\beta,q_1,q_2\}<+\infty.$ Если же условия $\max\{\alpha,\beta,q_1,q_2\}<+\infty$ либо $\max\{\alpha,\beta\}<+\infty,$ $q_1=q_2=+\infty,$ не выполняются, то, согласно следствию 3.3, исследуемые ортогональные системы не являются всюду плотными в пространствах $L_{(\alpha,\beta);\mathbf{q}}([0,1]).$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00248 и ФТЦП «Интеграция», грант № I-0899/2139.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Алимов А. Р.* Чебышевские компакты на плоскости// Тр. Мат. ин-та РАН. 1997. 219. С. 3-22.
- 2. *Алимов А. Р.* Чебышевские множества в линейных пространствах с несимметричной сферой. Теория функций и приближ.: Тр. Саратов. зимн. шк. памяти профессора А. А. Привалова, Саратов, 30 янв. 4 февр., 1994 г.: Межвуз. сб. науч. тр. Ч. 2. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1995. С. 91–93.
- 3. *Алимов А.Р.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных пространствах с несимметричной сферой// Канд. дис. М.: МГУ, 1997.
- 4. Андреев А. С., Попов В. А., Сендов Б. Теоремы типа Джексона для наилучших односторонних приближений тригонометрическими многочленами и сплайнами// Мат. заметки. 1979. 26. С. 791–804.
- 5. *Арестов В. В.* О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов// Мат. заметки. 1980. 27, № 4. C. 539-546.
- 6. Бабенко В. Ф., Лигун А. А. Порядок наилучших односторонних приближений полиномами и сплайнами в метрике $L_p//$ Мат. заметки. 1976. 19. С. 323—329.
- 7. *Бабенко В.* Φ . Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций// Укр. мат. ж. -1982. -34, № 4. C. 409-416.
- 8. *Бабенко В.* Ф. Несимметричные экстремальные задачи теории приближения// Докл. АН СССР. 1983. 269, № 3. C. 521-524.
- 9. *Бабенко В. Ф.* Неравенства для перестановок дифференцируемых функций, задачи приближения и приближенного интегрирования// Докл. АН СССР. 1983. 272, № 5. С. 1038–1041.

 $^{^1}$ Использованы неравенства $\|g(\cdot)\|_{q_1,q_2}\leqslant \|g(\cdot)\|_{q_2,q_2}$ для $q_1\leqslant q_2$ и $\|g(\cdot)\|_{q_1,q_2}\leqslant 2\|g(\cdot)\|_{q_2}$. Первое вытекает из неравенства Гёльдера, второе — из тривиальной оценки $\|g^\pm(\cdot)\|_{q_2}\leqslant \|g(\cdot)\|_{q_2}$.

146 А. И. КОЗКО

- 10. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения и неравенства для перестановок в экстремальных задачах теории приближения// Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1987. 180. С. 33–35.
- 11. *Бабенко В. Ф., Вакарчук М. Б.* О неравенствах типа Колмогорова—Хермандера для функций, ограниченных на дискретной сетке// Укр. мат. ж. −1997. − 49, № 7. − С. 988–992.
- 12. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А.* Несимметричные приближения классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем// Anal. math. 1988. 14, № 3. С. 149–217.
- 13. *Гарбушин В. Н.* Новые неравенства для производных и их применение// Межд. конф. «Функциональные пространства, теория приближений и нелинейный анализ», посвященная 90-летию академика С. М. Никольского, Москва, 27 апреля–3 мая. М., 1995. С. 90–91.
- 14. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно-монотонных (в частности, рациональных) функций// Мат. сб. 1976. 101. С. 508–541.
- 15. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации. Пространство знакочувствительных весов. Жесткость и свобода системы// Докл. РАН. 1993. 332, № 6. С. 686–689.
- 16. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации. Вопросы единственности и устойчивости// Докл. РАН. -1993. -333, № 1. C. 5-7.
- 17. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Аппроксимация со знакочувствительным весом// Изв. РАН. Сер. мат. 1998. 62, № 6. С. 59–102.
- 18. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Об определениии чебышевских ужей// Вестн. МГУ, Сер. 1. 1994. № 3. С. 49–59.
- 19. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.
- 20. *Козко А. И.* Аналоги неравенств Джексона—Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой// Мат. заметки. 1997. 61, № 5. С. 687—699.
- 21. *Козко А. И.* Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой// Мат. сб. -1998. -189, № 9. C. 85-106.
- 22. *Козко А. И.* Неравенства с дробными производными для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой// Изв. РАН, Сер. мат. -1998. -62, № 6.
- 23. Козко A. U. О порядке наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой на классах функций с ограниченной r-й производной// Изв. РАН. Сер. мат. 2001.
- 24. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале// Уч. зап. Моск. ун-та. 1939. 30, № 3. С. 3–13.
- 25. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
- 26. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. Киев.: Наукова думка, 1982.
- 27. *Крейн М. Г. L*-проблема моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве// В кн. Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна «О некоторых вопросах теории моментов». Харьков: «ГОНТИ», 1938.
- 28. Лузин Н. Н. Интегралы. Москва, 1948.
- 29. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- 30. Поляков О. В. Несимметричные приближения класса классом задаваемых при помощи линейного дифференциального оператора// Укр. мат. ж. -1990.-42, № 8. С. 1083-1088.
- 31. Поляков О. В. О приближении обобщенными сплайнами некоторых классов дифференцируемых функций// Укр. мат. ж. -1997. -49, № 7. С. 951-957.
- 32. *Рамазанов А.-Р. К.* О прямых и обратных теоремах аппроксимации в метрике знакочувствительного веса// Anal. math. -1995. -21, № 3. С. 191-212.
- 33. *Рамазанов А.-Р. К.* Полиномы, ортогональные со знакочувствительным весом// Мат. заметки. 1996. 59, № 5. С. 737–752.
- 34. *Рамазанов А.-Р. К.* Рациональная аппроксимация со знакочувствительным весом// Мат. заметки. 1996. 60, № 5. С. 737–752.
- 35. *Севастьянов Е. А.* О проблеме Хаара для знакочувствительных аппроксимаций// Мат. сб. 1997. *188*, № 2. С. 95–128.
- 36. Сендов Б., Попов В. А. Усреднени модули на гладкост. София: БАН, 1983.
- 37. *Тихомиров В. М.* Теория экстремума и экстремальные задачи классического анализа// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат./ ВИНИТИ. 1999. 65. С. 188–258.
- 38. Шадрин А. Ю. Односторонние и монотонные приближения// Канд. дис. Москва, 1986.
- 39. *Шумейко А. А.* Несимметричные приближения сплайнами// Межд. конф. «Функциональные пространства, теория приближений и нелинейный анализ», посвященная 90-летию академика С. М. Никольского, Москва, 27 апреля–3 мая. Москва, 1995.

- 40. *Alimov A. R.* A number of connected components of sun's complent// East J. Approx. -1995. -1, № 4. C. 419-429.
- 41. Alimov A. R. Chebyshev sets' components// East J. Approx. -1996. -2, \mathbb{N}_{2} 2, C. 215–232.
- 42. Andreev A. S., Popov V. A., Sendov B. Jackson's type theorems for oneside polynomial and spline approximation// Bulg. Acad. Sci. -1977. -30. -C. 1533-1536.
- 43. Bronsted A. Convex sets and Chebyshev sets// Math. scand. -1965. -17. -C. 5-16.
- 44. Bojanic R., De Vore R. On polynomials of best one-sided approximation// Enseign math. -1966.-12.-C. 139-164.
- 45. Bronsted A. Convex sets and Chebyshev sets. 2// Math. scand. -1966. -18. -C. 5-15.
- 46. Freud G. Über einseitige Approximation durch Polynome. I// Acta sci. math. -1955. -16. -C. 12-18.
- 47. Ganelius T. On one-sided approximation by trigonometrical polynomials// Math. scand. -1956.-4.-C. 247-258.
- 48. Hörmander L. New proof and generalization of inequality of Bohr// Math. scand. -1954.-2.-C. 33-45.
- 49. *Kozko A. I.* On Jackson–Nikolskii inequalities for trigonometric polynomials in spaces with asymmetrical norms// East J. Approx. -1996. -2, № 2. -C. 177-186.
- 50. Lorentz G., Golitsihek M. V., Makovoz Y. Constructive approximation: advanced problems// Comp. Stud. Math. -1996.-304.
- 51. Pinkus A. On L^1 -approximation. Cambridge University Press, 1989.

А. И. Козко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: prozerpi@ok.ru

УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА СОСТАВНЫХ СТРУКТУРАХ С ТОНКИМ АРМИРОВАНИЕМ

© 2005 г. С. Е. ПАСТУХОВА

Аннотация. Рассмотрены задачи теории упругости на плоской плите, армированной периодической тонкой сеткой, или в трехмерном теле, армированном периодической тонкой ящичной структурой. Составная среда зависит от двух малых взаимосвязанных геометрических параметров: один из них контролирует ячейку периодичности, а другой — толщину армирующей структуры.

Доказано, что усреднение указанных задач — классическое. При этом применяется метод В. В. Жикова («Zhikov measure арргоасh») в соединении с методом двухмасштабной сходимости. Предварительно изучены особенности двухмасштабной сходимости с переменной составной мерой, а также соболевских пространств теории упругости с переменной составной мерой. Полученный принцип компактности (аналог теоремы Реллиха) в этих пространствах позволил доказать сходимость по Хаусдорфу спектра изучаемой задачи.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение	148
2.	Метод двухмасштабной сходимости в пространствах теории упругости	150
3.	Усреднение на составной структуре	158
4.	Некоторые неравенства для составных мер и следствия из них	160
5.	О сходимости спектров	163
	Список литературы	166

1. Введение

Пусть F — периодический составленный из отрезков граф на плоскости, называемый далее сингулярной или бесконечно тонкой сеткой, $Y=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^2$ — ячейка периодичности. Тонкая сетка F^h получается из сетки F, если заменить каждое звено I в F на полосу I^h шириной h со средней линией, совпадающей с I. Иногда удобно включить в тонкую сетку F^h круги с центрами в

ней линией, совпадающей с I. Иногда удобно включить в тонкую сетку F^h круги с центрами в узлах радиуса h/2. Процедура h-утолщения упрощается, если сетка F может быть составлена из нескольких семейств параллельных прямых. Тогда тонкая сетка F^h получается заменой каждой прямой l из сетки F на бесконечную полосу шириной h со средней линией l.

Пусть λ — мера, сосредоточенная на F и пропорциональная там линейной мере Лебега, λ^h — мера, сосредоточенная на F^h и пропорциональная там плоской мере Лебега. Меры λ , λ^h нормированы: $\int d\lambda = \int d\lambda^h = 1$. Ясно, что $\lambda^h \rightharpoonup \lambda$ при $h \to 0$.

Плоские составные 1-периодические структуры с армированием в виде сингулярной или тонкой сетки можно описать соответственно с помощью составных мер

$$d\mu = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}d\lambda, \qquad d\mu^h = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}d\lambda^h,$$
 (1.1)

где dx- плоская мера Лебега. Ясно, что $\int\limits_Y d\mu=\int\limits_Y d\mu^h=1,\; \mu^h\rightharpoonup \mu,\; \text{т.e.}\; \int\limits_Y \varphi d\mu^h\to \int\limits_Y \varphi d\mu$ $\forall \varphi\in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y).$

Гомотетическое сжатие плоскости в ε^{-1} раз переводит сетки F^h и F в F^h_ε и F_ε соответственно, при этом возникают масштабированные меры μ^h_ε , μ_ε , для которых

$$\mu_{\varepsilon}^{h}(B) = \varepsilon^{2} \mu^{h}(\varepsilon^{-1}B), \qquad \mu_{\varepsilon}(B) = \varepsilon^{2} \mu(\varepsilon^{-1}B),$$

где B — любое борелево множество на плоскости. Очевидно, что

$$d\mu_{\varepsilon}^{h} = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}d\lambda_{\varepsilon}^{h}, \qquad d\mu_{\varepsilon} = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}d\lambda_{\varepsilon},$$

где меры λ_{ε}^h , λ_{ε} ε -периодичны и сосредоточены на сетках F_{ε}^h и F_{ε} . Поскольку $\mu_{\varepsilon}^h(\varepsilon Y) = \mu_{\varepsilon}(\varepsilon Y) = \varepsilon^2$, то μ_{ε}^h , μ_{ε} сходятся слабо к плоской мере Лебега: $d\mu_{\varepsilon}^h \to dx$, $d\mu_{\varepsilon} \to dx$ при $\varepsilon \to 0$, что означает, например,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi \, d\mu_{\varepsilon}^h \to \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2).$$

В случае h>0 свяжем параметры h и ε зависимостью, полагая $h=h(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть $A=\{a_{ijsp}\}$ — тензор упругости, подчиненный обычным условиям симметрии $a_{ijsp}=$ $a_{spij}=a_{jisp}$. Скалярное произведение симметрических матриц $\xi=\{\xi_{ij}\}$ и $\eta=\{\eta_{ij}\}$ определим как $\xi \cdot \eta = \xi_{ij} \eta_{ij}$. Действие тензора A на симметрическую матрицу ξ есть симметрическая матрица $A\xi=\{a_{ijsp}\xi_{sp}\}$. Предполагаем A положительно определенным: $A\xi\cdot\xi\geqslant c_0\xi\cdot\xi$ для любой матрицы $\xi, \, c_0 > 0.$ В частности, в изотропном случае

$$A\xi = k\xi + k_1(\operatorname{Tr}\xi)I, \quad k > 0, \quad k_1 \geqslant 0, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Tr}\xi = \xi_{11} + \xi_{22}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Пусть Ω — органиченная липшицева область в \mathbb{R}^2 , $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$, $u = (u_1, u_2)$.

Рассмотрим задачу Дирихле: найти вектор-функцию $u^{\varepsilon,h} \in H^1_0(\Omega)^2$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) \, d\mu_{\varepsilon}^{h} = \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, d\mu_{\varepsilon}^{h} \quad \forall \varphi \in C_{0}^{\infty}(\Omega)^{2}, \tag{1.3}$$

где A — постоянный изотропный тензор, $f \in C^{\infty}(\overline{\Omega})^2$.

Это обобщенная или вариационная формулировка краевой задачи для системы теории упругости в области Ω , армированной периодической сеткой F_{ε}^h , когда в пределах ячейки периодичности масса «приблизительно» наполовину (с погрешностью порядка O(h)) сосредоточена на тонкой сетке, асимптотически стремящейся к сингулярной сетке. В терминах обычной меры Лебега задача (1.3) имеет аналогичную формулировку, но с разрывным тензором, принимающим постоянные значения в областях $\Omega \cap F^h_{arepsilon}$ и $\Omega \setminus F^h_{arepsilon}$, так что соответствующая краевая задача имеет условия сопряжения на границе раздела этих областей и условие закрепления на внешней границе $\partial\Omega$.

Решение поставленной задачи существует и единственно. Это следует из равномерного (по arepsilonи h) неравенства Корна

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\mu_{\varepsilon}^h \leqslant C \int_{\Omega} |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^{\infty}(\Omega)^2, \quad C = \text{const}(\Omega, F), \tag{1.4}$$

где $h\geqslant 0,\ \mu_{\varepsilon}^0=\mu_{\varepsilon};$ доказательство будет приведено в § 4. Отсюда же получаем равномерную ограниченность решения:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} (|u^{\varepsilon,h}|^2 + |e(u^{\varepsilon,h})|^2) d\mu_{\varepsilon}^h \leqslant \infty.$$
 (1.5)

Благодаря неравенству (1.4), можно рассматривать задачу (1.3), когда армирование происходит с помощью сетки нулевой толщины h=0, а именно $F_{\varepsilon}^h=F_{\varepsilon}^0=F_{\varepsilon}=\varepsilon F$. В этом случае задача ставится в терминах меры $\mu_{\varepsilon}^0 = \mu_{\varepsilon}$.

Наша цель — изучить поведение решений $u^{\varepsilon,h}$ при $\varepsilon \to 0$ и дать усредненное описание сильно неоднородной армированной среды.

Определим усредненный тензор

$$A^{\text{hom}} \xi \cdot \xi = \inf_{u \in C^{\infty}_{\text{per}}(Y)^2} \int_{Y} A(\xi + e(u)) \cdot (\xi + e(u)) d\mu$$

и рассмотрим задачу на отыскание

$$u \in H_0^1(\Omega)^2$$
, $\int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u) \cdot e(\varphi) dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)^2$. (1.6)

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. Задачи (1.3) и (1.6) связаны сходимостью решений и энергий при $\varepsilon \to 0$:

$$\int_{\Omega} |u^{\varepsilon,h} - u|^2 d\mu_{\varepsilon}^h \to 0, \tag{1.7}$$

$$\int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) d\mu_{\varepsilon}^{h} \to \int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(u) dx. \tag{1.8}$$

Доказательство приведено в конце § 4.

Видим, что принцип усреднения задачи теории упругости на составной структуре с тонкой армирующей сеткой имеет классический вид: есть сильная сходимость решений, предельная функция не содержит осциллирующей переменной и предельная задача одна и та же для любой $h(\varepsilon) \to 0$.

Для аналогичной задачи, когда вся мера сосредоточена на тонкой сетке, усреднение оказывается неклассическим: предельная функция, вообще говоря, двухмасштабна (содержит осциллирующую переменную) и сходимость к ней не может быть сильной, а вид предельной задачи зависит от порядка бесконечно малой $h(\varepsilon)$ [1,2]. Тот же эффект наблюдается в задачах теории упругости на тонких структурах в пространстве — ящичных и стержневых [9–11].

Различие в усреднении на тонких и составных стуктурах — специфика теории упругости, его нет в скалярных задачах, возникающих, например, из теории теплопроводности (для которых усреднение классическое на структурах обоих типов). Два фактора определяют указанное различие между упругими тонкими и составными структурами: зависимость константы в неравенстве Корна от геометрических параметров ε и h, а также структура множества периодических жестких перемещений для предельной меры.

Хотя в формулировке теоремы 1.1 не участвует двухмасштабная сходимость, для доказательства принципа усреднения будем использовать обобщенный метод двухмасштабной сходимости В. В. Жикова [3–5] с переменной мерой (двухмасштабная сходимость с мерой Лебега ранее была предложена Нгуетсенгом [16] и разработана Алайре [15]).

Предварительно в § 2 изучаются особенности двухмасштабной сходимости в пространствах теории упругости с некоторой переменной борелевой мерой, удовлетворяющей условию типа условия связности (или эргодичности), а также специальным аппроксимативным условиям. Составная мера из (1.1) — частный случай таких мер. Проверка аппроксимативных условий для этой меры приведена в [12,13].

В \S 4 получен принцип компактности в соболевских пространствах теории упругости на составной структуре, с помощью которого в \S 5 изучено асимптотическое поведение спектра задачи (1.1) при усредении.

2. Метод двухмасштабной сходимости в пространствах теории упругости

Изучим некоторую общую ситуацию, в которую вписывается усреднение задач теории упругости на составных структурах, не обязательно плоских.

2.1. Пусть μ^h , $\mu-1$ -периодические борелевы меры в \mathbb{R}^d такие, что $\mu^h \rightharpoonup \mu$ при $h \to 0$, и пусть $\mu^h_\varepsilon-$ масштабированная мера (см. § 1), т.е. для фиксированного h

$$\mu_{arepsilon}^h(B)=arepsilon^d\mu^h(arepsilon^{-1}B)$$
 для любого борелева множества $B\subset\mathbb{R}^d.$

Далее полагаем $h=h(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Тогда $d\mu^h_\varepsilon \rightharpoonup dx$ при $\varepsilon\to 0$.

Напомним, как определяется сходимость в переменном пространстве $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$ [3-6].

Пусть
$$v^{\varepsilon,h}(x)$$
 ограничена в $L^2(\Omega,d\mu^h_{\varepsilon})$, т.е. $\limsup_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega}|v^{\varepsilon,h}|^2d\mu^h_{\varepsilon}<\infty.$

Слабая сходимость $v^{arepsilon,h} \rightharpoonup v$ в $L^2(\Omega,d\mu^h_arepsilon)$ означает:

$$v \in L^2(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} v^{\varepsilon,h} \varphi \, d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} v \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

 C ильная $\mathit{cxodumocmb}\ v^{arepsilon,h} o v$ в $L^2(\Omega,d\mu^h_arepsilon)$ означает:

$$v\in L^2(\Omega), \quad \lim_{arepsilon o 0}\int\limits_{\Omega}v^{arepsilon,h}z^{arepsilon,h}\,d\mu^h_arepsilon=\int\limits_{\Omega}vz\,dx, \quad$$
как только $z^{arepsilon,h} o z$ в $L^2(\Omega,d\mu^h_arepsilon).$

Сходимость в $L^2(\Omega, d^h_{\varepsilon})$ имеет следующие свойства:

- 1) Всякая ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$ последовательность компактна в смысле слабой сходимости;
- 2) свойство полунепрерывности снизу:

если
$$v^{\varepsilon,h} \rightharpoonup v$$
, то $\liminf_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} |v^{\varepsilon,h}|^2 \, d\mu_{\varepsilon}^h \geqslant \int\limits_{\Omega} v^2 \, dx$.

3) критерий компактности:

$$v^{\varepsilon,h} \to v \Leftrightarrow v^{\varepsilon,h} \rightharpoonup v$$
 и $\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} |v^{\varepsilon,h}|^2 d\mu_{\varepsilon}^h = \int\limits_{\Omega} v^2 dx$.

Будем использовать также двухмасштабную сходимость в пространстве $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$. Но прежде, чем перейти к ней, напомним, как определяется сходимость в «переменном» пространстве периодических функций $L^2(Y, d\mu^h)$ [4,7], а также свойство среднего значения [4,5].

Если последовательность a^h ограничена в $L^2(Y,d\mu^h)$, то слабая сходимость $a^h \rightharpoonup a$ в $L^2(Y,d\mu^h)$ означает, что

$$a \in L^2(Y, d\mu) \quad \text{if} \quad \lim_{h \to 0} \int\limits_{Y} a^h \psi \, d\mu^h = \int\limits_{Y} a\psi \, d\mu \quad \forall \psi \in C^\infty_{\rm per}(Y).$$

Ограниченная в $L^2(Y,d\mu^h)$ последовательность b^h сильно сходится к функции $b\in L^2(Y,d\mu)$, $b^h\longrightarrow b$, если

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_Y b^hg^h\,d\mu^h=\int\limits_Y bg\,d\mu,\quad \text{как только}\quad g^h\rightharpoonup g\quad \text{в}\quad L^2(Y,d\mu^h).$$

Сильная сходимость складывается из слабой сходимости и соотношения

$$\lim_{h \to 0} \int_{V} |b^{h}|^{2} d\mu^{h} = \int_{V} |b|^{2} d\mu.$$

Свойство среднего значения. Пусть Ω — ограниченная измеримая по Жордану область и $a^h \rightharpoonup a$ в $L^2(Y,d\mu^h)$. Тогда для любого $\varphi \in C(\overline{\Omega})$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \varphi(x) a^h \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_{V} \varphi(x) a(y) dx d\mu.$$

Дадим определение двухмасштабной сходимости в $L^2(\Omega,d\mu^h_arepsilon).$

Скажем, что ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$ последовательность $v^{\varepsilon,h}(x)$ слабо двухмасштабно сходится к функции $v(x,y) \in L^2(\Omega \times Y, dx \times d\mu)$: $v^{\varepsilon,h}(x) \stackrel{2}{\longrightarrow} v(x,y)$, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} v^{\varepsilon,h}(x) \varphi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\mu_{\varepsilon}^{h} = \int_{\Omega} \int_{Y} v(x,y) \varphi(x) b(y) dx d\mu \quad \forall \varphi \in C_{0}^{\infty}(\Omega), \quad \forall b \in C_{\text{per}}^{\infty}(Y).$$

Скажем, что последовательность $v^{\varepsilon,h}(x)$ сильно двухмасштабно сходится к функции $v(x,y)\in L^2(\Omega\times Y,dx\times d)$: $v^{\varepsilon,h}\stackrel{2}{\longrightarrow}v(x,y)$, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} v^{\varepsilon,h}(x) z^{\varepsilon,h}(x) \, d_{\varepsilon}^h = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{Y} v(x,y) z(x,y) \, dx d\mu, \quad \text{как только} \quad z^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\rightharpoonup} z(x,y).$$

Сходимости для вектор-функции $v^{\varepsilon,h}=(v_1^{\varepsilon,h},\dots,v_N^{\varepsilon,h})$ определяются покомпонентно. Например, $v^{\varepsilon,h}\stackrel{2}{\rightharpoonup}v\Leftrightarrow v_i^{\varepsilon,h}\stackrel{2}{\rightharpoonup}v_i,\ i=1,\dots,N.$

Перечислим некоторые общие свойства двухмасштабной сходимости, которые используются далее.

(i) Всякая ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$ последовательность содержит слабо двухмасштабно сходящуюся подпоследовательность.

(ii) Если
$$v^{\varepsilon,h}(x) \stackrel{2}{\rightharpoonup} v(x,y)$$
, то $\liminf_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} |v^{\varepsilon,h}|^2 \, d\mu_{\varepsilon}^h \geqslant \int\limits_{\Omega} \int\limits_{Y} |v(x,y)|^2 \, dx d\mu$.

(iii)
$$v^{\varepsilon,h}(x) \stackrel{2}{\to} v(x,y) \Leftrightarrow v^{\varepsilon,h}(x) \stackrel{2}{\rightharpoonup} v(x,y) \text{ if } \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} |v^{\varepsilon,h}|^2 \, d\mu_{\varepsilon}^h = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{V} v^2(x,y) \, dx d\mu.$$

(iv) Если
$$v^{\varepsilon,h}(x) \stackrel{2}{\rightharpoonup} v(x,y)$$
, то $v^{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup \int\limits_{\mathbb{R}^d} v(x,y)\,d\mu$.

(v) Если
$$v^{\varepsilon,h}(x) \stackrel{2}{\rightharpoonup} v(x,y), \ b^h(y) \to b(y)$$
 в $L^2(Y,d\mu^h)$, то $b^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v^{\varepsilon,h}(x) \stackrel{2}{\rightharpoonup} b(y)v(x,y).$

(vi) Пусть
$$v^{\varepsilon,h}(x) \stackrel{2}{\to} v(x,y)$$
, где $v(x,y) = \sum_i \varphi_i(x)b_i(y)$, $\varphi_i \in C(\overline{\Omega})$, $b_i \in L^2_{\rm per}(Y,d\mu)$, и пусть $b_i^h \to b_i$ в $L^2_{\rm per}(Y,d\mu^h)$, $v^h(x,y) = \sum_i \varphi_i(x)b_i^h(y)$.

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \left| v^{\varepsilon,h}(x) - v^h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 d\mu_{\varepsilon}^h = 0.$$

Приведем свойства сходимости для вектор-функций. В них участвует $A^h(y)$ — симметрическая 1-периодическая борелева матрица в \mathbb{R}^N такая, что

$$cI_N\leqslant A^h(y)\leqslant c^{-1}I_N,\quad I_N$$
 — единичная матрица в $\mathbb{R}^N,$

$$A^h(y) \rightarrow A(y)$$
 b $L^2(Y, d\mu^h)^{N(N+1)/2},$

Пусть далее $A^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = A^h_{\varepsilon}(x) = A^h_{\varepsilon}.$

(vii) Если $v^{\varepsilon,h}(x) \stackrel{2}{\rightharpoonup} v(x,y)$ в $L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^N$, то

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} A^h \bigg(\frac{x}{\varepsilon}\bigg) v^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} \, d\mu^h_{\varepsilon} \geqslant \int\limits_{\Omega} \int\limits_{Y} A(y) v(x,y) \cdot v(x,y) \, dx d\mu,$$

причем это свойство остается в силе, если условие $A^h(y)\geqslant cI_N$ заменить на $A^h(y)\geqslant 0$.

(viii) Критерий сильной двухмасштабной сходимости векторов:

$$v^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} v(x,y) \quad \text{B} \quad L^{2}(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^{h})^{N} \Leftrightarrow v^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} v(x,y) \quad \text{B} \quad L^{2}(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^{h})^{N}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} A^{h} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v^{\varepsilon,h}(x) \cdot v^{\varepsilon,h}(x) d\mu_{\varepsilon}^{h} = \int_{\Omega} \int_{Y} A(y)v(x,y) \cdot v(x,y) dx d\mu.$$
(2.1)

Свойства (i)–(vi) доказаны в [4,5]. Свойства (vii), (viii) — некоторые обобщения (например, за счет зависимости матрицы $A_{\varepsilon}^h = A^h \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ от двух параметров) аналогичных свойств, приведенных в [5, теоремы 7.1, 7.2]. Их доказательства можно приспособить для более общего случая, если воспользоваться свойством (v).

Например, докажем свойство (vii). Утверждение критерия в одну сторону вытекает из свойств (iii), (v) и определения сильной двухмасштабной сходимости. Для доказательства критерия в обратную сторону сведем случай общей матрицы A^h к случаю $A^h \equiv I_N$. В силу (vii),

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} \left(A_{\varepsilon}^h v^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} - cv^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} \right) d\mu_{\varepsilon}^h \geqslant \int\limits_{\Omega} \int\limits_{Y} \left(Av \cdot v - cv \cdot v \right) dx d\mu.$$

С другой стороны, по условию (2.1)

$$\begin{split} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{Y} \left(Av \cdot v - cv \cdot v \right) dx d\mu + c \int\limits_{\Omega} \int\limits_{Y} v \cdot v \, dx d\mu &= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{Y} Av \cdot v \, dx d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} A_{\varepsilon}^{h} v^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} \, d\mu_{\varepsilon}^{h} \geqslant \\ \geqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} \left(A_{\varepsilon}^{h} v^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} - cv^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} \right) d\mu_{\varepsilon}^{h} + \limsup_{\varepsilon \to 0} c \int\limits_{\Omega} v^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} \, d\mu_{\varepsilon}^{h}. \end{split}$$

Следовательно, в силу (vii),

И

$$\int\limits_{\Omega} \int\limits_{Y} v \cdot v \, dx d\mu \geqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} v^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} \, d\mu_{\varepsilon}^{h},$$

что, учитывая (ii) (для каждой компоненты $v_i^{\varepsilon,h}$), дает условие (2.1) с $A^h=I_N$, т.е.

$$\int_{\Omega} \int_{Y} |v|^2 dx d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} |v^{\varepsilon,h}|^2 d\mu_{\varepsilon}^{h}.$$

Остается воспользоваться следующим утверждением из элементарной теории пределов. Если ограниченные числовые последовательности $\alpha_i^{\varepsilon}, i=1,\ldots,N$, таковы что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^N \alpha_i^\varepsilon = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad \text{if } \lim\inf_{\varepsilon \to 0} \alpha_i^\varepsilon \geqslant \alpha_i \quad \forall i,$$

то $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_i^\varepsilon = \alpha_i \ \forall i$. Полагая $\alpha_i^\varepsilon = \int\limits_{\Omega} |v_i^{\varepsilon,h}|^2 d\mu_\varepsilon^h, \ \alpha_i = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{Y} v_i^2 dx d\mu$, получаем, в силу (iii), $v_i^{\varepsilon,h} \overset{2}{\to} v_i$

 $\forall i$ и, значит, $v^{arepsilon,h} \overset{2}{ o} v$. Свойство (viii) доказано.

2.2. Решение задачи (1.3) удовлетворяет условию ограниченности (1.5). Видим, что необходимо изучать последовательности вектор-функций, ограниченных в пространстве $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, вместе со своим симметрическим градиентом.

Далее используем следующие пространства периодических функций.

Пусть $L^2(Y,d\mu)$ — пространство периодических скалярных функций с мерой μ . Выделим в пространстве периодических симметрических матриц $L^2(Y,d\mu)^{d(d+1)/2}$ подпространства потенциальных и соленоидальных матриц:

$$V_{\mathrm{pot}} = V_{\mathrm{pot}}(Y, d\mu)$$
 есть замыкание множества $\{e(\varphi), \varphi \in C_{\mathrm{per}}^{\infty}(Y)^d\}$ в $L^2(Y, d\mu)^{d(d+1)/2}$,

$$V_{\rm sol} = V_{\rm sol}(Y, d\mu) = V_{\rm pot}^{\perp},$$

т.е.
$$b \in V_{\mathrm{sol}}$$
, если $\langle b \cdot e(\varphi) \rangle = 0 \ \forall \varphi \in C^{\infty}_{\mathrm{per}}(Y)^d$. Здесь и далее $\langle g \rangle = \int\limits_{Y} g \ d\mu$ — среднее по мере μ .

Особую роль при усреднении задач теории упругости играет множество $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mu)$ жестких периодических перемещений. По определению $u \in \mathcal{R}$, если

$$\exists \varphi_n \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^d, \quad \varphi_n \to u, \quad e(\varphi_n) \to 0 \quad \mathrm{B} \quad L^2(Y, d\mu).$$

(Здесь и далее мы не различаем в обозначениях лебеговы пространства скалярных, векторных и матричных функций, если это не приводит к недоразумениям.)

Очевидно, что для произвольной меры μ пространство жестких периодических перемещений содержит постоянные векторы, но не обязательно ими исчерпывается.

Введем аппроксимативные свойства (условия), связывающие меры μ и μ^h .

Скажем, что вектор $a\in L^2(Y,d\mu)^d$ и симметрическая матрица $b\in L^2(Y,d\mu)^{d(d+1)/2}$ связаны соотношением

$$a={
m div}\,b$$
 (по мере μ), ecли $\langle a\cdotarphi
angle=-\langle b\cdot e(arphi)
angle$ $orallarphi\in C^\infty_{
m per}(Y)^d.$

Скажем, что меры μ и μ^h связаны аппроксимативными условиями, если

(i) для любых a, b, связанных соотношением

$$a = \operatorname{div} b$$
 (no мере μ)

найдутся $a^h \in L^2(Y, d\mu^h)^d$, $b^h \in L^2(Y, d\mu^h)^{d(d+1)/2}$ такие, что

$$a^h = \operatorname{div} b^h$$
 (no мере μ^h),

$$a^h \to a$$
, $b^h \to b$ B $L^2(Y, d\mu^h)$;

(ii) если в (i) $a \equiv 0$, то и $a^h \equiv 0$ (сильная аппроксимируемость соленоидальных матриц).

Из аппроксимативного условия (ii) непосредственно следует важное для дальнейшего свойство сохранения потенциальности при слабой сходимости матриц, а именно: если $v^h \in V_{\rm pot}(Y,d\mu^h)$, $v^h \rightharpoonup v$, то $v \in V_{\rm pot}(Y,d\mu)$.

Сформулируем некоторые специальные свойства двухмасштабной сходимости вектор-функций $u^{\varepsilon,h}\in L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^d$, которые вытекают из общей теории двухмасштабной сходимости при совместном изучении последовательностей из вектор-функций $u^{\varepsilon,h}$ и их градиентов $e(u^{\varepsilon,h})$, если меры μ , μ^h удовлетворяют следующим требованиям:

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d,\tag{2.2}$$

т.е. пространство жестких периодических перемещений в $\mathcal{R}(\mu)$ состоит только из постоянных векторов;

мера
$$\mu$$
 не вырождена, (2.3)

т.е. $V_{\rm pot}(Y,d\mu)$ не содержит постоянных матриц;

меры
$$\mu^h$$
, μ связаны аппроксимативными условиями (i), (ii). (2.4)

Условие (2.2) для пространства вектор-функций можно трактовать как некоторый аналог условия эргодичности меры в пространстве скалярных функций (см. [3,6]).

Условие невырожденности меры (2.3) не существенно для дальнейшего, оно лишь упрощает формулировку результатов и их доказательство. Невырожденность меры влечет невырожденность усредненного тензора A^{hom} , который в общем случае лишь не отрицателен.

Далее $A^h(y)-1$ -периодическая борелева симметрическая операторная функция, действующая в пространстве симметрических матриц $\mathbb{R}^{d(d+1)/2}$ (тензор упругости), такая, что

$$c\xi \cdot \xi \leqslant A^h(\xi)\xi \cdot \xi \leqslant c^{-1}\xi \cdot \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{d(d+1)/2},$$
 (2.5)

$$A^h \to A$$
 B $L^2(Y, d\mu^h)$. (2.6)

Пусть
$$A_{\varepsilon}^h = A_{\varepsilon}^h(x) = A^h \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$
.

Для тензора A из (2.6) усредненный тензор A^{hom} можно определить по формуле

$$A^{\text{hom}}\xi \cdot \xi = \min_{v \in V_{\text{pot}}(Y, d\mu)} \int_{Y} A(\xi + v) \cdot (\xi + v) d\mu. \tag{2.7}$$

Из (2.4), (2.5) вытекает невырожденность тензора A^{\hom} . Рассмотрим последовательность $u^{\varepsilon,h}\in C_0^\infty(\Omega)^d$ такую, что

$$u^{\varepsilon,h}, e(u^{\varepsilon,h})$$
 ограничены в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$, т.е.
$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} (|u^{\varepsilon,h}|^2 + |e(u^{\varepsilon,h})|^2) \, d\mu_{\varepsilon}^h < \infty. \tag{2.8}$$

Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, будем считать, что

$$u^{\varepsilon,h}(x) \stackrel{2}{\rightharpoonup} u(x,y), \qquad e(u^{\varepsilon,h}) \stackrel{2}{\rightharpoonup} p(x,y).$$
 (2.9)

В следующей теореме уточняются свойства этих сходимостей.

Теорема 2.1. Пусть h > 0, $h = h(\varepsilon) \to 0$ и выполнены условия (2.2)–(2.6). Тогда

$$u(x,y) = u(x) \in H_0^1(\Omega)^d, \quad u^{\varepsilon,h} \rightharpoonup u(x);$$
 (2.10)

$$p(x,y) = e(u(x)) + v(x,y), \quad v \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}}(Y, d\mu));$$
 (2.11)

если дополнительно выполнено соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} A_{\varepsilon}^{h} e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e_{y} \left(w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \varphi(x) \, d\mu_{\varepsilon}^{h} = 0 \quad \forall \varphi \in C_{0}^{\infty}(\Omega), \quad \forall w \in C_{\text{per}}^{\infty}(Y)^{d}, \tag{2.12}$$

mo

$$A^h_{\varepsilon}e(u^{\varepsilon,h}) \rightharpoonup A^{\text{hom}}e(u),$$
 (2.13)

и в (2.11) имеем $v(x,y)=v(\xi,y)|_{\xi=e(u)}$, где $v(\xi,y)=v(y)$ — минимизант задач (2.7);

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} A_{\varepsilon}^{h} e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) d\mu_{\varepsilon}^{h} \geqslant \int_{\Omega} \int_{Y} A(e(u) + v) \cdot (e(u) + v) dx d\mu \geqslant \int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u) \cdot e(u) dx. \quad (2.14)$$

Утверждения теоремы верны также, если всюду
$$h\equiv 0$$
, $\mu_{\varepsilon}^0=\mu_{\varepsilon}$, и $A_{\varepsilon}^0=A_{\varepsilon}=A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Доказательство утверждений теоремы 2.1, если $h \equiv 0$, вполне аналогично доказательству аналогичных свойств двухмасштабной сходимости в пространстве скалярных функций с мерой μ_{ε} , зависящей только от одного параметра периодичности, построенной масштабированием по произвольной борелевой эргодичной мере μ (см. подробное доказательство в [3, § 3]). При доказательстве тех же утверждений с мерой μ_{ε}^h , зависящей от двух малых взаимосвязанных параметров ε , h(arepsilon) o 0, необходимо привлечь аппроксимативные свойства меры μ^h , а также некоторые видоизмененные свойства общей теории двухмасштабной сходимости (см. свойства (v), (vii), (viii)). Заметим также, что для естественных мер, сосредоточенных на сингулярных и тонких сетках (когда структура множества периодических жестких перемещений $R(\mu)$ несколько иная), аналогичные утверждения в пространствах теории упругости доказаны в [4, §§ 9-12]. По этим причинам доказательство теоремы 2.1 опускаем.

2.3. Свяжем с ограниченной липшицевой областью Ω пространство $\mathcal{H}^{\varepsilon,h}$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)^d$ по норме $\left(\int\limits_{\Omega} (|\varphi|^2 + |e(\varphi)|^2) \, d\mu_\varepsilon^h\right)^{1/2}$. Изучим следующую задачу теории упругости:

$$u^{\varepsilon,h} \in \mathcal{H}^{\varepsilon,h}, \quad \int\limits_{\Omega} (A_{\varepsilon}^{h} e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) + u^{\varepsilon,h} \cdot \varphi) \, d\mu_{\varepsilon}^{h} = \int\limits_{\Omega} f^{\varepsilon,h} \cdot \varphi \, d\mu_{\varepsilon}^{h} \quad \forall \varphi \in C_{0}^{\infty}(\Omega)^{d}, \tag{2.15}$$

где $f^{\varepsilon,h}$ ограничены в $L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^d$, тензор $A_\varepsilon^h=A^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ удовлетворяет условиям (2.5), (2.6).

Существование и единственность решения как пары $u^{\varepsilon,h}$, $e(u^{\varepsilon,h})$ следует из теоремы Рисса. Введем усредненную задачу

$$u \in H_0^1(\Omega)^d$$
, $\int_{\Omega} (A^{\text{hom}} e(u) \cdot e(\varphi) + u \cdot \varphi) dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)^d$. (2.16)

Очевидны существование и единственность этой задачи в силу постоянства и невырожденности тензора A^{\hom} .

Связь между решениями задач (2.15), (2.16) устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть h > 0, $h(\varepsilon) \to 0$ и выполнены условия (2.2)–(2.6). Тогда если

$$f^{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup f(x) \quad \mathcal{B} \quad L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^d,$$
 (2.17)

mo

$$u^{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup u(x) \quad \mathcal{B} \quad L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^d,$$
 (2.18)

$$e(u^{\varepsilon,h}(x)) \stackrel{2}{\rightharpoonup} e(u(x)) + v(x,y) \quad \mathbf{s} \quad L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^{d(d+1)/2},$$
 (2.19)

где

$$v(x,y) = v(\xi,x)|_{\xi = e(u(x))}, \quad v(\xi,x) = v(y)$$
 — минимизант задачи (2.7), (2.20)

m.e.

$$\operatorname{div}_{u} A(e(u(x)) + v(x, y)) = 0.$$

Если сходимость правых частей (2.17) является сильной, то сильными будут и сходимости решений и их градиентов в (2.18) и (2.19). Кроме того, при этом имеет место сходимость энергий

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} A_{\varepsilon}^{h} e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) d\mu_{\varepsilon}^{h} = \int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u) \cdot e(u) dx. \tag{2.21}$$

Утверждения теоремы верны также при $h\equiv 0$, когда $\mu_{\varepsilon}^0=\mu_{\varepsilon}$, с очевидными изменениями в формулировках.

Доказательство. Из интегрального тождества (2.15) с $\varphi = u^{\varepsilon,h}$ следует условие ограниченности (2.8), благодаря которому, переходя, если необходимо, к подпоследовательности (см. свойство (i) двухмасштабной сходимости), считаем выполненными соотношения (2.9), (2.10).

Взяв в тождестве (2.15) пробную функцию вида

$$\varphi(x)=\varepsilon\psi(x)w(\varepsilon^{-1}x),\quad \psi\in C_0^\infty(\Omega),\quad w\in C_{\rm per}^\infty(Y)^d,$$

после перехода к пределу получаем условие (2.12), из которого вытекает сходимость (2.13). Тогда можно перейти к пределу в тождестве (2.15) с произвольной функцией $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, в результате чего получаем тождество (2.16) для предельной функции u. В силу единственности решения задачи (2.16), сходимость (2.18) доказана для всей последовательности ε .

Пусть в (2.17) имеем сильную сходимость $f^{\varepsilon,h} \to f$. Сравним энергетические равенства для задач (2.15), (2.16):

$$\int\limits_{\Omega} \left[A_{\varepsilon}^{h} e(u^{\varepsilon h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) + u^{\varepsilon,h} \cdot u^{\varepsilon,h} \right] d\mu_{\varepsilon}^{h} = \int\limits_{\Omega} f^{\varepsilon,h} \cdot u^{\varepsilon,h} \, d\mu_{\varepsilon}^{h},$$

$$\int_{\Omega} [A_{\varepsilon}^{\text{hom}} e(u) \cdot e(u) + u \cdot u] dx = \int_{\Omega} f \cdot u dx.$$

Поскольку слабая сходимость (2.18) уже доказана, то по определению сильной сходимости

$$\int\limits_{\Omega} f^{\varepsilon,h} \cdot u^{\varepsilon,h} \, d\mu_{\varepsilon}^{h} \to \int\limits_{\Omega} f \cdot u \, dx.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \left[A_{\varepsilon}^{h} e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) + u^{\varepsilon,h} \cdot u^{\varepsilon,h} \right] d\mu_{\varepsilon}^{h} = \int_{\Omega} \left[A^{\text{hom}} e(u) \cdot e(u) + u \cdot u \right] dx.$$

Отсюда и из свойств полунепрерывности для двухмасштабной сходимости (см. (ii) и (2.14)) выводим сходимость энергий (2.21), а также сходимость норм

$$\int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon,h}|^2 \, d\mu_{\varepsilon}^h \to \int\limits_{\Omega} |u|^2 \, dx.$$

Из сходимости энергий (2.21) следует, что в соотношениях (2.14) для решения $u^{\varepsilon,h}$ всюду имеют место равенства. В частности,

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} A_{\varepsilon}^{h} e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) d\mu_{\varepsilon}^{h} = \int_{\Omega} \int_{V} A(e(u) + v) \cdot (e(u) + v) dx d\mu.$$

Отсюда, в силу критериев сильной сходимости (iii), (viii), получаем сильную сходимость решений и их градиентов. Теорема доказана. □

В следующей теореме мера μ^h удовлетворяет дополнительному требованию, а именно, пусть выполнено равномерное (по h) неравенство Корна для периодических функций

$$\int_{Y} |\varphi|^2 d\mu^h \leqslant c \int_{Y} |e(\varphi)|^2 d\mu^h \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(Y)^d, \quad \int_{Y} \varphi d\mu^h = 0.$$
 (2.22)

Из него, в частности, вытекает возможность представить матрицу $v \in V_{\text{pot}}(Y, d\mu^h)$ в виде v = e(w), $w \in H^1_{\text{per}}(Y, d\mu^h)^d$. Поэтому и минимизант вариационной задачи

$$A_h^{\text{hom}} \xi \cdot \xi = \min_{v \in V_{\text{pot}}(Y, d\mu^h)} \int_Y A(\xi + v) \cdot (\xi + v) \, d\mu^h$$
 (2.23)

имеет представление через потенциал:

$$v^h(\xi, y) = e_y(w^h(\xi, y)), \qquad w^h(\xi, y) \in H^1_{per}(Y, d\mu^h)^d, \quad \text{r.e.} \quad \text{div}_y A(\xi + e_y(w^h)) = 0.$$
 (2.24)

Теорема 2.3 (о корректоре). Пусть в предположениях теоремы 2.2

$$f^{\varepsilon,h} \to f \quad \text{θ} \quad L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^d, \quad u \in C^2(\overline{\Omega})^d.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \left| e \left(u^{\varepsilon,h}(x) - u(x) - \varepsilon u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right|^2 d\mu_{\varepsilon}^h = 0, \tag{2.25}$$

где $u^{\varepsilon,h}$, u — решения задач (2.15), (2.16),

$$u_1(x,y) = w^h(e(u(x)), y), \quad w^h(\xi, y) \quad u_3 \quad (2.24).$$
 (2.26)

Доказательство. По теореме 2.2

$$e(u^{\varepsilon,h}(x)) \stackrel{2}{\to} e(u(x)) + v(x,y) = p(x,y),$$
 (2.27)

где v(x,y) определено в (2.20). Отсюда следует сходимость (2.25) по свойству (vi) двухмасштабной сходимости. В самом деле, для минимизанта $v^h = v^h(\xi,y)$ задачи (2.23) имеет место сходимость

$$v^h(\xi, y) \to v(\xi, y)$$
 B $L^2(Y, d\mu^h)^d$. (2.28)

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим интегральное тождество для v^h :

$$v^h \in V_{\text{pot}}(Y, d\mu^h), \quad \int\limits_{Y} A^h(\xi + v^h) \cdot e(\varphi) \, d\mu^h = 0 \quad \forall \varphi \in C^{\infty}_{\text{per}}(Y)^d.$$

Из него вытекает оценка

$$\int\limits_V A^h v^h \cdot v^h \, d\mu^h \leqslant \int\limits_V A^h \xi \cdot \xi \, d\mu^h,$$

которая обеспечивает слабую сходимость v^h в $L^2(Y,d\mu^h)^d$ (по крайней мере, по подпоследовательности). Из аппроксимативных свойств меры μ^h (см. свойство сохранения потенциальности при слабой сходимости матриц) следует $v \in V_{\rm pot}(Y,d\mu)$. Поэтому переход к пределу в тождестве для v^h дает следующее тождество для минимизанта вариационной задачи (2.7):

$$v \in V_{\text{pot}}(Y, d\mu), \quad \int_{Y} A(\xi + v) \cdot e(\varphi) \, d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(Y)^{d}.$$

Докажем сильную сходимость

$$v^h(\xi, y) \longrightarrow v(\xi, y)$$
 B $L^2(Y, d\mu^h)^d$. (2.29)

Для этого, сравнивая энергетические равенства для v^h и v, выводим сходимость квадратических форм

$$\int_{Y} A^{h} v^{h} \cdot v^{h} d\mu^{h} = -\int_{Y} A^{h} \xi \cdot v^{h} d\mu^{h} \to -\int_{Y} A \xi \cdot v d\mu = \int_{Y} A v \cdot v d\mu. \tag{2.30}$$

Справедлив критерий сильной сходимости векторов (матриц) в пространствах $L^2(Y,d\mu)$, аналогичный критерию сильной двухмасштабной сходимости (viii) из § 2. Согласно этому критерию, слабая сходимость $v^h \rightharpoonup v$ вместе со сходимостью квадратических форм (2.30) влечет сильную сходимость (2.29).

Нетрудно увидеть, что функция v(x,y) из (2.26) имеет структуру, предусмотренную свойством (vi) двухмасштабной сходимости. Положим $p^h(x,y)=e(u(x))+v^h(x,y)$, где $v^h(x,y)=v^h(x,y)|_{\xi=e(u(x))}$. Тогда из (2.27), (2.28) следует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \left| e(u^{\varepsilon,h}) - p^h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 d\mu_{\varepsilon}^h = 0,$$

что после представления $v^h(x,y)$ через потенциал $v^h(x,y)=e_y(w^h(x,y))$ дает соотношения (2.25), (2.26), поскольку (см. (2.26))

$$e\left(\varepsilon u_1\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = e_y(w^h(x,y))|_{y=x/\varepsilon} + O(\varepsilon),$$

в силу (2.22). Теорема доказана.

3. Усреднение на составной структуре

Применим общие результаты из § 2 к конретной мере.

Теорема 3.1 (см. [12,13]). Для составных мер μ , μ^h , заданных в (1.1), выполнены условия (2.2)–(2.4).

На основании этой теоремы извлечем некоторые следствия из результатов предыдущего параграфа для задачи Дирихле в статической постановке с переменным тензором упругости и переменной правой частью:

$$u^{\varepsilon,h} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \int_{\Omega} A_{\varepsilon}^h e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) \, d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} f^{\varepsilon,h} \cdot \varphi \, d\mu_{\varepsilon}^h \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)^2, \tag{3.1}$$

где $A^h_{\varepsilon}=A^h_{\varepsilon}(x)=A^h\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$, $A^h(y)$ — семейство 1-периодических тензоров упругости, удолвлетворяющих условиям (2.5), (2.6), а правая часть $f^{\varepsilon,h}\in L^2(\Omega,d\mu^h_{\varepsilon})$ ограничена в $L^2(\Omega,d\mu^h_{\varepsilon})^2$.

Очевидно, что эта задача обобщает задачу (1.3).

Разрешимость задачи (3.1), а также условие равномерной ограниченности (2.8) вытекают из предположений на тензор A^h_{ε} и правую часть $f^{\varepsilon,h}$, в силу неравенства Корна (1.4). При рассмотрении задачи (3.1) допускаем случай $h\equiv 0$. Тогда $\mu^0_{\varepsilon}=\mu_{\varepsilon},\ A^0=A,\ A^0_{\varepsilon}=A_{\varepsilon}=A_{\varepsilon}$

При рассмотрении задачи (3.1) допускаем случай $h\equiv 0$. Тогда $\mu_{\varepsilon}^0=\mu_{\varepsilon},\ A^0=A,\ A_{\varepsilon}^0=A_{\varepsilon}=A\left(rac{x}{arepsilon}
ight).$

Теорема 3.2. Пусть $f^{\varepsilon,h}(x) \to f(x)$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$. Тогда для решений задачи (3.1) имеет место сходимость (2.18), где предельная функция u(x) есть решение задачи (1.6). Пусть

$$f^{\varepsilon,h}(x) \to f(x) \quad \mathcal{B} \quad L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^2,$$
 (3.2)

тогда и сходимость решений будет сильной; при этом имеет место сходимость упругих энергий (2.21).

Пусть $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})^2$, тогда имеет место сходимость с корректором вида (2.25), а также сходимость с корректором в $H^1(\Omega)^2$

$$\left| u^{\varepsilon,h}(x) - \left(u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right|_{H^1(\Omega)^2} \to 0, \tag{3.3}$$

где корректор $u_1(x,y)$ определен формулой (2.26).

Доказательство. Без потери общности считаем, что $u^{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup u(x)$ в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^2$, причем $u(x) \in H^1_0(\Omega)^2$ (см. теорему 2.1). Запишем задачу (3.1) в резольвентной форме (2.15), а именно

$$u^{\varepsilon,h} \in \mathcal{H}^{\varepsilon,h} : \int_{\Omega} (A^h_{\varepsilon} e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) + u^{\varepsilon,h} \cdot \varphi) \, d\mu^h_{\varepsilon} = \int_{\Omega} g^{\varepsilon,h} \cdot \varphi \, d\mu^h_{\varepsilon},$$

где $g^{\varepsilon,h}=u^{\varepsilon,h}+f^{\varepsilon,h}$ и $\mathcal{H}^{\varepsilon,h}=H^1_0(\Omega)^2$, в силу составной структуры меры μ^h из (1.1). Поскольку $g^{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup g(x)=u(x)+f(x)$, то по теореме 2.2 предельная функция u есть решение усредненной задачи (2.16) с правой частью g, а значит, и задачи (1.6). Этим исчерпан случай слабой сходимости правых частей.

В предположении (3.2) сходимость энергий устанавливается так же, как в теореме 2.2. Докажем сильную сходимость решений. Для этого рассмотрим второй вариант задачи (3.1):

$$v^{\varepsilon,h} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \int_{\Omega} A_h^{\varepsilon} e(v^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) \, d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} z^{\varepsilon,h} \cdot \varphi \, d\mu_{\varepsilon}^h \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$
 (3.4)

где в правой части стоит произвольная вектор-функция $z^{\varepsilon,h} \rightharpoonup z$. Тогда $v^{\varepsilon,h} \rightharpoonup v$, где v — решение усредненного уравнения (1.6) с правой частью z.

Полагая в (3.4) $\varphi = u^{\varepsilon,h}$, а в (3.1) $\varphi = v^{\varepsilon,h}$, получаем по формуле Грина—Бетти равенство

$$\int_{\Omega} u^{\varepsilon,h} \cdot z^{\varepsilon,h} d\mu_{\varepsilon}^{h} = \int_{\Omega} f^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} d\mu_{\varepsilon}^{h},$$

правая часть которого по определению сильной сходимости $(f^{\varepsilon,h}\longrightarrow f,\,v^{\varepsilon,h}\rightharpoonup v)$ сходится к

$$\int\limits_{\Omega} f \cdot v \, dx = \int\limits_{\Omega} u \cdot z \, dx.$$

Последнее равенство выводится из интегрального тождества для предельных функций $u,\ v.$ В результате

$$\int\limits_{\Omega} u^{\varepsilon,h} \cdot z^{\varepsilon,h} \, d\mu_{\varepsilon}^{h} \to \int\limits_{\Omega} u \cdot z \, dx,$$

что, в силу произвольности $z^{\varepsilon,h} \rightharpoonup z$, означает искомую сильную сходимость решений.

Сходимости с корректором для решения $u^{\varepsilon,h}$ вытекают из теоремы 2.3, неравенства Корна (1.4), а также из свойства среднего значения (см. § 2). Теорема доказана.

4. Некоторые неравенства для составных мер и следствия из них

4.1. Пусть $\lambda,\ \lambda^h,\ \mu,\ \mu^h$ — меры из (1.1), $\lambda_{\varepsilon},\ \lambda_{\varepsilon}^h,\ \mu_{\varepsilon},\ \mu_{\varepsilon}^h$ — масштабированные меры, Ω — ограниченная область, $h\geqslant 0$, и при h=0 считаем, что $\lambda^0=\lambda,\ \mu^0=\mu,\ \lambda_{\varepsilon}^0=\lambda_{\varepsilon},\ \mu_{\varepsilon}^0=\mu_{\varepsilon}$.

Лемма 4.1. 1° . Для периодических функций имеют место равномерные неравенства Корна и Пуанкаре

$$\int_{Y} |u|^{2} d\mu^{h} \leqslant C_{1} \int_{Y} |e(u)|^{2} dx, \quad u \in C_{per}^{\infty}(Y)^{2}, \quad \int_{Y} u d\mu^{h} = 0,$$
(4.1)

$$\int_{V} v^2 d\mu^h \leqslant C_2 \int_{V} |\nabla v|^2 dx, \quad v \in C_{\text{per}}^{\infty}(Y), \quad \int_{V} v d\mu^h = 0, \tag{4.2}$$

где константы C_1 , C_2 зависят лишь от геометрии сетки F, $h \geqslant 0$.

2°. Для финитных функций имеют место равномерные неравенства Корна (1.4) и Фридрихса

$$\int_{\Omega} v^2 d\mu_{\varepsilon}^h \leqslant C \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx, \quad v \in C_0^{\infty}(\Omega), \tag{4.3}$$

а также неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} v^2 d\lambda_{\varepsilon}^h \leqslant C_0 \int_{\mathbb{R}^2} (v^2 + \varepsilon^2 |\nabla v|^2) dx, \quad v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2), \tag{4.4}$$

где $h\geqslant 0$, константа C зависит от геометрии сетки F и диаметра области Ω , а константа C_0 — лишь от геометрии сетки F.

Доказательство. 1°. Докажем неравенства (4.1), (4.2) для h > 0.

Из равномерного (по h) неравенства для прямоугольника $\Pi = (0, a) \times (0, b)$, в котором выделена полоса $\Pi^h = (0, h) \times (0, b)$,

$$\frac{1}{h} \int_{\Pi h} \varphi^2 dx \leqslant c_1 \int_{\Pi} (\varphi^2 + |\nabla \varphi|^2) dx, \quad \varphi \in C^{\infty}(\overline{\Pi}), \quad c_1 = \text{const}(\Pi), \tag{4.5}$$

а также из обычного неравенства Пуанкаре

$$\int_{V} \varphi^{2} dx \leqslant c_{2} \int_{V} |\nabla \varphi|^{2} dx, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(Y), \quad \int_{V} \varphi dx = 0,$$

выводим неравенство

$$\int\limits_{Y} \varphi^2 \, d\mu^h \leqslant C \int\limits_{Y} |\nabla \varphi|^2 \, dx, \quad \varphi \in C^{\infty}_{\mathrm{per}}(Y), \quad \int\limits_{Y} \varphi \, dx = 0.$$

Полагая в нем $\varphi=v-m,\, m=\int v\,dx,$ получаем

$$\int_{Y} (v - m)^2 d\mu^h \leqslant C \int_{Y} |\nabla v|^2 dx, \quad v \in C_{\text{per}}^{\infty}(Y).$$

Отсюда следует неравенство Пуанкаре (4.2) для скалярных функций.

Следовательно, для вектор-функций имеем неравенство

$$\int\limits_{Y} |u|^2 d\mu^h \leqslant C \int\limits_{Y} |\nabla u|^2 dx, \quad u \in C^{\infty}_{per}(Y)^2, \quad \int\limits_{Y} u d\mu^h = 0,$$

из которого, используя обычное неравенство Корна для меры Лебега

$$\int\limits_{Y} |\nabla u|^2 \, dx \leqslant 2 \int\limits_{Y} |e(u)|^2 \, dx, \quad u \in C^{\infty}_{\rm per}(Y)^2,$$

выводим неравенство (4.1).

В случае, когда h=0 и $\mu^0=\mu$, вместо (4.5) используем неравенство для следа

$$\int_{Y} \varphi^{2} d\lambda \leqslant C \int_{Y} (\varphi^{2} + |\nabla \varphi|^{2}) dx, \quad \varphi \in C^{\infty}(\overline{Y}), \quad C = \text{const}(F), \tag{4.6}$$

а в остальном доказательство неравенств (4.1), (4.2) такое же, как при h > 0.

 2° . В случае, когда h>0, исходя из неравенства (4.5), можно доказать неравенство

$$\int_{Y} \varphi^{2} d\lambda^{h} \leqslant C_{0} \int_{Y} (\varphi^{2} + |\nabla \varphi|^{2}) dx, \quad \varphi \in C^{\infty}(\overline{Y}), \quad C_{0} = \operatorname{const}(F),$$

которое после гомотетичного сжатия переходит в неравенство для квадрата εY :

$$\int_{\varepsilon Y} \varphi^2 d\lambda_{\varepsilon}^h \leqslant C_0 \int_{\varepsilon Y} (\varphi^2 + \varepsilon^2 |\nabla \varphi|^2) dx, \quad \varphi \in C^{\infty}(\varepsilon \overline{Y}).$$

Отсюда, разбивая плоскость на непересекающиеся полуоткрытые квадраты $\mathbb{R}^2 = \bigcup_i \varepsilon Y_i$, получаем неравенство (4.4):

$$\int_{\mathbb{R}^2} v^2 d\lambda_{\varepsilon}^h = \sum_i \int_{\varepsilon Y_i} v^2 d\lambda_{\varepsilon}^h \leqslant C_0 \sum_i \int_{\varepsilon Y_i} (v^2 + \varepsilon^2 |\nabla v|^2) dx \leqslant C_0 \int_{\mathbb{R}^2} (v^2 + \varepsilon^2 |\nabla v|^2) dx.$$

Из (4.4), используя неравенство Фридрихса

$$\int_{V} v^{2} dx \leqslant C \int_{V} |\nabla v|^{2} dx, \quad v \in C_{0}^{\infty}(\Omega), \quad C = \text{const}(\Omega),$$

выводим неравенство (4.3), из которого следует (1.4) по неравенству Корна

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leqslant 2 \int_{\Omega} |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^{\infty}(\Omega)^2.$$

$$\tag{4.7}$$

В случае h=0 доказательство приведенных неравенств исходит из оценки (4.6). Лемма доказана.

4.2. Докажем с помощью неравенства (4.4) некоторые специфические свойства сходимости в пространстве $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ с составной мерой μ_ε^h .

Лемма 4.2. Имеет место сходимость

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{\Omega} v^2 d\lambda_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} v^2 dx, \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.8}$$

Доказательство. Для $v\in C_0^\infty(\Omega)$ равенство (4.8) следует из слабой сходимости мер $d\lambda_\varepsilon^h \rightharpoonup dx$. Для произвольной $v\in H_0^1(\Omega)$ имеем оценку

$$\left| \int\limits_{\Omega} v^2 \, d\lambda_{\varepsilon}^h - \int\limits_{\Omega} v^2 \, dx \right| \leqslant \int\limits_{\Omega} |v - v_{\delta}|^2 \, d\lambda_{\varepsilon}^h + \left| \int\limits_{\Omega} v_{\delta}^2 \, d\lambda_{\varepsilon}^h - \int\limits_{\Omega} v_{\delta}^2 \, dx \right| + \left| \int\limits_{\Omega} v_{\delta}^2 \, dx - \int\limits_{\Omega} v^2 dx \right|,$$

в которой используем

$$v_{\delta} \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad |v - v_{\delta}|_{H^1(\Omega)}^2 < \delta,$$
 (4.9)

и значит, в силу (4.4),

$$\int\limits_{\Omega} |v - v_{\delta}|^2 d\lambda_{\varepsilon}^h < C_0 \delta.$$

Поэтому

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left| \int_{\Omega} v^2 d\lambda_{\varepsilon}^h - \int_{\Omega} v^2 dx \right| \leqslant C\delta,$$

где δ — любое, а константа C не зависит от δ . Отсюда следует формула (4.8). Лемма доказана. \square

Теорема 4.3. Если последовательность $v_{\varepsilon} \in H^1_0(\Omega)$ такова, что

$$v_{\varepsilon} \rightharpoonup v \quad \mathcal{B} \quad H_0^1(\Omega), \qquad v_{\varepsilon} \to v \quad \mathcal{B} \quad L^2(\Omega),$$

$$\tag{4.10}$$

mo

$$v_{\varepsilon} \to v \quad \mathbf{s} \quad L^{2}(\Omega, d\lambda_{\varepsilon}^{h}), \qquad v_{\varepsilon} \to v \quad \mathbf{s} \quad L^{2}(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^{h}), \tag{4.11}$$

Доказательство. Согласно критерию сильной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$ и свойству полунепрерывности снизу (см. § 2) для доказательства сходимости (4.10) $_1$ (сходимость (4.11) $_2$ следует из (4.11) $_1$ и (4.10) $_2$) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} v_{\varepsilon} \varphi \, d\lambda_{\varepsilon}^{h} = \int_{\Omega} v \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_{0}^{\infty}(\Omega), \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Y} |v_{\varepsilon}|^{2} \, d\lambda_{\varepsilon}^{h} \leqslant \int_{Y} u^{2} \, dx. \tag{4.12}$$

Для v_{δ} из (4.9) имеет место представление

$$\int_{\Omega} v_{\varepsilon} \varphi \, d\lambda_{\varepsilon}^{h} - \int_{\Omega} v \varphi \, dx = \int_{\Omega} (v_{\varepsilon} - v) \varphi \, d\lambda_{\varepsilon}^{h} + \int_{\Omega} (v - v_{\delta}) \varphi \, d\lambda_{\varepsilon}^{h} + \left(\int_{\Omega} v_{\delta} \varphi \, d\lambda_{\varepsilon}^{h} - \int_{\Omega} v_{\delta} \varphi \, dx \right) + \int_{\Omega} (v_{\delta} - v) \varphi \, dx.$$

В последней сумме второе и четвертое слагаемые можно оценить, используя (4.9)2 и (4.4):

$$\left| \int_{\Omega} (v - v_{\delta}) \varphi \, d\lambda_{\varepsilon}^{h} \right| \leqslant C_{\varphi} \delta, \qquad \left| \int_{\Omega} (v_{\delta} - v) \varphi \, dx \right| \leqslant C_{\varphi} \delta,$$

а пределы при $\varepsilon \to 0$ от первого и третьего слагаемых равны нулю, так как при $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\Omega} |v_{\varepsilon} - v|^2 d\lambda_{\varepsilon}^h \leqslant C_0 \int_{\Omega} \left(|v_{\varepsilon} - v|^2 + \varepsilon^2 |\nabla(v_{\varepsilon} - v|^2) dx = C_0 \int_{\Omega} |v_{\varepsilon} - v|^2 dx + O(\varepsilon^2) = o(1)$$
 (4.13)

в силу (4.4) и (4.10),

$$\int\limits_{\Omega} v_{\delta}\varphi\,d\lambda_{\varepsilon}^{h} \to \int\limits_{\Omega} v_{\delta}\varphi\,dx, \quad \text{вследствие сходимости мер} \quad d\lambda_{\varepsilon}^{h} \rightharpoonup dx.$$

Поэтому

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\Omega} v_{\varepsilon} \varphi \, d\lambda_{\varepsilon}^{h} - \int_{\Omega} v \varphi \, dx \right) \leqslant C_{\varphi} \delta;$$

отсюда, в силу произвольности δ , вытекает $(4.12)_1$.

Сходимость $(4.12)_2$ следует из (4.13) и (4.8):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} |v_{\varepsilon}|^2 d\lambda_{\varepsilon}^h \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} |v_{\varepsilon} - v|^2 d\lambda_{\varepsilon}^h + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} v^2 d\lambda_{\varepsilon}^2 = \int_{\Omega} v^2 dx.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.4 (принцип компактности). 1° . Последовательность функций $v^{\varepsilon,h}\in C_0^{\infty}(\Omega)$ таких, что

$$v^{\varepsilon,h}, \nabla v^{\varepsilon,h}$$
 ограничены в $L^2(\Omega, dx),$ (4.14)

компактна в смысле сильной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$.

 $2^{\circ}.$ Последовательность вектор-функций $u^{\varepsilon,\hat{h}}\in C_0^{\infty}(\Omega)^2$ таких, что

$$u^{\varepsilon,h}, e(u^{\varepsilon,h})$$
 ограничены в $L^2(\Omega, dx),$ (4.15)

компактна в смысле сходимости в $L^2(\Omega,d\mu_{\varepsilon}^h)^2$.

Простым следствием из теоремы 4.3 является первое утверждение этой теоремы. Из него вытекает второе утверждение, поскольку, в силу неравенства Корна (4.7), условие (4.15) влечет условие (4.14) для каждой компоненты вектора $u^{\varepsilon,h}$.

Лемма 4.5. Если в (4.8) или (4.10) заменить $H_0^1(\Omega)$ на $H^1(\Omega)$, то утверждения леммы 4.2 и теоремы 4.3 останутся в силе.

Доказательство. Из слабой сходимости мер $d\mu_{\varepsilon}^h \rightharpoonup dx$ (см. определение в § 1) следует сходимость [5, лемма 1.1]

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \varphi \, d\mu_{\varepsilon}^{h} = \int_{\Omega} \varphi \, dx \quad \varphi \in C(\overline{\Omega}).$$

Отсюда ясно, что для вывода (4.8) в случае, когда $v \in H^1(\Omega)$, рассматриваем в (4.9) $v_{\delta} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ и в остальном повторяем прежнее доказательство. Лемма доказана.

Лемма 4.6. Если $v \in H^1(\Omega)$, то $v \to v$ в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$. Если $v_{\varepsilon} \to v$ в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$, $v \in H^1(\Omega)$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} |v_{\varepsilon} - v|^2 d\mu_{\varepsilon}^h = 0. \tag{4.16}$$

Доказательство. Для вывода первого утверждения возьмем $v_{\varepsilon}=v$ и воспользуемся леммой 4.5. Для вывода второго утверждения заметим, что $(v_{\varepsilon}-v)\to 0$ в $L^2(\Omega,d\mu_{\varepsilon}^h)$, что по критерию сильной сходимости влечет (4.16).

Доказательство теоремы 1.1. Поскольку $f \in C^{\infty}(\overline{\Omega})^2$, то $f^{\varepsilon,h} \equiv f \to f$ в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^2$ (см. лемму 4.6). Отсюда по теореме 3.2 получаем сходимость энергий (1.8), а также сильную сходимость решений. Последняя по лемме 4.6 влечет (1.7). Теорема 1.1 доказана.

5. О сходимости спектров

Задачи (4.1) и (1.6) можно записать в операторной форме

$$\mathcal{A}^{\varepsilon}u^{\varepsilon} = f^{\varepsilon}, \quad \mathcal{A}u = f,$$

где $\mathcal{A}^{\varepsilon}=\mathcal{A}^{\varepsilon,h}$, $f^{\varepsilon}=f^{\varepsilon,h}$ при $h=h(\varepsilon)$, $\mathcal{A}^{\varepsilon}$, $\mathcal{A}-$ неотрицательные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $H_{\varepsilon}=L^2(\Omega,d\mu_{\varepsilon}^h)^2$ и $H=L^2(\Omega,dx)^2$ соответственно, $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ и \mathcal{A} имеют компактную резольвенту.

Отметим, что H_{ε} — переменное пространство, поэтому не применимы обычные теоремы о спектральных асимптотиках [8].

Далее рассматриваем общую ситуацию, в которую вписывается данный конкретный случай: формулируемые ниже условия (5.1) и (Γ_1) – (Γ_3) выполнены для операторов задач (4.1), (1.6), согласно полученным ранее результатам.

Пусть оператор $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ имеет компактную резольвенту при $\varepsilon < \varepsilon_0$, т.е. его спектр состоит из сходящейся к ∞ последовательности конечнократных собственных значений

$$0\leqslant \lambda_1^{arepsilon}\leqslant \lambda_2^{arepsilon}\leqslant \cdots o \infty, \ \{u_i^{arepsilon}\}_{i=1}^{\infty}$$
 — ортонормированный базис в $H_{arepsilon}, \quad \mathcal{A}^{arepsilon}u_i^{arepsilon}=\lambda_{arepsilon}^iu_i^{arepsilon}.$ (5.1)

Далее для ограниченных операторов B_{ε} , B, действующих в пространстве H_{ε} и H соответственно, таких, что $\limsup_{\varepsilon \to 0} \|B_{\varepsilon}\| < \infty$, будем рассматривать сильную сходимость $B_{\varepsilon} \to B$, которая означает, что $B_{\varepsilon}u_{\varepsilon} \to Bu$ в H_{ε} , как только $u_{\varepsilon} \to u$ в H_{ε} .

Введем следующие условия:

$$(\Gamma_1)$$
 $(\mathcal{A}^{\varepsilon} + \lambda)^{-1} \to (\mathcal{A} + \lambda)^{-1} \ \forall \lambda > 0;$

 (Γ_2) в пространстве $X_{arepsilon}$ имеет место принцип компактности, а именно:

если
$$\limsup_{\varepsilon \to 0} ((\mathcal{A}^{\varepsilon} + 1)u_{\varepsilon}, u_{\varepsilon})_{\varepsilon} < \infty,$$
 то $\exists \varepsilon' : u'_{\varepsilon} \to u;$

 (Γ_3) \mathcal{A} имеет компактную резольвенту.

Пусть
$$\mathcal{A}^{\varepsilon} = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda \, dE_{\varepsilon}(\lambda), \ \mathcal{A} = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda)$$
 — спектральные разложения операторов $\mathcal{A}^{\varepsilon}, \ \mathcal{A}$.

Теорема 5.1. В предположении (Γ_1) , если λ не является собственным значением \mathcal{A} , то

$$E_{\varepsilon}(\lambda) \to E(\lambda).$$

Теорема 5.2. Из (Γ_1) и (Γ_2) следует сходимость по Хаусдорфу $\operatorname{Sp} \mathcal{A}^{\varepsilon} \longrightarrow \operatorname{Sp} \mathcal{A}$:

 $(H_1) \ \forall \lambda \in \operatorname{Sp} \mathcal{A} \ \exists \lambda_{\varepsilon} \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}_{\varepsilon} \text{ makoe, umo } \lambda_{\varepsilon} \to \lambda;$

$$(H_2)$$
 ecau $\lambda_{\varepsilon} \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}_{\varepsilon}$, $\lambda_{\varepsilon} \to \lambda$, $\lambda < \infty$, mo $\lambda \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$.

Заметим, что сходимость (H_1) требует выполнения лишь одного условия (Γ_1) . Условие (Γ_2) используется при доказательстве сходимости (H_2) .

Теорема 5.1 и первый пункт теоремы 5.2 доказаны в [14, § 8] (даже в более общей ситуации). Докажем второй пункт теоремы 5.2. В соотношениях для собственных значений λ_{ε}

$$\mathcal{A}_{\varepsilon}u_{\varepsilon} = \lambda_{\varepsilon}u_{\varepsilon}, \quad (u^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})_{\varepsilon} = 1,$$

можно считать, что $u^{\varepsilon} \to u$ (следует из (Γ_2)). После перехода к пределу (см. (Γ_1) и свойство сохранения нормы при сильной сходимости)

$$Au = \lambda u, \quad (u, u) = 1,$$

откуда следует $\lambda \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$, что и требовалось доказать.

Теорема 5.3. В предположении (Γ_1) , если λ не является собственным значением \mathcal{A} , то

$$\dim E_{\varepsilon}(\lambda)H_{\varepsilon} \geqslant \dim E(\lambda)H \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_{0}. \tag{5.2}$$

 \mathcal{Q} оказательство. Пусть u_1,\ldots,u_n — ортонормированная система в $E(\lambda)H$. Для любого i существует $\hat{u}_i^{\varepsilon} \in H_{\varepsilon}$ такой, что $\hat{u}_i^{\varepsilon} \to u_i$. Пусть $u_i^{\varepsilon} = E_{\varepsilon}(\lambda)\hat{u}_i^{\varepsilon}$, тогда по теореме 5.1

$$(u_i^{\varepsilon}, u_i^{\varepsilon})_{\varepsilon} = (E_{\varepsilon}(\lambda)\hat{u}_i^{\varepsilon}, \hat{u}_i^{\varepsilon})_{\varepsilon} \to (E(\lambda)u_i, u_i) = (u_i, u_i) = \delta_{ii},$$

и, значит, матрица Грамма векторов $u_1^{arepsilon},\dots,u_n^{arepsilon}$ не вырождена при arepsilon достаточно малых, так как

$$\det \|(u_i^{\varepsilon}, u_j^{\varepsilon})_{\varepsilon}\|_{i,j=1}^n \to 1.$$

Следовательно, $u_i^{\varepsilon},\dots,u_n^{\varepsilon}$ — линейно независимы, и неравенство (5.2) выполнено. Теорема доказана.

Теорема 5.4. В предположении (Γ_1) , (Γ_2) , если λ не является собственным значением \mathcal{A} , то

$$\dim E_{\varepsilon}(\lambda)H_{\varepsilon} \leqslant \dim E(\lambda)H \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_{0}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Взяв произвольное λ , считаем, что

$$\dim E(\lambda)H = n < \infty \tag{5.4}$$

(в случае $\dim E(\lambda)H = \infty$ доказывать нечего). Пусть системы векторов u_1, \ldots, u_n и $u_1^{\varepsilon}, \ldots, u_n^{\varepsilon}$ такие же, как при доказательстве теоремы 5.3; при этом первая из них — базис в пространстве

 $E(\lambda)H$. Предположив, что (5.3) не верно, найдем подпоследовательность $\varepsilon' \subset \varepsilon$ такую, что при $\varepsilon = \varepsilon' \to 0$

$$\dim E_{\varepsilon}(\lambda)H_{\varepsilon} > n,$$

и существует $u^{\varepsilon} \in E_{\varepsilon}(\lambda)H_{\varepsilon}$ со следующими свойствами:

$$(u^{\varepsilon}, u_i^{\varepsilon})_{\varepsilon} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad ||u||_{\varepsilon} = 1, \quad \mathcal{A}^{\varepsilon} u^{\varepsilon} = \lambda^{\varepsilon} u^{\varepsilon}, \quad \lambda^{\varepsilon} \leqslant \lambda.$$

В силу (Γ_1) , (Γ_2) по некоторой подпоследовательности $u^{\varepsilon} \to u$, причем $\mathcal{A}u = \bar{\lambda}u$, $\bar{\lambda} \leqslant \lambda$, ||u|| = 1, $(u, u_i) = 0, i = 1, \ldots, n$, откуда следует $\dim E(\lambda)H \geqslant n + 1$, что противоречит (5.4). Значит, неравенство (5.3) верно, и теорема доказана.

Из теорем 5.3 и 5.4 вытекает следующая теорема.

Теорема 5.5. В предположении (Γ_1) , (Γ_2) , если λ не является собственным значением \mathcal{A} , то

$$\dim E_{\varepsilon}(\lambda)H_{\varepsilon} = \dim E(\lambda)H, \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_{0}. \tag{5.5}$$

Теорема 5.6. Пусть λ — собственное значение кратности r оператора \mathcal{A} , и в интервале $I=(-\delta+\lambda,\lambda+\delta)$ нет других собственных значений оператора A. Тогда для достаточно малых ε в интервале I содержится ровно r собственных значений оператора $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ с учетом их кратности.

Пусть $P_{\varepsilon}(\lambda) = E_{\varepsilon}(\lambda + \delta) - E_{\varepsilon}(\lambda - \delta)$, $P(\lambda) = E(\lambda + \delta) - E(\lambda - \delta)$. Для доказательства теоремы 5.6 достаточно проверить соотношение

$$\dim P_{\varepsilon}(\lambda)H_{\varepsilon} = \dim P(\lambda)H.$$

Оно следует из аналогичных (5.2) и (5.3) неравенств.

Если оператор ${\mathcal A}$ имеет компактную резольвенту, то его спектр состоит из сходящейся к ∞ последовательности конечнократных собственных значений

$$0\leqslant \lambda_1\leqslant \lambda_2\leqslant \cdots \to \infty, \\ \{u_i\}_{i=j}^\infty \ -\text{ ортонормированный базис в } \ H, \quad \mathcal{A}u_i=\lambda_i u_i.$$
 (5.6)

Пусть далее $N(\lambda)$ — подпространство собственных векторов с собственным значением $\lambda \in \operatorname{Sp}(\mathcal{A})$.

Теорема 5.7. Пусть выполнены условия (Γ_1) – (Γ_3) . Тогда (см. (5.1)–(5.6)) собственные значения и собственные векторы операторов $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ и \mathcal{A} связаны следующими соотношениями:

- (i) $\lambda_k^{\varepsilon} \to \lambda_k \ npu \ \varepsilon \to 0, \ k = 1, 2, \ldots;$
- (ii) $\exists \varepsilon' \subset \varepsilon : u_k^{\varepsilon'} \to U_k \in N(\lambda_k)$, $\|U_k\| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$; (iii) $u_k^{\varepsilon} \to u_k$, если λ_k некратное собственное значение.

Доказательство. Пусть для данного k $\hat{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_2 < \cdots < \hat{\lambda}_j = \lambda_k$ — все различные собственные значения оператора \mathcal{A} , не превосходящие λ_k ; при этом r_i – кратность λ_i , $r_1+\cdots+r_j=m\geqslant k$. Выберем непересекающиеся интервалы I_1,\ldots,I_j , содержащие по одной точке $\hat{\lambda}_i$. По теореме 5.6 при достаточно малых ε m первых собственных значений $\lambda_1^{\varepsilon},\dots,\lambda_m^{\varepsilon}$ попадают последовательно в интервалы I_1,\ldots,I_j в соответствии с кратностью r_1,\ldots,r_j . Стягивая интервал I_i к точке $\hat{\lambda}_i$, получаем сходимость $\lambda_i^{\varepsilon} \to \lambda_i, \ i=1,\dots,m$. В частности, $\lambda_k^{\varepsilon} \to \lambda_k$. Утверждение (i) доказано. Из него, в силу (Γ_1) , (Γ_2) , следует (ii).

Рассмотрим случай некратного λ_k . Тогда для подпоследовательности ε' из пункта (ii) $U_k=\pm u_k$, так как $\|U_k\|=\|u_k\|=1$, $\dim N(\lambda_k)=1$. Найдется последовательность $U_k^{\varepsilon},\,U_k^{\varepsilon}\to U_k$, для которой $(u_k^{\varepsilon'}, U_k^{\varepsilon'})_{\varepsilon'}\geqslant 0$. Тогда в пределе $(u_k, U_k)\geqslant 0$ и, значит, $U_k=u_k$. Отсюда следует утверждение (iii). Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-00114 и Мин. образования РФ, проект Е02-1.-52.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Жиков В. В., Пастухова С. Е. Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины// Докл. РАН. -2002. -385, № 5. С. 590-595.
- 2. Жиков В. В., Пастухова С. Е. Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины// Мат. сб. -2003.-194, № 5. С. 61-95.
- 3. Жиков В. В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. 2000. 191, № 2. C. 31-72.
- 4. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах// Изв. РАН. Сер. мат. 2002. 66, № 2. C. 81-148.
- 5. Жиков В. В. О двухмасштабной сходимости// Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2003. 23. С. 149-187.
- 6. *Жиков В. В.* К технике усреднения вариационных задач// Функц. анал. и его приложения. 1999. 33. № 1. С. 14–29.
- 7. Жиков В. В. О весовых соболевских пространствах// Мат. сб. 1998. 189, № 8. С. 27-58.
- 8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1979.
- 9. *Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических ящичных и стержневых каркасах критической толщины// Докл. PAH. -2002. -387, № 4. C. 447-451.
- 10. *Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических стержневых каркасах критической толщины// Докл. РАН. 2004. 394, № 1. С. 26–31.
- 11. *Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических ящичных и стержневых каркасах критической толщины// Современная математика и ее приложения. 2004. 12. С. 51–98.
- 12. Π астухова C. E. Усреднение задач теории упругости для периодической составной структуы// Докл. РАН. -2004. -395, № 3. C. 316–321.
- 13. *Пастухова С. Е.* Аппроксимативные условия и предельный переход в соболевских пространствах на тонких и составных структурах// Современная математика и ее приложения. 2004. 16. С. 47–63.
- 14. *Пастухова С. Е.* Усреднение нестационарных задач теории упругости на тонких периодических структурах с точки зрения сходимости гиперболических полугрупп в переменном гильбертовом пространстве// Современная математика и ее приложения. 2004. 16. С. 64–97.
- 15. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence// SIAM J. Math. Anal. -1992.-23, № 5. C. 1482-1518.
- 16. *Nguetseng G*. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization// SIAM J. Math. Anal. -1989. -20, № 5. C. 608-623.

С. Е. Пастухова

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет) E-mail: leonowmw@cs.msu.su

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ВЕСОМ

© 2005 г. **А.-Р. К. РАМАЗАНОВ**

Аннотация. С использованием разделенных разностей с кратными узлами получены условия сколь угодно точного приближения полиномами непрерывных на отрезке функций относительно неограниченного знакочувствительного веса.

Введение. В ряде работ Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова (см. [3,4] и др.) изучены вопросы качественной теории наилучших приближений относительно знакочувствительного веса $p=(p_-,p_+)$ с произвольными неотрицательными на отрезке $\Delta=[a,b]\subset (-\infty,+\infty)$ функциями $p_-(x)$ и $p_+(x)$; в частности, исследованы вопросы существования, единственности и устойчивости элемента наилучшего приближения. Следуя им, для определенных на Δ функции f(x) и веса $p=(p_-,p_+)$ положим

$$|(f,p)(x)| = f^{+}(x)p_{+}(x) + f^{-}(x)p_{-}(x),$$

где, как обычно, $f^+(x)=\max\{f(x),0\},\ f^-(x)=(-f(x))^+,$ и p-нормой функции f(x) на отрезке Δ назовем величину

$$|f|_p = |f|_{p,\Delta} = \sup\{|(f,p)(x)| : x \in \Delta\}.$$

Легко видеть, что p-норма обобщает обычную равномерную норму и представляет собой сублинейный (неотрицательный, выпуклый и положительно однородный) функционал на множестве ограниченных на Δ функций f(x), но, вообще говоря, $|-f|_{p,\Delta} \neq |f|_{p,\Delta}$, т.е. при аппроксимациях в p-норме, в отличие от обычных равномерных аппроксимаций, учитывается не только модуль ошибки приближения, но и ее знак (тем самым отражаются более глубинные связи приближаемой и приближающей функций).

Сублинейные функционалы с тривиальным ядром в качестве масштабной функции в конечномерном пространстве рассматривал Γ . Минковский [7]. Несимметричные нормы непрерывных на отрезке функций, соответствующие случаю p-нормы с непрерывными и строго положительными компонентами $p_-(x)$ и $p_+(x)$, изучали M. Γ . Крейн и A. A. Нудельман [5]. Однако в этом случае исследуемый нами вопрос полиномиальной аппроксимируемости данной непрерывной функции очевидным образом вытекает из соответствующих теорем Вейерштрасса о приближении непрерывных функций полиномами в равномерной метрике. Задачи теории приближения в p-норме и в обычной равномерной норме, по существу, отличаются именно в случае произвольных весов, когда компоненты веса на данном отрезке могут быть разрывными, неограниченными или могут обращаться в нуль на произвольных его подмножествах.

В [8] найдены необходимые и достаточные условия полиномиальной аппроксимируемости данной конечной функции f(x) в p-норме на отрезке Δ , если не пересекаются множества Δ_-^∞ и Δ_+^∞ тех точек из Δ , в любой окрестности каждой из которых соответственно не ограничены $p_-(x)$ и $p_+(x)$; при этом из доказательств [8, теоремы 5, 6] непосредственно вытекает , что если множество $F = \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$ пусто, то в p-норме любую непрерывную на Δ функцию f(x) можно сколь угодно точно приблизить полиномами. Если же множество F бесконечно, то для данной непрерывной на Δ функции f(x) либо существует полином Q(x) с $|Q-f|_{p,\Delta}=0$, либо существует константа c>0 с $|Q-f|_{p,\Delta}\geqslant c$ для всех полиномов Q(x) (действительно, если $|Q-f|_{p,\Delta}<\infty$ и $x\in F$, то Q(x)=f(x)). Поэтому ниже вопрос о полиномиальной аппроксимируемости непрерывных функций рассматривается для случая, когда множество F конечно; в частности, речь идет об аппроксимациях с интерполяцией в точках множества F. Отдельно рассмотрен случай быстрорастущих весов, когда на отрезке приближения имеется такая точка x_0 , что в ее сколь угодно малой односторонней окрестности для обеих компонент веса произведение $(x-x_0)^m p_+(x)$ не ограничено

при любом натуральном m. Как вспомогательный рассмотрен также случай, когда приближаемая функция является бесконечно дифференцируемой. Наконец, для непрерывных функций через разделенные разности определен аналог модуля непрерывности в p-норме, и получены условия для сколь угодно точного их приближения полиномами в p-норме относительно веса $p = (p_-, p_+)$.

1. О существовании повторных разделенных разностей. Пусть функция f(x) определена на множестве E с предельной точкой $x_0 \in E$. Для $x \in E$ положим

$$f_E(x) = f(x);$$
 $f_E(x, x_0) = \frac{f_E(x) - f_E(x_0)}{x - x_0}$

при $x \neq x_0$; $f_E(x_0,x_0)$ определим как предел разделенной разности $f_E(x,x_0)$ при $x \to x_0$ по множеству E (в случае его существования). После этого определяется повторная разделенная разность второго порядка $f_E(x_0,x_0,x_0)$ как предел разделенной разности

$$f_E(x, x_0, x_0) = \frac{f_E(x, x_0) - f_E(x_0, x_0)}{x - x_0}$$

при $x \to x_0$ по множеству E. Аналогично определяются повторные разделенные разности порядков $n=3,4,\ldots$

Отметим, что повторная разделенная разность данного порядка $m \geqslant 2$ может существовать, даже если не существует разделенной разности этого порядка с кратными узлами (определяемая как кратный предел разделенной разности того же порядка с простыми узлами; см., например, [1, стр. 173]; различные модификации даны в [6]).

Ниже будем пользоваться также равенством

$$f(x) = f_E(x_0) + f_E(x_0, x_0)(x - x_0) + \dots + f_E(x_0, x_0, \dots, x_0)(x - x_0)^{m-1} + f_E(x, x_0, x_0, \dots, x_0)(x - x_0)^m, \quad x \in E,$$
(1)

которое, очевидно, имеет место при условии существования указанных повторных разделенных разностей.

Как и выше, для заданного на отрезке Δ веса $p=(p_-,p_+)$ положим $F=\Delta_-^\infty\cap\Delta_+^\infty$, и пусть $x_0\in F$.

Тогда $m_{r+}(x_0)$ означает наименьшее натуральное число m, при котором произведение $(x-x_0)^m p_+(x)$ ограничено в некоторой правой окрестности $(x_0,x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0 , и $m_{r+}(x_0)=+\infty$, если такого m не существует; аналогично определяем $m_{r-}(x_0)$ относительно правых окрестностей точки x_0 и компоненты $p_-(x)$, а $m_{l\pm}(x_0)$ — относительно левых окрестностей точки x_0 и соответствующих компонент $p_\pm(x)$.

Через $m_r(x_0)$ обозначим меньшее из величин $m_{r+}(x_0)$ и $m_{r-}(x_0)$, через $m_l(x_0)$ — меньшее из $m_{l+}(x_0)$ и $m_{l-}(x_0)$, через $m(x_0)$ — большее из $m_r(x_0)$ и $m_l(x_0)$.

Для краткости будем говорить, что вес $p=(p_-,p_+)$ имеет в точке $x_0\in E\subset \Delta=[a,b]$ полную вертикальную асимптоту относительно данного множества E, если выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

1) x_0 — предельная точка $E \cap [x_0, b]$, $m(x_0) = m_r(x_0)$, и для всех целых m с $0 \leqslant m < m(x_0)$ при $x \to x_0 + 0$ по E имеем

$$(x - x_0)^m p_{\pm}(x) \to \infty; \tag{2}$$

2) x_0 — предельная точка $E \cap [a,x_0], \ m(x_0) = m_l(x_0),$ и для всех целых m с $0 \leqslant m < m(x_0)$ при $x \to x_0 - 0$ по E имеем

$$(x_0 - x)^m p_+(x) \to \infty. \tag{3}$$

Лемма. Пусть вес $p=(p_-,p_+)$ имеет в точке $x_0\in \Delta$ полную вертикальную асимптоту относительно данного множества $E\subset \Delta$, функция f(x), $x\in \Delta$, непрерывна в точке x_0 по множеству E, найдется полином Q(x) с $|Q-f|_{p,\Delta}<\infty$. Тогда существуют повторные разделенные разности функции f(x) в точке x_0 относительно E всех порядков, меньших $m(x_0)$.

Доказательство. Положим $f_E(x)=f(x)$ при $x\in E$. Тогда, в силу условия $|Q-f|_{p,\Delta}<\infty$ и непрерывности $f_E(x)$ в точке x_0 , получим $f_E(x_0)=Q(x_0)$.

Для полинома Q(x), очевидно, разделенная разность $Q(x,x_0) \to Q(x_0,x_0) = Q'(x_0)$ при $x \to x_0$. Докажем, что существует $f_E(x_0,x_0) = Q(x_0,x_0)$. Так как

$$f_E(x, x_0) = Q(x, x_0) + (f_E(x, x_0) - Q(x, x_0)),$$

достаточно показать, что $f_E(x,x_0)-Q(x,x_0)\to 0$ при $x\to x_0+0$ и $m(x_0)=m_r(x_0)$ или, соответственно, при $x\to x_0-0$ и $m(x_0)=m_l(x_0)$ (по множеству E).

Так как $Q(x_0) = f_E(x_0)$, при $x \in E$ получим

$$|Q - f|_{p,\Delta} \ge |(Q - f_E, p)(x)| \ge |Q(x, x_0) - f_E(x, x_0)| |x - x_0| \min\{p_-(x), p_+(x)\}.$$

Отсюда, так как вес $p=(p_-,p_+)$ имеет в точке x_0 полную вертикальную асимптоту, при $m(x_0)>1$ получим

$$|x - x_0| \min\{p_-(x), p_+(x)\} \to \infty,$$

а следовательно,

$$Q(x, x_0) - f_E(x, x_0) \to 0,$$

если $m(x_0) = m_r(x_0), x \to x_0 + 0$ и $x \in E$ или если $m(x_0) = m_l(x_0), x \to x_0 - 0$ и $x \in E$.

Тем самым, существование повторной разделенной разности первого порядка $f_E(x_0,x_0)$ доказано.

Пусть $m < m(x_0)$, и в точке x_0 относительно множества E существуют повторные разделенные разности до (m-1)-го порядка, причем

$$f_E(x_0, x_0) = Q(x_0, x_0) = Q'(x_0), \dots,$$

$$f_E(x_0, x_0, \dots, x_0) = Q(x_0, x_0, \dots, x_0) = \frac{1}{(m-1)!} Q^{(m-1)}(x_0)$$

(точка x_0 повторяется m раз). Тогда, используя (1), при $x \in E$ получим

$$Q(x) - f(x) = (Q(x, x_0, \dots, x_0) - f_E(x, x_0, \dots, x_0))(x - x_0)^m;$$

$$|Q - f|_{p,\Delta} \ge |Q(x, x_0, \dots, x_0) - f_E(x, x_0, \dots, x_0)| |x - x_0|^m \min\{p_-(x), p_+(x)\}$$

 $(x_0$ повторяется m раз). При этом $m < m(x_0)$, и вес $p = (p_-, p_+)$ имеет полную вертикальную асимптоту в точке x_0 . Отсюда, в соответствии с (2) и (3), получим равенство

$$f_E(x_0, x_0, \dots, x_0) = Q(x_0, x_0, \dots, x_0) = \frac{1}{m!} Q^{(m)}(x_0)$$

 $(x_0$ повторяется m+1 раз).

Лемма доказана.

2. Приближение непрерывных функций с быстрорастущим весом. Речь идет о весе $p=(p_-,p_+)$, для которого на рассматриваемом отрезке $\Delta=[a,b]$ найдется хотя бы одна такая точка x_0 , что в ее сколь угодно малых одноименных (правых или левых) односторонних окрестностях произведения $(x-x_0)^m p_\pm(x)$ не ограничены при всех натуральных m, точнее, в обозначениях § 1 рассматривается случай $m(x_0)=\infty$.

Теорема 1. Если для данного веса $p=(p_-,p_+)$ найдется хотя бы одна точка $x_0\in \Delta$ с $m(x_0)=\infty$, а функция f(x) непрерывна на Δ , то для существования алгебраических полиномов $Q_n(x)$ с $|Q_n-f|_{p,\Delta}\to 0$, $n\to\infty$, необходимо и достаточно существование алгебраического полинома Q(x) с $|Q-f|_{p,\Delta}=0$.

Доказательство. Достаточность очевидна, поэтому докажем необходимость.

Будем считать, что с ростом индекса n последовательность степеней полиномов $\deg(Q_n)$ монотонно возрастает, а последовательность уклонений $|Q_n-f|_{p,\Delta}$ монотонно убывает (в противном случае выбрали бы подпоследовательность полиномов $Q_n(x)$ с такими свойствами). Фиксируем теперь один из полиномов $Q_n(x)$ с $|Q_n-f|_{p,\Delta}<\infty$ и возьмем любой другой полином $Q_N(x)$ из этой последовательности с $|Q_N-f|_{p,\Delta}\leqslant |Q_n-f|_{p,\Delta}$ и $\deg(Q_N)\geqslant \deg(Q_n)$. Покажем, что $Q_N(x)$ и $Q_n(x)$ совпадают.

Действительно, у нас $m(x_0)=\infty$, поэтому для веса $p=(p_-,p_+)$ при $m=\deg(Q_N)+1$ найдется такое множество $E\subset \Delta$ с предельной точкой $x_0\in E$, что выполняются условия (2) или (3), а поэтому по лемме существуют повторные разделенные разности функции f(x) в точке x_0 относительно E до (m-1)-го порядка, причем

$$\frac{1}{i!}Q_n^{(i)}(x_0) = f_E(x_0, x_0, \dots, x_0) = \frac{1}{i!}Q_N^{(i)}(x_0)$$

при всех $i=0,1,\ldots,\deg(Q_N)$. Так как, кроме того, $\deg(Q_n)\leqslant \deg(Q_N)$, полиномы $Q_N(x)$ и $Q_n(x)$ совпадают.

Следовательно, все полиномы нашей последовательности с индексами N > n совпадают с полиномом $Q_n(x)$, а поэтому в качестве искомого полинома Q(x) можно взять $Q_n(x)$.

3. Приближение бесконечно дифференцируемых функций. Случаи, когда для заданного на отрезке Δ веса $p=(p_-,p_+)$ множество $F=\Delta_-^\infty\cap\Delta_+^\infty$ бесконечно или пусто или найдется точка $x_0\in\Delta$ с $m(x_0)=\infty$, уже рассмотрены для непрерывных приближаемых функций. Поэтому для бесконечно дифференцируемых функций в следующем утверждении речь идет об оставшихся случаях.

Теорема 2. Пусть для данного на отрезке $\Delta = [a,b]$ веса $p = (p_-,p_+)$ множество $F = \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty = \{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$ конечно, причем $m(z_i) < \infty$ при всех $i=1,2,\ldots,k$, функция g(x) бесконечно дифференцируема на Δ . Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический полином Q(x) с $|Q-g|_{p,\Delta} < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть для определенности $a\leqslant z_1< z_2<\cdots< z_k\leqslant b$. Если для данной точки $z_i\in F,\ i=1,2,\ldots,k$, все $m_{l\pm}(z_i)$ и $m_{r\pm}(z_i)$ конечны, то возьмем наименьшее нечетное число $\nu_i=\nu(z_i)$ с $m_{l\pm}(z_i)<\nu_i$ и $m_{r\pm}(z_i)<\nu_i$. В противном случае выберем пару конечных величин $m_{l+}(z_i)$ и $m_{r-}(z_i)$ или пару конечных величин $m_{l-}(z_i)$ и $m_{r+}(z_i)$; такая пара существует, так как $m(z_i)<\infty$ и $z_i\in F$. Пусть, например, $m_{l+}(z_i)$ и $m_{r-}(z_i)$ конечны. Тогда $\nu_i=\nu(z_i)$ означает наименьшее нечетное число с $m_{l+}(z_i)<\nu_i$ и $m_{r-}(z_i)<\nu_i$.

После этого для каждой точки $z_i, i = 1, 2, \dots, k$, выберем число $\sigma_i = \pm 1$ так, чтобы величина

$$\sup\{(\sigma_i(x-z_i)^{\nu_i})^+p_+(x)+(\sigma_i(x-z_i)^{\nu_i})^-p_-(x):x\in[z_i-\delta,z_i+\delta]\}$$

стремилась к нулю при $\delta \to 0$.

Построим теперь полином $\omega(x)$, который имеет в точках z_i нули кратности $\nu_i, i=1,2,\ldots,k$, а также простые нули, разделяющие множества Δ_-^∞ и Δ_+^∞ вне достаточно малых окрестностей точек z_i .

Для построения этих простых нулей рассмотрим сначала случай, когда данный интервал (z_i,z_{i+1}) пересекается не более чем с одним из множеств Δ_-^∞ и Δ_+^∞ , скажем, (z_i,z_{i+1}) не пересекается с Δ_-^∞ . Если при этом обе компоненты $p_-(x)$ и $p_+(x)$ ограничены на (z_i,z_{i+1}) или при $x\in(z_i,z_{i+1})$ имеем $\sigma_i(x-z_i)<0$ и $\sigma_{i+1}(x-z_{i+1})<0$, то на (z_i,z_{i+1}) полином $\omega(x)$ не имеет нулей; в противном случае, если $\sigma_i(x-z_i)>0$ при $x\in(z_i,z_{i+1})$, то возьмем $\delta_{ir}>0$ такое, что $z_i+\delta_{ir}< z_{i+1}$ и

$$|\sigma_i(x-z_i)^{\nu_i}|_{p,[z_i,z_i+\delta ir]\cap\Delta} < 1; \tag{4}$$

если же $\sigma_{i+1}(x-z_{i+1})>0$ при $x\in(z_i,z_{i+1})$, то возьмем еще $\delta_{(i+1)l}>0$ такое, что

$$z_i + \delta_{ir} < z_{i+1} - \delta_{(i+1)l}, \tag{5}$$

$$|\sigma_{i+1}(x-z_{i+1})^{\nu_{i+1}}|_{p,[z_{i+1}-\delta_{(i+1)l},z_{i+1}]\cap\Delta} < 1.$$
(6)

Получаемые таким путем точки вида $z_i+\delta_{ir}$ или вида $z_{i+1}-\delta_{(i+1)l}$ возьмем в качестве (простых) нулей искомого полинома $\omega(x)$; ясно, что при $x\in(z_i+\delta_{ir},z_{i+1}-\delta_{(i+1)l})$ компонента $p_-(x)$ ограничена, а полином $\omega(x)<0$.

Аналогично поступаем в случае $(z_i, z_{i+1}) \cap \Delta_+^{\infty} = \emptyset$.

Рассмотрим теперь случай, когда данный интервал (z_i, z_{i+1}) пересекается с каждым из множеств Δ^{∞}_{-} и Δ^{∞}_{+} . Выберем сначала $\delta_{ir} > 0$ и $\delta_{(i+1)l} > 0$ такие, что выполняются неравенства (4)–(6).

После этого выберем конечное число точек

$$z_i + \delta_{ir} = t_{i0} < t_{i1} < \dots < t_{im} = z_{i+1} - \delta_{(i+1)l}$$

таких, что каждый из интервалов $(t_{ij},t_{i(j+1)})$ пересекается с одним из множеств Δ_-^{∞} и Δ_+^{∞} с чередованием; таких точек существует конечное число, так как в противном случае на (z_i,z_{i+1}) нашлись бы точки множества F.

Все эти точки t_{ij} возьмем в качестве простых нулей искомого полинома $\omega(x)$; при этом исключаем точку t_{i0} , если $\sigma_i(x-z_i)>0$ при $x\in(z_i,z_{i+1})$ и (t_{i0},t_{i1}) не пересекается с Δ_+^∞ или если $\sigma_i(x-z_i)<0$ при $x\in(z_i,z_{i+1})$ и (t_{i0},t_{i1}) не пересекается с Δ_-^∞ ; аналогично поступаем с точкой t_{im} .

По аналогии с интервалами (z_i, z_{i+1}) строим простые нули искомого полинома $\omega(x)$ на крайних промежутках $[a, z_1)$ и $(z_k, b]$.

Пусть всего на отрезке Δ получилось N простых нулей t_1, t_2, \ldots, t_N , а также нули z_i кратности $\nu_i, i=1,2,\ldots,k$. Рассмотрим полином

$$\omega(x) = \sigma \prod_{i=1}^{k} \sigma_i (x - z_i)^{\nu_i} \prod_{j=1}^{n} (x - t_j),$$

причем значение $\sigma=1$ или $\sigma=-1$ выбираем так, чтобы полином $\omega(x)$ и выражение $\sigma_1(x-z_1)$ имели одинаковые знаки в достаточно малой окрестности точки z_1 .

Ясно, что тогда функция

$$|(\omega, p)(x)| = \omega^{+}(x)p_{+}(x) + \omega^{-}(x)p_{-}(x)$$

ограничена на отрезке Δ .

Построим теперь для заданной бесконечно дифференцируемой функции g(x) интерполяционный полином Эрмита [2, стр. 21, 38] H(x,g) с узлами z_i кратности $\nu_i, i=1,2,\ldots,k$, и простыми узлами t_1,t_2,\ldots,t_N . Для краткости положим $\nu=\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_k$,

$$y = z_1 + (z_2 - z_1)y_{\nu_1} + (z_3 - z_2)y_{\nu_1 + \nu_2} + \dots + (z_k - z_{k-1})y_{\nu} +$$

$$+ (t_1 - z_k)y_{\nu+1} + (t_2 - t_1)y_{\nu+2} + \dots + (t_N - t_{N-1})y_{\nu+N-1} + (x - t_N)y_{\nu+N}.$$

Тогда

$$g(x) = H(x,g) + \omega(x) \int_{0}^{1} \int_{0}^{y_{1}} \cdots \int_{0}^{y_{\nu+N-1}} g^{(\nu+N)}(y) \, dy_{1} dy_{2} \cdots dy_{\nu+N}.$$

Очевидно, найдется алгебраический полином P(x) такой, что

$$0 \leqslant P(x) - g^{(\nu+N)}(x) < \frac{(\nu+N)!}{|\omega|_{p,\Delta}} \varepsilon.$$

Тогда требуемым в теореме будет полином

$$Q(x) = H(x,g) + \omega(x) \int_{0}^{1} \int_{0}^{y_{1}} \cdots \int_{0}^{y_{\nu+N-1}} P(y) \, dy_{1} dy_{2} \cdots dy_{\nu+N},$$

так как, как легко видеть, выполняется неравенство $|Q-g|_{p,\Delta}<arepsilon.$ Теорема 2 доказана.

4. Приближение непрерывных функций с неограниченным весом. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке $\Delta = [a,b]$, и для заданного на Δ веса $p = (p_-,p_+)$ множество $F = \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$ конечно, скажем, $F = \{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$ и $a\leqslant z_1 < z_2 < \cdots < z_k \leqslant b$.

Возьмем h>0, которое в два раза меньше, чем z_1-a (если $a< z_1$), $b-z_k$ (если $z_k< b$) и все $z_i-z_{i-1},\ i=1,2,\ldots,k$, и положим $I_{i,h}=[z_i,z_i+h]$ при $m(z_i)=m_r(z_i),\ I_{i,h}=[z_i-h,z_i]$ при

 $m(z_i)=m_l(z_i),\ i=1,2,\ldots,k$; всюду ниже считаем также

$$E = E(h) = \bigcup_{i=1}^{k} I_{i,h}.$$

Относительно множества E=E(h) в каждой точке $z=z_i\in F,\ i=1,2,\ldots,k,$ определим повторные разделенные разности $f_E(x,z,z,\ldots,z)$ порядка m=m(z) и при $\delta>0$ рассмотрим величину

$$\omega_m(\delta, f, p, z) = \sup\{(f_E(x, z, z, \dots, z)(x - z)^m)^+ p_+(x) + (f_E(x, z, z, \dots, z)(x - z)^m)^- p_-(x) : x \in [z - \delta, z + \delta] \cap \Delta\}.$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если для непрерывной на Δ функции f(x) имеем

$$\omega_m(\delta, f, p, z) \to 0, \quad \delta \to 0,$$
 (7)

 $u\ m=m(z)<\infty$ в каждой точке $z=z_i\in F$, $i=1,2,\ldots,k$, то при любом $\varepsilon>0$ найдется алгебраический полином $Q(x)\ c\ |Q-f|_{p,\Delta}<\varepsilon.$

Доказательство. Согласно условию (7), существуют повторные разделенные разности функции f(x) в каждой точке $z=z_i\in F,\ i=1,2,\ldots,k$, до порядка m(z)-1 включительно. Рассмотрим полиномы

$$P_i(x) = f_E(z) + f_E(z, z)(x - z) + \dots + f_E(z, z, \dots, z)(x - z)^{m-1}$$

с $z=z_i$ и $m=m(z_i),\ i=1,2,\ldots,k$. По условию (7) при произвольно заданном $\omega>0$ для каждой точки $z=z_i\in F,\ i=1,2,\ldots,k$, найдется такое число $\delta_i>0$, что при $0<\delta\leqslant\delta_i$ имеем

$$\omega_m(\delta, f, p, z) < \omega, \tag{8}$$

причем, можно считать, что $\delta_i + \delta_{i+1} < z_{i+1} - z_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$.

Тогда, в соответствии с равенством (1), из определения $\omega_m(\delta,f,p,z)$ и неравенства (8) при каждом $i=1,2,\ldots,k$ получим

$$\sup\{|(P_i - f, p)(x)| : x \in [z - \delta_i, z + \delta_i] \cap \Delta\} < \omega. \tag{9}$$

Для данной точки $z=z_i\in F,\ i=1,2,\ldots,k$, в каждом из интервалов $(z-\delta_i,z)$ и $(z,z+\delta_i)$ либо найдется такой сегмент $[\alpha,\beta]$ (назовем его для краткости сегментом-связкой), на котором ограничены обе компоненты веса $p_-(x)$ и $p_+(x)$, либо нет сегментов с указанным свойством, и тогда на соответствующем интервале $(z-\delta_i,z)$ или $(z,z+\delta_i)$, очевидно, одна из компонент $p_-(x)$ или $p_+(x)$ ограничена, а другая не ограничена; для таких точек $z=z_i\in F$ сегментами-связками [x,y]

назовем
$$\left[z-\delta_i,z-rac{1}{2}\delta_i
ight]$$
 и $\left[z+rac{1}{2}\delta_i,z+\delta_i
ight].$

Так как на интервалах $(z_i,z_{i+1}), i=1,2,\ldots,k-1$, нет точек множества F, то на них промежутки между любыми двумя соседними сегментами-связками можно разбить на конечное число промежутков трех типов: интервалов без точек множества Δ_-^∞ (ниже назовем их (+)-интервалами), интервалов без точек множества Δ_+^∞ (назовем их (-)-интервалами) и сегментов, соединяющих эти (+)- и (-)-интервалы и не содержащих точек множества $\Delta_-^\infty \cup \Delta_+^\infty$; длины последних сегментов выберем так, чтобы колебание функции f(x) на них не превосходило ω . Вполне аналогично поступаем с промежутками $[a,z_1)$ и $(z_k,b]$.

Пусть при заданном $i=1,2,\ldots,k-1$ на интервалах $(z_i,z_i+\delta_i)$ и $(z_{i+1}-\delta_{i+1},z_{i+1})$ сегментамисвязками служат $[\alpha,\beta]$ и $[\alpha_1,\beta_1]$ соответственно. Построим на отрезке $[\alpha,\beta_1]$ такую непрерывную функцию $F_i(x)$, что $F_i(x)=f(x)+\omega$ на (-)-интервалах, $F_i(x)=f(x)-\omega$ на (+)-интервалах, $F_i(x)$ линейна на соединяющих (-)- и (+)-интервалы сегментах и, наконец, на сегментах-связках $[\alpha,\beta]$ и $[\alpha_1,\beta_1]$ функция $F_i(x)$ определяется так же, как и на ближайшем к ним из (-)- и (+)-интервалов (т.е. полагаем равной $f(x)+\omega$ или $f(x)-\omega$).

Обозначим теперь через $Q_i(x)$ алгебраический полином с $|Q_i(x) - F_i(x)| < \omega$ при $x \in [\alpha, \beta_1]$.

На промежутках $[a, z_1)$ и $(z_k, b]$ функции вида $F_i(x)$ и полиномы вида $Q_i(x)$ определяются вполне аналогично.

Полученные полиномы $Q_i(x)$ и построенные выше полиномы $P_i(x)$ последовательно «склеим» над соответствующими сегментами-связками посредством бесконечно дифференцируемых функций; точнее, для каждого сегмента-связки $[\alpha, \beta]$ возьмем такие две бесконечно дифференцируемые функции $\varphi(x) = \varphi(x, \alpha, \beta)$ и $\psi(x) = \psi(x, \alpha, \beta)$, что

$$\varphi(x) + \psi(x) \equiv 1, \quad \varphi(x) \geqslant 0, \quad \psi(x) \geqslant 0,$$

 $\varphi(x)=1$ при $x\leqslant \alpha,\ \varphi(x)=0$ при $x\geqslant \beta,$ и рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию g(x), для которой

$$g(x) = \varphi(x)P_i(x) + \psi(x)Q_i(x)$$

при $x \in [z_i, \alpha_1]$ для левого конца α_1 сегмента-связки $[\alpha_1, \beta_1]$ из интервала $(z_{i+1} - \delta_{i+1}, z_{i+1}),$ $i = 1, 2, \ldots, k-1;$ аналогично определяется g(x) на отрезках $[a, z_1]$ и $[z_k, b]$.

Заметим, что функции вида $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ легко строятся; например, пусть $G(x) = \exp(1/((x-\alpha)(x-\beta)))$ при $x \in (\alpha,\beta)$, G(x) = 0 при $x \notin (\alpha,\beta)$. Тогда при $x \in (-\infty,\infty)$ можно взять

$$\varphi(x) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} G(t) dt}{\int_{\alpha}^{\beta} G(t) dt}; \quad \psi(x) = 1 - \varphi(x).$$

Покажем, что для построенной бесконечно дифференцируемой функции g(x) найдется не зависящее от ω положительное число L с $|g-f|_{p,\Delta} \leqslant L\omega$.

Для этого через M_1 обозначим супремум значений $p_-(x)$ при всех не принадлежащих (-)-интервалам x из Δ , а через M_2 — супремум значений $p_+(x)$ при всех не принадлежащих (+)-интервалам x из Δ . Положим $M_p = \max\{M_1, M_2\}$.

Тогда из (9) при $x \in [z_i, \alpha], \ i = 1, 2, \dots, k-1$, получим

$$|(g-f,p)(x)| = |(P_i - f,p)(x)| < \omega.$$
 (10)

При $x \in [\alpha, \beta]$ из (9) по выбору функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеем

$$|(g-f,p)(x)| \le |((P_i-f)\varphi,p)(x)| + |((Q_i-f)\psi,p)(x)| \le \omega + |(Q_i-f,p)(x)|;$$

если при этом соседним для сегмента-связки $[\alpha, \beta]$ служит (-)-интервал, то получим

$$|(Q_i - f, p)(x)| = (Q_i(x) - f(x))p_+(x) \le (Q_i(x) - F_i(x) + \omega)p_+(x) \le 2\omega p_+(x);$$

если соседним для $[\alpha,\beta]$ служит (+)-интервал, то

$$|(Q_i - f, p)(x)| = (f(x) - Q_i(x))p_{-}(x) \leqslant (F_i(x) + \omega - Q_i(x))p_{-}(x) \leqslant 2\omega p_{-}(x).$$

Следовательно, при $x \in [\alpha, \beta]$ имеем

$$|(g-f,p)(x)| \leqslant \omega(2M_p+1). \tag{11}$$

Ясно, что если сегмент-связка $[\alpha,\beta]\subset\Delta_-^\infty$ или $[\alpha,\beta]\subset\Delta_+^\infty$, то при $x\in[\alpha,\beta]$ соответственно получим

$$|(g-f,p)(x)| \le \omega(2M_2+1), \qquad |(g-f,f)(x)| \le \omega(2M_1+1).$$
 (12)

Пусть теперь x принадлежит какому-нибудь (-)-интервалу из (β, α_1) (здесь, как и выше, β и α_1 служат концами двух последовательных сегментов-связок $[\alpha, \beta]$ и $[\alpha_1, \beta_1]$). Тогда

$$|(g - f, p)(x)| = |(Q_i - f, p)(x)| = (Q_i(x) - f(x))p_+(x) = (Q_i(x) - F_i(x) + \omega)p_+(x) \leqslant 2M_2\omega.$$
 (13)

Аналогично для x из (+)-интервалов промежутка (β, α_1) получим

$$|(g - f, p)(x)| \leqslant 2M_1\omega. \tag{14}$$

Наконец, если x принадлежит отрезкам $[x_1, x_2]$, соединяющим (-)- и (+)-интервалы, то

$$F_i(x) = f(x_1) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

поэтому

$$\begin{aligned} |(g-f,p)(x)| &\leqslant M_p |g(x)-f(x)| = M_p |Q_i(x)-f(x)| \leqslant \\ &\leqslant M_p |Q_i(x)-F_i(x)| + M_p |F_i(x)-f(x)| \leqslant \\ &\leqslant M_p \omega + M_p |f(x_1)-f(x)| \frac{x_2-x}{x_2-x_1} + M_p |f(x_2)-f(x)| \frac{x-x_1}{x_2-x_1} < 3M_p \omega, \end{aligned}$$

так как по выбору колебание функции f(x) на сегментах, соединяющих соседние (+)- и (-)- интервалы, не превосходит ω .

Отсюда и из (10)-(14) получим, что при $L=3M_p+1$ выполняется неравенство

$$|g - f|_{p,\Delta} \leqslant L\omega. \tag{15}$$

По теореме 2 при любом наперед заданном $\varepsilon>0$ найдется алгебраический полином Q(x) с $|Q-g|_{p,\Delta}<\varepsilon/2$. Применив также (15) с $\omega=\varepsilon/(2L)$, получим

$$|Q - f|_{p,\Delta} \le |Q - g|_{p,\Delta} + |g - f|_{p,\Delta} < \varepsilon.$$

Теорема 3 доказана. □

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 04-01-00042) и программой поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1892.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М.: ГИФМЛ, 1962. 1.
- 2. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
- 3. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности)// Изв. РАН. Сер. мат. -1998. -62, № 6. С. 59-102.
- 4. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Аппроксимации со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям)// Изв. РАН. Сер. мат. 1999. 63, № 3. С. 77—118.
- 5. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973
- 6. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наукова думка, 1992.
- 7. *Minkowski H.* Theorie der konvexen Korper, insbesondere Begreendung ihres Obtrflachenbegriffs// Gesammelten Abhandlungen. -1911.-2.-C. 131-229.
- 8. *Ramazanov A.-R. K.* Метод малого параметра для знакочувствительных аппроксимаций// Small parameter method for sign-sensitive approximations// Anal. Math. 2002. 28. С. 205–230.

А.-Р. К. Рамазанов

Дагестанский государственный университет, Махачкала