ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 25

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Тбилиси
2005

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 25

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Г. Л. Харатишвили, Т. А. Тадумадзе

Формулы вариации решения и задачи оптимального управления для дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი
2005

Современная математика и ее приложения. Том 25 (2005). С. 3–166

УДК 517.929, 517.97

ФОРМУЛЫ ВАРИАЦИИ РЕШЕНИЯ И ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ АРГУМЕНТАМИ

© 2005 г. **Г. Л. ХАРАТИШВИЛИ, Т. А. ТАДУМАДЗЕ**

Аннотация. Доказана теорема о непрерывной зависимости решения для нелинейных систем дифференциальных уравнений с переменными запаздываниями относительно возмущений начальных данных (начальный момент, начальная функция, начальное значение траектории) и правой части, когда эти возмущения малы в евклидовой и интегральной топологии, соответственно. Выведены формулы вариации решения дифференциального уравнения с разрывным и непрерывным начальным условием, которые по сравнению с ранее известными учитывают вариацию начального момента, разрывность и непрерывность начальных условий. Получено необходимое условие критичности для отображений, определенных на конечно локально выпуклом множестве. Доказана квазивыпуклость фильтров, возникающих при изучении оптимальных задач с запаздываниями в управлениях. Для оптимальных задач с переменными запаздываниями в фазовых координатах и в управлениях, с нефиксированным начальным моментом, с разрывным и непрерывным начальным условием, с функционалом и граничным условием общего вида доказаны необходимые условия оптимальности и теоремы существования. Для оптимальных задач с переменной структурой и запаздываниями получены необходимые условия оптимальности.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
1. Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения с запаздываниями от правой части и начальных данных 6
1.1. Обозначения и вспомогательные утверждения. 6
1.2. Формулировка основных результатов. 10
1.3. Доказательство теорем 1.2.1 и 1.2.2. 13
2. Формулы вариации решения дифференциального уравнения с разрывным начальным условием 20
2.1. Вспомогательные утверждения. 21
2.2. Формулировка основных результатов. 24
2.3. Леммы об оценке приращения решений относительно множеств вариации $\Im^-$, $\Im^+$, $\Im_0^-$, $\Im_0^+$. 27
2.4. Доказательство теоремы 2.2.1. 33
2.5. Доказательство теоремы 2.2.2. 37
2.6. Доказательство теорем 2.2.4 и 2.2.5. 42
3. Формулы вариации решения дифференциального уравнения с непрерывным начальным условием 43
3.1. Формулировка основных результатов. 44
3.2. Леммы об оценке приращения решений относительно множеств вариации $\Im_2^-$, $\Im_2^+$, $\Im_3^-$, $\Im_3^+$. 46
3.3. Доказательство теоремы 3.1.1. 50
3.4. Доказательство теоремы 3.1.2. 52
3.5. Доказательство теоремы 3.1.4. 53
3.6. Доказательство теоремы 3.1.5. 53
4. Необходимое условие критичности 53

ISSN 1512–1712

4.1. Предварительные сведения. 53
4.2. Формулировка задачи. Основные определения. 56
4.3. Необходимое условие критичности отображения. 58
5. Квазивыпуклые фильтры 61
5.1. Аппроксимационная лемма Гамкрелидзе 61
5.2. Примеры квазивыпуклых фильтров. 73
6. Оптимальные задачи с запаздываниями и разрывным начальным условием. Необходимые условия оптимальности 84
6.1. Постановка задачи. Формулировка основных результатов. 84
6.2. Задача с закрепленными концами и интегральным функционалом. 90
6.3. Линейная оптимальная задача 93
6.4. Задача с несоизмеримыми запаздываниями в управлениях. 98
6.5. Доказательство теоремы 6.1.1. 99
6.6. Доказательство теоремы 6.4.1. 107
7. Оптимальные задачи с запаздываниями и непрерывным начальным условием. Необходимые условия оптимальности 109
7.1. Постановка задачи. Формулировка основных результатов. 109
7.2. Оптимальная задача с закрепленным правым концом и интегральным функционалом. 112
7.3. Линейная оптимальная задача. 114
7.4. Задача с несоизмеримыми запаздываниями в управлениях 118
7.5. Доказательство теоремы 7.1.1. 119
7.6. Доказательство теоремы 7.4.1. 123
8. Оптимальные задачи с переменной структурой 125
8.1. Предварительные сведения. 125
8.2. Задача с разрывным начальным условием. Необходимые условия оптимальности. 131
8.3. Задача с непрерывным начальным условием. Необходимые условия оптимальности. 134
8.4. Доказательство теоремы 8.2.1. 136
8.5. Доказательство теоремы 8.3.1. 139
9. Теоремы существования оптимального элемента 143
9.1. Вспомогательные утверждения. 143
9.2. Теоремы существования для оптимальных задач соизмеримыми запаздываниями в управлениях. 150
9.3. Теоремы существования для оптимальных задач с несоизмеримыми запаздываниями в управлениях. 156
Список литературы 161

Введение

Реальные динамические системы (биологические, экономические, технические и другие), как правило, содержат информацию о прошлом (эффект запаздывания) [44, 54, 55, 90, 98, 106, 115, 131, 137, 157]. Объекты такого вида описываются дифференциальными уравнениями с запаздывающими аргументами или, как их еще называют, функционально-дифференциальными уравнениями. Изучению функционально-дифференциальных уравнений посвящено множество работ [14, 34, 44, 45, 48, 59, 62, 68, 71, 90, 94, 104, 111–113, 120, 121, 132–136, 138, 140, 144, 146, 150, 154, 155, 158].

Открытие знаменитого принципа максимума Понтрягина [118] послужило началом для развития математической теории оптимальных процессов, разработанной в [66]. Эта монография заслужила широкое признание как математиков, так и специалистов, работающих в различных областях науки и техники. Появились многочисленные работы в области теории оптимального управления [1, 3, 4, 6–11, 13, 15–17, 19, 20, 22, 23, 25–27, 30, 32, 35–40, 47, 51, 52, 60, 61, 67, 70, 73, 75, 78–82, 84, 91, 93, 95–98, 101, 105, 107–109, 114, 116, 117, 121, 123, 124, 139, 140, 142, 143].

В теории оптимального управления значительное место занимают оптимальные процессы с запаздыванием. Началом развития теории оптимальных процессов с запаздыванием послужила работа [81], где был доказан аналог принципа максимума Понтрягина для оптимальных систем, содержащих постоянные запаздывания в фазовых координатах. Впоследствии эта теория получила широкое развитие [6, 12, 20, 22, 29, 41, 51–53, 56, 57, 60, 61, 73–76, 83–85, 88–100, 105, 122, 126–128, 137, 140, 141, 145, 147–149, 151–153, 156].

Предлагаемая работа состоит из двух основных частей, которые органически переплетены в смысловом отношении.

В первой части изучается непрерывная зависимость решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами от начальных данных (начальный момент, начальная функция, начальное значение траектории) и правой части. Кроме того, выводятся формулы вариации решения дифференциального уравнения с разрывным и непрерывным начальными условиями. Новизна полученных формул по сравнению с ранее известными [25, 27, 84, 105, 130, 139, 140] состоит в том, что они учитывают вариацию начального момента, разрывность и непрерывность начальных условий. Этим вопросам посвящены §§1, 2, 3, результаты которых непосредственно используются во второй части при доказательстве необходимых условий оптимальности для оптимальных задач с нефиксированным начальным моментом и с переменными запаздываниями как в фазовых координатах, так и в управлениях.

При доказательстве необходимых условий оптимальности также используются квазивыпуклость фильтра топологического векторного пространства и необходимое условие критичности отображения.

В §1 доказана теорема о непрерывной зависимости решения для задачи Коши, когда возмущения начальных данных и правой части малы в евклидовой и интегральной топологии, соответственно. Эта теорема является непосредственным обобщением теорем, приведенных в [25, 27, 84, 130].

Во §2 для нелинейных систем дифференциальных уравнений с переменными запаздываниями и разрывным начальным условием доказаны локальные формулы вариации решения при возмущении начальных данных и правой части. Разрывность начального условия означает, что в начальный момент времени значения начальной функции и траектории, вообще говоря, не совпадают.

В §3 доказаны формулы вариации решения для системы с непрерывным начальным условием. Непрерывность начального условия означает, что в начальный момент времени значения начальной функции и траектории совпадают.

В §4 центральный результат аксиоматической теории экстремальных задач — необходимое условие критичности [25, 26, 117] — распространен на отображения, определенные на конечно локально выпуклом множестве, что позволяет применить известную схему, развитую в [25, 26, 117], для изучения оптимальных задач с запаздыванием.

В §5 доказываются квазивыпуклость фильтров, возникающих в оптимальных задачах с переменными запаздываниями.

Понятие квазивыпуклости фильтра было введено Р. В. Гамкрелидзе в результате исследований по скользящим режимам [24, 116]. Выявление управляемых систем, обладающих квазивыпуклыми фильтрами, представляет определенный интерес, ибо для таких систем необходимые условия оптимальности выводятся из необходимого условия критичности.

В §6 рассмотрена нелинейная оптимальная задача с переменными запаздываниями в фазовых координатах и переменными соизмеримыми запаздываниями в управлениях с нефиксированным начальным моментом и разрывным начальным условием, с функционалом и граничным условием общего вида.

Доказаны необходимые условия оптимальности для случаев, когда происходит односторонняя и двусторонняя вариация начального и конечного моментов процесса оптимального управления. Из этих условий особенно следует выделить условие для начального момента, вид которого зависит от свойств функции запаздывания в окрестности начального момента и разрывности начального условия.

Полученные необходимые условия оптимальности использованы для исследования нелинейных оптимальных задач с интегральными функционалами и линейных оптимальных задач по быстродействию с закрепленными концами.

Отдельно рассмотрен случай, когда запаздывания в управлениях несоизмеримы.

В §7 рассмотрена оптимальная задача с нефиксированным начальным моментом и непрерывным начальным условием. Доказаны необходимые условия оптимальности.

В §8 поставлена и изучена оптимальная задача с переменной структурой. Доказаны соответствующие необходимые условия оптимальности.

Наконец, в §9 для оптимальных задач с переменными запаздываниями в фазовых координатах и в управлениях доказаны теоремы существования.

В работе принята тройная нумерация: первая цифра указывает номер параграфа, вторая — номер пункта, третья — номер формулы.

1. Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения с запаздываниями от правой части и начальных данных

В этом параграфе доказана теорема о непрерывной зависимости решения для задачи Коши, когда возмущения начальных данных (начального момента, начальной функции, начального значения траектории) и правой части малы в евклидовой и интегральной топологии,соответственно. Эта теорема является непосредственным обобщением теорем, приведенных в [25, 27, 84, 130]. Отдельно рассмотрен случай, когда правая часть зависит от управления. Теоремы 1.2.1 и 1.2.2 используются при доказательстве необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления, рассмотренных в §§6–8.

Вопрос о непрерывной зависимости решения задачи Коши и граничной задачи для различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающими аргументами, когда возмущение правой части мало в интегральной топологии, изучен в [43, 46, 49, 62, 64, 65, 102].

1.1. Обозначения и вспомогательные утверждения. $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел; $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство точек

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix};$$

под *модулем* вектора x подразумевается евклидов модуль, т.е.

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2;$$

$\mathbb{R}^{n\times s} = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{s}$ — пространство матриц $(x_1, \ldots, x_s)$ размерности $n \times s$,

$$|(x_1, \ldots, x_s)|^2 = \sum_{i=1}^{s} |x_i|^2;$$

$J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ — конечный интервал;

$O \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^r$ — открытые множества,

$O^s = \underbrace{O \times \cdots \times O}_{s} \subset \mathbb{R}^{n\times s}$;

$\tau_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, s}$ (запаздывания в фазовых координатах) — абсолютно непрерывные скалярные функции, удовлетворяющие условиям

$$\tau_i(t) \leqslant t, \dot{\tau}_i(t) > 0, t \in \mathbb{R}, i = \overline{1, s}; J_1 = [\tau, b], \tau = \min\{\tau_1(a), \ldots, \tau_s(a)\};$$

$\gamma_i(t) = {\tau_i}^{-1}(t)$ — обратная функции $\tau_i(t)$;

$\operatorname{cl} M$ — замыкание множества $M \subset \mathbb{R}^n$; $\operatorname{int} M$ — внутренность множества M;

E_φ — пространство кусочно непрерывных функций $\varphi : J_1 \to \mathbb{R}^n$ с конечным числом точек разрыва первого рода, с нормой $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(t)| : t \in J_1\}$;

$\Delta = \Delta(J_1, O) = \{\varphi \in E_\varphi : \operatorname{cl}\varphi(J_1) \subset O\}$ — множество начальных функций; $\varphi(J_1) = \{\varphi(t) : t \in J_1\}$.

Функции $\theta_j(t), t \in \mathbb{R}, j = \overline{1,\nu}$ (запаздывания в управлениях) удовлетворяют тем же условиям, что и функции $\tau_i(t)$.

E_u — пространство измеримых (в смысле Лебега) функций $u : J_2 = [\theta, b] \to \mathbb{R}^r$, удовлетворяющих условию $\operatorname{cl} u(J_2)$ — компакт в $\mathbb{R}^r$; $\theta = \{\theta_1(a), \dots, \theta_\nu(a)\}$;

$\Omega = \Omega(J_2, G) = \{u \in E_u : \operatorname{cl} u(J_2) \subset G\}$ — множество управлений;

$C(J, \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $y : J \to \mathbb{R}^n$ с расстоянием

$$\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\| = \sup\{|y_1(t) - y_2(t)| : t \in J\};$$

$L(J, \mathbb{R}_+)$ — пространство интегрируемых функций $m : J \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

$E_f = E(J \times O^s, \mathbb{R}^n)$ — множество функций $f : J \times O^s \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих следующим условиям: при каждом фиксированном $(x_1, \dots, x_s) \in O^s$ функция $f(\cdot, x_1, \dots, x_s) : J \to \mathbb{R}^n$ измерима; для произвольного компакта $K \subset O$ и $f \in E_f$ существуют такие функции $m_{f,K}, L_{f,K} \in L(J, \mathbb{R}_+)$, что для почти всех $t \in J$

$$|f(t, x_1, \dots, x_s)| \leqslant m_{f,K}(t) \ \ \forall (x_1, \dots, x_s) \in K^s,$$

$$|f(t, x_1', \dots, x_s') - f(t, x_1'', \dots, x_s'')| \leqslant L_{f,K}(t) \sum_{i=1}^{s} |x_i' - x_i''| \ \ \forall x_i',\ x_i'' \in K,\ i = \overline{1,s}.$$

Лемма 1.1.1 (см. [27]). *Пусть $f \in E_f$. Тогда функция*

$$H(f; t', t'', x_1, \dots, x_s) = \left| \int_{t'}^{t''} f(t, x_1, \dots, x_s) dt \right|$$

непрерывна по $(t', t'', x_1, \dots, x_s) \in J^2 \times O^s$.

Лемма 1.1.2 (см. [92]). *Пусть $K_i \subset O, i = 0, 1$ — компактные множества, $K_0 \subset \operatorname{int} K_1$. Тогда существуют компактное множество $Q \subset O^s : K_0^s \subset Q \subset \operatorname{int} K_1^s$ и непрерывно дифференцируемая функция $\chi : \mathbb{R}^{n\times s} \to [0, 1]$ такие, что*

$$\chi(x_1, \dots, x_s) = \begin{cases} 1, & (x_1, \dots, x_s) \in Q, \\ 0, & (x_1, \dots, x_s) \notin K_1^s. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Лемма 1.1.3. *Пусть $f \in E_f$. Тогда функция*

$$g(t, x_1, \dots, x_s) = \begin{cases} \chi(x_1, \dots, x_s) f(t, x_1, \dots, x_s),\ (x_1, \dots, x_s) \in K_1^s,\ t \in J, \\ 0, \quad (x_1, \dots, x_s) \notin K_1^s,\ t \in J, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

для почти всех $t \in J$ удовлетворяет следующим условиям:

$$|g(t, x_1, \dots, x_s)| \leqslant m_{f,K_1}(t)\ \forall (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^{n\times s}, \tag{1.1.3}$$

$$|g(t, x_1', \dots, x_s') - g(t, x_1'', \dots, x_s'')| \leqslant L_f(t) \sum_{i=1}^{s} |x_i' - x_i''|\ \forall x_i', x_i'' \in \mathbb{R}^n,\ i = \overline{1,s}, \tag{1.1.4}$$

где

$$L_f(t) = L_{f,K_1}(t) + \alpha_0 m_{f,K_1}(t), \tag{1.1.5}$$

$$\alpha_0 = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{s} |\chi_{x_i}(x_1, \dots, x_s)| : (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^{n\times s} \right\}.$$

Доказательство. Неравенство (1.1.3) следует из определения функции g. Пусть $x_i', x_i'' \in K_1, i = \overline{1,s}$. Тогда (см. (1.1.2)) получим

$$|g(t,x_1',\dots,x_s') - g(t,x_1'',\dots,x_s'')| = \chi(x_1',\dots,x_s')|f(t,x_1',\dots,x_s') - f(t,x_1'',\dots,x_s'')| +$$
$$+|\chi(x_1',\dots,x_s') - \chi(x_1'',\dots,x_s'')||f(t,x_1'',\dots,x_s'')| \leqslant$$
$$\leqslant L_{f,K_1}(t)\sum_{i=1}^{s}|x_i'-x_i''| + \alpha_0 m_{f,K_1}(t)\sum_{i=1}^{s}|x_i'-x_i''| = L_f(t)\sum_{i=1}^{s}|x_i'-x_i''|.$$

Пусть $x_i' \in K_1, i=\overline{1,s}, (x_1'',\dots,x_s'') \notin K_1^s$, тогда с учетом $\chi(x_1'',\dots,x_s'')=0$ имеем

$$|g(t,x_1',\dots,x_s') - g(t,x_1'',\dots,x_s'')| \leqslant |\chi(t,x_1',\dots,x_s') - \chi(t,x_1'',\dots,x_s'')||f(t,x_1',\dots,x_s')| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_0 m_{f,K_1}(t)\sum_{i=1}^{s}|x_i'-x_i''| \leqslant L_f(t)\sum_{i=1}^{s}|x_i'-x_i''|.$$

Нетрудно видеть, что последнее неравенство также справедливо и в случае $(x_1',\dots,x_2') \notin K_1^s, x_i'' \in K_1, i=\overline{1,s}$. □

Лемма 1.1.4. *Пусть $\varphi_i \in \Delta, i=\overline{1,s}$ и $\varphi_i(t) \in K$, где $K \subset O$ — компактное множество. Пусть, далее, $t_\alpha \in (a,b), \alpha=\overline{1,p}$ — точки разрыва функции $\psi(t) = (\varphi_1(\tau_1(t)),\dots,\varphi_s(\tau_s(t)))$. Тогда для произвольного $f \in E_f$ и $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\beta = \mathrm{Sup}\left\{\left|\int_{t'}^{t''} f(t,\varphi_1(\tau_1(t)),\dots,\varphi_s(\tau_s(t)))dt\right| : t',t'' \in J\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \omega(k;\psi)\int_J L_{f,K}(t)dt + k(p+1)H_0(f;K^s),$$

где

$$\omega(k;\psi) = \mathrm{Sup}\{\omega_{ij}(k;\psi) : 1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant p+1\};$$
$$\omega_{ij}(k;\psi) = \mathrm{Sup}\left\{\sum_{i=i}^{s}|\varphi_{ij}(t')-\varphi_{ij}(t'')| : t',t'' \in [t_{j-1},t_j], |t'-t''| \leqslant 1/k\right\},$$
$$\varphi_{ij}(t) = \begin{cases}\varphi_i(\tau(t_{j-1}+)), t=t_{j-1},\\ \varphi_i(\tau_i(t)), t \in (t_{j-1},t_j),\\ \varphi_i(\tau_i(t_j-)), t=t_j,\end{cases} \tag{1.1.6}$$
$$j=\overline{1,p+1}, t_0=a, t_{p+1}=b, H_0(f;K^s) = \mathrm{Sup}\{H(f;t',t'',x_1,\dots,x_s) : (t',t'',x_1,\dots,x_s) \in J \times K^s\}$$

(*см. лемму* 1.1.1).

Доказательство. Существуют числа $a_1, b_1 \in J$ такие, что

$$\beta = \left|\int_{a_1}^{b_1} f(t,\varphi_1(\tau_1(t)),\dots,\varphi_s(\tau_s(t)))dt\right|.$$

Пусть $a_1 \in [t_{l-1},t_l), b_1 \in (t_{q-1},t_q], 1 \leqslant l \leqslant p+1$. Разобьем каждый интервал $[a_1,t_l]$, $[t_{j-1},t_j]$, $j=\overline{l+1,q-1}$, $[t_{q-1},b_1]$, соответственно, на k равных частей Δ_i^l, Δ_i^j, $j=\overline{l+1,q-1}$, Δ_i^s, $i=\overline{1,k}$. Очевидно, что

$$[a_1,b_1] = [a_1,t_l] \cup \left(\bigcup_{j=l+1}^{q-1}[t_{j-1},t_j]\right) \cup [t_{q-1},b_1] = \bigcup_{j=l}^{q}\bigcup_{i=1}^{k}\Delta_i^j.$$

На основе этого равенства и обозначения (1.1.6) получим

$$\beta \leqslant \sum_{j=l}^{q}\sum_{i=1}^{k}\left|\int_{\Delta_i^j} f(t,\varphi_{1j}(t),\dots,\varphi_{sj}(t))dt\right|.$$

Пусть $t_i^j \in \Delta_i^j, j = \overline{l,q}, i = \overline{1,k},$ — произвольные фиксированные точки. Тогда

$$\beta \leqslant \sum_{j=l}^{q} \sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i^j} |f(t, \varphi_{1j}(t)), \ldots, \varphi_{sj}(t)) - f(t, \varphi_{1j}(t_i^j)), \ldots, \varphi_{sj}(t_i^j))| dt +$$

$$+ \sum_{j=l}^{q} \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{\Delta_i^j} f(t, \varphi_{1j}(t_i^j)), \ldots, \varphi_{sj}(t_i^j)) dt \right| \leqslant \sum_{j=l}^{q} \sum_{i=1}^{k} \omega_{i,j}(k;\psi) \int_{\Delta_i^j} L_{f,K}(t) dt +$$

$$+ (q-l+1) k H_0(f;K^s) \leqslant \omega(k,\psi) \int_J L_{f,K}(t) dt + k(p+1) H_0(f;K^s).$$

□

Лемма 1.1.5. *Пусть $\varphi_i \in \Delta, i = \overline{1,s}$ и $\varphi_i(t) \in K$, где $K \subset O$ — компактное множество. Пусть, далее, последовательность $\delta f_i \in E_f, i = 1,2,\ldots$ удовлетворяет условиям*

$$\int_J L_{\delta f_i, K}(t) dt \leqslant \alpha_1 = \mathrm{const}, i = 1,2,\ldots, \lim_{i\to\infty} H_0(\delta f_i; K^s) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{i\to\infty} \beta_i = 0,$$

где

$$\beta_i = \mathrm{Sup}\left\{ \left| \int_{t'}^{t'} \delta f_i(t, \varphi(\tau_1(t)), \ldots, \varphi(\tau_s(t))) dt \right| : t', t'' \in J \right\}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. В силу леммы 1.1.4,

$$\beta_i \leqslant \omega(k;\psi) \int_J L_{\delta f_i, K}(t) dt + k(p+1) H_0(\delta f_i; K^s). \tag{1.1.7}$$

Функции $\varphi_{ij}(t), t \in [t_{j-1}, t_j]$ непрерывны. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \omega(k;\psi) = 0.$$

Существуют числа $k_0, i_0 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\omega(k_0;\psi)\alpha_1 \leqslant \varepsilon/2; \quad k_0(p+1) H_0(\delta f_i; K^s) \leqslant \varepsilon/2, \quad i \geqslant i_0. \tag{1.1.8}$$

Учитывая в (1.1.7) соотношения (1.1.8), получим $\beta_i \leqslant \varepsilon$ при $i \geqslant i_0$.

В силу произвольности ε можно заключить, что $\beta_i \to 0$ при $i \to \infty$. □

Лемма 1.1.6 (см. [20]). *Пусть $u \in E_u$ и $\theta : J \to J_2$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\dot\theta(t) > 0$ почти всюду на J. Тогда функция $u(\theta(t))$ измерима на J.*

Лемма 1.1.7 (см. [20]). *Пусть $u \in E_u$ и функция $f(t, u_1, \ldots, u_\nu)$ для почти всех $t \in J$ непрерывна по $(u_1, \ldots, u_\nu) \in O^\nu$, а при каждом $(u_1, \ldots, u_\nu) \in O_\nu$ измерима по $t \in J$. Тогда функция $f(t, u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t)))$ измерима на J.*

По индукции легко доказывается следующая лемма.

Лемма 1.1.8 (см. [27]). *Пусть $m \in L(J, \mathbb{R}_+)$. Тогда справедлива формула*

$$\int_a^t m(\xi_1) d\xi_1 \int_a^{\xi_1} m(\xi_2) d\xi_2 \ldots \int_a^{\xi_{k-1}} m(\xi_k) d\xi_k = \frac{1}{k!} \left(\int_a^t m(\xi) d\xi \right)^k.$$

Две функции $f_1, f_2 \in E_f$ будем называть эквивалентными, если при всяком фиксированном $(x_1, \ldots, x_s) \in O^s$ и для почти всех $t \in J$

$$f_1(t, x_1, \ldots, x_s) - f_2(t, x_1, \ldots, x_s) = 0.$$

Следующая лемма является непосредственным следствием леммы 1.1.5.

Лемма 1.1.9. *Пусть $f_1, f_2 \in E_f$ — эквивалентные функции. Тогда для произвольной функции $\varphi \in \Delta$ выполнено равенство*

$$\left|\int_{t'}^{t''} [f_1(t, \varphi(\tau_1(t)), \dots, \varphi(\tau_s(t))) - f_2(t, \varphi(\tau_1(t)), \dots, \varphi(\tau_s(t)))]dt\right| = 0 \ \ \forall t', t'' \in J.$$

Классы эквивалентности функций пространства E_f образуют векторное пространство, которое в дальнейшем будем обозначать опять через E_f; мы будем называть эти классы также функциями и обозначим опять через f.

Лемма 1.1.10. *Пусть $f \in E_f$. Тогда однозначно определено отображение*

$$\varphi \to \int_a^t f(\xi, \varphi(\tau_1(\xi)), \dots, \varphi(\tau_s(\xi)))d\xi, \varphi \in \Delta$$

(*см. лемму* 1.1.9).

В пространстве E_f введем семейство подмножеств

$$\Re = \{V_{K,\delta} : K \subset O, \delta > O\}. \tag{1.1.9}$$

Здесь $K \subset O$ — произвольное компактное множество, $\delta > 0$ — произвольное число,

$$V_{K,\delta} = \{\delta f \in E_f : H_0(\delta f; K^s) \leqslant \delta\}.$$

Семейство $\Re$ можно принять за базис окрестностей нуля пространства E_f. Следовательно, оно определяет единственную локально выпуклую отделимую векторную топологию, которая превращает E_f в топологическое векторное пространство. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что пространство E_f снабжено именно такой топологией.

Пусть X — метрическое пространство, ρ — функция расстояния на X,

$$F(\cdot; \mu) : X \to X \tag{1.1.10}$$

— семейство отображений, зависящих от параметров $\mu \in A$, где A — топологическое пространство. Семейство отображений (1.1.10) называется *равномерно сжимающим*, если существует такое число $\alpha \in (0,\ 1)$, не зависящее от μ, что при каждом $\mu \in A$ выполняется неравенство

$$\rho(F(y_1; \mu), F(y_2; \mu)) \leqslant \alpha\rho(y_1, y_2) \ \forall y_1, y_2 \in X.$$

Определим итерацию отображения (1.1.10):

$$F^k(y; \mu) = F(F^{k-1}(y; \mu); \mu),\ k = 1,\ 2, \dots,\ F^0(y; \mu) = y.$$

Очевидно,

$$F^k(\cdot; \mu) : X \to X \ \forall \mu \in A. \tag{1.1.11}$$

Теорема 1.1.1 (см. [42, 92])**.** *Пусть X — полное метрическое пространство. Если некоторая итерация* (1.1.11) *является равномерно сжимающим семейством, то для каждого $\mu \in A$ отображение* (1.1.10) *имеет единственную неподвижную точку $y_\mu \in X$, т.е. $F(y_\mu; \mu) = y_\mu$. При этом, если для фиксированного $\tilde{\mu} \in A$ отображение $F^k(y_{\tilde{\mu}}; \cdot) : A \to X$ непрерывно в точке $\tilde{\mu}$, то отображение $y_\mu : A \to X$ также непрерывно в точке $\tilde{\mu}$.*

1.2. Формулировка основных результатов.

Каждому элементу

$$\mu = (t_0, x_0, \varphi, f) \in A_0 = J \times O \times \Delta \times E_f$$

будем ставить в соответствие уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t))) \tag{1.2.1}$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), t \in [\tau, t_0), x(t_0) = x_0. \tag{1.2.2}$$

Здесь и в дальнейшем под правой частью f уравнения (1.2.1) подразумевается любой представитель из класса эквивалентности f.

Начальное условие (1.2.2) будем называть разрывным, ибо, вообще говоря, $x(t_0) \neq \varphi(t_0)$.

Определение 1.2.1. Пусть $\mu = (t_0, x_0, \varphi, f) \in A_0,\ t_0 < b$. Функцию $x(t) = x(t;\mu) \in O,\ t \in [\tau, t_1],\ t_1 \in (t_0, b]$, будем называть *решением* уравнения (1.2.1) с начальным условием (1.2.2), или решением, соответствующим элементу μ, определенным на интервале $[\tau, t_1]$, если она на интервале $[\tau, t_0]$ удовлетворяет условию (1.2.2), а на интервале $[t_0, t_1]$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, x(\tau_1(\xi)), \ldots, x(\tau_s(\xi)))d\xi$$

(см. лемму 1.1.10).

Очевидно, функция $x(t;\mu), t \in J$, абсолютно непрерывна и на J п.в. удовлетворяет уравнению (1.2.1).

Каждому элементу μ всегда соответствует единственное решение, если $t_1 - t_0$ — достаточно малое число (см. [90]).

Для формулировки основных результатов введем множества

$$W(K;\alpha_2) = \left\{\delta f \in E_f : \exists m_{\delta f,K},\ L_{\delta f,K} \in L(J, \mathbb{R}_+), \int_J [m_{\delta f,K}(t) + L_{\delta f,K}(t)]dt \leqslant \alpha_2\right\},$$

где $\alpha_2 > 0$ — фиксированное число, не зависящее от δf;

$$V(\tilde{t_0};\delta) = \{t_0 \in J : |t_0 - \tilde{t_0}| < \delta\},\ V(\tilde{x_0};\delta) = \{x_0 \in O : |x_0 - \tilde{x_0}| < \delta\},$$
$$V(\tilde{\varphi};\delta) = \{\varphi \in \Delta : \|\varphi - \tilde{\varphi}\| < \delta\},$$

где $\tilde{t_0} \in J,\ \tilde{x_0} \in O,\ \tilde{\varphi} \in \Delta$ — фиксированные точки.

Множество $W(K;\alpha_2)$ называется классом возмущений правой части уравнения (1.2.1).

Теорема 1.2.1. *Пусть* $\tilde{x}(t) = x(t;\tilde{\mu}), \tilde{\mu} = (\tilde{t_0}, \tilde{x_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{f}) \in A_0$ — *решение, определенное на* $[\tau, \tilde{t_1}], \tilde{t_1} < b$; $K_1 \subset O$ — *компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества* $K_0 = \operatorname{cl}\tilde{\varphi}(J_1) \cup \tilde{x}([\tilde{t_0}, \tilde{t_1}])$. *Тогда выполнены следующие условия*:

1.2.1. *существуют числа* $\delta_i > 0, i = 0, 1$, *такие, что каждому элементу*

$$\mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_0, \alpha_2) = (V(\tilde{t_0};\delta_0) \cap J) \times (V(\tilde{x_0};\delta_0) \cap O) \times (V(\tilde{\varphi};\delta_0) \cap \Delta) \times [\tilde{f} + (W(K_1;\alpha_2) \cap V_{K_1,\delta_0})]$$

соответствует решение $x(t;\mu)$, *определенное на интервале* $[\tau, \tilde{t_1} + \delta_1] \subset J_1$ *и удовлетворяющее условию* $x(t;\mu) \in \operatorname{int} K_1,\ t \in [\tau, \tilde{t_1} + \delta_1]$;

1.2.2. *для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_0]$, *что для любого* $\mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_2, \alpha_2)$ *выполнено неравенство*

$$|x(t;\mu) - x(t;\tilde{\mu})| \leqslant \varepsilon\ \ \forall t \in [s_1, \tilde{t_1} + \delta_1],\ s_1 = \max\{t_0, \tilde{t_0}\};$$

1.2.3. *для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) \in (0, \delta_0]$, *что для любого* $\mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_3, \alpha_2)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{\tau}^{\tilde{t_1}+\delta_1} |x(t;\mu) - x(t;\tilde{\mu})|dt \leqslant \varepsilon.$$

Если $\tilde{t_1} = b$, то в теореме подразумевается, что $\delta_1 = 0$.

В пространстве $E_\mu = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times E_\varphi \times E_f$ введем множество вариаций:

$$\Im = \{\delta\mu = (\delta t_0, \delta x_0, \delta\varphi, \delta f) \in E_\mu : |\delta t_0| \leqslant \alpha, |\delta x_0| \leqslant \alpha, \|\delta\varphi\| \leqslant \alpha,\ \delta f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta f_i, |\lambda_i| \leqslant \alpha, i = \overline{1,k}\},$$

где $\alpha > 0$ — фиксированное число, $\delta f_i \in E_f, i = \overline{1,k}$ — фиксированные точки.

Ясно, что множество вариаций $\Im$ является окрестностью нуля в пространстве

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times E_\varphi \times \left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta f_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,k}\right\}.$$

Следующая лемма является простим следствием теоремы 1.2.1.

Лемма 1.2.1. *Пусть* $\tilde{x}(t) = x(t;\tilde{\mu}), \tilde{\mu} = (\tilde{t_0}, \tilde{x_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{f}) \in A_0$ — *решение, определенное на* $[\tau, \tilde{t_1}], \tilde{t_i} \in (a, b), i = 0, 1;$ K_1 — *компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества* $K_0 = \mathrm{cl}\,\tilde{\varphi}(J_1) \cup \tilde{x}([\tilde{t_0}, \tilde{t_1}])$. *Тогда выполнены следующие условия*:

1.2.4. *существуют такие числа* $\varepsilon_1 > 0, \delta_1 > 0$, *что для произвольного* $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times \Im$, *элемент* $\tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu \in A_0$ *и ему соответствует решение* $x(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)$, *определенное на интервале* $[\tau, \tilde{t}_1 + \delta_1] \subset J_1$; *при этом* $x(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) \in \mathrm{int}\, K_1$;

1.2.5. *выполнены равенства*:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Sup}\{|x(t;\tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) - x(t;\tilde{\mu})| : t \in [s_1, \tilde{t}_1 + \delta_1]\} = 0,\ s_1 = \max(\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \varepsilon\delta t_0),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\tau^{\tilde{t}_1 + \delta_1} |x(t;\tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) - x(t;\tilde{\mu})| dt = 0$$

равномерно по $\delta\mu \in \Im$.

Сформулируем теперь теорему о непрерывной зависимости решения для уравнения, правая часть которого зависит от управления.

Пусть $f(t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu) \in E(J \times O^s \times G^\nu, \mathbb{R}^n)$. Каждому элементу $\varrho = (t_0, x_0, \varphi, u) \in B_0 = J \times O \times \Delta \times \Omega$ будем ставить в соответствие уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))) \tag{1.2.3}$$

с разрывным начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), t \in [\tau, t_0), x(t_0) = x_0. \tag{1.2.4}$$

Определение 1.2.2. Пусть $\varrho = (t_0, x_0, \varphi, u) \in B_0$, $t_0 < b$. Функцию $x(t) = x(t;\varrho) \in O$, $t \in [\tau, t_1]$; $t_1 \in (t_0, b]$, будем называть решением уравнения (1.2.3) с начальным условием (1.2.4) или решением, соответствующим элементу ϱ, определенным на интервале $[\tau, t_1]$, если она на интервале $[\tau, t_0]$ удовлетворяет условию (1.2.4), а на интервале $[t_0, t_1]$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\xi, x(\tau_1(\xi)), \ldots, x(\tau_s(\xi)), u(\theta_1(\xi)), \ldots, u(\theta_\nu(\xi)))d\xi.$$

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\tilde{x}(t) = x(t;\tilde{\varrho}), \tilde{\varrho} = (\tilde{t_0}, \tilde{x_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{u}) \in B_0$ — *решение, определенное на* $[\tau, \tilde{t_1}], \tilde{t_1} < b$; $K_1 \subset O$ — *компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества* $K_0 = \mathrm{cl}\,\tilde{\varphi}(J_1) \cup \tilde{x}([\tilde{t_0}, \tilde{t_1}])$. *Тогда выполнены следующие условия*:

1.2.6. *существуют числа* $\delta_i > 0, i = 0, 1$, *такие, что каждому элементу*

$$\varrho \in V(\tilde{\varrho};\delta_0) = (V(\tilde{t_0};\delta_0) \cap J) \times (V(\tilde{x_0};\delta_0) \cap O) \times (V(\tilde{\varphi};\delta_0) \cap \Delta) \times (V(\tilde{u};\delta_0) \cap \Omega)$$

соответствует решение $x(t;\varrho)$, *определенное на интервале* $[\tau, \tilde{t_1} + \delta_1] \subset J_1$ *и удовлетворяющее условию* $x(t;\varrho) \in \mathrm{int}\, K_1,\ t \in [\tau, \tilde{t_1} + \delta_1]$;

1.2.7. *для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_0]$, *что для любого* $\varrho \in V(\tilde{\varrho};\delta_2)$ *выполнено неравенство*

$$|x(t;\varrho) - x(t;\tilde{\varrho})| \leqslant \varepsilon\ \forall t \in [s_1, \tilde{t_1} + \delta_1],\ \ s_1 = \max\{t_0, \tilde{t_0}\};$$

1.2.8. *для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) \in (0, \delta_0]$, *что для любого* $\varrho \in V(\tilde{\rho};\delta_3)$ *выполнено неравенство*

$$\int_\tau^{\tilde{t_1} + \delta_1} |x(t;\varrho) - x(t;\tilde{\varrho})| dt \leqslant \varepsilon.$$

В пространстве $E_\varrho = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times E_\varphi \times E_u$ введем множество вариаций:

$$\Im_0 = \{\delta\varrho = (\delta t_0, \delta x_0, \delta\varphi, \delta u) \in E_\varrho : |\delta t_0| \leqslant \alpha, |\delta x_0| \leqslant \alpha, \|\delta\varphi\| \leqslant \alpha, \|\delta u\| \leqslant \alpha\}.$$

Очевидно, множество вариаций $\Im_0$ является окрестностью нуля в пространстве E_ϱ.

Следующая лемма непосредственно следует из теоремы 1.2.2.

Лемма 1.2.2. *Пусть* $\tilde{x}(t) = x(t; \tilde{\varrho}), \tilde{\varrho} = (\tilde{t_0}, \tilde{x_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{u}) \in B_0$ — *решение, определенное на* $[\tau, \tilde{t_1}]$, $\tilde{t_i} \in (a, b)$, $i = 0, 1$; K_1 — *компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества* $\mathrm{cl}\,\tilde{\varphi}(J_1) \cup \tilde{x}([\tilde{t_0}, \tilde{t_1}])$. *Тогда выполнены следующие условия*:

1.2.9. *существуют такие числа* $\varepsilon_1 > 0, \delta_1 > 0$, *что для произвольного* $(\varepsilon, \delta\varrho) \in [0, \varepsilon_1] \times \Im_0$ *элемент* $\tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\varrho \in B_0$ *и ему соответствует решение* $x(t; \tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\varrho)$, *определенное на интервале* $[\tau, \tilde{t_1} + \delta_1] \in J_1$; *при этом* $x(t; \tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\varrho) \in \mathrm{int}\, K_1$;

1.2.10. *выполнены равенства*:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{Sup}\{|x(t; \tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\varrho) - x(t; \tilde{\varrho})| : t \in [s_1, \tilde{t_1} + \delta_1]\} = 0, \; s_1 = \max(\tilde{t_0}, \tilde{t_0} + \varepsilon\delta t_0),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\tau}^{\tilde{t_1} + \delta_1} |x(t; \tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\varrho) - x(t; \tilde{\varrho})| dt = 0$$

равномерно по $\delta\varrho \in \Im_0$.

1.3. Доказательство теорем 1.2.1 и 1.2.2.

О непрерывной зависимости решения одного класса функционально-дифференциального уравнения. Каждому элементу $\mu \in A_0$ будем ставить в соответствие функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) = f(t_0, \varphi, y)(t) = f(t, h(t_0, \varphi, y)(\tau_1(t)), \ldots, h(t_0, \varphi, y)(\tau_s(t)) \tag{1.3.1}$$

с начальным условием

$$y(t_0) = x_0, \tag{1.3.2}$$

где оператор $h : J \times \Delta \times C(J, \mathbb{R}^n) \to E_\varphi$ определяется формулой

$$h(t_0, \varphi, y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), \; t \in [\tau, t_0), \\ y(t), \; t \in [t_0, b]. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Определение 1.3.1. Функцию $y(t) = y(t; \mu) \in O, t \in [r_1, r_2] \subset J$ будем называть решением уравнения (1.3.1), соответствующим элементу $\mu \in A_0$, определенным на $[r_1, r_2]$, если $t_0 \in [r_1, r_2]$, $y(t_0) = x_0$, и на интервале $[r_1, r_2]$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t_0, \varphi, y)(\xi) d\xi.$$

Замечание 1.3.1. Пусть $y(t; \mu), t \in [r_1, r_2], \mu \in A_0$ — решение уравнения (1.3.1) с начальным условием (1.3.2). Тогда, как легко видеть, функция

$$x(t; \mu) = h(t_0; \varphi, y(\cdot; \mu))(t), t \in [\tau, r_2].$$

будет решением уравнения (1.2.1) с начальным условием (1.2.3) (см. определения 1.2.1 и 1.3.1).

Теорема 1.3.1. *Пусть* $\tilde{y}(t) = y(t; \tilde{\mu})$, $\tilde{\mu} \in A_0$ — *решение, определенное на* $[r_1, r_2] \subset (a, b)$; $K_1 \subset O$ — *компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества* $K_0 = \mathrm{cl}\,\tilde{\varphi}(J_1) \cup \tilde{y}([r_1, r_2])$. *Тогда выполнены следующие условия*:

1.3.1. *существуют числа* $\delta_i > 0$, $i = 0, 1$, *такие, что каждому элементу* $\mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_0, \alpha_2)$ *соответствует решение* $y(t; \mu)$, *определенное на* $[r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \subset J$. *При этом для произвольного* $\mu = (t_0, x_0, \varphi, f) \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_2, \alpha_2)$

$$\varphi(t) \in \mathrm{int}\, K_1, \;\; t \in J_1; \; y(t; \mu) \in \mathrm{int}\, K_1, \; t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1];$$

1.3.2. *для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_0]$, *что для любого* $\mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_2, \alpha_2)$ *выполнено неравенство*

$$|y(t; \mu) - y(t; \tilde{\mu})| \leqslant \varepsilon \;\; \forall t \in [r_1 - \delta_1, \; r_2 + \delta_1]. \tag{1.3.4}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ настолько мало, что замкнутая ε_0-окрестность множества K_0 : $K(\varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \hat{x} \in K_0, \ |x - \hat{x}| \leqslant \varepsilon_0\}$ содержится в $\operatorname{int} K_1$.

В силу леммы 1.1.2 существуют компакт $Q : K^s(\varepsilon_0) \subset Q \subset K_1^s$ и непрерывно дифференцируемая функция $\chi : \mathbb{R}^{n\times s} \to [0,1]$ вида (1.1.1).

Каждому элементу $\mu \in A_0$ сопоставим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{z}(t) = g(t_0,\varphi,z)(t) = g(t, h(t_0,\varphi,z)(\tau_1(t)),\dots,h(t_0,\varphi,z)(\tau_s(t))),\ g = \chi f \tag{1.3.5}$$

с начальным условием

$$z(t_0) = x_0. \tag{1.3.6}$$

Очевидно, функция $g(t,x_1,\dots,x_s)$ удовлетворяет условиям (1.1.3) и (1.1.4), а решение уравнения (1.3.5) с начальным условием (1.3.6) зависит от параметра

$$\mu \in A = J \times O \times \Delta \times (\tilde{f} + W(K_1,\alpha_2)) \subset E_\mu.$$

Топология в A задается топологией, индуцируемой из векторного пространства E_μ.

На полном метрическом пространстве $C(J,\mathbb{R}^n)$ определим семейство отображений, зависящих от параметра μ,

$$F(\cdot;\mu) : C(J,\mathbb{R}^n) \to C(J,\mathbb{R}^n) \tag{1.3.7}$$

формулой

$$\zeta(t) = \zeta(t;z,\mu) = x_0 + \int_{t_0}^t g(t_0,\varphi,z)(\xi)d\xi,\ t \in J,\ z \in C(J,\mathbb{R}^n).$$

Ясно, что каждая неподвижная точка $z(t;\mu), t \in J$, отображения (1.3.7) является решением уравнения (1.3.5) с начальным условием (1.3.6).

Определим k-итерацию $F^k(z;\mu)$ формулой

$$\zeta_k(t) = \zeta_k(t;z,\mu) = x_0 + \int_{t_0}^t g(t_0,\varphi,\zeta_{k-1})(\xi)d\xi,\ k = 1,2,\dots,\zeta_0(t) = z(t).$$

Докажем теперь, что для достаточно большого k семейство отображений $F^k(z;\mu)$ является равномерно сжимающим. Для этого оценим разность

$$|\zeta_k'(t) - \zeta_k''(t)| = |\zeta_k(t;z',\mu) - \zeta_k(t;z'',\mu)| \leqslant \int_a^t |g(t_0,\varphi,\zeta_{k-1}')(\xi) - g(t_0,\varphi,\zeta_{k-1}'')(\xi)|d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^s \int_a^t L_f(\xi)|h(t_0,\varphi,\zeta_{k-1}')(\tau_i(\xi)) - h(t_0,\varphi,\zeta_{k-1}'')(\tau_i(\xi))|d\xi,\ k = 1,2,\dots, \tag{1.3.8}$$

(см. (1.1.4)), где функция $L_f(\xi)$ имеет вид (1.1.5). Здесь предполагается, что $\zeta_0'(t) = z'(t)$, $\zeta_0''(t) = z''(t)$.

Из определения оператора $h(\cdot)$ следует

$$h(t_0,\varphi,\zeta_{k-1}')(\tau_i(\xi)) - h(t_0,\varphi,\zeta_{k-1}'')(\tau_i(\xi)) = h(t_0,0,\zeta_{k-1}' - \zeta_{k-1}'')(\tau_i(\xi)).$$

Итак, при $\xi \in [a,\gamma_i(t_0)]$ получим

$$h(t_0,0,\zeta_{k-1}' - \zeta_{k-1}'')(\tau_i(\xi)) = 0. \tag{1.3.9}$$

Пусть $\gamma_i(t_0) < b$, тогда при $\xi \in [\gamma_i(t_0), b]$ получим

$$|h(t_0,0,\zeta_{k-1}' - \zeta_{k-1}'')(\tau_i(\xi))| = |\zeta_{k-1}'(\tau_i(\xi)) - \zeta_{k-1}''(\tau_i(\xi))| \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{|\zeta_{k-1}'(\tau_i(t)) - \zeta_{k-1}''(\tau_i(t))| : t \in [\gamma_i(t_0),\xi]\} \leqslant \sup\{|\zeta_{k-1}'(t) - \zeta_{k-1}''(t)| : t \in [a,\xi]\}. \tag{1.3.10}$$

Если $\gamma_i(t_0) > b$, то равенство (1.3.9) выполнено на всем интервале J. Из (1.3.8), с учетом (1.3.9) и (1.3.10), следует:

$$|\zeta_k'(t) - \zeta_k''(t)| \leqslant \sup\{|\zeta_k'(\xi) - \zeta_k''(\xi)| : \xi \in [a,t]\} \leqslant$$
$$\leqslant s\int_a^t L_f(\xi_1)\sup\{|\zeta_{k-1}'(\xi) - \zeta_{k-1}''(\xi)| : \xi \in [a,\xi_1]\}d\xi_1,\ k = 1,2,\dots.$$

Таким образом,

$$|\zeta_k'(t) - \zeta_k''(t)| \leqslant s^2 \int_a^t L_f(\xi_1)d\xi_1 \int_a^{\xi_1} L_f(\xi_2) \sup\{|\zeta_{k-2}'(\xi) - \zeta_{k-2}''(\xi)| : \xi \in [a, \xi_2]\} d\xi_2.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$|\zeta_k'(t) - \zeta_k''(t)| \leqslant s^k \alpha_k(t) \|z' - z''\|,$$

где

$$\alpha_k(t) = \int_a^t L_f(\xi_1)d\xi_1 \int_a^{\xi_1} L_f(\xi_2)d\xi_2 \ldots \int_a^{\xi_{k-1}} L_f(\xi_k)d\xi_k = \frac{1}{k!}\left(\int_a^b L_f(\xi)d\xi\right)^k$$

(см. лемму 1.1.8).

Итак,

$$\rho(F^k(z';\mu), F^k(z'';\mu)) = \|\zeta_k' - \zeta_k''\| \leqslant \frac{1}{k!}\left(s\int_J L_f(t)dt\right)^k \|z' - z''\| = \tilde{\alpha_k}\rho(z', z'').$$

Докажем существование такого числа $\alpha_3 > 0$, что

$$\int_J L_f(t)dt \leqslant \alpha_3 \ \forall f \in \tilde{f} + W(K_1; \alpha_2).$$

В самом деле, пусть $(x_1, \ldots, x_s) \in K_1^s$ и $f \in \tilde{f} + W(K_1; \alpha_2)$; тогда

$$|f(t, x_1, \ldots, x_s)| \leqslant m_{\tilde{f},K_1}(t) + m_{\delta f,K_1}(t) = m_{f,K_1}(t), \ t \in J.$$

Далее, пусть $x_i', x_i'' \in K_1, \ i = \overline{1, s}$. Тогда

$$|f(t, x_1', \ldots, x_s') - f(t, x_1'', \ldots, x_s'')| \leqslant |\tilde{f}(t, x_1', \ldots, x_s') - \tilde{f}(t, x_1'', \ldots, x_s'')| +$$

$$+|\delta f(t, x_1', \ldots, x_s') - \delta f(t, x_1'', \ldots, x_s'')| \leqslant (L_{\tilde{f},K_1}(t) + L_{\delta f,K_1}(t)) \sum_{i=1}^s |x_i' - x_i''| = L_{f,K_1}(t) \sum_{i=1}^s |x_i' - x_i''|.$$

В силу (1.1.5),

$$\int_J L_f(t)dt = \int_J (L_{f,K_1}(t) + \alpha_0 m_{f,K_1}(t))dt \leqslant \alpha_2(1 + \alpha_0) + \int_J [L_{\tilde{f},K_1}(t) + \alpha_0 m_{\tilde{f},K_1}(t)]dt = \alpha_3.$$

Учитывая эту оценку, получим $\tilde{\alpha_k} \leqslant (s\alpha_3)^k/k!$. Следовательно, существует натуральное число k_1, для которого $\tilde{\alpha}_{k_1} < 1$. Таким образом, k_1-итерация семейства (1.3.7) является сжимающей. Согласно первой части теоремы 1.1.1, отображение (1.3.7) для каждого μ имеет единственную неподвижную точку. Отсюда следует, что уравнение (1.3.1) с начальным условием (1.3.2) имеет единственное решение $z(t;\mu), \ t \in J$.

Для произвольного $k = 1, 2, \ldots$ докажем, что отображение $F^k(z(\cdot;\tilde{\mu}); \ \cdot) : A \to C(J, \mathbb{R}^n)$ непрерывно в точке $\mu = \tilde{\mu}$. Для этого достаточно показать, что если последовательность $\mu_i = (t_0^i, x_0^i, \varphi_i, f_i) \in A, \ i = 1, 2 \ldots$ сходится к $\tilde{\mu} = (\tilde{t_0}, \tilde{x_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{f})$, т.е.

$$\lim_{i\to\infty}(|t_0^i - \tilde{t_0}| + |x_0^i - \tilde{x_0}| + \|\varphi_i - \tilde{\varphi}\| + H_0(\delta f_i, K_1)) = 0,$$

то

$$\lim_{i\to\infty} F^k(z(\cdot;\tilde{\mu}); \mu_i) = F^k(z(\cdot;\tilde{\mu}); \tilde{\mu}) = z(\cdot;\tilde{\mu}). \tag{1.3.11}$$

Доказательство равенства (1.3.11) проведем по индукции.

Пусть $k = 1$, тогда имеем

$$|\zeta_1^i(t) - \tilde{z}(t) \leqslant |x_0^i - \tilde{x_0}| + \left|\int_{t_0^i}^t g_i(t_0^i, \varphi_i, \tilde{z})(\xi)d\xi - \int_{\tilde{t_0}}^t \tilde{g}(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{z})(\xi)d\xi\right| \leqslant \alpha_1^i + \alpha_2^i(t), \tag{1.3.12}$$

где

$$\zeta_1^i(t)=\zeta_1(t;\tilde z,\mu_i),\ \tilde z(t)=z(t;\tilde\mu),\ g_i=\chi f_i,\ \tilde g=\chi\tilde f;$$

$$\alpha_1^i=|x_0^i-\tilde{x_0}|+\left|\int_{t_0^i}^{\tilde{t_0}}|\tilde g(\tilde{t_0},\tilde\varphi,\tilde z)(\xi)|d\xi\right|,$$

$$\alpha_2^i(t)=\left|\int_{t_0^i}^{t}|g_i(t_0^i,\varphi_i,\tilde z)(\xi)-\tilde g(\tilde{t_0},\tilde\varphi,\tilde z)(\xi)|d\xi\right|.$$

Согласно (1.1.3),

$$\alpha_1^i\leqslant|x_0^i-\tilde{x_0}|+\left|\int_{t_0^i}^{\tilde{t_0}}m_{\tilde f,K_1}(t)dt\right|,$$

поэтому

$$\lim_{i\to\infty}\alpha_1^i=0. \tag{1.3.13}$$

Легко заметить, что после элементарных преобразований для $\alpha_2^i(t)$ получим

$$\alpha_2^i(t)=\left|\int_{t_0^i}^{t}[\tilde g(t_0^i,\varphi_i,\tilde z)(\xi)-\tilde g(\tilde{t_0},\tilde\varphi,\tilde z)(\xi)]d\xi\right|+\left|\int_{t_0^i}^{t}[\delta g_i(t_0^i,\varphi_i,\tilde z)(\xi)-\delta g_i(t_0^i,\tilde\varphi,\tilde z)(\xi)]d\xi\right|+$$

$$+\left|\int_{t_0^i}^{t}\delta g_i(t_0^i,\tilde\varphi,\tilde z)(\xi)d\xi\right|\leqslant\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{2j}^i+\alpha_{3j}^i)+\alpha_4^i(t), \tag{1.3.14}$$

где

$$\alpha_{2j}^i=\int_J L_{\tilde f}(t)|h(t_0^i,\varphi_i,\tilde z)(\tau_j(t))-h(\tilde{t_0},\tilde\varphi,\tilde z)(\tau_j(t))|dt,$$

$$\alpha_{3j}^i=\int_J L_{\delta f_i}(t)|h(t_0^i,\varphi_i,\tilde z)(\tau_j(t))-h(t_0^i,\tilde\varphi,\tilde z)(\tau_j(t))|dt,$$

$$\alpha_4^i(t)=\left|\int_{t_0^i}^{t}\delta g_i(t_0^i,\tilde\varphi,\tilde z)(\xi)d\xi\right|,\ \delta g_i=g_i-\tilde g.$$

Теперь оценим α_{2j}^i, α_{3j}^i, $\alpha_4^i(t)$. Имеем:

$$\alpha_{2j}^i\leqslant\int_J L_{\tilde f}(t)|h(t_0^i,\varphi_i-\tilde\varphi,0)(\tau_j(t))|dt+\int_J L_{\tilde f}(t)|h(t_0^i,\tilde\varphi,\tilde z)(\tau_j(t))-$$

$$-h(\tilde{t_0},\tilde\varphi,\tilde z)(\tau_j(t))|dt\leqslant\|\varphi_i-\tilde\varphi\|\int_J L_{\tilde f}(t)dt+\int_{\gamma_j(\xi_1^i)}^{\gamma_j(\xi_2^i)}L_{\tilde f}(t)|\tilde\varphi(\tau_j(t))-\tilde z(\tau_j(t))|dt,$$

$$\xi_1^i=\min\{t_0^i,\tilde{t_0}\},\ \xi_2^i=\max\{t_0^i,\tilde{t_0}\}.$$

Функция $\gamma_j(t)$ непрерывна, поэтому $\lim\limits_{i\to\infty}[\gamma_j(\xi_2^i)-\gamma_j(\xi_1^i)]=0$.

Итак,

$$\lim_{i\to\infty}\alpha_{2j}^i=0,\ \ j=\overline{1,s}. \tag{1.3.15}$$

Далее,

$$\alpha_{3j}^i\leqslant\int_J L_{\delta f_i}(t)|\varphi_i(\tau_j(t))-\tilde\varphi(\tau_j(t))|dt\leqslant\|\varphi_i-\tilde\varphi\|\int_J L_{\delta f_i}(t)dt.$$

На основе (1.1.5) можно написать оценку

$$\int_J L_{\delta f_i}(t)dt=\int_J[L_{\delta f_i,K_1}(t)+\alpha_0 m_{\delta f_i,K_1}(t)]dt\leqslant\alpha_2(1+\alpha_0).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{i\to\infty}\alpha_{3j}^i=0,\ j=\overline{1,s}. \tag{1.3.16}$$

Пусть
$$z_1(t) = \tilde{\varphi}(t), \ \ t \in J_1; \ \ z_2(t) = \begin{cases} \tilde{z}(a), & t < a, \\ \tilde{z}(t), & t \in J. \end{cases}$$
Нетрудно заметить, что для $\alpha_4^i(t)$ справедлива оценка
$$\alpha_4^i(t) \leqslant \sum_{m_1=1}^{2} \dots \sum_{m_s=1}^{2} \max_{t',t'' \in J} \left| \int_{t'}^{t''} \delta g_i(t, z_{m_1}(\tau_1(t)), \dots, z_{m_s}(\tau_s(t)))dt \right|. \tag{1.3.17}$$
Пусть $K_2 \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, содержащее $K_1 \cup z_2(J_1)$. Очевидно,
$$H_0(\delta g_i; K_2^s) = H_0(\delta g_i, K_1^s) \leqslant H(\delta f_i, K_1^s)$$
(см. (1.1.1) и (1.1.2)).

Так как $H_0(\delta f_i, K_1^s) \to 0$ при $i \to \infty$, $\lim\limits_{i\to\infty} H_0(\delta g_i, K_2^s) = 0$. Это позволяет использовать лемму 1.1.5, что в свою очередь дает
$$\lim_{i\to\infty} \max_{t',t'' \in J} \left| \int_{t\prime}^{t''} \delta g_i(t, z_{m_1}(\tau_1(t)), \dots, z_{m_s}(\tau_s(t)))dt \right| = 0 \ \ \forall m_j \in \{1, 2\}, \ \ j = \overline{1, s}.$$
Правая часть неравенства (1.3.17) состоит из конечного числа слагаемых, поэтому
$$\lim_{i\to\infty} \alpha_4^i(t) = 0 \tag{1.3.18}$$
равномерно по $t \in J$.

Условия (1.3.15), (1.3.16) и (1.3.18) дают
$$\lim_{i\to\infty} \alpha_2^i(t) = 0 \tag{1.3.19}$$
равномерно по $t \in J$ (см. (1.3.4)).

Принимая во внимание (1.3.13), (1.3.19), получаем, что из (1.3.12) следует
$$\lim_{i\to\infty} \|\zeta_1^i - \tilde{z}\| = 0.$$
Равенство (1.3.11) при $k = 1$ доказано.

Пусть равенство (1.3.11) выполнено для некоторого $k > 1$. Докажем его справедливость для $k + 1$. Элементарные преобразования дают
$$|\xi_{k+1}^i(t) - \tilde{z}(t)| \leqslant |x_0^i - \tilde{x_0}| + \left| \int_{t_0^i}^{t} g_i(t_0, \varphi_i, \xi_k^i)(\xi)d\xi - \int_{\tilde{t_0}}^{t} \tilde{g}(t_0, \tilde{\varphi}, \tilde{z})(\xi)d\xi \right| \leqslant |x_0^i - \tilde{x_0}| +$$
$$+ \left| \int_{t_0^i}^{\tilde{t_0}} |\tilde{g}(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{z})(\xi)|d\xi \right| + \left| \int_{t_0^i}^{t} g_i(t_0^i, \varphi_i, \tilde{z})(\xi)d\xi \right| +$$
$$+ \left| \int_J |g_i(t_0^i, \varphi_i, \xi_k^i)(\xi) - g_i(t_0^i, \varphi_i, \tilde{z})(\xi)|d\xi \right| = \alpha_1^i + \alpha_2^i(t) + \alpha_{4k}^i.$$
Величины α_1^i, $\alpha_2^i(t)$ были оценены выше, остается оценить α_{4k}^i.

Имеем:
$$\alpha_{4k}^i \leqslant \sum_{j=1}^{s} \int_J L_{f_i}(t)|h(t_0^i, 0, \zeta_k^i - \tilde{z})(\tau_j(\xi))|d\xi \leqslant s\|\zeta_k^i - \tilde{z}\| \int_J L_{f_i}(\xi)d\xi \leqslant s\alpha_2\|\zeta_k^i - \tilde{z}\|.$$
Поскольку
$$\lim_{i\to\infty} \|\zeta_k^i - \tilde{z}\| = 0,$$
то
$$\lim_{i\to\infty} \alpha_{4k}^i = 0. \tag{1.3.20}$$
Согласно (1.3.13), (1.3.19) и (1.3.20), получим $\lim\limits_{i\to\infty} \|\zeta_{k+1}^i - \tilde{z}\| = 0$. Равенство (1.3.11) доказано для каждого $k = 1, 2, \dots$.

Пусть число $\delta_1 > 0$ настолько мало, что $[r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_2] \subset J$ и $|z(t;\tilde{\mu}) - z(r_1;\tilde{\mu})| \leqslant \varepsilon_0/2$ при $t \in [r_1 - \delta_1, r_1]$; $|z(t;\tilde{\mu}) - z(r_2;\tilde{\mu})| \leqslant \varepsilon_0/2$ при $t \in [r_2, r_2 + \delta_1]$ (см. (1.1.3)).

Из единственности решения $z(t;\tilde{\mu})$ можно заключить, что при $t \in [r_1, r_2]$, $z(t;\tilde{\mu}) = \tilde{y}(t)$. С учетом предыдущих неравенств, получим

$$(h(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, z(\cdot;\tilde{\mu}))(\tau_1(t)), \ldots, h(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, z(\cdot,;\tilde{\mu}))(\tau_s(t))) \in K^s(\varepsilon_0/2) \subset Q,\ t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1]. \quad (1.3.21)$$

Следовательно,

$$\chi(h(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, z(\cdot,\tilde{\mu}))(\tau_1(t)), \ldots, h(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, z(\cdot,\tilde{\mu}))(\tau_s(t)) = 1,\ \ t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1],$$

а функция $z(t;\tilde{\mu})$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}(t) = \tilde{f}(t, h(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, y)(\tau_1(t)), \ldots, h(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, y)(\tau_s(t))),\ t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1],$$

и начальному условию

$$y(\tilde{t_0}) = \tilde{x_0}.$$

Итак,

$$y(t;\tilde{\mu}) = z(t;\tilde{\mu}),\ t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1].$$

На основе теоремы 1.1.1 для $\varepsilon_0/2$ существует число $\delta_0 \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что каждому элементу $\mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_0, \alpha_2)$ соответствует решение $z(t;\mu)$, удовлетворяющее условию

$$|z(t;\mu) - z(t;\tilde{\mu})| \leqslant \varepsilon_0/2,\ \ t \in J.$$

Таким образом, при $t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1]$

$$z(t;\mu) \in K(\varepsilon_0)\ \ \forall \mu \in V(\tilde{\mu}; k_1, \delta_0, \alpha_2).$$

Из этого, с учетом $\varphi(t) \in K(\varepsilon_0)$, следует, что при $t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1]$

$$\chi(h(t_0\,\varphi, z(\cdot,\mu))(\tau_1(t)), \ldots, h(t_0, \varphi, z(\cdot,\mu))(\tau_s(t)) = 1\ \ \forall \mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_0, \alpha_2).$$

Следовательно, функция $z(t;\mu)$ удовлетворяет уравнению (1.3.1) и условию (1.3.2), т.е.

$$y(t;\mu) = z(t;\mu) \in \operatorname{int} K_1,\ t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1],\ \mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_0, \alpha_2). \quad (1.3.22)$$

Первая часть теоремы доказана.

В силу теоремы 1.1.1 для произвольного $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0)$ такое, что для каждого $\mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta, \alpha_2)$

$$|z(t;\mu) - z(t;\tilde{\mu})| \leqslant \varepsilon,\ t \in J.$$

Отсюда, используя (1.3.22), получим (1.3.4). □

Следующая лемма является следствием теоремы 1.3.1.

Лемма 1.3.1. *Пусть $\tilde{y}(t)$ — соответствующее $\tilde{\mu} \in A_0$ решение, определенное на $[r_1, r_2] \subset (a, b)$; $K_1 \subset O$ — компакт, содержащий некоторую окрестность множества $\operatorname{cl} \tilde{\varphi}(J_1) \cap \tilde{y}([r_1, r_2])$. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_1 > 0, \delta_1 > 0$, что для произвольного $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times \Im$ элемент $\delta\mu + \varepsilon\delta\mu \in A_0$ и ему соответствует решение $y(t; \delta\mu + \varepsilon\delta\mu)$, определенное на $[r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \subset J$. При этом*

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t) + \varepsilon\delta\varphi(t) \in K_1, t \in J_1; y(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) \in K_1, t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1];$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = y(t; \tilde{\mu}),$$

равномерно по $(t, \delta\mu) \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \times \Im$.

Докажем теперь для управляемой системы теорему, аналогичную теореме 1.3.1.

Каждому элементу $\varrho \in B_0$ будем ставить в соответствие функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) = f(t_0, \varphi, y, u)(t) = f(t, h(t_0, \varphi, y)(\tau_1(t)), \ldots, h(t_0, \varphi, y)(\tau_s(t), u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))), \quad (1.3.23)$$

с начальным условием (1.3.2).

Решение $y(t;\varrho)$, соответствующее элементу $\varrho \in A_0$, определяется аналогично (см. определение 1.3.1).

Теорема 1.3.2. *Пусть* $\tilde{y}(t) = y(t;\tilde{\varrho}), \tilde{\varrho} = (\tilde{t_0}, \tilde{x_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{u}) \in B_0$ — *решение, определенное на* $[\tau, \tilde{t_1}], \tilde{t}_1 < b$; $K_1 \subset O$ — *компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества* $\mathrm{cl}\,\tilde{\varphi}(J_1) \cup \tilde{y}([r_1, r_2])$. *Тогда выполнены следующие условия*:

1.3.3. *существуют числа* $\delta_i > 0, i = 0, 1$, *такие, что каждому элементу* $\varrho \in V(\tilde{\varrho};\delta_0)$ *соответствует решение* $y(t;\varrho)$, *определенное на интервале* $[\tau, \tilde{t_1} + \delta_1] \subset J_1$ *и удовлетворяющее условию* $y(t;\varrho) \in K_1,\ t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1]$;

1.3.4. *для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_0]$, *что для любого* $\varrho \in V(\tilde{\varrho};\delta_2)$ *выполнено неравенство*

$$|y(t;\varrho) - y(t;\tilde{\varrho})| \leqslant \varepsilon \ \ \forall t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1].$$

Доказательство. Уравнение (1.3.23) перепишем в виде

$$\dot{y}(t) = \tilde{f}(t_0, \varphi, y)(t) + \delta f_u(t_0, \varphi, y)(t),$$
$$\tilde{f}(t, x_1, \ldots, x_s) = f(t, x_1, \ldots, x_s, \tilde{u}(\theta_1(t)), \ldots, \tilde{u}(\theta_\nu(t))) \in E_f,$$
$$\delta f_u(t, x_1, \ldots, x_s) = f(t, x_1, \ldots, x_s, u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))) - \tilde{f}(t, x_1, \ldots, x_s) \in E_f.$$

Пусть $\delta_0 > 0$ — число настолько малое, что $V(\tilde{u};\delta_0) \subset \Omega$. Существует компактное множество $M \subset G$ такое, что любая функция из окрестности $V(\tilde{u};\delta_0)$ принимает значения из M.

Пусть $K \subset O$ — компактное множество. Существует функция $L_K \in L(J, \mathbb{R}_+)$ такая, что для почти всех $t \in J$ выполнено неравенство

$$|f(t, x_1', \ldots, x_s', u_1', \ldots, u_\nu') - f(t, x_1'', \ldots, x_s'', u_1'', \ldots, u_\nu'')| \leqslant$$
$$\leqslant L_K(t)\left[\sum_{i=1}^{s} |x_i' - x_i''| + \sum_{j=1}^{\nu} |u_j' - u_j''|\right] \ \ \forall x_i', x_i'' \in K, i = \overline{1, s}, \ \ \forall u_j', u_j'' \in M, j = \overline{1, \nu}.$$

Следовательно,

$$|\delta f_u(t, x_1, \ldots, x_s)| \leqslant L_K(t) \sum_{j=1}^{\nu} |u(\theta_j(t)) - \tilde{u}(\theta_j(t))| \leqslant \nu\delta_0 L_K(t) \ \ \forall x_i \in K, i = \overline{1, s},$$

$$|\delta f_u(t, x_1', \ldots, x_s') - f_u(t, x_1'', \ldots, x_s'')| \leqslant 2L_K(t) \sum_{i=1}^{s} |x_i' - x_i''| \ \ \forall x_i', x_i'' \in K, i = \overline{1, s}.$$

Нетрудно заметить, что для каждого $\delta \in (0, \delta_0]$ справедливы включения

$$\{\delta f_u(t, x_1, \ldots, x_s) : u \in V(\tilde{u};\delta)\} \subset W(K;\alpha_2), \{\delta f_u(t, x_1, \ldots, x_s) : u \in V(\tilde{u};\delta)\} \subset V_{K;\delta_1},$$

где

$$\alpha_2 = (2 + \nu\delta_0) \int_J L_K(t)dt, \delta_1 = \delta\nu \int_J L_K(t)dt.$$

Теперь мы можем использовать теорему 1.3.1, что, в свою очередь, доказывает теорему 1.3.2. □

Из теоремы 1.3.2 следует такая лемма.

Лемма 1.3.2. *Пусть* $\tilde{y}(t)$ — *соответствующее* $\tilde{\varrho} \in B_0$ *решение, определенное на* $[r_1, r_2] \subset (a, b)$; $K_1 \subset O$ — *компакт, содержащий некоторую окрестность множества* $\mathrm{cl}\,\tilde{\varphi}(J_1) \cap \tilde{y}([r_1, r_2])$. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_1 > 0, \delta_1 > 0$, *что для произвольного* $(\varepsilon, \delta\varrho) \in [0, \varepsilon_1] \times \Im_0$ *элемент* $\tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\varrho \in B_0$ *и ему соответствует решение* $y(t;\tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\varrho)$, *определенное на* $[r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \in J$. *При этом*

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t) + \varepsilon\delta\varphi(t) \in K_1, t \in J_1; y(t;\tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\varrho) \in K_1, t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1];$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t;\tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\varrho) = y(t;\tilde{\varrho}),$$

равномерно по $(t, \delta\varrho) \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \times \Im_0$.

Доказательство теоремы 1.2.1. Пусть в теореме 1.3.1 $r_1 = \tilde{t_0}$, $r_2 = \tilde{t_1}$. Очевидно, решение $\tilde{x}(t) = x(t;\tilde{\mu})$ на интервале $[\tilde{t_0}, \tilde{t_1}]$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}(t) = \tilde{f}(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, y)(t).$$

Поэтому в теореме 1.3.1 в качестве решения $\tilde{y}(t) = y(t;\tilde{\mu})$ можно взять функцию $\tilde{x}(t)$, $t \in [\tilde{t_0}, \tilde{t_1}]$.

В силу теоремы 1.3.1 существуют числа $\delta_i > 0$, $i = 0, 1$, а для произвольного $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_0]$ такое, что каждому $\mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_0, \alpha_2)$ соответствует решение $y(t;\mu)$, $t \in [\tilde{t_0} - \delta_1, \tilde{t_1} + \delta_1]$. При этом выполнены условия

$$\begin{cases} \varphi(t) \in K_1,\ t \in J_1;\ y(t;\mu) \in \operatorname{int} K_1,\ t \in [\tilde{t_0} - \delta_1, \tilde{t_1} + \delta_1],\ \mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_0, \alpha_0); \\ |y(t;\mu) - y(t;\tilde{\mu})| \leqslant \varepsilon,\ t \in [\tilde{t_0} - \delta_1, \tilde{t_1} + \delta_1],\ \mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_2, \alpha_2). \end{cases} \tag{1.3.24}$$

Для произвольного $\mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_0, \alpha_2)$ функция

$$x(t;\mu) = \begin{cases} \varphi(t),\ t \in [\tau, t_0), \\ y(t;\mu),\ t \in [t_0, \tilde{t_1} + \delta_1], \end{cases}$$

есть соответствующее μ решение. При этом, если $t \in [s_1, \tilde{t_1} + \delta_1]$, то $x(t;\tilde{\mu}) = y(t;\tilde{\mu})$ и $x(t;\mu) = y(t;\mu)$. Из этого, с учетом (1.3.24), следуют 1.2.1 и 1.2.2. Легко заметить,что для произвольного $\mu \in V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_0, \alpha_2)$ получим

$$\int_{\tau}^{\tilde{t_1}+\delta_1} |x(t;\mu) - x(t;\tilde{\mu})|dt = \int_{\tau}^{s_0} |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)|dt + \int_{s_0}^{s_1} |x(t;\mu) - x(t;\tilde{\mu})|dt +$$
$$+ \int_{s_1}^{\tilde{t_1}+\delta_1} |x(t;\mu) - x(t;\tilde{\mu})|dt \leqslant \|\varphi - \tilde{\varphi}\|(b - \tau) + M|t_0 - \tilde{t_0}| +$$
$$+ \max_{t \in [s_1, \tilde{t_1}+\delta_1]} |x(t;\mu) - x(t;\tilde{\mu})|(b - \tau),$$

где $s_0 = \min\{t_0, \tilde{t_0}\}$, $M = \sup\{|x' - x''| : x',\ x'' \in K_1\}$. Из этого неравенства, на основе 1.2.1 и 1.2.2, следует 1.2.3. □

Доказательство теоремы 1.2.2. Пусть в теореме 1.3.2 $r_1 = \tilde{t_0}, r_2 = \tilde{t_1}$. Очевидно, решение $\tilde{x}(t) = x(t;\tilde{\varrho})$ на интервале $[\tilde{t_0}, \tilde{t_1}]$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}(t) = \tilde{f}(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, y, \tilde{u})(t).$$

Поэтому в теореме 1.3.2 в качестве решения $\tilde{y}(t) = y(t;\tilde{\varrho})$ можно взять функцию $\tilde{x}(t)$, $t \in [\tilde{t_0}, \tilde{t_1}]$. После этого доказательство теоремы полностью совпадает с доказательством теоремы 1.2.1; для этого достаточно всюду элемент μ заменить элементом ϱ, а множество $V(\tilde{\mu}; K_1, \delta_0, \alpha_2)$ заменить множеством $V(\tilde{\varrho}; \delta_0)$. □

2. Формулы вариации решения дифференциального уравнения с разрывным начальным условием

Формулы вариации решения дифференциального уравнения относительно правой части уравнения и начальных данных играют важную роль при доказательстве необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления. Кроме того, они дают возможность получить аналитический вид приближенного решения возмущенного дифференциального уравнения с возмущенными начальными условиями.

В этом пункте для нелинейного дифференциального уравнения с переменными запаздываниями и разрывным начальным условием доказаны формулы вариации решения в окрестности правого конца основного интервала $[\tilde{t_0}, \tilde{t_1}]$ при возмущении начального момента $\tilde{t_0}$, начальной функции, начального значения траектории и правой части уравнения. Отдельно рассмотрен случай, когда правая часть уравнения зависит от управляющей функции.

2.1. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим множество функций $f : J \times O^s \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям: для почти всех $t \in J$ функция $f(t,\cdot) : O^s \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема; при каждом $(x_1,\ldots,x_s) \in O^s$ функции $f(t,x_1,\ldots,x_s)$, $f_{x_i}(t,x_1,\ldots,x_s)$, $i=\overline{1,s}$, измеримы на J; для любой рассматриваемой функции f и любого компакта $K \subset O$ существует такая функция $m_{f,K} \in L(J,\mathbb{R}_+)$, что при любом $(x_1,\ldots,x_s) \in K^s$ и для почти всех $t \in J$

$$|f(t,x_1,\ldots,x_s)| + \sum_{i=1}^{s} |f_{x_i}(t,x_1,\ldots,x_s)| \leqslant m_{f,K}(t).$$

Классы эквивалентных между собой функций образуют векторное пространство, которое обозначим через $E_f^{(1)} = E^{(1)}(J\times O^s;\mathbb{R}^n)$; мы будем называть эти классы также функциями и обозначим через f.

Лемма 2.1.1 (см. [27]). *Пусть $K \subset O$ — компактное множество и $f \in E_f^{(1)}$. Тогда*

$$\operatorname{Sup}\{|f(t,x_1,\ldots,x_s)| + \sum_{i=1}^{s} |f_{x_i}(t,x_1,\ldots,x_s)| : (x_1,\ldots,x_s \in K^s)\} \in L(J,\mathbb{R}_+).$$

Лемма 2.1.2. *Справедливо включение*

$$E_f^{(1)} \subset E_f. \tag{2.1.1}$$

Доказательство. Пусть $f \in E_f^{(1)}, K_0 \subset O$ — произвольный компакт. Чтобы доказать включение (2.1.1), достаточно доказать существование такой функции $L_{f,K_0} \in L(J,\mathbb{R}_+)$, что для почти всех t

$$|f(t,x_1',\ldots,x_s') - f(t,x_1'',\ldots,x_s'')| \leqslant L_{f,K_0}(t) \sum_{i=1}^{s} |x_i' - x_i''| \ \ \forall x_i', x_i'' \in K_0, i=\overline{1,s}.$$

Введем функцию $g(t,x_1,\ldots,x_s)$ (см. (1.1.2)). Ясно, что при $(x_1,\ldots,x_s) \in K_1^s$ имеем

$$g_{x_i}(t,x_1,\ldots,x_s) = 0,\ i=\overline{1,s}.$$

Пусть $(x_1,\ldots,x_s) \in K_1^s$. Очевидно, что

$$|g_{x_i}| = \sqrt{\sum_{k,j=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i^j}(g^k)\right|^2} \leqslant \sum_{k,j=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i^j}(\chi f^k)\right|.$$

Имеем:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i^j}(\chi f^k)\right| \leqslant |f^k||\chi_{x_i^j}| + |f^k_{x_i^j}| \leqslant m_{f,K_1}(\beta+1),$$

где

$$\beta = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\chi_{x_i}(x_1,\ldots,x_s)| : (x_1,\ldots,x_s) \in K_1^s\right\}. \tag{2.1.2}$$

Таким образом, для каждого $i=\overline{1,s}$ имеет место

$$|g_{x_i}(t,x_1,\ldots,x_s)| \leqslant n^2(\beta+1)m_{f,K_1}(t) = m_{g,K_1}(t) \ \ \forall (t,x_1,\ldots,x_s) \in J\times\mathbb{R}^{n\times s},$$

где

$$m_{f,K_1}(t) = \operatorname{Sup}\{|f(t,x_1,\ldots,x_s)| : (x_1,\ldots,x_s) \in K_1^s\}.$$

Пусть $(x_1',\ldots,x_s')$ и $(x_1'',\ldots,x_s'')$ — произвольные точки из K_0^s. Тогда (см. (1.1.1)) получим

$$|f(t,x_1',\ldots,x_s') - f(t,x_1'',\ldots,x_s'')| = |g(t,x_1',\ldots,x_s') - g(t,x_1'',\ldots,x_s'')| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^1 \frac{d}{d\xi} g(t,x_1''+\xi(x_1'-x_1''),\ldots,x_s''+\xi(x_s'-x_s''))d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{s} |g_{x_i}(t,x_1''+\xi(x_1'-x_1''),\ldots,x_s''+\xi(x_s'-x_s''))||x_1'-x_1''|\right]d\xi \leqslant m_{g,K_1}(t)\sum_{i=1}^{s}|x_1'-x_1''|.$$

Итак, в качестве $L_{f,K_0}(t)$ можно брать $m_{g,K_1}(t)$. □

Лемма 2.1.3 (см. [20]). *Пусть $f \in L(J,\mathbb{R}^n)$ и $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\dot\theta(t) > 0$. Тогда функция $f(\theta(t))\dot\theta(t)$ интегрируема на $[\rho(a), \rho(b)]$, где $\rho(t) = \theta^{-1}(t)$ и*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\rho(a)}^{\rho(b)} f(\theta(t))\dot\theta(t)dt.$$

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$\dot x(t) = \sum_{i=1}^{s} A_i(t)x(\tau_i(t)) + f(t), t \in [t_0, b] \subset J, \tag{2.1.3}$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [\tau, t_0), x(t_0) = x_0, \tag{2.1.4}$$

где $A_i \in L(J,\mathbb{R}^{n\times n}), f \in L(J,\mathbb{R}^n), \varphi \in E_\varphi, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Уравнение (2.1.2) с начальным условием (2.1.3) имеет единственное решение $x(t)$, определенное на $[\tau, b]$ (см. определение 1.2.1).

При каждом $t \in (t_0, b]$ на интервале $[t_0, t]$ рассмотрим матричное уравнение с опережающими аргументами

$$\frac{\partial Y(\xi;t)}{\partial\xi} = -\sum_{i=1}^{s} Y(\gamma(\xi);t)A_i(\gamma_i(\xi))\dot\gamma_i(\xi), \xi \in [t_0, t], \tag{2.1.5}$$

$$Y(\xi,t) = \begin{cases} I, & \xi = t, \\ \Theta, & \xi > t, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

где I — единичная матрица, Θ — нулевая матрица.

Лемма 2.1.4 (формула Коши). *Решение уравнения* (2.1.3) *с начальным условием* (2.1.4) *на интервале* $[t_0, b]$ *может быть представлено формулой*

$$x(t) = Y(t_0;t)x_0 + \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)A_i(\gamma_i(\xi))\dot\gamma_i(\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)f(\xi)d\xi, \tag{2.1.7}$$

где $Y(\xi;t)$ — решение уравнения (2.1.5) *с начальным условием* (2.1.6).

Доказательство. На отрезке $[t_0, t]$, где $t \in (t_0, b]$ рассмотрим уравнение

$$\dot x(\xi) = \sum_{i=1}^{s} A_i(\xi)x(\tau_i(\xi)) + f(\xi),\ \ x(\xi) = \varphi(\xi),\ \xi \in [\tau, t_0),\ x(t_0) = x_0. \tag{2.1.8}$$

Умножая уравнения (2.1.8) на матричную функцию $Y(\xi;t)$ и интегрируя по $\xi \in [t_0, t]$, получаем

$$\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)\dot x(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{s} \int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)A_i(\xi)x(\tau_i(\xi))d\xi + \int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)f(\xi)d\xi. \tag{2.1.9}$$

Интегрирование по частям в левой части равенства (2.1.9) с учетом $Y(t;t) = I$ дает

$$\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)\dot x(\xi)d\xi = x(t) - Y(t_0;t)x_0 - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial Y(\xi;t)}{\partial\xi}x(\xi)d\xi. \tag{2.1.10}$$

Далее,

$$\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)A_i(\xi)x(\tau_i(\xi))d\xi = \int_{\tau_i(t_0)}^{\tau_i(t)} Y(\gamma(\xi);t)A_i(\gamma_i(\xi))\dot\gamma_i(\xi)x(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma(\xi);t)A_i(\gamma_i(\xi))\dot\gamma_i(\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_{t_0}^{t} Y(\gamma(\xi);t)A_i(\gamma_i(\xi))\dot\gamma_i(\xi)x(\xi)d\xi \tag{2.1.11}$$

(см. (2.1.6)).

Из (2.1.9) с учетом (2.1.10) и (2.1.11) получим

$$x(t)=Y(t_0;t)+\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(t_0)}^{t_0}Y(\gamma(\xi);t)A_i(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t}\Big[\frac{\partial Y(\xi;t)}{\partial\xi}+$$
$$+\sum_{i=1}^{s}Y(\gamma(\xi);t)A_i(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi)\Big]x(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t}Y(\xi;t)f(\xi)d\xi.$$

Функция $Y(\xi;t)$ удовлетворяет уравнению (2.1.5), поэтому из последнего соотношения следует формула (2.1.7). □

Лемма 2.1.5 (лемма Гроноулла). *Пусть $g(t)\geqslant 0$, $t\in[t_0,b]$ — непрерывная скалярная функция, $m\in L(J,\mathbb{R}_+)$ и пусть выполнено неравенство*

$$g(t)\leqslant c+\int_{t_0}^{t}m(\xi)g(\xi)d\xi,\ \ c\geqslant 0.$$

Тогда

$$g(t)\leqslant c\exp\left(\int_{t_0}^{t}m(\xi)d\xi\right),\ \ t\in[t_0,b].$$

Лемма 2.1.6. *Пусть $t'\in(t_0,b]$. Для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для произвольного $t''\in[t'-\delta,t'+\delta]\cap[t_0,b]$ справедливо неравенство*

$$|Y(\xi;t')-Y(\xi;t'')|\leqslant\varepsilon\ \ \forall\xi\in[a,\underline{t}],\underline{t}=\min(t',t'').$$

Лемма 2.1.6 является простым следствием теоремы, аналогичной теореме 1.3.2, которая также справедлива для уравнений с опережающими аргументами.

Лемма 2.1.7. *Матричная функция $Y(\xi;t)$ непрерывна на множестве $\Pi=\{(\xi,t);\ a\leqslant\xi\leqslant t,\ t\in J\}$.*

Доказательство. Пусть $(\xi,t)\in\Pi$ и $\xi<t$. Существует такое $\delta_1>0$, что $\xi+\Delta\xi<\min(t+\Delta t,t)$ при $|\Delta\xi|\leqslant\delta_1,|\Delta t|\leqslant\delta_1$, т.е. $(\xi+\Delta\xi,t+\Delta t)\in\Pi$.

На основе леммы 2.1.6 для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta_2\in(0,\delta_1)$ такое, что для произвольных $\Delta\xi,\Delta t$ удовлетворяющих условиям $|\Delta\xi|\leqslant\delta_2,|\Delta t|\leqslant\delta_2$ справедливо неравенство

$$|Y(\xi+\Delta\xi;t+\Delta t)-Y(\xi+\Delta\xi;t)|\leqslant\varepsilon/2.$$

С другой стороны, функция $Y(\xi;t)$ непрерывна на $[a,t]$, т.е. существует число $\delta_3\in(0,\delta_1)$ такое, что

$$|Y(\xi+\Delta\xi;t)-Y(\xi;t)|\leqslant\varepsilon/2,|\Delta\xi|\leqslant\delta_2.$$

Следовательно, при $|\Delta\xi|\leqslant\delta,|\Delta t|\leqslant\delta,\delta=\min(\delta_2,\delta_3)$ имеем

$$a(\xi,t,\Delta\xi,\Delta t)=|Y(\xi+\Delta\xi;t+\Delta t)-Y(\xi;t)|\leqslant|Y(\xi+\Delta\xi;t+\Delta t)-Y(\xi+\Delta\xi;t)|+$$
$$+|Y(\xi+\Delta\xi;t)-Y(\xi;t)|\leqslant\delta.\tag{2.1.12}$$

Пусть $\xi=t$ и приращения $\Delta\xi$ и Δt таковы, что $(t+\Delta\xi,t+\Delta t)\in\Pi$, т.е. $\Delta\xi\leqslant\Delta t$.

Если $\Delta\xi\leqslant 0$, то $t+\Delta\xi\leqslant\min(t,t+\Delta t)$. Поэтому малость $a(t,t,\Delta\xi,\Delta t)$ для малых $\Delta\xi,\Delta t$ доказывается аналогично (см. (2.1.12)). Если $\Delta\xi\geqslant 0$, то мы будем использовать неравенства

$$a(\xi,t,\Delta\xi,\Delta t)\leqslant|Y(t+\Delta\xi;t+\Delta t)-Y(t;t+\Delta t)|+|Y(t;t+\Delta t)-Y(t,t)|=a(t,\Delta t,\Delta\xi)+a(t,\Delta t),$$
$$|Y(\xi;t)|\leqslant M=\mathrm{const},(\xi,t)\in\Pi.\tag{2.1.13}$$

Неравенство (2.1.13) будет доказано позже.

Теперь оценим $a(t,\Delta t,\Delta\xi)$. Имеем[1] (см. (2.1.5)):

$$a(t,\Delta t,\Delta\xi)\leqslant\int_{t}^{t+\Delta t}\left|\frac{\partial Y(\xi;t+\Delta t)}{\partial\xi}\right|d\xi\leqslant M\int_{t}^{t+\Delta t}\sum_{i=1}^{s}\chi(J;\gamma_i(\xi))|A_i(\gamma_i(\xi))|\dot{\gamma}_i(\xi)d\xi.$$

[1]Здесь и всюду $\chi(J;t)$ означает характеристическую функцию множества J.

Отсюда следует

$$\lim_{(\Delta t,\,\Delta\xi)\to(0,\,0)} a(t,\Delta t,\Delta\xi)=0.$$

Малость $a(t,\Delta t)$ для малого Δt следует из леммы 2.1.6. Итак, непрерывность функции $Y(\xi;t)$ на П доказана.

Теперь докажем неравенство (2.1.13). Из уравнения (2.1.5) с учетом (2.1.6) получим

$$\begin{gathered}|Y(\xi;t)|\leqslant|I|+\int_\xi^t\sum_{i=1}^s|Y(\gamma_i(t);t)||A_i(\gamma_i(\xi))|\dot\gamma_i(\xi)d\xi,\ \ \xi\in[a,t];\\ g(\xi;t)=\sup\{|Y(\xi;t)|:\zeta\in[\xi,t]\},\ \ g(\xi;t)=0,\ \ \xi>t.\end{gathered}\tag{2.1.14}$$

Следующие неравенства очевидны:

$$|Y(\xi;t)|\leqslant g(\xi;t),\ \ |Y(\gamma_i(\xi);t)|\leqslant g(\gamma_(\xi);t)\leqslant g(\xi;t),\ \ \xi\in[a,t].$$

Из неравенства (2.1.14) получаем

$$g(\xi;t)\leqslant\sqrt{n}+\int_a^t\sum_{i=1}^s\chi(J;\gamma_i(\xi))|A_i(\gamma_i(\xi))|\dot\gamma_i(\xi)g(\xi;t)d\xi.$$

Для каждого t функция $g(\xi;t)$ непрерывна относительно $\xi\in[a,t]$. Поэтому на основе леммы Гронуолла получим

$$g(\xi;t)\leqslant\sqrt{n}\int_J\sum_{i=1}^s\chi(J;\gamma_i(\xi))|A_i(\gamma_i(\xi))|\dot\gamma_i(\xi)d\xi=M.$$

□

2.2. Формулировка основных результатов. Пусть $\tilde x(t)$ — соответствующее элементу $\tilde\mu=(\tilde{t_0},\tilde{x_0},\tilde\varphi,\tilde f)\in A_1=J\times O\times\Delta\times E_f^{(1)}$ решение, определенное на интервале $[\tau,\tilde{t_1}],\tilde{t_i}\in(a,b),i=0,1$ (см. определение 1.2.1). В пространстве $E_\mu^{(1)}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times E_\varphi\times E_f^{(1)}$ введем множество вариаций:

$$\begin{gathered}\Im_1=\Big\{\delta\mu=(\delta t_0,\delta x_0,\delta\varphi,\delta f)\in E_\mu^{(1)}:\ |\delta t_0|\leqslant\alpha=\mathrm{const},\ \ |\delta x_0|\leqslant\alpha,\ \ \|\delta\varphi\|\leqslant\alpha,\\ \delta f=\sum_{i=1}^k\lambda_i\delta f_i,\ |\lambda_i|\leqslant\alpha,\ i=\overline{1,k}\Big\},\end{gathered}\tag{2.2.1}$$

где $\delta f_i\in E_f^{(1)},i=\overline{1,k}$ — фиксированные точки. Существуют такие числа $\varepsilon_1>0,\ \delta_1>0$, что для произвольного $(\varepsilon,\delta\mu)\in[0,\varepsilon_1]\times\Im_1$ элемент $\tilde\mu+\varepsilon\delta\mu\in A_1$ и ему соответствует решение $x(t;\tilde\mu+\varepsilon\delta\mu)$, определенное на интервале $[\tau,\tilde{t_1}+\delta_1]\subset J_1$ (см. лемму 1.2.1 и (2.1.1)).

В силу единственности, решение $x(t;\tilde\mu)$ на интервале $[\tau,\tilde{t_1}+\delta_1]$ является продолжением решения $\tilde x(t)$. Поэтому в дальнейшем мы можем считать, что решение $\tilde x(t)$ с самого начала определено на всем интервале $[\tau,\tilde{t_1}+\delta_1]$.

По определению, приращение решения $\tilde x(t)=x(t;\tilde\mu)$ есть

$$\begin{gathered}\Delta x(t)=\Delta x(t;\varepsilon\delta\mu)=x(t;\tilde\mu+\varepsilon\delta\mu)-\tilde x(t),\\ (t,\varepsilon,\delta\mu)\in[\tau,\tilde{t_1}+\delta_1]\times[0,\varepsilon_1]\times\Im_1.\end{gathered}\tag{2.2.2}$$

Для формулировки основных результатов введем обозначения:

$$\omega_{oi}^-=(\tilde{t_0},\underbrace{\tilde{x_0},\dots,\tilde{x_0}}_{i},\underbrace{\tilde\varphi(\tilde{t_0}-),\dots,\tilde\varphi(\tilde{t_0}-)}_{(p-i)},\tilde\varphi(\tau_{p+1}(\tilde{t_0}-)),\dots,\tilde\varphi(\tau_s(\tilde{t_0}-))),\ i=\overline{0,p};$$

роль числа p будет выясняться ниже; если $i=0$, то ω_{00} не содержит $\tilde{x}_0$; если $i=p$, то ω_{0p} не содержит $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0-)$;

$$\omega_{0i}^{-}=(\gamma_i,\tilde{x}(\tau_1(\gamma_i)),\dots,\tilde{x}(\tau_{i-1}(\gamma_i)),\tilde{x_0},\tilde{\varphi}(\tau_{i+1}(\gamma_i-)),\dots,\tilde{\varphi}(\tau_s(\gamma_i-))),$$
$$\omega_{1i}^{-}=(\gamma_i,\tilde{x}(\tau_1(\gamma_i)),\dots,\tilde{x}(\tau_{i-1}(\gamma_i)),\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0-),\tilde{\varphi}(\tau_{i+1}(\gamma_i-)),\dots,\tilde{x}(\tau_i(\gamma_i-))),$$
$$i=\overline{p+1,s};\gamma_i=\gamma_i(\tilde{t_0}),\gamma_i(t)=\tau_i^{-1}(t).$$

Аналогично определяются $\omega_{0i}^{+},i=\overline{0,s}$; $\omega_{1i}^{+},i=\overline{p+1,s}$.

Следующие теоремы соответствуют случаям, когда происходят левосторонняя, правосторонняя и двусторонняя вариации начального момента $\tilde{t}_0$.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнены следующие условия*:
2.2.1. $\gamma_i=\tilde{t_0},\ i=\overline{1,p},\ \gamma_{p+1}<\dots<\gamma_s<\tilde{t_1}$;
2.2.2. *существует такое число* $\delta>0$, *что*

$$\gamma_1(t)\leqslant\dots\leqslant\gamma_p(t),\ t\in(\tilde{t_0}-\delta,\tilde{t_0}];$$

2.2.3. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\gamma_i}^{-}=\dot{\gamma_i}(\tilde{t_0}-),\ i=\overline{1,s},;$$
$$\lim_{\omega\to\omega_{oi}^{-}}\tilde{f}(\omega)=f_i^{-},\ \omega=(t,x_1,\dots,x_s)\in(\tilde{t_0}-\delta,\tilde{t_0}]\times O^s,\ i=\overline{0,p};$$
$$\lim_{(\omega_1,\omega_2)\to(\omega_{oi}^{-},\omega_{1i}^{-})}[\tilde{f}(\omega_1)-\tilde{f}(\omega_2)]=f_i^{-},\ \omega_1,\omega_2\in(\gamma_i-\delta,\gamma_i]\times O^s,\ i=\overline{p+1,s}.$$

Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2>0,\delta_2>0$, *что*[2] *для произвольного* $(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[\tilde{t}_1-\delta_2,\tilde{t}_1+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times\Im_1^{-}$, *где* $\Im_1^{-}=\{\delta\mu\in\Im_1:\delta t_0\leqslant 0\}$,

$$\Delta x(t;\varepsilon\delta\mu)=\varepsilon\delta x(t;\delta\mu)+o(t;\varepsilon\delta\mu)^2, \tag{2.2.3}$$

где

$$\delta x(t;\delta\mu)=\alpha_{-}(t;\delta\mu)+\beta(t;\delta\mu)+\int_{\tilde{t_0}}^{t}Y(\xi,t)\delta f[\xi]d\xi, \tag{2.2.4}$$

$$\alpha_{-}(t;\delta\mu)=\left\{Y(\tilde{t_0};t)\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-}-\hat{\gamma}_i^{-})f_i^{-}-\sum_{i=p+1}^{s}Y(\gamma_i;t)f_i^{-}\dot{\gamma}_i^{-}\right\}\delta t_0,$$
$$\hat{\gamma}_0^{-}=1,\hat{\gamma}_i^{-}=\dot{\gamma}_i^{-},i=\overline{1,p},\hat{\gamma}_{p+1}^{-}=0;$$
$$\beta(t;\delta\mu)=Y(\tilde{t_0};t)\delta x_0+\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}}Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma_i}(\xi)d\xi+\int_{\tilde{t_0}}^{t}Y(\xi;t)\delta f[\xi]d\xi,$$
$$\tilde{f_{x_i}}[\xi]=\tilde{f_{x_i}}(\xi,\tilde{x}(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde{x}(\tau_s(\xi))),\ \ \delta f[\xi]=\delta f(\xi,\tilde{x}(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde{x}(\tau_s(\xi)));$$

$Y(\xi;t)$ — *матричная функция, удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{\partial Y(\xi;t)}{\partial\xi}=-\sum_{i=1}^{s}Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma_i}(\xi),\ \ \xi\in[\tilde{t_0},t], \tag{2.2.5}$$

и условию (2.1.5).

Функция $\delta x(t;\delta\mu)$ называется вариацией решения $\tilde{x}(t),t\in[\tilde{t}_0,\tilde{t}_1+\delta_2]$, а выражение (2.2.4) — формулой вариации.

Теорема 2.2.2. *Пусть выполнены условие* 2.2.1 *и следующие условия*:
2.2.4. *существует такое число* $\delta>0$, *что*

$$\gamma_1(t)\leqslant\dots\leqslant\gamma_p(t),t\in(\tilde{t_0},\tilde{t_0}+\delta];$$

[2] Здесь и далее величины (скалярные и векторные), имеющие равномерно относительно $(t,\delta\mu)$ соответствующий порядок малости по ε, обозначим через $O(t,\varepsilon\delta\mu)$, $o(t,\varepsilon\delta\mu)$.

2.2.5. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\gamma}_i{}^{+} = \dot{\gamma}_i(\tilde{t}_0+),\ i = \overline{1,s},$$

$$\lim_{\omega \to \omega_{0i}^{+}} \tilde{f}(\omega) = f_i^{+},\ \omega = (t, x_1, \ldots, x_s) \in (\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \delta] \times O^s,\ i = \overline{0,p};$$

$$\lim_{(\omega_1,\omega_2) \to (\omega_{0i}^{+}, \omega_{1i}^{+})} [\tilde{f}(\omega_1) - \tilde{f}(\omega_2)] = f_i^{+},\ (\omega_1, \omega_2) \in [\gamma_i, \gamma_i + \delta] \times O^s,\ i = \overline{p+1,s}.$$

Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2 > 0, \delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(t, \varepsilon, \delta\mu) \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_1^{+}$, *где* $\Im_1^{+} = \{\delta\mu \in \Im_1 : \delta t_0 \geqslant 0\}$, *справедлива формула* (2.2.3), *где* $\delta x(t;\delta\mu)$ *имеет вид*

$$\delta x(t;\delta\mu) = \alpha_{+}(t;\delta\mu) + \beta(t;\delta\mu) + \int_{\tilde{t}_0}^{t} Y(\xi;t)\delta f[\xi]d\xi, \tag{2.2.6}$$

$$\alpha_{+}(t;\delta\mu) = \left\{ Y(\tilde{t}_0;t) \sum_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^{+} - \hat{\gamma}_i^{+}) f_i^{+} - \sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i;t) f_i^{+} \dot{\gamma}_i^{+} \right\} \delta t_0,$$

$$\hat{\gamma}_0^{+} = 1, \hat{\gamma}_i^{+} = \dot{\gamma}_i^{+},\ \ i = \overline{1,p},\ \ \hat{\gamma}_{p+1}^{+} = 0;$$

Следующая теорема является следствием теорем 2.2.1 и 2.2.2.

Теорема 2.2.3. *Пусть выполнены условия теорем* 2.2.1 *и* 2.2.2. *Пусть, кроме того, выполнены равенства*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^{-} - \hat{\gamma}_i^{-}) f_i^{-} = \sum\limits_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^{+} - \hat{\gamma}_i^{+}) f_i^{+} = f_0, \\ f_i^{-}\dot{\gamma}_i^{-} = f_i^{+}\dot{\gamma}_i^{+} = f_i, i = \overline{p+1,s}. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2 > 0, \delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(t, \varepsilon, \delta\mu) \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_1$ *справедлива формула* (2.2.3), *где* $\delta x(t;\delta\mu)$ *имеет вид*

$$\delta x(t;\delta\mu) = \left\{ Y(\tilde{t}_0;t) f_0 - \sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i;t) f_i \right\} \delta t_0 + \beta(t;\delta\mu) + \int_{\tilde{t}_0}^{t} Y(\xi;t)\delta f[\xi]d\xi.$$

Некоторые комментарии. 2.2.6. Пусть $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0-) = \tilde{x}_0$, тогда $\omega_{01}^{-} = \cdots = \omega_{0p}^{-}$, $\omega_{0i}^{-} = \omega_{1i}^{-}$, $i = \overline{p+1,s}$. Поэтому

$$f_0^{-} = \ldots = f_p^{-},\ f_i^{-} = 0,\ i = \overline{p+1,s}.$$

В этом случае формула (2.2.4) принимает вид

$$\delta x(t;\delta\mu) = -Y(\tilde{t}_0;t) f_0^{-} + \beta(t;\delta\mu) + \int_{\tilde{t}_0}^{t} Y(\xi;t)\delta f[\xi]d\xi.$$

2.2.7. Пусть $\gamma_i > \tilde{t}_0$, $i = \overline{1,s}$, тогда в формуле (2.2.4) предполагается, что $p = 0$. В этом случае предположение 2.2.2 становится излишним.

2.2.8. Условие 2.2.2 выполнено, если

$$\dot{\gamma}_p^{-} < \cdots < \dot{\gamma}_1^{-}.$$

В самом деле,

$$\gamma_i(t) - \gamma_{i+1}(t) = \int_{\tilde{t}_0}^{t} (\gamma_i(\xi) - \gamma_{i+1}(\xi))d\xi = (\dot{\gamma}_i^{-} - \dot{\gamma}_{i+1}^{-})(t - \tilde{t}_0) + o(|t - \tilde{t}_0|).$$

Очевидно, что при достаточно малом $\delta > 0$ из последнего равенства следуют неравенства

$$\gamma_i(t) \leqslant \gamma_{i+1}(t),\ i = \overline{1,p-1},\ t \in (\tilde{t}_0 - \delta, \tilde{t}_0].$$

Аналогично можно доказать, что если

$$\dot{\gamma}_1^{+} < \ldots < \dot{\gamma}_p^{+},$$

то выполнено условие 2.2.4.

2.2.9. Формулы вариации решения для дифференциального уравнения с одним запаздыванием и разрывным начальным условием, при возмущении начальных данных и правой части уравнения, доказаны в [130].

Теперь рассмотрим случай, когда правая часть дифференциального уравнения (1.2.3) зависит от управления.

Пусть $f(t, x_i, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu)$ принадлежит пространству $E^{(1)}(J \times O^s \times G^\nu; \mathbb{R}^n)$. Пусть, далее, $\tilde{x}(t)$ — соответствующее элементу $\tilde{\varrho} = (\tilde{t_0}, \tilde{x_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{u}) \in \Im_0$ решение, определенное на интервале $[\tau, \tilde{t_1}]$, $\tilde{t_i} \in (a, b)$, $i = 0, 1$.

Существуют такие числа $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, что для произвольного $(\varepsilon, \delta\varrho) \in [0, \varepsilon_1] \times \Im_0$ элемент $\tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\mu \in \Im_0$ и ему соответствует решение $x(t; \tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\varrho)$, определенное на интервале $[\tau, \tilde{t_1} + \delta_1] \subset J_1$ (см. лемму 1.2.2).

Решение $x(t; \tilde{\varrho})$ на интервале $[\tau, \tilde{t_1} + \delta_1]$ является продолжением решения $\tilde{x}(t)$. Поэтому в дальнейшем мы можем считать, что решение $\tilde{x}(t)$ с самого начала определено на всем интервале $[\tau, \tilde{t_1} + \delta_1]$.

Определим приращение решения $\tilde{x}(t) = x(t; \tilde{\varrho})$:

$$\Delta x(t) = \Delta x(t; \varepsilon\delta\varrho) = x(t; \tilde{\varrho} + \varepsilon\delta\varrho) - \tilde{x}(t),\ (t, \varepsilon, \delta\varrho) \in [\tau, \tilde{t_1} + \delta_1] \times [0, \varepsilon_1] \times \Im_0.$$

Теорема 2.2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2.1, *где* $\tilde{f}(\omega) = f(\omega, \tilde{u}(\theta_1(t)), \ldots, \tilde{u}(\theta_\nu(t)))$. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(t, \varepsilon, \delta\varrho) \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_0^-$, *где* $\Im_0^- = \{\delta\varrho \in \Im_0 : \delta t_0 \leqslant 0\}$,

$$\Delta x(t; \varepsilon\delta\varrho) = \varepsilon\delta x(t; \delta\varrho) + o(t; \varepsilon\delta\varrho), \tag{2.2.8}$$

где

$$\delta x(t; \delta\varrho) = \alpha_-(t; \delta\varrho) + \beta(t; \delta\varrho) + \int_{\tilde{t_0}}^{t} Y(\xi; t) \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_j}[\xi]\delta u(\theta_j(t))d\xi, \tag{2.2.9}$$

$$\alpha_-(t; \delta\varrho) = \alpha_-(t; \delta\mu), \beta(t; \delta\varrho) = \beta(t; \delta\mu),$$

$$\tilde{f}_{u_j}[\xi] = f_{u_j}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(\xi)), \tilde{u}(\theta_1(\xi)), \ldots, \tilde{u}(\theta_\nu(\xi))).$$

Теорема 2.2.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2.2, *где* $\tilde{f}(\omega) = f(\omega, \tilde{u}(\theta_1(t)), \ldots, \tilde{u}(\theta_\nu(t)))$. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(t, \varepsilon, \delta\varrho) \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_0^+$, *где* $\Im_0^+ = \{\delta\varrho \in \Im_0 : \delta t_0 \geqslant 0\}$, *справедлива формула* (2.2.8), *где* $\delta x(t; \delta\varrho)$ *имеет вид*

$$\delta x(t; \delta\varrho) = \alpha_+(t; \delta\varrho) + \beta(t; \delta\varrho) + \int_{\tilde{t_0}}^{t} Y(\xi; t) \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_j}[\xi]\delta u(\theta_j(t))d\xi, \tag{2.2.10}$$

где $\alpha_+(t; \delta\varrho) = \alpha_+(t; \delta\mu)$.

Следующая теорема является следствием теорем 2.2.4 и 2.2.5.

Теорема 2.2.6. *Пусть выполнены условия теорем* 2.2.4 *и* 2.2.5 *и равенство* (2.2.7). *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(t, \varepsilon, \delta\varrho) \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_0^+$, *где* $\Im_0^+ = \{\delta\varrho \in \Im_0 : \delta t_0 \leqslant 0\}$, *справедлива формула* (2.2.8), *где* $\delta x(t; \delta\varrho)$ *имеет вид*

$$\delta x(t; \delta\varrho) = \left\{ Y(\tilde{t}_0; t) f_0 - \sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i; t) f_i \right\} \delta t_0 + \beta(t; \delta\varrho) + \int_{\tilde{t_0}}^{t} Y(\xi; t) \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_j}[\xi]\delta u(\theta_j(\xi))d\xi.$$

2.3. Леммы об оценке приращения решений относительно множеств вариации $\Im^-$, $\Im^+$, $\Im_0^-$, $\Im_0^+$. Доказанные ниже леммы играют важную роль при доказательстве формул вариации.

Пусть $\tilde{y}(t)$ — соответствующее элементу $\tilde{\mu} \in A_0$ решение, определенное на интервале $[r_1, r_2] \subset (a, b)$ (см. определение 1.3.1). Существуют такие числа $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, что для произвольного $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0, \varepsilon_1) \times \Im$ элемент $\tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu \in A_0$ и ему соответствует решение $y(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)$, определенное на $[r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \subset J$ (см. лемму 1.3.1).

Решение $y(t;\tilde{\mu})$ на отрезке $[r_1-\delta_1, r_2+\delta_1]$ является продолжением решения $\tilde{y}(t)$. Поэтому в дальнейшем мы можем считать, что решение $\tilde{y}(t)$ с самого начала определено на всем интервале $[r_1-\delta_1, r_2+\delta_1]$.

По определению, приращение решения $\tilde{y}(t)=y(t;\tilde{\mu})$ есть

$$\Delta y(t)=\Delta y(t;\varepsilon\delta\mu)=y(t;\tilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)-\tilde{y}(t),\ \ (t,\varepsilon,\delta\mu)\in[\tau,\tilde{t_1}+\delta_1]\times[0,\varepsilon_1]\times\Im. \tag{2.3.1}$$

Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta y(t;\varepsilon\delta\mu)=0 \tag{2.3.2}$$

равномерно по $(t,\delta\mu)\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]\times\Im$.

Лемма 2.3.1. *Пусть* $\gamma_i=\tilde{t_0}, i=\overline{1,p}, \gamma_{p+1}<\cdots<\gamma_s\leqslant r_2$ *и пусть выполнены условия* 2.2.2, 2.2.3 *теоремы* 2.2.1. *Тогда существует такое число* $\varepsilon_2>0$, *что для произвольного* $(\varepsilon,\delta\mu)\in[0,\varepsilon_2]\times\Im^-$, *где* $\Im^-=\{\delta t_0\in\Im:\delta t_0\leqslant 0\}$, *выполнено неравенство*

$$\max_{t\in[\tilde{t_0},r_2+\delta_1]}|\Delta y(t)|\leqslant O(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.3.3}$$

При этом,

$$\Delta y(\tilde{t_0})=\varepsilon\bigg\{\delta x_0+\bigg[\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-}-\hat{\gamma}_i^{-})f_i^{-}\bigg]\delta t_0\bigg\}+o(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.3.4}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ настолько мало, что для произвольного $(\varepsilon,\delta\mu)\in[0,\varepsilon_2]\times\Im^-$ выполнены соотношения

$$t_0=\tilde{t_0}+\varepsilon\delta t_0\in(\tilde{t_0}-\delta,\tilde{t_0}],\ \tilde{t_0}<\gamma_{p+1}(t_0)<\gamma_{p+1}<\gamma_{p+2}(t_0)<\cdots<\gamma_{s-1}<\gamma_s(t_0). \tag{2.3.5}$$

Функция $\Delta y(t)$ на интервале $[\tilde{t_0},r_2+\delta_1]$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Delta}y(t)=a(t;\varepsilon\delta\mu)+b(t;\varepsilon\delta\mu), \tag{2.3.6}$$

где

$$a(t;\varepsilon\delta\mu)=\tilde{f}(t_0,\varphi,\tilde{y}+\Delta y)(t)-\tilde{f}(\tilde{t_0},\tilde{\varphi},\tilde{y})(t),\quad b(t;\varepsilon\delta\mu)=\varepsilon\delta f(t_0,\varphi,\tilde{y}+\Delta y)(t). \tag{2.3.7}$$

Уравнение (2.3.6) перепишем в интегральной форме

$$\Delta y(t)=\Delta y(\tilde{t_0})+\int_{\tilde{t_0}}^{t}[a(\xi;\varepsilon\delta\mu)+b(\xi;\varepsilon\delta\mu)]d\xi,\ t\in[\tilde{t_0},r_2+\delta_1].$$

Отсюда следует

$$|\Delta y(t)|\leqslant|\Delta y(\tilde{t_0})|+\int_{\tilde{t_0}}^{t}|a(\xi;\varepsilon\delta\mu)|d\xi+\int_{\tilde{t_0}}^{r_2+\delta_1}|b(\xi;\varepsilon\delta\mu)|d\xi=|\Delta y(\tilde{t_0})|+a_1(t;\varepsilon\delta\mu)+b_1(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.3.8}$$

Докажем формулу (2.3.4). Имеем:

$$\Delta y(\tilde{t_0})=y(\tilde{t_0};\tilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)-\tilde{y}(\tilde{t_0})=\varepsilon\delta x_0+\int_{t_0}^{\tilde{t_0}}\Big[\tilde{f}(t_0,\varphi,\tilde{y}+\Delta y)(t)+b(t;\varepsilon\delta\mu)\Big]dt.$$

Но

$$h(t_0,\varphi,\tilde{y}+\Delta y)(\tau_i(t))\in K_1,\ t\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1],\ i=\overline{1,s}$$

(см. лемму 1.3.1). Поэтому

$$|b(t;\varepsilon\delta\mu)|\leqslant\varepsilon\alpha\sum_{i=1}^{k}m_{\delta f_i,K_1}(t),\ t\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1] \tag{2.3.9}$$

(см. (2.3.7), (2.2.1)).

Следовательно,

$$\Delta y(\tilde{t_0})=\varepsilon\delta x_0+\int_{t_0}^{\tilde{t_0}}\tilde{f}(t_0,\varphi,\tilde{y}+\Delta y)(t)dt+o(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.3.10}$$

Теперь преобразуем интегральное слагаемое,

$$\int_{t_0}^{\tilde{t_0}} \tilde{f}(t_0,\varphi,\tilde{y}+\Delta y)(t)dt = \sum_{i=0}^{p} \int_{\varrho_i(t_0)}^{\varrho_{i+1}(t_0)} \tilde{f}(t,\tilde{y}(\tau_1(t))+$$

$$+\Delta y(\tau_1(t)),\ldots,\tilde{y}(\tau_i(t))+\Delta y(\tau_i(t)),\varphi(\tau_{i+1}(t)),\ldots,\varphi(\tau_s(t)))dt = \sum_{i=0}^{p} I_i, \tag{2.3.11}$$

$$\varrho_0(t)=t,\varrho_{p+1}(t_0)=\tilde{t_0},\varrho_i(t)=\gamma_i(t),\ i=\overline{1,p}$$

(см. условие 2.2.2 и (1.3.3)). Ясно, что

$$I_0=\varepsilon(\dot{\gamma}_1^- -1)f_0^-\delta t_0+o(\varepsilon\delta\mu)+\int_{t_0}^{\gamma_1(t_0)}\Big[\tilde{f}(t,\varphi(\tau_1(t)),\ldots,\varphi(\tau_s(t)))-f_0^-\Big]dt=$$

$$=\varepsilon(\dot{\gamma}_1^- -1)f_0^-\delta t_0+o(\varepsilon\delta\mu)+\alpha(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.3.12}$$

Покажем, что

$$\alpha(\varepsilon\delta\mu)=o(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.3.13}$$

В самом деле, согласно предположению 2.2.3, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[t_0,\gamma_1(t_0)]}|\tilde{f}(t,\varphi(\tau_1(t)),\ldots,\varphi(\tau_s(t)))-f_0^-|=\lim_{\omega\to\omega_{00}}|\tilde{f}(\omega)-f_0^-|=0,\ \ \omega\in(\tilde{t_0}-\delta,\tilde{t_0}]\times O^s.$$

Отсюда непосредственно вытекает (2.3.13). Аналогично доказываются равенства

$$I_i=\varepsilon(\dot{\gamma}_{i+1}^- -\dot{\gamma}_i^-)f_i^-\delta t_0+o(\varepsilon\delta\mu),\ i=\overline{1,p-1};\ I_p=-\varepsilon\dot{\gamma}_p^-\delta t_0+o(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.3.14}$$

Из (2.3.10), с учетом (2.3.11)–(2.3.14), следует (2.3.4). Прежде чем доказать неравенство (2.3.3), заметим, что если $i=\overline{p+1,s}$, $\xi\in[\gamma_i(t_0),\gamma_i]$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\xi,\tilde{y}(\tau_1(\xi))+\Delta y(\tau_1(\xi)),\ldots,\tilde{y}(\tau_i(\xi))+\Delta y(\tau_i(\xi)),\varphi(\tau_{i+1}(\xi)),\ldots,\varphi(\tau_s(\xi)))=\omega_{0i}^-,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\xi,\tilde{y}(\tau_1(\xi)),\ldots,\tilde{y}(\tau_{i-1}(\xi)),\tilde{\varphi}(\tau_i(\xi)),\ldots,\tilde{\varphi}(\tau_s(\xi)))=\omega_{1i}^-$$

(см. (2.3.2)).

Таким образом, в силу предположения 2.2.3, для достаточно малого $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$ функции

$$\sup_{t\in[\gamma_i(t_0),\gamma_i]}|a(t,\varepsilon\delta\mu)|,\ \ i=\overline{p+1,s},\ \ \sup_{t\in[t_0,\tilde{t_0}]}\dot{\gamma}_i(t)$$

ограничены на множестве $[0,\varepsilon_2]\times\Im^-$.

Следовательно, для произвольного $(\varepsilon,\delta\mu)\in[0,\varepsilon_2]\times\Im^-$ справедливы оценки

$$\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}|a(t;\varepsilon\delta\mu)|dt\leqslant O(\varepsilon\delta\mu),\ i=\overline{p+1,s}. \tag{2.3.15}$$

Теперь оценим $a_1(t;\varepsilon\delta\mu)$, $t\in[\tilde{t_0},r_2+\delta_1]$. Для этого рассмотрим несколько случаев.

Пусть $t\in[\tilde{t_0},\gamma_{p+1}(t_0)]$. Тогда, учитывая вид оператора $h(\cdot)$, получим

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu)\leqslant\int_{\tilde{t_0}}^{t}L_{\tilde{f},K_1}(t)\Bigg[\sum_{i=1}^{p}|\Delta y(\tau_i(\xi))|+\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}|\delta\varphi(\tau_i(t))|\Bigg]d\xi\leqslant O(\varepsilon\delta\mu)+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tau_i(t)}L_{\tilde{f},K_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi\leqslant O(\varepsilon\delta\mu)+\int_{\tilde{t_0}}^{t}L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi \tag{2.3.16}$$

(см. лемму 1.3.1), где

$$L(\xi)=\sum_{i=1}^{s}\chi(J;\gamma_i(\xi))L_{\tilde{f},K_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi). \tag{2.3.17}$$

Если $t\in[\gamma_{p+1}(t_0),\gamma_{p+1}]$, то, согласно (2.3.15), (2.3.16), получим

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu)\leqslant a_1(\gamma_{p+1}(t_0);\varepsilon\delta\mu)+\int_{\gamma_{p+1}(t_0)}^{\gamma_{p+1}}|a(\xi;\varepsilon\delta\mu)|d\xi\leqslant O(\varepsilon\delta\mu)+\int_{\tilde{t_0}}^{t}L(\xi)|\Delta y(\xi)d\xi.$$

Таким образом, оценка (2.3.16) справедлива на всем интервале $[\tilde{t_0}, \gamma_{p+1}]$.

Пусть $t \in [\gamma_{p+1}, \gamma_{p+2}(t_0)]$, тогда

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \leqslant a_1(\gamma_{p+1};\varepsilon\delta\mu) + \int_{\gamma_{p+1}}^{t} L_{\tilde{f},K_1}(\xi)\Big[\sum_{i=1}^{p+1}|\Delta y(\tau_i(\xi))| + \varepsilon\sum_{i=p+2}^{s}\delta\varphi(\tau_i(\xi))|\Big]d\xi \leqslant$$

$$\leqslant a_1(\gamma_{p+1};\varepsilon\delta\mu) + \sum_{i=1}^{p+1}\int_{\tau_i(\gamma_{p+1})}^{\tau_i(t)} L_{\tilde{f},K_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi + O(\varepsilon\delta\mu).$$

Так как $\tau_i(\gamma_{p+1}) \geqslant \tilde{t_0},\ \tau_i(t) \leqslant t,\ i = \overline{1, p+1}$, полученное неравенство можно записать так:

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \leqslant O(\varepsilon\delta\mu) + a_1(\gamma_{p+1};\varepsilon\delta\mu) + \int_{\tilde{t_0}}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi.$$

Итак, при $t \in [\tilde{t_0}, \gamma_{p+2}(t_0)]$ справедлива оценка

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \leqslant O(\varepsilon\delta\mu) + 2\int_{\tilde{t_0}}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi. \tag{2.3.18}$$

Аналогично, используя (2.3.15), можно установить справедливость неравенства (2.3.18) и на интервале $[\tilde{t_0}, \gamma_{p+2}]$. Продолжая этот процесс, докажем, что

$$a_1(t,\varepsilon\delta\mu) \leqslant O(\varepsilon\delta\mu) + (i+1)\int_{\tilde{t_0}}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi,\ \ t \in [\tilde{t_0}, \gamma_{p+i+1}],\ \ i = \overline{1, s-p-1}.$$

Далее, если $t \in [\gamma_s, r_2 + \delta_1]$, то

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \leqslant a_1(\gamma_s,\varepsilon\delta\mu) + \sum_{i=1}^{s}\int_{\gamma_s}^{t} L_{\tilde{f},K_1}(\xi)|\Delta y(\tau_i(\xi))|d\xi =$$

$$= a_1(\gamma_s,\varepsilon\delta\mu) + \sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\gamma_i)}^{\tau_i(t)} L_{\tilde{f},K_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi.$$

Неравенства $\tau_i(\gamma_s) \geqslant \tilde{t_0},\ i = \overline{1, s}$, позволяют написать

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \leqslant a_1(\gamma_s;\varepsilon\delta\mu) + \int_{\tilde{t_0}}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi \leqslant O(\varepsilon\delta\mu) +$$

$$+(s-p+1)\int_{\tilde{t_0}}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi,\ t \in [\gamma_s,\ r_2 + \delta_1].$$

Таким образом, на отрезке $[\tilde{t_0}, r_2 + \delta_1]$ выполнено неравенство

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \leqslant O(\varepsilon\delta\mu) + (s-p+1)\int_{\tilde{t_0}}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi. \tag{2.3.19}$$

В силу (2.3.9),

$$b_1(\varepsilon\delta\mu) = O(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.3.20}$$

Согласно (2.3.4), (2.3.19), (2.3.20), из неравенства (2.3.8) непосредственно следует

$$|\Delta y(t)| \leqslant O(\varepsilon\delta\mu) + (s-p+1)\int_{\tilde{t_0}}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi,\ t \in [\tilde{t_0},\ r_2 + \delta_1].$$

Из этого, в силу леммы Гронуолла, следует (2.3.3) □

Лемма 2.3.2. *Пусть* $\gamma_i = \tilde{t_0},\ i = \overline{1, p},\ \gamma_{p+1} < \cdots < \gamma_s \leqslant r_2$ *и пусть выполнены условия* 2.2.4, 2.2.5 *теоремы* 2.2.2. *Тогда существует такое число* $\varepsilon_2 > 0$, *что для произвольного элемента* $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_2] \times \Im^+$, *где* $\Im^+ = \{\delta t_0 \in \Im : \delta t_0 \geqslant 0\}$, *выполнено неравенство*

$$\max_{t \in [t_0,\ r_2 + \delta_1]} |\Delta y(t)| \leqslant O(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.3.21}$$

При этом
$$\Delta y(t_0) = \varepsilon[\delta x_0 - f_p^+ \delta t_0] + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.3.22}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ настолько мало, что для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_2] \times \Im^+$ выполнены соотношения
$$t_0 \in [\tilde{t_0},\ \tilde{t_0} + \delta],\ \gamma_p(t_0) < \gamma_{p+1} < \gamma_{p+1}(t_0) < \gamma_{p+2} < \ldots < \gamma_s < \gamma_s(t_0) < r_2 + \delta_1. \tag{2.3.23}$$

Функция $\Delta y(t)$ на интервале $[t_0,\ r_2 + \delta_1]$ удовлетворяет уравнению (2.3.6), которое запишем в интегральной форме
$$\Delta y(t) = \Delta y(t_0) + \int_{t_0}^{t} [a(\xi; \varepsilon\delta\mu) + b(\xi; \varepsilon\delta\mu)] d\xi,\ t \in [t_0,\ r_2 + \delta_1].$$

Отсюда следует
$$|\Delta y(t) \leqslant |\Delta y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |a(\xi;\ \varepsilon\delta\mu)| d\xi + \int_{t_0}^{r_2+\delta_1} |b(\xi; \varepsilon\delta\mu)| d\xi = |\Delta y(t_0)| + a_2(t; \varepsilon\delta\mu) + b_2(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.3.24}$$

Докажем формулу (2.3.22). Имеем:
$$\Delta y(t_0) = \varepsilon\delta x_0 - \int_{\tilde{t_0}}^{t_0} \tilde{f}(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{y})(t) dt =$$
$$= \varepsilon\delta x_0 - \int_{\tilde{t_0}}^{t_0} \tilde{f}(t, \tilde{y}(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{y}(\tau_p(t)), \tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t)), \ldots, \tilde{\varphi}(\tau_s(t))) dt =$$
$$= \varepsilon[\delta x_0 - f_p^+ \delta t_0] + o(\varepsilon\delta\mu).$$

В силу предположения 2.2.5, для достаточно малого $\varepsilon_2 \in (0,\ \varepsilon_1]$ функции
$$\sup_{t \in [\tilde{t_0}, t_0]} \dot{\gamma}_i(t), i = \overline{1, s}; \qquad \sup_{t \in [\gamma_{i-1}(t_0), \gamma_i(t_0)]} |a(t; \varepsilon\delta\mu)|,\ i = \overline{1, p},\ \gamma_0(t_0) = t_0;$$
$$\sup_{t \in [\gamma_i, \gamma_i(t_0)]} |a(t; \varepsilon\delta\mu)|,\ i = \overline{p+1, s}$$
ограничены на множестве $[0, \varepsilon_2] \times \Im^+$. Ясно, что при $i = \overline{1, p}$
$$|\gamma_i(t_0) - \gamma_{i-1}(t_0)| \leqslant |\gamma_i(t_0) - \gamma_i(\tilde{t_0})| + |\gamma_{i-1}(\tilde{t_0}) - \gamma_{i-1}(t_0)| \leqslant O(\varepsilon\delta\mu).$$

Из этих условий вытекает, что для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0,\ \varepsilon_2] \times \Im^+$ справедливы оценки
$$\begin{gathered} \int_{\gamma_{i-1}(t_0)}^{\gamma_i(t_0)} |a(\xi; \varepsilon\delta\mu)| d\xi \leqslant O(\varepsilon\delta\mu),\ i = \overline{1, p}, \\ \int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)} |a(\xi; \varepsilon\delta\mu)| d\xi \leqslant O(\varepsilon\delta\mu),\ i = \overline{p+1, s}. \end{gathered} \tag{2.3.25}$$

Теперь оценим $a_2(t; \varepsilon\delta\mu)$, $t \in [t_0,\ r_2 + \delta_1]$. Для этого рассмотрим несколько случаев.

Пусть $t \in [t_0, \gamma_p(t_0)]$. Тогда
$$a_2(t; \varepsilon\delta\mu) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \int_{\gamma_{i-1}(t_0)}^{\gamma_i(t_0)} |a(\xi; \varepsilon\delta\mu)| d\xi \leqslant O(\varepsilon\delta\mu) \tag{2.3.26}$$
(см. (2.3.25)).

Если $t \in [\gamma_p(t_0), \gamma_{p+1}]$, то
$$a_2(t; \varepsilon\delta\mu) \leqslant a_2(\gamma_p(t_0); \varepsilon\delta\mu) + \int_{\gamma_p(t_0)}^{t} L_{f,K_1}(\xi) \left[\sum_{i=1}^{p} |\Delta y(\tau_i(\xi))| + \varepsilon \sum_{i=p+1}^{s} |\delta\varphi(\tau_i(\xi))|\right] d\xi \leqslant$$
$$\leqslant O(\varepsilon\delta\mu) + \sum_{i=0}^{p} \int_{\tau_i(\gamma_p(t_0))}^{\tau_i(t)} L_{\tilde{f},K_1}(\gamma_i(\xi)) \dot{\gamma}_i(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi.$$

Так как $\tau_i(\gamma_p(t_0)) \geqslant \tau_i(\gamma_i(t_0)) = t_0,\ \tau_i(t) \leqslant t,\ i = \overline{1,p}$, имеем:

$$a_2(t;\varepsilon\delta\mu) \leqslant O(\varepsilon\delta\mu) + \int_{t_0}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi,\ \ t \in [t_0,\ \gamma_{p+1}],$$

(см. (2.3.17), (2.3.26)).

После этого, с учетом (2.3.22), (2.3.25), аналогичным способом (см. доказательство леммы 2.3.1) доказывается, что

$$|\Delta y(t)| \leqslant O(\varepsilon\delta\mu) + (s-p+1)\int_{t_0}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi,\ \ t \in [t_0,\ r_2+\delta_1]$$

(см. (2.3.24)).

Из этого, в силу леммы Гронуолла, следует (2.3.21). □

Ниже аналоги лемм 2.3.1 и 2.3.2 доказываются для управляемого дифференциального уравнения. Тем же способом, что и выше, определим приращение решения $\tilde{y}(t) = y(t;\tilde{\varrho})$:

$$\Delta y(t) = \Delta y(t;\varepsilon\delta\varrho) = y(t;\tilde{\varrho}+\varepsilon\delta\varrho) - \tilde{y}(t),\ (t,\varepsilon,\delta\mu) \in [\tau,\tilde{t_1}+\delta_1]\times[0,\varepsilon_1]\times\Im_0.$$

Лемма 2.3.3. *Пусть* $\gamma_i = \tilde{t}_0,\ i = \overline{1,p},\ \gamma_{p+1} < \cdots < \gamma_s \leqslant r_2$ *и пусть выполнены условия теоремы* 2.2.4. *Тогда существует такое число* $\varepsilon_2 > 0$, *что для произвольного элемента* $(\varepsilon,\delta\mu) \in [0,\varepsilon_2]\times\Im_0^-$ *выполнено неравенство* (2.3.3) *и равенство* (2.3.4), *где элемент* $\delta\mu$ *всюду заменен элементом* $\delta\varrho$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1)$ настолько мало, что для произвольного $(\varepsilon,\delta\mu) \in [0,\varepsilon_2]\times\Im_0^-$ выполнены соотношения (2.3.5) и

$$u(t) = \tilde{u}(t) + \varepsilon\delta u(t) \in M, \tag{2.3.27}$$

где $M \subset G$ — компактное множество содержащее некоторую окрестность множества $\mathrm{cl}\,\tilde{u}(J_2)$. Функция $\Delta y(t)$ на отрезке $[\tilde{t}_0, r_1+\delta_1]$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}(t) = a(t;\varepsilon\delta\varrho), \tag{2.3.28}$$

где

$$a(t;\varepsilon\delta\varrho) = f(t_0,\varphi,\tilde{y}+\Delta y,u)(t) - f(\tilde{t}_0,\tilde{\varphi},\tilde{y},\tilde{u})(t), \tag{2.3.29}$$
$$f(t_0,\varphi,y,u)(t) = f(t,h(t_0,\varphi,y)(\tau_1(t)),\ldots,h(t_0,\varphi,y)(\tau_s(t))),u(\theta_1(t)),\ldots,u(\theta_\nu(t))).$$

Уравнение (2.3.28) перепишем в интегральной форме

$$\Delta y(t) = \Delta y(\tilde{t}_0) + \int_{\tilde{t}_0}^{t} a(\xi;\varepsilon\delta\varrho)d\xi,\ \ t \in [\tilde{t}_0, r_2+\delta_1].$$

Отсюда следует

$$|\Delta y(t)| \leqslant |\Delta y(\tilde{t}_0)| + \int_{\tilde{t}_0}^{t} |a(\xi;\varepsilon\delta\varrho)|d\xi = |\Delta y(\tilde{t}_0)| + a_1(t;\tilde{\delta}\varrho). \tag{2.3.30}$$

Ясно, что

$$\Delta y(\tilde{t}_0) = y(\tilde{t}_0;\tilde{\varrho}+\varepsilon\delta\varrho) - y(\tilde{t}_0) = \varepsilon\delta x_0 + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} f(t_0,\varphi,\tilde{y}+\Delta y,u)(t)dt,$$

$$\begin{gathered} a_1(t;\varepsilon\delta\varrho) \leqslant \int_{\tilde{t}_0}^{t} L_{K_1,M}(t)\Bigg[\sum_{i=1}^{s}|h(t_0,\varphi,\tilde{y}+\Delta y)(\tau_i(\xi)) - \\ -h(\tilde{t}_0,\tilde{\varphi},\tilde{y})(\tau_i(\xi))| + \varepsilon\sum_{j=1}^{\nu}|\delta u(\theta_j(\xi))|\Bigg]d\xi, \end{gathered} \tag{2.3.31}$$

(см. (2.3.29)).

После этого доказательство леммы, лишь с незначительными изменениями, полностью совпадает с доказательством леммы 2.3.1. □

Лемма 2.3.4. *Пусть* $\gamma_i = \tilde{t_0},\ i = \overline{1,p},\ \gamma_{p+1} < \cdots < \gamma_s \leqslant r_2$ *и пусть выполнены условия теоремы* 2.2.5. *Тогда существует такое число* $\varepsilon_2 > 0$, *что для произвольного элемента* $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_2] \times \Im_0^+$ *выполнено неравенство* (2.3.3) *и равенство* (2.3.4), *где элемент* $\delta\mu$ *всюду заменен элементом* $\delta\varrho$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ настолько мало, что для произвольного $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_2] \times \Im_0^+$ выполнены соотношения (2.3.23) и $u(t) = \tilde{u}(t) + \varepsilon\delta u(t) \in M$, где $M \subset G$ — компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества $\mathrm{cl}\,\tilde{u}(J_2)$. Функция $\Delta y(t)$ на отрезке $[\tilde{t}_0, r_1 + \delta_1]$ удовлетворяет уравнению (2.3.28), которое запишем в интегральном виде:

$$\Delta y(t) = \Delta y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\xi; \varepsilon\delta\varrho)d\xi, t \in [t_0, r_2 + \delta_1].$$

Отсюда

$$|\Delta y(t)| \leqslant |\Delta y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |a(\xi; \varepsilon\delta\varrho)|d\xi = |\Delta y(t_0)| + a_2(t; \tilde{\delta}\varrho), \tag{2.3.32}$$

$$a_1(t; \varepsilon\delta\varrho) \leqslant \int_{\tilde{t}_0}^{t} L_{K_1,M}(t)\Bigg[\sum_{i=1}^{s} |h(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(\tau_i(\xi)) - $$
$$ - h(\tilde{t}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{y})(\tau_i(\xi))| + \varepsilon\sum_{j=1}^{\nu} |\delta u(\theta_j(\xi))|\Bigg]d\xi. \tag{2.3.33}$$

Легко видеть, что

$$\Delta y(t_0) = \varepsilon\delta x_0 - \int_{\tilde{t}_0}^{t_0} f(\tilde{t}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{y}, \tilde{u})(t)dt, \tag{2.3.34}$$

$$a_1(t; \varepsilon\delta\varrho) \leqslant \int_{\tilde{t}_0}^{t} L_{K_1,M}(t)\Bigg[\sum_{i=1}^{s} |h(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(\tau_i(\xi)) - h(\tilde{t}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{y})(\tau_i(\xi))| + \varepsilon\sum_{j=1}^{\nu} |\delta u(\theta_j(\xi))|\Bigg]d\xi.$$

После этого доказательство леммы осуществляется аналогично доказательству леммы 2.3.2. □

2.4. Доказательство теоремы 2.2.1. Пусть в лемме 1.3.1 $r_1 = \tilde{t_0},\ r_2 = \tilde{t_1}$, тогда для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times \Im_1^-$ решение $y(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)$ определено на $[\tilde{t_0} - \delta_1, \tilde{t_1} + \delta_1]$, а решение $x(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)$ определено на $[\tau, \tilde{t_1} + \delta_1]$; при этом

$$y(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = x(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu),\ t \in [\tilde{t_0}, \tilde{t_1} + \delta_1]$$

(см. леммы 1.2.1 и 1.3.1 и замечание 1.3.1).

Таким образом,

$$\Delta x(t) = \begin{cases} \varepsilon\delta\varphi(t),\ t \in [\tau, t_0), \\ y(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) - \tilde{\varphi}(t),\ t \in [t_0, \tilde{t_0}), \\ \Delta y(t) \quad t \in [\tilde{t_0},\ \tilde{t_1} + \delta_1] \end{cases} \tag{2.4.1}$$

(см. (2.2.2), (2.3.1)).

Пусть $\delta_2 \in (0, \min(\delta_1, \tilde{t_1} - \gamma_s))$. В силу леммы 2.3.1 существует такое число $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$, что

$$|\Delta x(t)| \leqslant O(\varepsilon\delta\mu)\ \ \forall (t, \varepsilon, \delta\mu) \in [\tilde{t_0}, \tilde{t_1} + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_1^-, \tag{2.4.2}$$

$$\Delta x(\tilde{t_0}) = \varepsilon\Bigg\{\delta x_0 + \Bigg[\sum_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-)f_i^-\Bigg]\delta t_0\Bigg\} + o(\varepsilon\delta\mu) \tag{2.4.3}$$

(см. (2.4.1)).

Функция $\Delta x(t)$ на интервале $[\tilde{t_0}, \tilde{t_1} + \delta_2]$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Delta} x(t) = \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_i(t)) + \varepsilon\delta f[t] + \sum_{i=1}^{2} R_i(t; \varepsilon\delta\mu), \tag{2.4.4}$$

где

$$R_1(t;\varepsilon\delta\mu) = \tilde{f}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \Delta x(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(t)) + \Delta x(\tau_s(t))) - \tilde{f}[t] - \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_i(t)), \quad (2.4.5)$$

$$R_2(t;\varepsilon\delta\mu) = \varepsilon(\delta f(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \Delta x(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(t)) + \Delta x(\tau_s(t))) - \delta f[t]). \quad (2.4.6)$$

Решение уравнения (2.4.4) с помощью формулы Коши (см. лемму 2.1.4) может быть представлено в виде

$$\Delta x(t) = Y(\tilde{t_0};t)\Delta x(\tilde{t_0}) + \varepsilon\int_{\tilde{t_0}}^{t} Y(\xi;t)\delta f[\xi]d\xi + \sum_{i=0}^{2} h_i(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta\mu), \quad t \in [\tilde{t_0}, \tilde{t_1} + \delta_2], \quad (2.4.7)$$

где

$$\begin{cases} h_0(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta\mu) = \displaystyle\sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi, \\ h_i(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta\mu) = \displaystyle\int_{\tilde{t_0}}^{t} Y(\xi;t)R_i(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi, \quad i = 1, 2; \end{cases} \quad (2.4.8)$$

$Y(\xi;t)$ — матричная функция, удовлетворяющая уравнению (2.2.5) и условию (2.1.5).

В силу леммы 2.1.7 функция $Y(\xi;t)$ непрерывна на множестве П. Поэтому

$$Y(\tilde{t_0};t)\Delta x(\tilde{t_0}) = \varepsilon Y(\tilde{t_0};t)\left\{\delta x_0 + \left[\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-} - \hat{\gamma}_i^{-})f_i^{-}\right]\delta t_0\right\} + o(t;\varepsilon\delta\mu) \quad (2.4.9)$$

(см. (2.4.3)). Теперь преобразуем $h_0(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta\mu)$. Имеем:

$$\begin{aligned} h_0(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta\mu) = \sum_{i=p+1}^{s}[\varepsilon\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi + \\ + \int_{t_0}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi] = \\ = \varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi + \\ + \sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i} Y(\xi;t)\tilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu) \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

(см. (2.3.5)).

Согласно неравенствам (2.3.5), выражение $h_1(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta\mu)$ при $t \in [\tilde{t_1} - \delta_2, \tilde{t_1} + \delta_1]$ можно представить в виде

$$h_1(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta\mu) = \sum_{k=1}^{4}\alpha_k(t;\varepsilon\delta\mu), \quad (2.4.11)$$

где

$$\alpha_1(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{\tilde{t_0}}^{\gamma_{p+1}(t_0)} \omega(\xi,;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi, \quad \alpha_2(t;\varepsilon\delta\mu) = \sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}\omega(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi,$$

$$\alpha_3(t;\varepsilon\delta\mu) = \sum_{i=p+1}^{s-1}\int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}(t_0)}\omega(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi, \quad \alpha_4(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{\gamma_s}^{t}\omega(\xi,t,\varepsilon\delta\mu)d\xi,$$

$$\omega(\xi;t,\varepsilon\delta\mu) = Y(\xi;t)R_1(\xi;\varepsilon\delta\mu).$$

Оценим $\alpha_1(t;\varepsilon\delta\mu)$ (см. (2.4.5)). Имеем:

$$|\alpha_1(t;\varepsilon\delta\mu)| \leqslant \|Y\| \int_{\tilde{t_0}}^{\gamma_{p+1}(t_0)} |\tilde{f}(t,\tilde{x}(\tau_1(t))+$$

$$+\Delta x(\tau_1(t)),\dots,\tilde{x}(\tau_p(t))+\Delta x(\tau_p(t)),\varphi_{p+1}(t)),\dots,\varphi(\tau_s(t)))-\tilde{f}(t,\tilde{x}(\tau_1(t)),\dots,$$

$$\tilde{x}(\tau_p(t)),\tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t)),\dots,\tilde{\varphi}(\tau_s(t)))-\sum_{i=1}^{p}\tilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_i(t))-\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}\tilde{f}_{x_i}[t]\delta\varphi(\tau_i(t))|dt \leqslant$$

$$\leqslant \|Y\| \int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1+\delta_2}\left\{\int_0^1\left|\frac{d}{d\xi}\tilde{f}(t,\tilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde{x}(\tau_p(\xi))+\xi\Delta x(\tau_p(t)),\tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t))+\right.\right.$$

$$+\xi\varepsilon\delta\varphi(\tau_{p+1}(t)),\dots,\tilde{\varphi}(\tau_s(t))+\varepsilon\xi\delta\varphi(\tau_s(t)))-\sum_{i=1}^{p}\tilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_i(t))-$$

$$\left.\left.-\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}\tilde{f}_{x_i}[t]\delta\varphi(\tau_i(t))\right|d\xi\right\}dt \leqslant \|Y\| \int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1+\delta_2}\left\{\int_0^1\left[\sum_{i=1}^{p}|\tilde{f}_{x_i}(t,\tilde{x}(\tau_1(t))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\dots)-\tilde{f}_{x_i}[t]||\delta\varphi(\tau_i(t))|\right]d\xi\right\}dt \leqslant$$

$$\leqslant \|Y\|\left(O(\varepsilon\delta\mu)\sum_{i=1}^{p}\sigma_i(\varepsilon\delta\mu)+\varepsilon\alpha\sum_{i=p+1}^{s}\sigma_i(\varepsilon\delta\mu)\right), \tag{2.4.12}$$

где

$$\|Y\|=\sup_{(\xi,t)\in\Pi}|y(\xi;t)|,\sigma_i(\varepsilon\delta\mu)=\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1+\delta_2}\left[\int_0^1|\tilde{f}_{x_i}(t,\tilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\dots)-\tilde{f}_{x_i}[t]|d\xi\right]dt,\ i=\overline{1,s}.$$

Так как $\varphi(t)=\tilde{\varphi}(t)+\varepsilon\xi\delta\varphi(t)\to\tilde{\varphi}(t)$ при $\varepsilon\to 0$, $\Delta x(\tau_i(t))\to 0$, $i=\overline{1,p}$, равномерно по $(\xi,t,\delta\mu)\in[0,1]\times[\tilde{t_0},\tilde{t_1}+\delta_2]\times\Im_1^-$. Поэтому в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_i(\varepsilon\delta\mu)=0$$

равномерно по $\delta\mu\in\Im_1^-$. Таким образом,

$$\alpha_1(t;\varepsilon\delta\mu)=o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

Теперь преобразуем $\alpha_2(t;\varepsilon\delta\mu)$. Нетрудно заметить,что при $t\in[\gamma_i(t_0),\gamma_i]$ $|\Delta x(\tau_j(t))|\leqslant O(\varepsilon\delta\mu)$, $j=\overline{1,i-1}$; $\Delta x(\tau_j(t))=\varepsilon\delta\varphi(\tau_j(t))$, $j=\overline{i+1,s}$, $i=\overline{p+1,s}$ (см. (2.4.1), (2.4.2)). Поэтому

$$\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}\omega(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi=\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)\beta_i(\xi)d\xi-\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)\tilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu),$$

где

$$\beta_i(\xi)=\tilde{f}(\xi,\tilde{x}(\tau_1(\xi))+\Delta x(\tau_1(\xi),\dots,\tilde{x}(\tau_i(\xi)+\Delta x(\tau_i(\xi)),\varphi(\tau_{i+1}(\xi)),\dots,\varphi(\tau_s(\xi)))-$$
$$-\tilde{f}(\xi,\tilde{x}(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde{x}(\tau_{i-1}(\xi),\tilde{\varphi}(\tau_i(\xi)),\dots,\tilde{\varphi}(\tau_s(\xi))),$$

$$o(t;\varepsilon\delta\mu)=-\sum_{j=1}^{i-1}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi,t)\tilde{f}_{x_j}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi-\varepsilon\sum_{j=i+1}^{s}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi,t)\tilde{f}_{x_j}[\xi]\delta\varphi(\tau_j(\xi))d\xi.$$

Ясно, что

$$\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)\beta_i(\xi)d\xi=\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)[\beta_i(\xi)-f_i^-]d\xi+\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)f_i^-d\xi=\alpha_5(t;\varepsilon\delta\mu)+\alpha_6(t;\varepsilon\delta\mu).$$

Далее, $\tau_j(\xi)\geqslant\tilde{t_0}$ при $\xi\in[\gamma_i(t_0),\gamma_i]$, $j=\overline{1,i-1}$ $(i=\overline{p+1,s})$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\tilde{x}(\tau_j(\xi))+\Delta x(\tau_j(\xi)))=\lim_{\xi\to\gamma_i}\tilde{x}(\tau_j(\xi))=\tilde{x}(\tau_j(\gamma_i)),\ j=\overline{1,i-1}.$$

При $\xi \in [\gamma_i(t_0), \gamma_i]$ имеем $\tau_i(\xi) \in [t_0, \tilde{t_0}]$, поэтому

$$\tilde{x}(\tau_i(\xi)) + \Delta x(\tau_i(\xi)) = x(\tau_i(\xi); \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = y(\tau_i(\xi); \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = \tilde{y}(\tau_i(\xi)) + \Delta y(\tau_i(\xi))$$

(см. (2.3.1)).

Таким образом, учитывая непрерывность функции $\tilde{y}(t)$, $t \in [\tilde{t_0} - \delta_2,\ \tilde{t}_1 + \delta_2]$, равенство (2.3.2) и условие $\tilde{y}(\tilde{t_0}) = \tilde{x_0}$, получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\tilde{x}(\tau_i(\xi)) + \Delta x(\tau_i(\xi))) = \lim_{\xi \to \gamma_i} \tilde{y}(\tau_i(\xi)) = \tilde{x_0}.$$

Принимая во внимание полученные соотношения, можно заключить, что при $i = \overline{p+1, s}$, $\xi \in [\gamma_i(t_0), \gamma_i]$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)) + \Delta x(\tau_1(\xi), \ldots, \tilde{x}(\tau_i(\xi)) + \Delta x(\tau_i(\xi)), \varphi(\tau_{i+1}(\xi)), \ldots, \varphi(\tau_s(\xi))) = \omega_{0i}^-,\ \ i = \overline{p+1,\ s}.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \ldots, \tilde{x}(\tau_{i-1}(\xi)), \tilde{\varphi}(\tau_i(\xi)), \ldots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\xi))) = \omega_{1i}^-,\ \ i = \overline{p+1, s}.$$

Итак,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\xi \in [\gamma_i(t_0), \gamma_i]} |\beta_i(\xi) - f_i^-| = 0$$

равномерно по $\delta\mu \in \Im_1^-$.

Функция $Y(\xi; t)$ непрерывна на $[\gamma_i(t_0), \gamma_i] \times [\tilde{t_1} - \delta_2,\ \tilde{t_1} + \delta_2] \subset \Pi$ и, кроме того,

$$\gamma_i - \gamma_i(t_0) = -\varepsilon\dot{\gamma}_i^- \delta t_0 + o(\varepsilon\delta\mu).$$

Следовательно, $\alpha_5(t; \varepsilon\delta\mu)$ имеет порядок $o(t; \varepsilon\delta\mu)$, а $\alpha_6(t; \varepsilon\delta\mu)$ имеет вид

$$\alpha_6(t; \varepsilon\delta\mu) = -\varepsilon Y(\gamma_i; t) f_i^- \dot{\gamma}_i^- \delta t_0 + o(t, \varepsilon\delta\mu).$$

Итак,

$$\alpha_2(t; \varepsilon\delta\mu) = -\varepsilon \sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i; t) f_i^- \dot{\gamma}_i^- \delta t_0 - \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi + o(t, \varepsilon\delta\mu).$$

Аналогично доказывается, что $\alpha_i(t; \varepsilon\delta\mu) = o(t; \varepsilon\delta\mu)$, $i = 3, 4$ (см. (2.4.12)). Теперь выпишем для $h_1(t; \tilde{t_0}, \varepsilon\delta\mu)$ окончательную формулу:

$$h_1(t; \tilde{t}_0, \varepsilon\delta\mu) = -\varepsilon \sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i; t) f_i^- \dot{\gamma}_i^- \delta t_0 - \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i} Y(\xi; t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi + o(t; \varepsilon\delta\mu) \quad (2.4.13)$$

(см. (2.4.11)). Наконец, оценим $h_2(t; \tilde{t}_0, \varepsilon\delta\mu)$. Имеем:

$$|h_2(t; \tilde{t}_0, \varepsilon\delta\mu)| \leqslant \varepsilon\alpha\|Y\| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1 + \delta_2} L_{\delta f_i, K_1}(t) |\Delta x(\tau_j(t))| dt =$$

$$= \varepsilon\alpha\|Y\| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} \sigma_{ij}(\tilde{t}_0; \tilde{t}_1 + \delta_2;\ \varepsilon\delta\mu) \quad (2.4.14)$$

(см. (2.4.6)). Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_{ij}(\tilde{t}_0; \tilde{t}_1 + \delta_2;\ \varepsilon\delta\mu) = 0 \ \ i = \overline{1, k} \ \ j = \overline{1, s}, \quad (2.4.15)$$

равномерно по $\delta\mu \in \Im_1^-$.

Пусть $j \in \{1, \ldots, p\}$, тогда $\tau_j(t) \geqslant \tilde{t}_0$ при $t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2]$. Поэтому

$$|\Delta x(\tau_j(t))| \leqslant O(\varepsilon\delta\mu),\ \ t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_1].$$

Следовательно, в этом случае равенство (2.4.15) доказано.

Пусть $j \in \{p+1,\dots,s\}$, тогда $\tau_j(t) < t_0$ при $t \in [\tilde{t}_0, \gamma_j(t_0))$; $\tau_j(t) \in [t_0, \tilde{t}_0]$ при $t \in [\gamma_j(t_0), \gamma_j]$; $\tau_j(t) > \tilde{t}_0$ при $t > \gamma_j$. Поэтому

$$|\Delta x(\tau_j(t))| = \varepsilon\delta\varphi(\tau_j(t)),\ t \in [\tilde{t}_0, \gamma_j(t_0)),\ |\Delta x(\tau_j(t))| \leqslant O(\varepsilon\delta\mu);\ t \in [\gamma_j, \tilde{t}_1 + \delta_2].$$

Легко видеть, что $\gamma_j(t_0) - \gamma_j \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а функция $\Delta x(t)$ на интервале $[\tau, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ ограничена. Кроме того,

$$\sigma_{ij}(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon\delta\mu) = \sigma_{ij}(\tilde{t}_0, \gamma_j(t_0); \varepsilon\delta\mu) + \sigma_{ij}(\gamma_j(t_0), \gamma_j; \varepsilon\delta\mu) + \sigma_{ij}(\gamma_j, \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon\delta\mu).$$

Все слагаемые последнего равенства в силу приведенных выше рассуждений стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $\delta\mu \in \Im_1^-$. Равенство (2.3.15) доказано.

Таким образом,

$$b_2(t; \tilde{t}_0, \varepsilon\delta\mu) = o(t; \varepsilon\delta\mu). \tag{2.4.16}$$

Из (2.4.7), принимая во внимание (2.4.9), (2.4.10), (2.4.13), (2.4.16), получаем (2.2.3), где $\delta x(t, \delta\mu)$ имеет вид (2.2.6).

2.5. Доказательство теоремы 2.2.2. Пусть в лемме 1.3.1 $r_1 = \tilde{t_0}$, $r_2 = \tilde{t_1}$; тогда для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times \Im_1^+$ решение $y(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)$ определено на $[\tilde{t_0} - \delta_1, \tilde{t_1} + \delta_1]$, а решение $x(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)$ определено на $[\tau,\ \tilde{t_1} + \delta_1]$. При этом

$$y(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = x(t; \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu),\ t \in [t_0, \tilde{t_1} + \delta_1]$$

(см. леммы 1.2.1 и 1.3.1 и замечание 1.3.1). Таким образом,

$$\Delta x(t) = \begin{cases} \varepsilon\delta\varphi(t), & t \in [\tau, \tilde{t}_0), \\ \varphi(t) - \tilde{x}(t), & t \in [\tilde{t}_0, t_0), \\ \Delta y(t), & t \in [t_0, \tilde{t}_1 + \delta_1) \end{cases} \tag{2.5.1}$$

(см. (2.2.2), (2.3.1)).

Пусть числа $\delta_2 \in (0,\ \delta_1]$ и $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ настолько малы, что для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0,\ \varepsilon_2] \times \Im_1^+$ выполнено неравенство

$$\gamma_s(t_0) < \tilde{t}_1 - \delta_2.$$

В силу леммы 1.3.2, с учетом (2.5.1), получим

$$|\Delta x(t)| \leqslant O(\varepsilon\delta\mu)\ \ \forall (t, \varepsilon\delta\mu) \in [t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0,\ \varepsilon_2] \times \Im_1^+, \tag{2.5.2}$$

$$\Delta x(t_0) = \varepsilon[\delta x_0 - f_p^+ \delta t_0] + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.5.3}$$

Функция $\Delta x(t)$ на интервале $[t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ удовлетворяет уравнению (2.4.4). Поэтому, согласно формуле Коши, ее можно представить в виде

$$\Delta x(t) = Y(t_0; t)\Delta x(t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^{t} Y(\xi; t)\delta f[\xi] d\xi + \sum_{i=0}^{2} h_i(t; t_0, \varepsilon\delta\mu),\ \ t \in [t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2], \tag{2.5.4}$$

где

$$h_0(t; t_0, \varepsilon\delta\mu) = \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi); t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi) d\xi, \tag{2.5.5}$$

а $h_i(t; t_0, \varepsilon\delta\mu),\ i = 1, 2$, имеют, соответственно, вид (2.4.8).

В силу леммы 1.3.2 функция $Y(\xi; t)$ непрерывна на множестве $[\tilde{t}_0, \tau_s(\tilde{t}_1 - \delta_2)] \times [\tilde{t}_1 - \delta_2,\ \tilde{t}_1 + \delta_2]$. Ясно, что $t_0 \in [\tilde{t}_0, \tau_s(\tilde{t}_1 - \delta_2)]$. Поэтому

$$Y(t_0; t)\Delta x(t_0) = \varepsilon Y(\tilde{t}_0; t)[\delta x_0 - f_p^+ \delta t_0] + o(t, \varepsilon\delta\mu) \tag{2.5.6}$$

(см. (2.5.4)).

Теперь преобразуем (2.5.5). Имеем:

$$\begin{aligned}
h_0(t;t_0,\varepsilon\delta\mu) &= \sum_{i=1}^{p}\int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi),t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi+\\
&+\sum_{i=p+1}^{s}[\varepsilon\int_{\tau_i(t_0)}^{\tilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+\\
&+\int_{\tilde{t}_0}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi),t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi]=\\
&=\sum_{i=1}^{p}\int_{t_0}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi,t)\tilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi+\\
&+\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+\\
&+\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi;t)\tilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi)d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \qquad (2.5.7)
\end{aligned}$$

После элементарных преобразований легко доказывается следующее равенство:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p}\int_{t_0}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi,t)\tilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}\int_{\gamma_j(t_0)}^{\gamma_{j+1}(t_0)} Y(\xi;t)\tilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi=\\
&=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi;t)\tilde{f}_{x_j}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi,\quad \gamma_0(t_0)=t_0. \qquad (2.5.8)
\end{aligned}$$

Согласно неравенствам (2.3.23), выражение $h_1(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)$ при $t\in[\tilde{t}_1-\delta_2,\tilde{t}_1+\delta_2]$ можно представить в виде

$$h_1(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)=\sum_{k=1}^{5}\beta_k(t,\varepsilon\delta\mu), \qquad (2.5.9)$$

где

$$\begin{aligned}
\beta_1(t;\varepsilon\delta\mu) &= \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)}\omega(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi,\\
\beta_2(t;\varepsilon\delta\mu) &= \int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}}\omega(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi,\\
\beta_3(t;\varepsilon\delta\mu) &= \sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}\omega(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi,\\
\beta_4(t;\varepsilon\delta\mu) &= \sum_{i=p+1}^{s-1}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}}\omega(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi,\\
\beta_5(t;\varepsilon\delta\mu) &= \int_{\gamma_s(t_0)}^{t}\omega(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi,\ \omega(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)=Y(\xi;t)R_1(\xi;\varepsilon\delta\mu).
\end{aligned}$$

Для $\beta_1(t;\varepsilon\delta\mu)$ получим

$$\beta_1(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi;t)[\tilde f(\xi,\tilde x(\tau_1(\xi))+\Delta x(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde x(\tau_i(\xi))+$$

$$+\Delta x(\tau_i(\xi)),\varphi(\tau_{i+1}(\xi)),\dots,\varphi(\tau_s(\xi)))-\tilde f(\xi,\tilde x(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde x(\tau_p(\xi)),$$

$$\tilde\varphi(\tau_{p+1}(\xi)),\dots,\tilde\varphi(\tau_s(\xi))]d\xi-\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi;t)\sum_{j=1}^{s}\tilde f_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi=$$

$$=\beta_{11}(t;\varepsilon\delta\mu)-\beta_{12}(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{2.5.10}$$

При $\xi\in[\gamma_i(t_0),\gamma_{i+1}(t_0)]$ имеем

$$\tau_j(\xi)\geqslant t_0,\ j=\overline{1,i};\quad \tau_j(\xi)<t_0, j=\overline{i,p};\quad \tau_j(\xi)<\tilde t_0,\quad j=\overline{p+1,s},$$

поэтому

$$|\Delta x(\tau_j(\xi))|\leqslant O(\varepsilon\delta\mu),\ j=\overline{1,i},\ \Delta x(\tau_j(\xi))=\varepsilon\delta\varphi(\tau_j(\xi)),\quad j=\overline{p+1,s}$$

(см. (2.5.1) и (2.5.3)).

Для каждого $i=\overline{0,p-1}$ $\gamma_{i+1}(t_0)-\gamma_i(t_0)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно,

$$\beta_{12}(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=0}^{p-i}\sum_{j=i+1}^{p}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi;t)\tilde f_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{2.5.11}$$

Далее,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\xi\in[\gamma_i(t_0),\gamma_{i+1}(t_0)]}|\tilde f(\xi,\tilde x(\tau_1(\xi))+\Delta x(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde x(\tau_i(\xi))+$$

$$+\Delta x(\tau_i(\xi)),\varphi(\tau_{i+1}(\xi),\dots,\varphi(\tau_s(\xi))-f_i^-+f_p^+-\tilde f(\xi,\tilde x(\tau_1(\xi)),\dots,$$

$$\tilde x(\tau_p(\xi)),\tilde\varphi(\tau_{p+1}(\xi)),\dots,\tilde\varphi(\tau_s(\xi))|=0,\ i=\overline{0,p-1},$$

равномерно по $\delta\mu\in\Im_1^+$.

Из свойств функций $Y(\xi;t)$, $\gamma_i(t)$, $i=\overline{1,p}$ непосредственно следуют условия

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\xi\in[\gamma_i(t_0),\gamma_{i+1}(t_0)]}|Y(\xi;t)-Y(\tilde t_0;t)|=0,\ i=\overline{0,p-1},$$

равномерно по $t\in[\tilde t_1-\delta_2,\tilde t_1+\delta_2]$,

$$\gamma_{i+1}(t_0)-\gamma_i(t_0)=\varepsilon(\dot\gamma_{i+1}^+-\dot\gamma_i^+)\delta t_0+o(\varepsilon\delta\mu), i=\overline{0,p-1},\dot\gamma_0=1.$$

Эти условия для $\beta_{11}(t;\varepsilon\delta\mu)$ дают

$$\beta_{11}(t;\varepsilon\delta\mu)=\varepsilon Y(\tilde t_0;t)\sum_{i=0}^{p}(f_i^+-f_p^+)(\dot\gamma_{i+1}^+-\dot\gamma_i^+)\delta t_0+o(t,\varepsilon\delta\mu). \tag{2.5.12}$$

Из (2.5.10) с учетом (2.5.11) и (2.5.12) следует

$$\beta_1(t;\varepsilon\tilde\mu)=\varepsilon Y(\tilde t_0;t)\left[\sum_{i=0}^{p}(\hat\gamma_{i+1}^+-\hat\gamma_i^+)f_i^++f_p^+\right]\delta t_0-$$

$$-\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi;t)\tilde f_{x_j}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{2.5.13}$$

Далее,

$$\beta_2(t;\varepsilon\delta\mu)=\int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}} Y(\xi;t)[\tilde f(\xi,\tilde x(\tau_i(\xi))+\Delta x(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde x(\tau_p(\xi))+$$
$$+\Delta x(\tau_p(\xi)),\varphi(\tau_{p+1}(\xi)),\dots,\varphi(\tau_s(\xi))-\tilde f(\xi,\tilde x(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde x(\tau_p(\xi)),$$
$$\tilde\varphi(\tau_{p+1}(\xi)),\dots,\tilde\varphi(\xi))-\sum_{j=1}^{p}\tilde f_{x_j}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))-\varepsilon\sum_{j=p+1}^{s}\tilde f_{x_j}[\xi]\delta\varphi(\tau_j(\xi))]d\xi.$$

Стандартным способом (см. (2.4.12)) доказывается, что

$$|\beta_2(t;\varepsilon\delta\mu)|\leqslant\|Y\|\biggl(O(\varepsilon\delta\mu)\sum_{i=1}^{p}\sigma_i(t_0,\varepsilon\delta\mu)+\varepsilon\alpha\sum_{i=p+1}^{s}\sigma_i(t_0,\varepsilon\delta\mu)\biggr),\qquad(2.5.14)$$

где

$$\sigma_i(t_0;\varepsilon\delta\mu)=\int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}}\left[\int_0^1|\tilde f_{x_i}(t,\tilde x(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\dots)-\tilde f_{x_i}[t]|d\xi\right]dt.$$

При $t\in[\gamma_p(t_0),\gamma_{p+1}]$ $\tau_j(t)\geqslant t_0,\ j=\overline{1,p}$. Поэтому (см. (2.5.1))

$$\Delta x(\tau_j(t))=\Delta y(\tau_j(t)).$$

Следовательно,

$$\sigma_i(t_0;\varepsilon\delta\mu)=\int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}}\biggl[\int_0^1|\tilde f_{x_i}(t,\tilde x(\tau_1(t))+\xi\Delta y(\tau_1(t)),\dots,\tilde x(\tau_p(t))+$$
$$+\xi\Delta y(\tau_p(t)),\dots,\varepsilon(\tau_s(t)))-\tilde f_{x_i}(t,\tilde x(\tau_1(t)),\dots,\tilde x(\tau_p(t)),\tilde\varphi(\tau_{p+1}(t)),\dots,\tilde\varphi(\tau_s(t)))|d\xi\biggr]dt.$$

Отсюда, как легко видеть (см. (2.3.2)),

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sigma_i(t_0;\varepsilon\delta\mu)=0$$

равномерно по $\delta\mu\in\Im_1^+$.

Таким образом,

$$\beta_2(t;\varepsilon\delta\mu)=o(t;\varepsilon\delta\mu)\qquad(2.5.15)$$

(см. (2.5.14)). Преобразуем остальные слагаемые выражения (2.5.9). Имеем:

$$\beta_3(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)[\tilde f(\xi,\tilde x(\tau_1(\xi)+\Delta x(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde x(\tau_{i-1}(\xi))+$$
$$+\Delta x(\tau_{i-1}(\xi)),\varphi(\tau_i(\xi)),\dots,\varphi(\tau_s(\xi)))-\tilde f_{\gamma_i(t_0)}(\xi,\tilde x(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde x(\tau_i(\xi)),$$
$$\tilde\varphi(\tau_{i+1}(\xi)),\dots,\tilde\varphi(\tau_s(\xi)))]d\xi-\sum_{i=p+1}^{s}\biggl[\sum_{j=1}^{i-1}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\tilde f_{x_j}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi+$$
$$+\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\tilde f_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi+\varepsilon\sum_{j=i+1}^{s}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\tilde f_{x_j}[\xi]\delta\varphi(\tau_j(\xi))d\xi\biggr].$$

Согласно предположению 2.2.5, получим

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\xi\in[\gamma_i,\gamma_i(t_0)]}|\tilde f(\xi\tilde x(\tau_1(\xi))+\Delta x(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde x(\tau_{i-1}(\xi))-\varphi(\tau_s(\xi))-$$
$$-\tilde f(\xi,\tilde x(\tau_1(\xi)),\dots,\tilde x(\tau_i(\xi)),\tilde\varphi(\tau_{i+1}(\xi)),\dots,\tilde\varphi(\tau_i(\xi)))+f_i^+|=0,\quad i=\overline{p+1,s},$$

равномерно по $\delta\mu\in\Im_1^+$. Далее,

$$|\Delta x(\tau_j(\xi))|\leqslant O(\varepsilon\delta\mu),\quad j=\overline{1,i-1},\quad \xi\in[\gamma_i,\gamma_i(t_0)],$$
$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\xi\in[\gamma_i,\gamma_i(t_0)]}|Y(\xi;t)-Y(\gamma_i;t)|=0,\quad i=\overline{p+1,s},$$

равномерно по $t \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2]$.

В силу этих соотношений получим

$$\beta_3(t;\varepsilon\delta\mu) = -\varepsilon \sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i;t) f_i^{+} \delta t_0 - \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi;t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{2.5.16}$$

Аналогично (см. (2.4.12)) доказывается, что

$$\beta_i(t;\varepsilon\delta\mu) = o(t;\varepsilon\delta\mu), \quad i = 4, 5. \tag{2.5.17}$$

В силу соотношений (2.5.13)–(2.5.17) выпишем окончательное выражение:

$$\begin{aligned} h_1(t;t_0,\varepsilon\delta\mu) = \varepsilon \Big\{ Y(\tilde{t}_0;t) \sum_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^{+} - \hat{\gamma}_i^{+}) - \sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i;t) f_i^{+} \Big\} \delta t_0 - \\ - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=i+1}^{p} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi;t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) d\xi - \\ - \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi;t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) d\xi + o(t,\varepsilon\delta\mu) \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

(см. (2.5.9)).

Наконец, оценим $h_2(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)$. Имеем:

$$|h_2(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)| \leqslant \varepsilon\alpha \|Y\| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} \sigma_{ij}(t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon\delta\mu)$$

(см. (2.4.14)).

Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_{ij}(t_0; \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon\delta\mu) = 0, \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,s}, \tag{2.5.19}$$

равномерно по $\delta\mu \in \Im_1^{+}$.

Пусть $i \in \{1,\dots,p\}$, тогда при $t \in [\gamma_i(t_0), \tilde{t}_1 + \delta_2]$

$$|\Delta x(\tau_i(t))| \leqslant O(\varepsilon\delta\mu).$$

Легко видеть, что $\gamma_j(t_0) - \tilde{t}_0 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а функция $\Delta x(t)$ на интервале $[\tau, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ ограничена. Кроме того,

$$\sigma_{ij}(t_0; \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon\delta\mu) = \sigma_{ij}(t_0; \gamma_j(t_0); \varepsilon\delta\mu) + \sigma(\gamma_j(t_0); \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon\delta\mu). \tag{2.5.20}$$

Пусть $j \in \{p+1,\dots,s\}$, тогда

$$\Delta x(\tau_j(t)) = \varepsilon\delta\varphi(\tau_j(t)),\ t \in [t_0, \gamma_j];\ |\Delta x(\tau_j(t))| \leqslant O(\varepsilon\delta\mu),\ t \in [\gamma_j(t_0), \tilde{t}_1 + \delta_2].$$

Ясно, что $\gamma_j(t_0) - \gamma_j \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а $\sigma_{ij}(t_0, \tilde{t}_1; \varepsilon\delta\mu)$ можно представить в виде суммы

$$\sigma_{ij}(t_0; \tilde{t}_1 + \delta_2, \varepsilon\delta\mu) = \sigma_{ij}(t_0; \gamma_j, \varepsilon\delta\mu) + \sigma_{ij}(\gamma_j; \gamma_j(t_0), \varepsilon\delta\mu) + \sigma_{ij}(\gamma_j(t_0); \tilde{t}_1 + \delta_2, \varepsilon\delta\mu). \tag{2.5.21}$$

Очевидно, что все слагаемые в выражениях (2.5.20), (2.5.21) при $\varepsilon \to 0$ стремятся к нулю.

Следовательно, равенство (2.5.19) доказано, что, в свою очередь, дает

$$h_2(t;t_0,\varepsilon\delta\mu) = o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{2.5.22}$$

В заключение заметим, что при $t \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2]$

$$\varepsilon \int_{t_0}^{t} Y(\xi;t) \delta f[t] d\xi = \varepsilon \int_{\tilde{t}_0}^{t} Y(\xi,t) \delta f[t] d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{2.5.23}$$

Из (2.5.4) принимая во внимание (2.5.6)–(2.5.8), (2.5.18), (2.5.22), (2.5.23) получаем (2.2.3), где $\delta x(t;\delta\mu)$ имеет вид (2.2.6).

2.6. Доказательство теорем 2.2.4 и 2.2.5.

Доказательство теоремы 2.2.4. Аналогично доказательству теоремы 2.2.1, на основе лемм 1.2.2 и 1.3.2 можно установить (2.4.2) и (2.4.3), где элемент $\delta\mu$ заменен элементом $\delta\varrho$, а множество $\Im_1^-$ заменено множеством $\Im_0^-$.

Функция $\Delta x(t)$ на интервале $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_1]$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_i(t)) + \varepsilon \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_j}[t]\delta u(\theta_j(t)) + R(t;\varepsilon\delta\varrho), \tag{2.6.1}$$

где

$$R(t;\varepsilon\delta\varrho) = f(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \Delta x(\tau_1(t)), \dots, \tilde{x}(\tau_s(t)) + \Delta x(\tau_1(t)), \tilde{u}(\theta_1(t)) +$$

$$+\varepsilon\delta u(\theta_1(t)), \dots, \tilde{u}(\theta_\nu(t)) + \varepsilon\delta u(\theta_\nu(t))) - \tilde{f}[t] - \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_i(t)) - \varepsilon \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_j}[t]\delta u(\theta_j(t)). \tag{2.6.2}$$

Решение уравнения (2.6.1) с помощью формулы Коши может быть представлено в виде

$$\Delta x(t) = Y(\tilde{t}_0;t)\Delta x(\tilde{t}_0) + \varepsilon \int_{\tilde{t}_0}^{t} Y(\xi;t) \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_j}[\xi]\delta u(\theta_j(\xi))d\xi + \sum_{i=0}^{2} h_i(t;\tilde{t}_0, \varepsilon\delta\varrho), t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_1], \tag{2.6.3}$$

где

$$h_0(t;\delta t_0, \varepsilon\delta\varrho) = \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\tilde{t}_0)}^{\tilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(t)\Delta x(\xi)d\xi,$$

$$h_1(t;\tilde{t}_0, \varepsilon\delta\varrho) = \int_{\tilde{t}_0}^{t} R(\xi;\varepsilon\delta\varrho)d\xi.$$

Аналогично (см. доказательство теоремы 2.2.1) доказывается, что

$$Y(\tilde{t}_0;t)\Delta x(\tilde{t}_0) = \varepsilon Y(\tilde{t}_0;t)\left\{\delta x_0 + \left[\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-)f_i^-\right]\delta t_0\right\} + o(t;\varepsilon\delta\varrho), \tag{2.6.4}$$

$$h_0(t;\tilde{t}_0, \varepsilon\delta\varrho) = \varepsilon \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\tilde{t}_0)}^{\tilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i} Y(\xi;t)\tilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi + o(t;\varepsilon\delta\varrho). \tag{2.6.5}$$

Согласно неравенствам (2.3.5), выражение $h_1(t;\tilde{t}_0, \varepsilon\delta\varrho)$ при $t \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ можно представить в виде

$$h_1(t;\tilde{t}_0, \varepsilon\delta\varrho) = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k(t;\varepsilon\delta\varrho),$$

где

$$\alpha_1(t;\varepsilon\delta\varrho) = \int_{\tilde{t}_0}^{\gamma_{p+1}(t_0)} \omega(\xi;t,\varepsilon\delta\varrho)d\xi, \quad \alpha_2(t;\varepsilon\delta\varrho) = \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i} \omega(\xi;t,\varepsilon\delta\varrho)d\xi,$$

$$\alpha_3(t;\varepsilon\delta\varrho) = \sum_{i=p+1}^{s-1} \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}(t_0)} \omega(\xi;t,\varepsilon\delta\varrho)d\xi, \quad \alpha_4(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{\gamma_s}^{t} \omega(\xi,t,\varepsilon\delta\varrho)d\xi,$$

$$\omega(\xi;t,\varepsilon\delta\varrho) = Y(\xi;t)R(\xi;\varepsilon\delta\varrho).$$

Оценим выражение $\alpha_1(t;\varepsilon\delta\varrho)$. Принимая во внимание (2.6.2), аналогично (см. (2.4.12)) получим

$$|\alpha_1(t;\varepsilon\delta\varrho)\leqslant\|Y\|\int_{\tilde t_0}^{\tilde t_1+\delta_2}\left\{\int_0^1\left[\sum_{i=1}^{p}|\tilde f_{x_i}(t,\tilde x(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\dots,\right.\right.$$

$$\tilde u(\theta_1(t))+\varepsilon\xi\delta u(\theta_1(t)),\dots)-\tilde f_{x_i}[t]||\Delta x(\tau_i(t))|+\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}|\tilde f_{x_i}(t,\tilde x(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\dots,$$

$$\tilde u(\theta_1(t))+\varepsilon\xi\delta u(\theta_1(t)),\dots)-\tilde f_{x_i}[t]||\delta\varphi(\tau_i(t))|+\varepsilon\sum_{j=1}^{\nu}|\tilde f_{u_j}(t,\tilde x(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\dots,$$

$$\left.\left.\tilde u(\theta_1(t))+\varepsilon\xi\delta u(\theta_1(t)),\dots)-\tilde f_{u_j}[t]||\delta u(\theta_j(t))|\right]d\xi\right\}dt\leqslant$$

$$\leqslant\|Y\|(O(\varepsilon\delta\varrho)\sum_{i=1}^{p}\sigma_i(\varepsilon\delta\varrho)+\varepsilon\alpha\sum_{i=p+1}^{s}\sigma_i(\varepsilon\delta\varrho))+\varepsilon\alpha\sum_{j=1}^{\nu}\sigma_{1j}(\varepsilon\delta\varrho),$$

где

$$\sigma_i(\varepsilon\delta\mu)=\int_{\tilde t_0}^{\tilde t_1+\delta_2}\left[\int_0^1|\tilde f_{x_i}(t,\tilde x(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\dots)-\tilde f_{x_i}[t]|d\xi\right]dt,\quad i=\overline{1,s},$$

$$\sigma_{1j}(\varepsilon\delta\mu)=\int_{\tilde t_0}^{\tilde t_1+\delta_2}[\int_0^1|\tilde f_{u_j}(t,\tilde x(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\dots)-\tilde f_{u_j}[t]|d\xi]dt,\ i=\overline{1,\nu}.$$

Тем же способом, что и при доказательстве теоремы 2.2.1, доказываются следующие равенства:

$$\alpha_1(t;\varepsilon\delta\varrho)=o(t;\varepsilon\delta\varrho),\alpha_2(t;\varepsilon\delta\varrho)=-\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}Y(\gamma_i;t)f_i^-\dot\gamma_i^-\delta t_0-$$

$$-\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi,t)\tilde f_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi+o(t,\varepsilon\delta\varrho),\alpha_i(t;\varepsilon\delta\varrho)=o(t;\varepsilon\delta\varrho),\quad i=3,4.$$

Теперь выпишем для $h_1(t;\tilde t_0,\varepsilon\delta\varrho)$ окончательную формулу:

$$h_1(t;\tilde t_0,\varepsilon\delta\varrho)=-\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}Y(\gamma_i;t)f_i^-\dot\gamma_i^-\delta t_0-\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)\tilde f_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi+o(t;\varepsilon\delta\varrho).\quad(2.6.6)$$

Из (2.6.3), принимая во внимание (2.6.4)–(2.6.6), получаем (2.2.8), где $\delta x(t;\delta\varrho)$ имеет вид (2.2.9).

Доказательство теоремы 2.2.5. На основе лемм 1.2.2 и 1.3.2 можно установить (2.5.2)–(2.5.3), где элемент $\delta\mu$ заменен элементом $\delta\varrho$, а множество $\Im_1^+$ заменено множеством $\Im_0^+$. Функция $\Delta x(t)$ на интервале $[t_0,\tilde t_1+\delta_2]$ удовлетворяет уравнению (2.6.1). Поэтому ее можно представить в виде

$$\Delta x(t)=Y(t_0;t)\Delta x(t_0)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}Y(\xi;t)\sum_{j=1}^{\nu}\tilde f_{u_j}[\xi]\delta u(\theta_j(\xi))d\xi+\sum_{i=0}^{2}h_i(t;t_0,\varepsilon\delta\varrho).\quad(2.6.7)$$

После этого доказательство теоремы осуществляется аналогично доказательству теорем 2.2.4 и 2.2.2.

3. Формулы вариации решения дифференциального уравнения с непрерывным начальным условием

В этом параграфе для нелинейного дифференциального уравнения с переменными запаздываниями и непрерывным начальным условием доказаны формулы вариации решения при возмущении начального момента $\tilde t_0$, начальной функции и правой части уравнения. Отдельно рассмотрен случай, когда правая часть уравнения зависит от управляющей функции.

3.1. Формулировка основных результатов. Элементу $v = (t_0, \varphi, f) \in B_1 = J \times \Delta \times E_f^{(1)}$ будем ставить в соответствие дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t))) \tag{3.1.1}$$

с непрерывным начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\tau, t_0]. \tag{3.1.2}$$

Очевидно, уравнение (3.1.1) с начальным условием (3.1.2) соответствует элементу $\mu = (t_0, \varphi(t_0), \varphi, f)$ (см. п. 1.2). Поэтому решение $x(t; v), t \in [\tau, t_1]$, соответствующее элементу $v = (t_0, \varphi, f)$, будем называть решением $x(t; \mu), t \in [\tau, t_1], \mu = (t_0, \varphi(t_0), \varphi, f)$ (см. определение 1.2.1).

В пространстве $E_v^{(2)} = \mathbb{R} \times E_\varphi \times E_f^{(1)}$ с элементами $v = (t_0, \varphi, f)$ введем множество вариаций:

$$\Im_2 = \left\{ \delta v = (\delta t_0, \delta\varphi, \delta f) \in E_v^{(2)} : |\delta t_0| \leqslant \alpha, \delta\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta\varphi_i, \delta f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta f_i, |\lambda_i| \leqslant \alpha, i = \overline{1, k} \right\}, \tag{3.1.3}$$

где $\delta\varphi_i \in E_\varphi, \delta f_i \in E_f^{(1)}, i = \overline{1, k}$ — фиксированные точки, $\alpha > 0$ — фиксированное число.

На основе леммы 1.2.1, аналогично п. 2.2, для произвольного $(t, \varepsilon, \delta v) \in [\tau, \tilde{t}_1 + \delta_1] \times [0, \varepsilon] \times \Im_2$ определим приращение решения $\tilde{x}(t) = x(t; \tilde{v}), \tilde{v} = (\tilde{t}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{f})$:

$$\Delta x(t; \varepsilon\delta v) = x(t; \tilde{v} + \varepsilon\delta v) - x(t; \tilde{v}). \tag{3.1.4}$$

Теорема 3.1.1. *Пусть функция $\tilde{\varphi}(t)$ абсолютно непрерывна в некоторой полуокрестности $(\tilde{t_0} - \delta,\ \tilde{t_0}]$ точки $\tilde{t_0}$, и пусть существуют конечные пределы*

$$\dot{\varphi}^- = \dot{\tilde{\varphi}}(\tilde{t_0}-), \lim_{\omega \to \omega_0^-} \tilde{f}(\omega) = f_0^-, \omega = (t, x_1, \ldots, x_s) \in (\tilde{t_0} - \delta, \tilde{t_0}] \times O^s,$$
$$\omega_0^- = (\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}(\tau_1(\tilde{t}_0-)), \ldots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\tilde{t}_0-)).$$

Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2 > 0,\ \delta_2 > 0$, что для произвольного $(t, \varepsilon, \delta v) \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_2^-$, где $\Im_2^- = \{\delta v \in \Im_2 : \delta t_0 \leqslant 0\}$,

$$\Delta x(t; \varepsilon\delta v) = \varepsilon\delta x(t; \delta v) + o(t; \varepsilon\delta v), \tag{3.1.5}$$

где

$$\begin{gathered}\delta x(t; \delta v) = \alpha_-(t; \delta v) + \beta(t; \delta v) + \int_{\tilde{t_0}}^{t} Y(\xi; t)\delta f[\xi] d\xi, \\ \alpha_-(t; \delta v) = Y(\tilde{t}_0; t)[\delta\varphi(\tilde{t_0}-) + (\dot{\varphi}^- - f_0^-)\delta t_0], \\ \beta(t; \delta v) = \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(\xi); t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi) \delta\varphi(\xi) d\xi;\end{gathered} \tag{3.1.6}$$

$Y(\xi; t)$ — матричная функция, удовлетворяющая уравнению (2.2.5) *и условию* (2.1.5).

Теорема 3.1.2. *Пусть функция $\tilde{\varphi}(t)$ абсолютно непрерывна в некоторой полуокрестности $(\tilde{t_0}, \tilde{t_0} + \delta]$ точки $\tilde{t_0}$ и пусть существуют конечные пределы*

$$\dot{\varphi}^+ = \dot{\tilde{\varphi}}(\tilde{t_0}+), \lim_{\omega \to \omega_0^+} \tilde{f}(\omega) = f_0^+,\ \omega = (t, x_1, \ldots, x_s) \in (\tilde{t_0}, \tilde{t}_0 + \delta] \times O^s,$$
$$\omega_0^+ = (\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}(\tau_1(\tilde{t}_0+)), \ldots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\tilde{t}_0+)).$$

Тогда для каждого $s_0 \in (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1)$ существуют такие числа $\varepsilon_2 > 0,\ \delta_2 > 0$, что для произвольного $(t, \varepsilon, \delta v) \in [s_0, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_2^+$, где $\Im_2^+ = \{\delta v \in \Im_2 : \delta t_0 \geqslant 0\}$, справедлива формула (3.1.5), *где*

$$\begin{gathered}\delta x(t; \delta v) = \alpha_+(t; \delta v) + \beta(t; \delta v) + \int_{\tilde{t_0}}^{t} Y(\xi; t)\delta f[\xi] d\xi, \\ \alpha_+(t; \delta v) = Y(\tilde{t}_0; t)[\delta\varphi(\tilde{t_0}+) + (\dot{\varphi}^+ - f_0^+)\delta t_0].\end{gathered} \tag{3.1.7}$$

Следующая теорема является следствием теорем 3.1.1 и 3.1.2.

Теорема 3.1.3. *Пусть выполнены условия теорем* 3.1.1 *и* 3.1.2. *Кроме того, пусть*

$$\dot{\varphi}^- - f_0^- = \dot{\varphi}^+ - f_0^+ = f_0; \tag{3.1.8}$$

функции $\delta\varphi_i(t), i = \overline{1,k}$ *непрерывны в точке* $\tilde{t_0}$. *Тогда для каждого* $s_0 \in (\tilde{t_0}, \tilde{t_1})$ *существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0,\ \delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(t, \varepsilon, \delta v) \in [s_0, \tilde{t_1} + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_2$ *справедлива формула* (3.1.5)*, где*

$$\delta x(t; \delta\rho) = Y(\tilde{t_0}; t)[\delta\varphi(\tilde{t_0}) + f_0\delta t_0] + \beta(t; \delta v) + \int_{\tilde{t_0}}^{t} Y(\xi; t)\delta f[\xi] d\xi.$$

Теперь рассмотрим случай, когда правая часть дифференциального уравнения зависит от управления.

Каждому элементу $\eta = (t_0, \varphi, u) \in B_2 = J \times \Delta \times \Omega$ сопоставим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_s(t))) \tag{3.1.9}$$

с непрерывным начальным условием

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [\tau, t_0]. \tag{3.1.10}$$

Решение $x(t; \eta), t \in [\tau, t_1]$, соответствующее элементу $\eta = (t_0, \varphi, u)$, будем называть решением $x(t; \varrho),\ t \in [\tau, t_1],\ \varrho = (t_0, \varphi(t_0), \varphi, u)$.

В пространстве $E_\eta^{(3)} = \mathbb{R} \times E_\varphi \times E_u$ с элементами $\eta = (t_0, \varphi, u)$ определим множество вариаций:

$$\Im_3 = \{\delta\eta = (\delta t_0, \delta\varphi, \delta u) \in E_\eta^{(3)} :\ |\delta t_0| \leqslant \alpha, \delta\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta\varphi_i, |\lambda_i| \leqslant \alpha, i = \overline{1,k}, \|\delta u\| \leqslant \alpha\},$$

где $\delta\varphi_i \in E_\varphi, i = \overline{1,k}$ — фиксированные точки, $\alpha > 0$ — фиксированное число. На основе леммы 1.2.2, аналогичным способом (см. п. 2.2), для произвольного $(t, \varepsilon, \delta\eta) \in [\tau, \tilde{t}_1 + \delta_1] \times [0, \varepsilon_1] \times \Im_3$ определим приращение решения $\tilde{x}(t) = x(t; \tilde{\eta}),\ \tilde{\eta} = (\tilde{t}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{u})$:

$$\Delta x(t; \varepsilon\delta\eta) = x(t; \tilde{\eta} + \varepsilon\delta\eta) - x(t; \tilde{\eta}).$$

Теорема 3.1.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.1*, где* $\tilde{f}(\omega) = f(\omega, \tilde{u}(\theta_1(t)), \dots, \tilde{u}(\theta_\nu(t)))$. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0,\ \delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(t, \varepsilon, \delta\eta) \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_3^-$, *где* $\Im_3^- = \{\delta v \in \Im_3 : \delta t_0 \leqslant 0\}$, *справедлива формула*

$$\Delta x(t; \varepsilon\delta\eta) = \varepsilon\delta x(t; \delta\eta) + o(t; \varepsilon\delta\eta), \tag{3.1.11}$$

где

$$\delta x(t; \delta\eta) = \alpha_-(t; \delta\eta) + \beta(t; \delta\eta) + \int_{\tilde{t_0}}^{t} Y(\xi; t) \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_j}[\xi] \delta u(\theta_j(\xi)) d\xi, \tag{3.1.12}$$

$$\alpha_-(t; \delta\eta) = \alpha_-(t; \delta v), \beta(t; \delta\eta) = \beta(t; \delta v), \tilde{f}_{u_j}[\xi] = f_{u_j}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_s(\xi)), \tilde{u}(\theta_1(t)), \dots, \tilde{u}(\theta_\nu(t))).$$

Теорема 3.1.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.2*, где*

$$\tilde{f}(\omega) = f(\omega, \tilde{u}(\theta_1(t)), \dots, \tilde{u}(\theta_\nu(t))).$$

Тогда для каждого $s_0 \in (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1)$ *существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0,\ \delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(t, \varepsilon, \delta\eta) \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_3^+$, *где* $\Im_3^+ = \{\delta v \in \Im_3 : \delta t_0 \geqslant 0\}$, *справедлива формула* (3.1.10)*, где*

$$\delta x(t; \delta\eta) = \alpha_+(t; \delta\eta) + \beta(t; \delta\eta) + \int_{\tilde{t_0}}^{t} Y(\xi; t) \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_j}[\xi] \delta u(\theta_j(\xi)) d\xi, \tag{3.1.13}$$

$$\alpha_+(t; \delta\eta) = \alpha_+(t; \delta v).$$

Теорема 3.1.6. *Пусть выполнены условия теорем* 3.1.4, 3.1.5 *и условие* (3.1.8). *Кроме того, пусть функции* $\delta\varphi_i(t), i = \overline{1,k}$, *непрерывны в точке* $\tilde{t}_0$. *Тогда для каждого* $s_0 \in (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1)$ *существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(t, \varepsilon, \delta\eta) \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_3$ *справедлива формула* (3.1.11), *где*

$$\delta x(t; \delta\eta) = Y(\tilde{t}_0; t)[\delta\varphi(\tilde{t}_0) + f_0\delta t_0] + \beta(t; \delta\eta) + \int_{\tilde{t}_0}^{t} Y(\xi; t)\sum_{i=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_j}[\xi]\delta u(\theta_j(\xi))d\xi.$$

Некоторые замечания. 3.1.1. На основе формулы Коши можно заключить, что функция

$$\delta x(t) = \begin{cases} \delta\varphi(t), & t \in [\tau, \tilde{t_0}), \\ \delta x(t; \delta v), & t \in [\tilde{t_0}, \tilde{t_1} + \delta_2], \end{cases}$$

где $\delta x(t; \delta v)$ имеет вид (3.1.6), является решением уравнения в вариациях

$$\dot{\delta x}(t) = \sum_{i=1}^{s} \tilde{f_{x_i}}[t]\delta x(\tau_i(t)) + \delta f[t]$$

с разрывным начальным условием

$$\delta x(t) = \delta\varphi(t),\ t \in [\tau, \tilde{t_0}), \delta x(\tilde{t_0}) = (\dot{\varphi}^- - f_0^-)\delta t_0 + \delta\varphi(\tilde{t}_0-).$$

3.1.2. Пусть функции $\tilde{\varphi}(\tau_i(t)), i = \overline{1,s}$, непрерывны в точке $\tilde{t}_0$. Пусть, далее, функция $\tilde{f}(\omega)$ непрерывна в точке ω_0, а функция $\tilde{\varphi}(t)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $\tilde{t}_0$. Тогда в теореме 3.1.3

$$f_0 = \dot{\tilde{\varphi}}(\tilde{t}_0) - \tilde{f}(\omega_0),$$

где $\omega_0 = (\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}(\tau_1(\tilde{t}_0)), \ldots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\tilde{t}_0)))$.

3.2. Леммы об оценке приращения решений относительно множеств вариации $\Im_2^-$, $\Im_2^+$, $\Im_3^-$, $\Im_3^+$. Доказанные ниже леммы будут использованы при доказательстве формул вариации. Аналогичным способом на основе леммы 1.3.1 для произвольного $(t, \varepsilon, \delta v) \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \times [0, \varepsilon_1] \times \Im_2$ определим приращение решения $\tilde{y}(t) = y(t; \tilde{v}), \tilde{v} = (\tilde{t}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{f})$:

$$\Delta y(t) = \Delta y(t; \varepsilon\delta v) = y(t; \tilde{v} + \varepsilon\delta v) - y(t; \tilde{v}). \tag{3.2.1}$$

Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta y(t; \varepsilon\delta v) = 0 \tag{3.2.2}$$

равномерно по $(t, \delta v) \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \times \Im_2$ (см. лемму 1.3.1).

Лемма 3.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.1. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(\varepsilon, \delta v) \in [0, \varepsilon_2] \times \Im_2^-$ *выполнено неравенство*

$$\max_{t \in [\tilde{t_0}, r_2 + \delta_2]} |\Delta y(t)| \leqslant O(\varepsilon\delta v); \tag{3.2.3}$$

при этом

$$\Delta y(\tilde{t_0}) = \varepsilon[\delta\varphi(\tilde{t}_0-) + (\dot{\varphi}^- - f_0^-)\delta t_0] + o(\varepsilon\delta v). \tag{3.2.4}$$

Доказательство. Определим множества

$$\begin{cases} I_1 = \{i \in \{1, \ldots, s\} : \tau_i(\tilde{t_0}) < \tilde{t_0},\ \gamma_i(\tilde{t_0}) > r_2\}, \\ I_2 = \{i \in \{1, \ldots, s\} : \tau_i(\tilde{t_0}) < \tilde{t_0},\ \gamma_i(\tilde{t_0}) \leqslant r_2\}, \\ I_3 = \{i \in \{1, \ldots, s\} : \tau_i(\tilde{t_0}) = \tilde{t_0}\}. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Пусть числа $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ и $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ настолько малы, что для произвольного $(\varepsilon, \delta v) \in [0, \varepsilon_1] \times \Im_2^-$

$$t_0 = \tilde{t_0} + \varepsilon\delta t_0 \in (\tilde{t_0} - \delta, \tilde{t_0}];\quad \gamma_i(t_0) > r_2 + \delta_2,\ i \in I_1;\quad \tau_i(\tilde{t_0}) < t_0,\ i \in I_2. \tag{3.2.6}$$

Аналогично (см. доказательство леммы 2.3.1) можно получить, что для произвольного $(\varepsilon, \delta v) \in [0, \varepsilon_2] \times \Im_2^-$ имеет место неравенство

$$|\Delta y(t)| \leqslant |\Delta y(\tilde{t_0})| + a_1(t; \varepsilon\delta v) + b_1(\varepsilon\delta v). \tag{3.2.7}$$

Докажем формулу (3.2.4). Имеем:

$$\Delta y(\tilde{t_0}) = y(\tilde{t_0}; \tilde{v} + \varepsilon\delta v) - \tilde{y}(\tilde{t_0}) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\tilde{t_0}} [\tilde{f}(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(t) + b(t; \varepsilon\delta v)]dt - \tilde{\varphi}(\tilde{t_0}). \qquad (3.2.8)$$

Поскольку

$$\int_{\tilde{t_0}}^{t_0} \dot{\tilde{\varphi}}(t)dt = \varepsilon\dot{\varphi}^{-}\delta t_0 + o(\varepsilon\delta v),$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \delta\varphi(t_0) = \delta\varphi(\tilde{t_0}-),$$

равномерно по $\delta v \in \Im_2^-$. Поэтому

$$\varphi(t_0) - \tilde{\varphi}(\tilde{t_0}) = \int_{\tilde{t_0}}^{t_0} \dot{\tilde{\varphi}}(t)dt + \varepsilon\delta\varphi(\tilde{t_0}-) + \varepsilon[\delta\varphi(t_0) - \delta\varphi(\tilde{t_0}-)] = \varepsilon[\dot{\varphi}^{-}\delta t_0 + \delta\varphi(\tilde{t_0}-)] + o(\varepsilon\delta v). \quad (3.2.9)$$

Нетрудно заметить, что

$$\lim_{(\varepsilon,t)\to(0,\tilde{t_0}-)} h(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(\tau_i(t)) = \tilde{\varphi}(\tau_i(\tilde{t_0}-)), \ i = \overline{1, s}$$

(см. (1.3.3), (3.2.2)). Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\in[t_0,\tilde{t_0}]} |\tilde{f}(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(t) - f_0^-| = 0. \qquad (3.2.10)$$

На основе последнего равенства получим

$$\int_{t_0}^{\tilde{t_0}} \tilde{f}(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(t)dt = -\varepsilon f_0^- \delta t_0 + \int_{t_0}^{\tilde{t_0}} [\tilde{f}(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(t) - f_0^-]dt = -\varepsilon f_0^- \delta t_0 + o(\varepsilon\delta v). \quad (3.2.11)$$

Далее,

$$\int_{t_0}^{\tilde{t_0}} |b(t; \varepsilon\delta v)|dt \leqslant \varepsilon \int_{t_0}^{\tilde{t_0}} \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i||\delta f_i(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\alpha \sum_{i=1}^{k} \int_{t_0}^{\tilde{t_0}} m_{\delta f_i, K_1}(t)dt = o(\varepsilon\delta v). \qquad (3.2.12)$$

(см. (2.3.7) и (2.3.9)). Согласно (3.2.9), (3.2.11), из (3.2.12) следует (3.2.8). Теперь докажем неравенство (3.2.3). Для этого оценим $a_1(t; \varepsilon\delta v), t \in [\tilde{t_0}, r_2 + \delta_2]$. Имеем:

$$a_1(t; \varepsilon\delta v) \leqslant \sum_{i=1}^{s} \int_{\tilde{t_0}}^{t} L_{\tilde{f},K_1}(\xi)|h(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(\tau_i(\xi)) - h(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{y})(\tau_i(\xi))|d\xi =$$

$$= \varepsilon \sum_{i\in I_1} \int_{\tilde{t_0}}^{t} L_{\tilde{f},K_1}(\xi)\delta\varphi(\tau_i(\xi))d\xi + \sum_{i\in I_2} \int_{\tilde{t_0}}^{t} L_{\tilde{f},K_1}(\xi)|h(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(\tau_i(\xi)) -$$

$$-h(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{y})(\tau_i(\xi))|d\xi + \sum_{i\in I_3} \int_{\tilde{t_0}}^{t} L_{\tilde{f},K_1}(\xi)|\Delta y(\tau_i(t))|d\xi \leqslant O(\varepsilon\delta v) +$$

$$+ \sum_{i\in I_2} \int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tau_i(t)} L_{\tilde{f},K_1}(\gamma_i(\xi))|h(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(\xi) - h(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{y})(\xi)|\dot{\gamma}_i(\xi)d\xi +$$

$$- \sum_{i\in I_3} \int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tau_i(t)} L_{\tilde{f},K_1}(\gamma_i(\xi))|\Delta y(\xi)|\dot{\gamma}_i(\xi)d\xi \leqslant O(\varepsilon\delta v) +$$

$$+ \sum_{i\in I_2} \int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} L_{\tilde{f},K_1}(\gamma_i(\xi))|h(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(\xi) - h(\tilde{t_0}, \tilde{\varphi}, \tilde{y})(\xi)|\dot{\gamma}_i(\xi)d\xi +$$

$$+\sum_{i\in I_2}\int_{\tilde t_0}^{t}\chi(J;\gamma_i(\xi))L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(\xi))|\Delta y(\xi)|\dot\gamma_i(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{i\in I_3}\int_{\tilde t_0}^{t}\chi(J;\gamma_i(\xi))L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(\xi))\dot{(\gamma_i)}(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi\leqslant O(\varepsilon\delta v)+$$

$$+\sum_{i\in I_2}\beta[\tau_i(\tilde t_0);\tilde t_0]+\int_{\tilde t_0}^{t}L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi,$$

где

$$\beta[\tau_i(\tilde t_0);\tilde t_0]=\int_{\tau_i(\tilde t_0)}^{\tilde t_0}L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(\xi))|h(t_0,\varphi,\tilde y+\Delta y)(\xi)-h(\tilde{t_0},\tilde\varphi,\tilde y)(\xi)|\dot\gamma_i(\xi)d\xi, \tag{3.2.13}$$

$$L(\xi)=\sum_{i=1}^{s}\chi(J;\xi)(\gamma_i(\xi))L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(\xi))\dot\gamma_i(\xi).$$

Если $I_k=\varnothing$, то будем считать, что $\sum\limits_{i\in I_k}\alpha_i=0$. Пусть $I_2\neq\varnothing$ и $i\in I_2$. Тогда

$$\beta[\tau_i(\tilde t_0);\tilde t_0]=\varepsilon\int_{\tau_i(\tilde t_0)}^{t_0}L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(t))|\delta\varphi(t)|\dot\gamma_i(t)dt+\int_{t_0}^{\tilde{t_0}}L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(t))|y(t;\tilde v+\varepsilon\delta v)-\tilde\varphi(t)|\dot\gamma_i(t)dt.$$

Легко видеть, что при $t\in[t_0,\tilde{t_0}]$

$$|y(t;\tilde v+\varepsilon\delta v)-\tilde\varphi(t)|=\left|\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}[\tilde f(t_0,\varphi,\tilde y+\Delta y)(\xi)+b(\xi;\varepsilon\delta v)]d\xi-\tilde\varphi(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon|\delta\varphi(t_0)|+o(\varepsilon\delta v)+\int_{t_0}^{\tilde{t_0}}|\dot{\tilde\varphi}(t)|dt+\int_{t_0}^{\tilde{t_0}}|\tilde f(t_0,\varphi,\tilde y+\Delta y)(t)|dt.$$

Подынтегральные функции ограничены при достаточно малом ε_2, поэтому

$$|y(t;\tilde v+\varepsilon\delta v)-\tilde\varphi(t)|=O(\varepsilon\delta v). \tag{3.2.14}$$

Таким образом,

$$\beta[\tau_i(\tilde t_0);\tilde t_0]=O(\varepsilon\delta v),$$

следовательно,

$$a_1(t;\varepsilon\delta v)\leqslant O(\varepsilon\delta v)+\int_{\tilde{t_0}}^{t}L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi. \tag{3.2.15}$$

Из (3.2.7), с учетом (3.2.4), (3.2.15) и равенства $b_1(\varepsilon\delta v)=O(\varepsilon\delta v)$, на отрезке $[\tilde{t_0},r_2+\delta_2]$ получим

$$|\Delta y(t)|\leqslant O(\varepsilon\delta v)+\int_{\tilde{t_0}}^{t}L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi.$$

Из этого, согласно лемме Гронуолла, следует (3.2.3). □

Лемма 3.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.2. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_2>0$, $\delta_2>0$, *что для произвольного* $(\varepsilon,\delta v)\in[0,\varepsilon_2]\times\Im_2^+$ *выполнено неравенство*

$$\max_{t\in[t_0,r_2+\delta_2]}|\Delta y(t)|\leqslant O(\varepsilon\delta v); \tag{3.2.16}$$

при этом

$$\Delta y(\tilde{t_0})=\varepsilon[\delta\varphi(\tilde t_0+)+(\dot\varphi^+-f_0^+)\delta t_0]+o(\varepsilon\delta v). \tag{3.2.17}$$

Доказательство. Пусть числа $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$ и $\delta_2\in(0,\delta_1]$ настолько малы, что для произвольного $(\varepsilon,\delta v)\in[0,\varepsilon_1]\times\Im_2^+$

$$t_0\in[\tilde t_0,\tilde t_0+\delta_);\gamma_i(\tilde t_0)>r_2+\delta_2,i\in I_1;\ \tau_i(t_0)<\tilde t_0,i\in I_2.\tau_i(t_0)<\tilde t_0,i\in I_2. \tag{3.2.18}$$

Аналогично (см. доказательство леммы 2.3.2) можно получить, что для произвольного $(\varepsilon,\delta v)\in[0,\varepsilon_2]\times\Im_2^+$ имеет место неравенство

$$|\Delta y(t)|\leqslant|\Delta y(t_0)|+a_2(t;\varepsilon\delta v)+b_2(\varepsilon\delta v). \tag{3.2.19}$$

Докажем формулу (3.2.17). Имеем:

$$\Delta y(t_0)=y(t_0;\tilde v+\varepsilon\delta v)-y(t_0)=\varphi(t_0)-\left\{\tilde\varphi(\tilde t_0)+\int_{\tilde t_0}^{t_0}\tilde f(\tilde t_0,\tilde\varphi,\tilde y)(t)dt\right\}. \tag{3.2.20}$$

Ясно, что

$$\lim_{t\to\tilde t_0+}h(\tilde t_0,\tilde\varphi,\tilde y)(\tau_i(t))=\tilde\varphi(\tau_i(\tilde t_0+)),\quad i=\overline{1,s}.$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup\left\{|\tilde f(\tilde t_0,\tilde\varphi,\tilde y)(t)-f_0^+|:t\in[\tilde t_0,t_0]\right\}=0.$$

Следовательно,

$$\int_{\tilde t_0}^{t}\tilde f(\tilde t_0,\tilde\varphi,\tilde y)(t)dt=\varepsilon f_0^+\delta t_0+o(\varepsilon\delta v), \tag{3.2.21}$$

(см. (3.2.11)).

Теперь докажем неравенство (3.2.16). Для этого оценим $a_2(t;\varepsilon\delta v), t\in[t_0,r_2+\delta_2]$. Имеем:

$$a_2(t;\varepsilon\delta v)\leqslant\sum_{i=1}^{s}\int_{t_0}^{t}L_{\tilde f,K_1}(\xi)|h(t_0,\varphi,\tilde y+\Delta y)(\tau_i(\xi))-h(\tilde{t_0},\tilde\varphi,\tilde y)(\tau_i(\xi))|d\xi=$$

$$=\varepsilon\sum_{i\in I_1}\int_{t_0}^{t}L_{\tilde f,K_1}(\xi)\delta\varphi(\tau_i(\xi))d\xi+$$

$$+\sum_{i\in I_2\cup I_3}\int_{\tau_i(t_0)}^{\tau_i(t)}L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(\xi))|h(t_0,\varphi,\tilde y+\Delta y)(\xi)-h(\tilde{t_0},\tilde\varphi,\tilde y)(\xi)|\dot\gamma_i(\xi)d\xi+$$

$$+O(\varepsilon\delta v)+\sum_{i\in I_2\cup I_3}\int_{\tau_i(t_0)}^{t_0}L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(\xi))|h(t_0,\varphi,\tilde y+\Delta y)(\xi)-h(\tilde{t_0},\tilde\varphi,\tilde y)(\xi)|\dot\gamma_i(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{i\in I_2\cup I_3}\int_{t_0}^{t}\chi(J;\gamma_i(\xi))L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(\xi))|\Delta y(\xi)|\dot\gamma_i(\xi)d\xi\leqslant$$

$$\leqslant O(\varepsilon\delta v)+\sum_{i\in I_2\cup I_3}\beta[\tau_i(t_0);t_0]+\int_{t_0}^{t}L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi$$

(см. (3.2.13)). Пусть $I_2\neq\varnothing$ и $i\in I_2$. Тогда

$$\beta[\tau_i(t_0);t_0]=\varepsilon\int_{\tau_i(t_0)}^{\tilde t_0}L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(t))|\delta\varphi(t)|\dot\gamma_i(t)dt+\int_{\tilde t_0}^{t_0}L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(t))|\varphi(t)-\tilde y(t)|\dot\gamma_{i}.(t)dt.$$

При $t\in[\tilde t_0,t_0]$ получим

$$|\varphi(t)-\tilde y(t)|=|\tilde\varphi(t)+\varepsilon\delta\varphi(t)-\tilde\varphi(\tilde t_0)-\int_{\tilde t_0}^{t}\tilde f(\tilde t,\tilde\varphi,\tilde y)(t)dt\leqslant\varepsilon\|\delta\varphi\|+$$

$$+\int_{\tilde t_0}^{t_0}|\dot{\tilde\varphi}(t)|dt+\int_{\tilde t_0}^{t_0}|\tilde f(\tilde t_0,\tilde\varphi,\tilde y)(t)|dt\leqslant O(\varepsilon\delta v),$$

(см. (3.2.21)). Следовательно, при $i\in I_2$

$$\beta[\tau_i(t_0);t_0]\leqslant O(\varepsilon\delta v).$$

Пусть $I_3\neq\varnothing$ и $i\in I_3$, тогда

$$\beta[\tau_i(t_0);t_0]=\int_{\tilde t_0}^{t_0}L_{\tilde f,K_1}(\gamma_i(t))|\varphi(t)-\tilde y(t)|\dot\gamma_i(t)dt=o(\varepsilon\delta v).$$

Таким образом,

$$a_2(t;\varepsilon\delta v) \leqslant O(\varepsilon\delta v) + \int_{t_0}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi. \tag{3.2.22}$$

Из (3.2.19) с учетом (3.2.17), (3.2.22) и равенства $b_2(\varepsilon\delta v) = O(\varepsilon\delta v)$ на отрезке $[t_0, r_2+\delta_2]$ получим

$$|\Delta y(t)| \leqslant O(\varepsilon\delta v) + \int_{t_0}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi.$$

Из этого, согласно лемме Гронуолла, следует (3.2.16). □

Лемма 3.2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.4. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(\varepsilon, \delta v) \in [0, \varepsilon_2] \times \Im_3^-$ *выполнено неравенство* (3.2.3) *и равенство* (3.2.4), *где элемент* δv *всюду заменен элементом* $\delta\eta$.

Доказательство. Пусть числа $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ и $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ настолько малы, что для произвольного $(\varepsilon, \delta v) \in [0, \varepsilon_1] \times \Im_3^-$ выполнены условия (3.2.6) и (2.3.27). Очевидно, для рассматриваемого случая справедливы неравенства (2.3.30) и (2.3.31). После этого, с учетом равенства

$$\Delta y(\tilde{t}_0) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} f(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y, u)(t)dt,$$

доказательство леммы осуществляется аналогично доказательству леммы 3.2.1. □

Лемма 3.2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.5. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, *что для произвольного* $(\varepsilon, \delta v) \in [0, \varepsilon_2] \times \Im_3^+$ *выполнено неравенство* (3.2.16) *и равенство* (3.2.17), *где всюду элемент* δv *заменено элементом* $\delta\eta$.

Доказательство. Пусть числа $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ и $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ настолько малы, что для произвольного $(\varepsilon, \delta v) \in [0, \varepsilon_1] \times \Im_3^+$ выполнены условия (3.2.18) и (2.3.27). Очевидно, для рассматриваемого случая справедливы неравенства (2.3.32) и (2.3.33). После этого, с учетом равенства

$$\Delta y(t_0) = \varphi(t_0) - \tilde{\varphi}(\tilde{t}_0) - \int_{\tilde{t}_0}^{t_0} f(\tilde{t}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{y}, \tilde{u})(t)dt,$$

доказательство леммы осуществляется аналогично доказательству леммы 3.2.2. □

3.3. Доказательство теоремы 3.1.1. Аналогично п. 2.4 можно показать, что для произвольного $(t, \varepsilon, \delta v) \in [\tau, \tilde{t}_1 + \delta_1] \times [0, \varepsilon_1] \times \Im_2^-$ функция $\Delta x(t)$ имеет вид (2.4.1). В силу леммы 3.2.1 и соотношения (3.2.14) получим

$$|\Delta x(t)| \leqslant O(\varepsilon\delta v),\ \forall (t, \varepsilon, \delta v) \in [\tau, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times \Im_2^-, \tag{3.3.1}$$

$$\Delta x(\tilde{t}_0) = \varepsilon[\delta\varphi(\tilde{t}_0-) + (\dot{\varphi}^- - f_0^-)\delta t_0] + o(\varepsilon\delta v). \tag{3.3.2}$$

Функция $\Delta x(t), t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ удовлетворяет уравнению (2.4.4) и на интервале $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ может быть представлена в виде (2.4.7), где

$$h_0(t; \tilde{t}_0, \varepsilon\delta v) = \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(\tilde{t}_0)}^{\tilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi); t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi,$$

$$h_i(t; \tilde{t}_0, \varepsilon\delta v) = \int_{\tilde{t}_0}^{t} Y(\xi; t)R_i(\xi; \varepsilon\delta v)d\xi,\quad i = 1, 2$$

(см. (2.4.5) и (2.4.6)). В силу леммы 2.1.7, функция $Y(\xi; t)$ непрерывна на множестве П. Поэтому

$$Y(\tilde{t}_0; t)\Delta x(\tilde{t}_0) = \varepsilon[\delta\varphi(\tilde{t}_0-) + (\dot{\varphi}^- - f_0^-)\delta t_0] + o(t; \varepsilon\delta v). \tag{3.3.3}$$

Теперь преобразуем $h_0(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta v)$. Имеем:

$$h_0(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta v)=\sum_{i\in I_1\cup I_2}\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}}Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma_i}(\xi)\Delta x(\xi)d\xi=$$
$$=\sum_{i\in I_1\cup I_2}[\varepsilon\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{t_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma_i}(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+$$
$$+\int_{t_0}^{\tilde{t_0}}Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma_i}(\xi)\Delta x(\xi)d\xi]=\sum_{i\in I_1\cup I_2}[\varepsilon\alpha_i(t)+\beta_i(t)],$$

где

$$\alpha_i(t)=\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{t_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma_i}(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi,$$
$$\beta_i(t)=\int_{t_0}^{\tilde{t_0}}Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma_i}(\xi)\Delta x(\xi)d\xi.$$

Легко заметить, что

$$\alpha_i(t)=\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}}Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma_i}(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi-\int_{t_0}^{\tilde{t_0}}Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma_i}(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi,\ \beta_i(t)=o(t;\varepsilon\delta v)$$

(см. (3.3.1)). Следовательно,

$$h_0(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta v)=\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}}Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma_i}(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+o(t;\varepsilon\delta v).\tag{3.3.4}$$

Далее,

$$|h_1(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta\rho)|\leqslant\|Y\|\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t_1}+\delta_2}\Big\{\int_0^1\Big[\sum_{i=1}^{s}|\tilde{f_{x_i}}(t,\tilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\dots,\tilde{x}(\tau_s(t))+$$
$$+\xi x(\tau_s(t)))-\Delta\tilde{f_{x_i}}[t]||\Delta x(\tau_i(t))|\Big]d\xi\Big\}dt\leqslant O(\varepsilon\delta v)\sigma(\varepsilon\delta v),$$

где

$$\sigma(\varepsilon\delta v)=\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t_1}+\delta_2}\Big[\int_0^1\sum_{i=1}^{s}|\tilde{f_{x_i}}(t,\tilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\dots,\tilde{x}(\tau_s(t))+\xi\Delta x(\tau_s(t)))-\tilde{f_{x_i}}[t]|d\xi\Big]dt,$$

В силу теоремы Лебега, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sigma(\varepsilon\delta v)=0$ равномерно по $\delta v\in\Im_2^-$. Таким образом,

$$|h_1(t,\tilde{t_0},\varepsilon\delta v|\leqslant o(\varepsilon\delta v).\tag{3.3.5}$$

Остается оценить $h_2(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta v)$. Имеем:

$$|h_2(t;\tilde{t_0},\varepsilon\delta v)|\leqslant\varepsilon\|Y\|\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t_1}+\delta_2}\Big\{\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j||\delta f_j(t,\tilde{x}(\tau_1(t))+\Delta x(\tau_1(t)),\dots,$$
$$\tilde{x}(\tau_s(t))+\Delta x(\tau_s(t)))-\delta f_j(t,\tilde{x}(\tau_1(t)),\dots,\tilde{x}(\tau_s(t)))|\Big\}dt\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\alpha\|Y\|\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t_1}+\delta_2}\Big[\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{s}L_{\delta f_j,K_1}(t)|\Delta x(\tau_i(t))|\Big]dt=o(\varepsilon\delta v).\tag{3.3.6}$$

Из (2.4.7), принимая во внимание (3.3.3)–(3.3.6), получаем (3.1.5), где $\delta x(t;\delta v)$ имеет вид (3.1.6).

3.4. Доказательство теоремы 3.1.2. Аналогично п. 2.5 на основе леммы 3.2.2 легко установить, что

$$|\Delta x(t)| \leqslant O(\varepsilon\delta v)\ \forall(t,\varepsilon,\delta v) \in [t_0, \tilde{t_1}+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times\Im_2^+, \tag{3.4.1}$$

$$\Delta x(t_0) = \varepsilon[\delta\varphi(\tilde{t_0}+) + \dot{\varphi}^+ - f_0^+)\delta t_0] + o(\varepsilon\delta v). \tag{3.4.2}$$

Пусть $s_0 \in (\tilde{t_0}, \tilde{t_1})$ — фиксированная точка и пусть $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1]$ — настолько малое число, что для произвольного $(\varepsilon\delta\rho) \in [0,\varepsilon_2]\times\Im_2^+$

$$t_0 < s_0;\ \tau_i(t_0) < \tilde{t_0},\ i \in I_1 \cup I_2.$$

Функция $\Delta x(t)$ на отрезке $[t_0, \tilde{t_1}+\delta_2]$ удовлетворяет уравнению (2.4.4) и на интервале $[t_0, \tilde{t_1}+\delta_2]$ может быть представлена в виде (2.5.4). Матричная функция $Y(\xi;t)$ непрерывна на $[\tilde{t_0}, s_0]\times[s_0, \tilde{t_1}+\delta_2] \subset \Pi$, поэтому

$$Y(t_0;t)\Delta x(t_0) = \varepsilon Y(\tilde{t_0};t)[\delta\varphi(\tilde{t_0}+) + (\dot{\varphi}^+ - f_0^+)\delta t_0] + o(t;\varepsilon\delta v). \tag{3.4.3}$$

Теперь преобразуем $h_0(t;t_0,\varepsilon\delta v)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} h_0(t;t_0,\varepsilon\delta v) = \sum_{i\in I_1\cup I_2}[\varepsilon\int_{\tau_i(t_0)}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+ \\ +\int_{\tilde{t_0}}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi]+ \\ +\sum_{i\in I_3}\int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi = \\ = \sum_{i\in I_1\cup I_2}(\varepsilon\alpha_i(t)+\beta_i(t)) + \sum_{i\in I_3}\sigma_i(t), \end{aligned}$$

где

$$\alpha_i(t) = \int_{\tau_i(t_0)}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi,$$

$$\beta_i(t) = \int_{\tilde{t_0}}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi],$$

$$\sigma_i(t) = \int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi.$$

Очевидно, $\beta_i(t) = o(t;\varepsilon\delta v),\ \sigma_i(t) = o(t;\varepsilon\delta v)$. Далее,

$$\begin{aligned} \alpha_i(t) = \int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi - \int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tau_i(t_0)} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi = \\ = \int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi + o(t;\varepsilon\delta v). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$h_0(t;t_0,\varepsilon\delta v) = \varepsilon\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi + o(t;\varepsilon\delta v). \tag{3.4.4}$$

Аналогично доказываются оценки

$$|h_i(t;t_0,\varepsilon\delta v)| \leqslant o(\varepsilon\delta v),\quad i=1,2 \tag{3.4.5}$$

(см. (3.3.5), (3.3.6)).

Наконец, заметим, что при $t \in [s_0, \tilde{t_1}+\delta_2]$

$$\varepsilon\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)\delta f[\xi]d\xi = \varepsilon\int_{\tilde{t_0}}^{t} Y(\xi;t)\delta f[\xi]d\xi + o(t;\varepsilon\delta v). \tag{3.4.6}$$

Из (2.5.4), принимая во внимание (3.4.3)–(3.4.6), получаем (3.1.5), где $\delta x(t;\delta v)$ имеет вид (3.1.7).

3.5. Доказательство теоремы 3.1.4. На основе лемм 1.2.2 и 3.2.3 можно установить соотношения, аналогичные (3.3.1) и (3.3.2), где элемент δv заменен элементом $\delta\eta$, а множество $\Im_2^-$ — множеством $\Im_3^-$. На отрезке $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ функция $\Delta x(t)$ удовлетворяет уравнению (2.6.1) и может быть представлена в виде (2.6.3), где

$$h_0(t;\tilde{t}_0,\varepsilon\delta\eta) = \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(\xi);t)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma_i}(\xi)\Delta x(\xi)d\xi.$$

После этого доказательство теоремы, с незначительными изменениями, осуществляется аналогично доказательству теоремы 3.1.1.

3.6. Доказательство теоремы 3.1.5. На основе лемм 1.2.2 и 3.2.4 можно установить соотношения, аналогичные (3.4.1) и (3.4.2), где элемент δv заменен элементом $\delta\eta$, а множество $\Im_2^+$ — множеством $\Im_3^+$. На отрезке $[t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ функция $\Delta x(t)$ удовлетворяет уравнению (2.6.1) и может быть представлена в виде (2.6.7). После этого доказательство теоремы, с незначительными изменениями, осуществляется аналогично доказательству теоремы 3.1.2.

4. Необходимое условие критичности

В этом параграфе центральный результат аксиоматической теории экстремальных задач — необходимое условие критичности [25,26,117] распространен на отображения, определенные на конечно локально выпуклом множестве. Это вызвано тем, что рассматриваемые нами оптимальные задачи с запаздываниями удобно формулировать как задачи на определение отображений, определенных и критичных на конечно локально выпуклом множестве и на фильтре, соответственно.

4.1. Предварительные сведения. В этом пункте и в дальнейшем, по мере надобности, через $\mathbb{R}_x^n$ будем обозначать пространство $\mathbb{R}^n$ с элементами x. Скалярное произведение векторов

$$\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_s), \quad p = \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^s \end{pmatrix}$$

будем записывать в виде умножения матриц размерностей $1 \times s$ и $s \times 1$:

$$\pi p = (\pi_1, \cdots, \pi_s) \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^s \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{s} \pi_i p^i.$$

Через E_z^m будем обозначать m-мерное векторное пространство, оно будет отождествлено с пространством $\mathbb{R}_z^m$. Поэтому под модулем элемента $z \in E_z^m$ будем понимать евклидов модуль:

$$|z|^z = z^* z = \sum_{i=1}^{m} (z^i)^2.$$

Звездочка сверху будет обозначать транспонирование матрицы.

Конечномерные векторные пространства в дальнейшем всегда будут предполагаться снабженными обычной (евклидовой) топологией.

Пусть E_z — векторное пространство и $z_i \in E_z^m, i = \overline{1,k}$. Множество

$$L = \left\{ z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,k} \right\}$$

называется конечномерным линейным многообразием, порожденным точками $z_1, \ldots, z_k$.

Если $\tilde{z} \in L$, то будем сказать, что многообразие L проходит через точку $\tilde{z}$ пространства E_z и будем обозначать его через $L_{\tilde{z}}$.

В дальнейшем многообразие $L_{\tilde z}$ будем записывать в эквивалентной форме

$$L_{\tilde z} = \left\{ z = \tilde z + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i : \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,k} \right\}. \tag{4.1.1}$$

Для каждого фиксированного числа $\alpha > 0$ множество

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i : |\lambda_i| \leqslant \alpha, i = \overline{1,k} \right\} \tag{4.1.2}$$

в пространстве $L_{\tilde z} - \tilde z$ есть выпуклая и ограниченная окрестность нуля.

Будем говорить, что точки $z_i \in E_z$, $i = \overline{0,s}$, находятся в общем положении, если векторы $z_i - z_0$, $i = \overline{1,s}$, линейно независимы.

Если точки $z_0, \ldots, z_s$ находятся в общем положении, то выпуклая оболочка точек $z_0, \ldots, z_s$, т.е. $\mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\})$ называется *s-мерным симплексом.* Ясно, что s-мерный симплекс является выпуклым и компактным подмножеством линейного конечномерного многообразия, порожденным точками z_i, $i = \overline{0,s}$.

Нетрудно заметить, что

$$\mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}) = z_0 + \mathrm{co}(\{0, z_1 - z_0, \ldots, z_s - z_0\}) = z_0 + \left\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i (z_i - z_0) : \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \leqslant 1 \right\}. \tag{4.1.3}$$

Из соотношения (4.1.3) и определения симплекса непосредственно следуют предложения 4.1.1 и 4.1.2.

Предложение 4.1.1. *Каждый симплекс $\mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}) \in E_z$ имеет непустую внутренность.*

Предложение 4.1.2. *Любая точка z симплекса $\mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\})$ может быть представлена в виде*

$$z = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i z_i,\ \ \lambda_i \geqslant 0,\ \ \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1,$$

и это представление единственно.

Предложение 4.1.3. *Пусть $A \subset E_z^s$ и при этом $0 \in \mathrm{int}\, A$. Тогда в E_z^s существует s-мерный симплекс, который содержится в A и содержит $0 \in E_z^s$ в качестве внутренней точки.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}) \subset E_z^s$ — s-мерный симплекс. В силу предложения 4.1.1 существует $\tilde z \in \mathrm{int}\,\mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\})$ такое, что s-мерный симплекс

$$-\tilde z + \mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}) = \mathrm{co}(\{z_0 - \tilde z, \ldots, z_s - \tilde z\})$$

содержит $0 \in E_z^s$ в качестве внутренней точки. По предположению, существует выпуклая окрестность нуля

$$V = \{z \in E_z^s : |z| < \varepsilon_0\},\ \varepsilon_0 > 0,$$

содержащаяся в A.

Пусть $\varepsilon > 0$ — такое число, что

$$\varepsilon(z_i - \tilde z) \in V,\ i = \overline{0,s}.$$

Следовательно, s-мерный симплекс $\varepsilon\,\mathrm{co}(\{z_0 - \tilde z, \ldots, z_s - \tilde z\})$ содержится в A и содержит $0 \in E_z^s$ в качестве внутренней точки. □

Предложение 4.1.4. *Пусть задано линейное отображение*

$$g : E_z \to E_g^s \tag{4.1.4}$$

и s-мерный симплекс $\mathrm{co}(\{g_0, \ldots, g_s\}) \subset E_g^s$. Пусть, далее, $z_i \in E_z$, $i = \overline{0,s}$ — какие-либо прообразы точек $g_i, i = \overline{0,s}$, соответственно, при отображении (4.1.4). *Тогда $\mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}) \subset E_z$ является s-мерным симплексом и сужение отображения*

$$g : \mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}) \to \mathrm{co}(\{g_0, \ldots, g_s\}) \tag{4.1.5}$$

является гомеоморфизмом.

Доказательство. Пусть существуют числа $\lambda_i,\ i = \overline{1, s}$, такие, что
$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(z_i - z_0) = 0,\ \sum_{i=1}^{s} |\lambda_i| \neq 0.$$
Очевидно,
$$g\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(z_i - z_0)\ \right) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(g_i - g_0) = 0,$$
а это, свою очередь, противоречит линейной независимости элементов $g_i - g_0,\ i = \overline{1, s}$.

Итак, $\mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\})$ является s-мерным симплексом. В силу предложения 4.1.2 отображение (4.1.5) является гомеоморфизмом. $\square$

Пусть в E_z задана отделимая векторная топология, которая превращает E_z в топологическое векторное пространство.

Предложение 4.1.5. *Пусть $W \subset E_z$ и задано отображение*
$$P : W \to E_p^s, \tag{4.1.6}$$
непрерывное в индуцированной из E_z топологии. Пусть, далее, $K \subset W$ — компактное множество. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность нуля $V_\varepsilon \subset E_z$, что
$$|P(z') - P(z'')| \leqslant \varepsilon\ \ \forall (z', z'') \in K \times W, \quad z' - z'' \in V_\varepsilon.$$

Доказательство. Для каждой точки $z' \in K$ существует такая окрестность нуля $V(z') \subset E_z$, что
$$|P(z') - P(z)| \leqslant \varepsilon/3\ \ \forall z \in (z' + V(z')) \cap W.$$
Система множеств $\{z' + V(z') : z' \in K\}$ образует открытое покрытые компакта K. Следовательно, существует конечное подпокрытие $\{z_i' + V(z_i') : i = \overline{1, m}\}$ множества K.

Ясно, что при $z \in (z_i' + V(z_i')) \cap W$ выполнено
$$|P(z_i') - P(z)| \leqslant \varepsilon/3. \tag{4.1.7}$$
В силу непрерывности отображения (4.1.6) для $2/3\varepsilon$ существуют окрестности нуля $V_i \supset V(z_i')$, $i = \overline{1, m}$ такие, что
$$|P(z_i') - P(z)| \leqslant 1/3\varepsilon\ \ \forall z \in (z_i' + V_i) \cap W. \tag{4.1.8}$$
Очевидно, множества
$$\tilde{V}_i = V_i - V(z_i') = V_i + (-1)V(z_i'), \quad V_\varepsilon = \cap_{i=1}^{m} V_i$$
являются окрестностями нуля в E_z и для произвольной точки $z \in (z_i' + V(z_i') + V_i) \cap W$ выполнено неравенство (4.1.8).

Пусть $(z', z'') \in K \times W$, $z' - z'' \in V_\varepsilon$. Точка z' принадлежит какому-либо множеству $z_k' + V(z_k')$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Далее,
$$z'' - z_k' = z'' - z' + z' - z_k' \in V_\varepsilon + V(z_k').$$
Учитывая неравенства (4.1.7) и (4.1.8), получим
$$|P(z') - P(z'')| \leqslant |P(z') - P(z_k')| + |P(z_k') - P(z'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$
$\square$

Множество Φ подмножеств из E_z называется *фильтром,* если оно удовлетворяет следующим условиям:

4.1.1. если $A \in \Phi$ и $B \in \Phi$, то $A \cap B \in \Phi$;

4.1.2. если $A \in \Phi$ и $A \subset B$, то $B \in \Phi$;

4.1.3. $\varnothing \notin \Phi$.

Примером фильтра служит множество всех окрестностей фиксированной точки пространства E_z.

Множество $\Re$ подмножеств из E_z называется базисом фильтра, если оно обладает следующими свойствами:

4.1.4. для любых $A \in \Re$ и $B \in \Re$ существует $C \in \Re$, что $C \subset A \cap B$;

4.1.5. $\varnothing \notin \Re$.

Множество Φ всех подмножеств, каждое из которых содержит какое-нибудь множество из $\Re$, является фильтром, порожденным базисом $\Re$.

Теорема 4.1.1 (Каратеодори). *Пусть $A \subset E_z^s$, тогда любая точка $z \in \mathrm{co}(A)$ может быть представлена в виде*

$$z = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i z_i,$$

где $z_i \in A$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$.

Теорема 4.1.2 (Брауер). *Пусть $\mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}) \subset E_z$ — s-мерный симплекс. Тогда любое непрерывное отображение*

$$g : \mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}) \to \mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}),$$

имеет неподвижную точку, т.е. существует такая точка $z \in \mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\})$, что $g(z) = z$.

Теорема 4.1.3. *Пусть $K \subset E_z^s$ — выпуклое множество и $0 \in \partial K$. Тогда найдется ненулевой s-мерный вектор $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_s)$ такой, что*

$$\pi z = \sum_{i=1}^{s} \pi_i z^i \leqslant 0 \ \ \forall z \in K.$$

О понятиях и об утверждениях, приведенных выше, см. [42, 69].

4.2. Формулировка задачи. Основные определения. Пусть $E_z = E_x^m \times E_\zeta$ — векторное пространство точек $z = (x, \zeta)$. Предположим, что $D \subset E_z$ — некоторое множество и что задано отображение

$$P : D \to E_p^s. \tag{4.2.1}$$

Большая часть следующих определений была введена в [25, 26, 117].

Пусть Φ — произвольный фильтр в E_z.

Определение 4.2.1. Будем говорить, что отображение (4.2.1) *определено на фильтре* Φ, если существует такой элемент $W \in \Phi$, что $W \subset D$.

Определение 4.2.2. Пусть отображение (4.2.1) определено на фильтре Φ. Отображение (4.2.1) будем называть *критичным* на фильтре Φ, если для любой точки $\tilde{z}$, принадлежащей всем элементам фильтра Φ, существует такой элемент $W \subset \Phi$, что $W \subset D$ и $P(\tilde{z}) \in \partial P(W)$.

Наша основная задача будет заключаться в нахождении необходимого условия критичности отображения (4.2.1) на фильтре Φ.

Определение 4.2.3. Будем говорить, что определенное на Φ отображение (4.2.1) *непрерывно* на фильтре Φ, если существует такой элемент $W \in \Phi$, что $W \subset D$ и сужение отображения (4.2.1)

$$P : W \to E_p^s$$

непрерывно в индуцированной из E_z топологии.

Пусть $X \subset E_x^m$ — локально выпуклое топологическое подпространство, т.е. для произвольной окрестности $V_x \subset X$ точки $x \in X$ существует выпуклая окрестность $\tilde{V}_x \subset X$, входящая в V_x. Следующее предложение легко доказывается.

Предложение 4.2.1. *Пусть $\tilde{x} \in X$ — фиксированная точка. Пусть, далее, $V_0 \subset X - \tilde{x}$ — выпуклая и ограниченная окрестность нуля, а $V_1 \subset X - \tilde{x}$ — некоторая окрестность нуля. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое что*

$$\varepsilon V_0 \subset V_1 \ \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Определение 4.2.4. Множество $D \subset X \times E_\varsigma$ называется *конечно локально выпуклым,* если для произвольной точки $z = (x, \varsigma) \in D$ и произвольного многообразия $L_\varsigma \subset E_\varsigma$ существуют выпуклые окрестности $V_x \subset X$ и $V_\varsigma \subset L_\varsigma$, соответственно, точек x и ς, такие что

$$V_x \times V_\varsigma \subset D.$$

Из предложения 4.2.1 и определения 4.2.4 непосредственно следует следующее предложение.

Предложение 4.2.2. *Пусть D — конечно локально выпуклое множество и $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{\varsigma}) \in D$. Пусть, далее, $V_0 \subset X - \tilde{x}$ и $V \subset L_{\tilde{\varsigma}} - \tilde{\varsigma}$ — ограниченные и выпуклые окрестности нуля (см.* (4.1.2)*). Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое что*

$$\tilde{z} + \varepsilon\delta z \in D \ \forall (\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_0] \times V_0 \times V, \ \ \delta z = (\delta x, \delta\varsigma). \tag{4.2.2}$$

Определение 4.2.5. Будем говорить, что отображение (4.2.1) имеет дифференциал в точке $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{\varsigma}) \in D$, если существует линейное отображение

$$dP_{\tilde{z}}: \ \ E_{\delta z} = E_z - \tilde{z} \to E^s_{dp} \tag{4.2.3}$$

такое, что для любого многообразия

$$L_{\tilde{\varsigma}} = \left\{ \tilde{\varsigma} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta\varsigma_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, \, i = \overline{1, k} \right\} \subset E_\varsigma$$

(см. (4.1.1)) имеет место представление

$$P(\tilde{z} + \varepsilon\delta z) - P(\tilde{z}) = \varepsilon\delta P_{\tilde{z}}(\delta z) + o(\varepsilon\delta z) \ \ \forall (\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_0] \times V_0 \times V,$$

где $V_0 \subset X - \tilde{x}$ и $V \subset L_{\tilde{\varsigma}} - \tilde{\varsigma}$ — ограниченные и выпуклые окрестности нуля; $\varepsilon_0 > 0$ — число, для которого выполнено (4.2.2);

$$\lim_{\varepsilon \to 0} o(\varepsilon\delta z)/\varepsilon = 0 \quad \text{равномерно по} \quad \delta z \in V_0 \times V.$$

Отображение (4.2.3) будем называть *дифференциалом в точке* $\tilde{z}$ отображения (4.2.1).

Отметим, что определение дифференциала использует лишь алгебраическую структуру пространства E_z и топологию конечномерных линейных многообразий.

Определение 4.2.6. Фильтр Φ в E_z называется *квазивыпуклым,* если для любого элемента $W \in \Phi$ и любого числа $k \in \mathbb{N}$ существует такой элемент $W_1 = W_1(W, k) \in \Phi$, что для произвольных $k + 1$ точек $z_0, \ldots, z_k$ из W_1 и произвольной окрестности нуля $V \subset E_z$ можно найти непрерывное отображение

$$\varphi : \mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}) \to W, \tag{4.2.4}$$

удовлетворяющее условию

$$(z - \varphi(z)) \in V \ \ \forall z \in \mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}).$$

Очевидно, в определении 4.2.6 можно считать, что $W_1 \subset W$, т.к. любой элемент фильтра $W_2 \subset W \cap W_1$ обладает указанным свойством элемента W_1. Поэтому в дальнейшем всегда будем предполагать, что $W_1 \subset W$.

Фильтр Φ называется *выпуклым,* если существует базис фильтра, состоящий из выпуклых множеств.

Всякий выпуклый фильтр Φ в E_z является квазивыпуклым.

В самом деле, каков бы ни был элемент $W \in \Phi$, найдется выпуклый элемент $W_2 \subset W$, который и можно принять за W_1; в качестве отображения (4.2.4) следует взять тождественное отображение.

Наконец, отметим, что вопросы квазивыпуклости фильтров и дифференцируемости отображений, возникающих в оптимальных задачах с запаздываниями, изучены в §§5 и 6, 7, соответственно.

4.3. Необходимое условие критичности отображения. Пусть $E_z = E_x^m \times E_\varsigma$ — топологическое векторное пространство, $X \subset E_x^m$ — локально выпуклое топологическое подпространство, $D \subset X \times E_\varsigma$ — конечно локально выпуклое множество.

Пусть задано отображение

$$P : D \to E_p^s \tag{4.3.1}$$

и Φ — фильтр в E_z.

Через $\mathrm{co}[\Phi]$ обозначим выпуклый фильтр, элементами которого служат множества $\mathrm{co}(W)$, где W — произвольный элемент фильтра Φ.

Доказательство следующей теоремы, лишь с незначительными изменениями, проводится по схеме, данной в [25, 26, 117].

Теорема 4.3.1. *Пусть отображение* (4.3.1) *непрерывно на* $\mathrm{co}[\Phi]$ *и критично на* Φ. *Пусть, далее, фильтр* Φ *является квазивыпуклым. Тогда для любой точки* $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{\varsigma})$*, принадлежащей всем множествам фильтра* Φ*, в которой отображение* (4.3.1) *имеет дифференциал*

$$dP_{\tilde{z}} : E_{\delta z} \to E_{dp}^s, \tag{4.3.2}$$

существует такой элемент $\tilde{W} \in \Phi$*, что нуль пространства* E_{dp}^s *является граничной точкой множества*

$$dP_{\tilde{z}}(\mathrm{co}(\tilde{W}) - \tilde{z}) \subset E_{dp}^s. \tag{4.3.3}$$

Доказательство. По предположению, существуют такие элементы $W_i \in \Phi$, $i = 1, 2,$ что $\mathrm{co}(W_1) \subset D$, $W_2 \subset D$, и при этом отображение

$$P : \mathrm{co}(W_1) \to E_p^s$$

непрерывно, а $P(\tilde{z}) \in \partial P(W_z)$. Ясно, что

$$W_3 = W_1 \cap W_2 \in \Phi \ \text{ и } \ \mathrm{co}(W_3) \subset D.$$

Поэтому отображение P непрерывно на $\mathrm{co}(W_3)$ и $P(\tilde{z}) \in \partial P(W_3)$.

Пусть предпосылки теоремы выполнены, но для любого $W \in \Phi$, лежащего в D, точка $0 \in E_{dp}^s$ является внутренней для множества

$$dP_{\tilde{z}}(\mathrm{co}(W) - \tilde{z}) \subset E_{dp}^s.$$

Покажем, что это допущение противоречит выбору элемента W_3. А именно, мы докажем разрешимость следующего уравнения относительно z:

$$P(z) = P(\tilde{z}) + p, \quad z \in W_3 \tag{4.3.4}$$

при любом достаточно малом по модулю векторе $p \in E_p^s$ и тем самым будет доказано, вопреки выбору W_3, что $P(\tilde{z})$ — внутренняя точка множества $P(W_3) \subset E_p^s$. Через $W_4 = W_4(W_3; (s+1)^2) \subset W_3$ обозначим элемент квазивыпуклого фильра Φ (см. определение 4.2.6), удовлетворяющий следующему условию: для любой окрестности нуля $V \subset E_z$ и любых $1 + (s+1)^2$ точек $z_0, \ldots, z_{(s+1)^2}$ из W_4 существует непрерывное отображение

$$\varphi : \mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_{(s+1)^2}\}) \to W_3, \tag{4.3.5}$$

удовлетворяющее условию

$$(z - \varphi(z)) \in V \quad \forall z \in \mathrm{co}(\{z_0, \ldots, z_{(s+1)^2}\}). \tag{4.3.6}$$

Согласно сделанному допущению, $0 \in E_{dp}^s$ является внутренней точки выпуклого множества

$$dP_{\tilde{z}}(\mathrm{co}(W_4) - \tilde{z}) \subset E_{dp}^s \tag{4.3.7}$$

Следовательно, существуют $s + 1$ точек $dp_i \in dP_{\tilde{z}}(\mathrm{co}(W_4) - \tilde{z})$, находящихся в общем положении, причем s-мерный симплекс $co(\{dp_0, \ldots, dp_s\})$ содержит $0 \in E_{dp}^s$ в качестве внутренней точки (см. предложение 4.1.3).

В силу линейности отображения (4.3.2),

$$dP_{\tilde{z}}(\mathrm{co}(W_4) - \tilde{z}) = \mathrm{co}(dP_{\tilde{z}}(W_4 - \tilde{z})).$$

Каждая из точек

$$dp_i \in \mathrm{co}(dP_{\tilde z}(W_4 - \tilde z)),\ i = \overline{0,s},$$

представима в виде

$$dp_i = \sum_{j=0}^{s} \mu_{ij} dp_{ij}, dp_{ij} \in dP_{\tilde z}(\,W_4 - \tilde z),\, \mu_{ij} \geqslant 0,\ \sum_{j=0}^{s} \mu_{ij} = 1$$

(см. теорему 4.3.1).

Пусть $\delta z_{ij} \in W_4 - \tilde z$ — какие-либо прообразы точек dp_{ij} при отображении

$$dP_{\tilde z} : W_4 - \tilde z \to E^s_{dp}$$

и пусть

$$\delta z_i = \sum_{j=n}^{s} \mu_{ij} \delta z_{ij},\ \ i = \overline{0,s}. \tag{4.3.8}$$

Очевидно,

$$dP_{\tilde z}(\delta z_i) = dp_i, \quad i = \overline{0,s}.$$

В силу предложения 4.1.4, точки $\delta z_i = (\delta x_i, \delta\varsigma_i)$, $i = \overline{0,s}$, находятся в общем положении и отображение

$$dP_{\tilde z} : \mathrm{co}(\{\delta_0, \ldots, \delta z_s\}) \to \mathrm{co}(\{dp_0, \ldots, dp_s\}), \tag{4.3.9}$$

является гомеоморфизмом.

Пусть $z \in \mathrm{co}(\{\tilde z, \tilde z + \delta z_0, \ldots, \tilde z + \delta z_s\})$. Тогда

$$z = \tilde z + \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \delta z_i = \tilde z + \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{s} \lambda_i \mu_{ij} \delta z_{ij} =$$

$$= \left(1 - \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{s} \lambda_i \mu_{ij}\right)\tilde z + \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{s} \lambda_i \mu_{ij}(\tilde z + \delta z_{ij}),\ \ \lambda_i \geqslant 0,\ \ \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$$

(см. (4.1.2), (4.3.8)).

Следовательно,

$$\mathrm{co}(\{\tilde z, \tilde z + \delta z_0, \ldots, \tilde z + \delta z_s\}) \subset \mathrm{co}(\{\tilde z, \tilde z + \delta z_{00}, \ldots, \tilde z + \delta z_{ss}\}). \tag{4.3.10}$$

Далее, покажем, что при $\varepsilon \in [0,1]$ справедливо включение

$$\tilde z + \varepsilon\,\mathrm{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\}) \subset \mathrm{co}(\{\tilde z, \tilde z + \delta z_0, \ldots, \tilde z + \delta z_s\}). \tag{4.3.11}$$

Действительно, ясно что каждая точка $z \in \tilde z + \varepsilon\,\mathrm{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\})$ представима в виде

$$z = \tilde z + \varepsilon \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \delta z_i = (1-\varepsilon)\tilde z + \varepsilon \sum_{i=0}^{s} \lambda_i (\tilde z + \delta z_i) \in \mathrm{co}(\{\tilde z, \tilde z + \delta z_0, \ldots, \tilde{+}\delta_s\}).$$

Из включений (4.3.10) и (4.3.11) следует

$$\tilde z + \varepsilon\,\mathrm{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\}) \subset \mathrm{co}(\{\tilde z, \tilde z + \delta z_0, \ldots, \tilde z + \delta z_s\}) \subset \mathrm{co}(W_4) \subset \mathrm{co}(W_3) \subset D\ \ \forall \varepsilon \in [0,1]. \tag{4.3.12}$$

Из последнего соотношения, с учетом

$$D - \tilde z \subset (X - \tilde x) \times (E_\varsigma - \tilde\varsigma),$$

непосредственно следует включение

$$\varepsilon\,\mathrm{co}(\{\delta x_0, \ldots, \delta x_s\}) \subset (X - \tilde x),\ \ \varepsilon \in [0,1]. \tag{4.3.13}$$

Пусть $L_{\tilde\varsigma} \subset E_\varsigma$ — многообразие, порожденное точками $\tilde\varsigma, \delta\varsigma_0, \ldots, \delta\varsigma_s$:

$$L_{\tilde\varsigma} = \left\{\tilde\varsigma + \sum_{i=0}^{s+1} \lambda_i \delta\varsigma_i :\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \ i = \overline{0, s+1}\right\},\ \ \delta\varsigma_{s+1} = \tilde\varsigma.$$

Очевидно,

$$\varepsilon\,\mathrm{co}(\{\delta\varsigma_0, \ldots, \delta\varsigma_s\}) \subset L_{\tilde\varsigma} - \tilde\varsigma. \tag{4.3.14}$$

Пусть $V_0 \subset X - \tilde{x}$ и $V \subset L_{\tilde{\varsigma}} - \tilde{\varsigma}$ — выпуклые ограниченные окрестности нуля. Существует число $\varepsilon_1 \in (0,1]$, такое что

$$\varepsilon_1 \operatorname{co}(\{\delta x_0, \ldots, \delta x_s\}) \subset V_0, \quad \varepsilon_1 \operatorname{co}(\{\delta\varsigma_0, \ldots, \delta\varsigma_s\}) \subset V.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_1 \operatorname{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\}) \subset V_0 \times V. \tag{4.3.15}$$

Пусть $w(\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon_1$, $\varepsilon \in (0,1]$. Из предложения 4.2.2 вытекает существование такого числа $\varepsilon_z \in (0,1]$, что

$$\tilde{z} + w(\varepsilon)\delta z \in D \quad \forall(\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_2] \times V_0 \times V.$$

Обозначим через $d > 0$ расстояние от точки $0 \in E^s_{dp}$ до границы симплекса $\operatorname{co}(\{dp_0, \ldots, dp_s\})$.

Из дифференцируемости отображения (4.3.1) в точке $\tilde{z}$ следует существование такого числа $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2]$, что

$$P(\tilde{z} + \omega(\varepsilon)\delta z) = P(\tilde{z}) + \omega(\varepsilon) dP_{\tilde{z}}(\delta z) + o(\omega(\varepsilon)\delta z) \ \ \forall(\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_3] \times V_0 \times V; \tag{4.3.16}$$

при этом

$$|o(\omega(\varepsilon)\delta z)|/\omega(\varepsilon) \leqslant d/3 \quad \forall(\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_3] \times V_0 \times V. \tag{4.3.17}$$

Очевидно, с учетом (4.3.15), соотношения (4.3.16) и (4.3.17) выполнены при $(\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_3] \times \operatorname{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\})$.

Отображение P непрерывно на $\operatorname{co}(W_3)$ в топологии пространства $X \times L_{\tilde{\varsigma}}$. Поэтому $P(\tilde{z} + \omega(\varepsilon)\delta z)$ будет непрерывным по $\delta z \in \operatorname{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\})$ (см. (4.3.12)). Из этого на основе (4.3.16) можно заключить, что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$ функция $o(\omega(\varepsilon)\delta z)$ непрерывна на $\operatorname{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\})$.

Далее, из непрерывности отображения P на $\operatorname{co}(W_3)$ и компактности множества $\tilde{z} + \omega(\varepsilon) \operatorname{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\}) \subset \operatorname{co}(W_3)$ следует, что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$ существует окрестность нуля $V_\epsilon \subset E_z$ такая, что при

$$z' \in \tilde{z} + \omega(\varepsilon) \operatorname{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\}), \quad z'' \subset \operatorname{co}(W_3), \quad z' - z'' \in V_\varepsilon \tag{4.3.18}$$

имеем

$$|P(z') - P(z'')| \leqslant \omega(\varepsilon) d/3 \tag{4.3.19}$$

(см. предложение 4.1.5).

Из условий (4.3.5), (4.3.6) и соотношения (4.3.10) непосредственно следует существование зависящего от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$ семейства непрерывных отображений

$$\varphi_\varepsilon : \operatorname{co}(\{\tilde{z}, \tilde{z} + \delta z_0, \ldots, \tilde{z} + \delta z_s\}) \to W_3,$$

удовлетворяющих условиям

$$z - \varphi_\varepsilon(z) \in V_\varepsilon \ \ \forall z \in \operatorname{co}(\{\tilde{z}, \tilde{z} + \delta z_0, \ldots, \tilde{z} + \delta z_s\}).$$

При $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$ симплекс $\tilde{z} + \omega(\varepsilon) \operatorname{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\})$ содержится в $\operatorname{co}(\{\tilde{z}, \tilde{z} + \delta z_0, \ldots, \tilde{z} + \delta z_s\})$ (см. (4.3.11)) и поэтому

$$z - \varphi_\varepsilon(z) \in V_\varepsilon \ \ \forall z \in \tilde{z} + \omega(\varepsilon) \operatorname{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\}). \tag{4.3.20}$$

Теперь покажем, что уравнение относительно z

$$P(\varphi_\varepsilon(z)) = P(\tilde{z}) + \omega(\varepsilon) p, \quad z \in \tilde{z} + \omega(\varepsilon) \operatorname{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\}) \tag{4.3.21}$$

разрешимо при достаточно малых ε и произвольном $p \in E^s_p$, удовлетворяющем условию

$$|p| \leqslant d/3. \tag{4.3.22}$$

В самом деле, перепишем его в виде

$$P(z) = P(\tilde{z}) + \omega(\varepsilon) p + P(z) - P(\varphi_\varepsilon(z)), \quad z \in \tilde{z} + \omega(\varepsilon) \operatorname{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\}),$$

или, воспользовавшись (4.3.16), в виде уравнения относительно δz:

$$dP_{\tilde{z}}(\delta z) = p - \frac{0(\omega(\varepsilon)\delta z)}{\omega(\varepsilon)} + \frac{P(\tilde{z} + \omega(\varepsilon)\delta z) - P(\varphi_\varepsilon(\tilde{z} + \omega(\varepsilon)\delta z))}{\omega(\varepsilon)}, \quad \delta z \in \operatorname{co}(\{\delta z_0, \ldots, \delta z_s\}). \tag{4.3.23}$$

Из соотношений (4.3.17), (4.3.20) и (4.3.22) вытекает, что

$$\left(p - \frac{o(\omega(\varepsilon)\delta z)}{\omega(\varepsilon)} + \frac{P(\tilde z + \omega(\varepsilon)\delta z) - P(\varphi_\varepsilon(\tilde z + \omega(\varepsilon))\delta z)}{\omega(\varepsilon)}\right) \in \operatorname{co}(\{\delta z_0, \dots, \delta z_s\})$$

и, следовательно, уравнение (4.3.23) эквивалентно уравнению

$$dP_{\tilde z}^{-1}(\delta z) = p - \frac{o(\omega(\varepsilon)\delta z)}{\omega(\varepsilon)} + \frac{P(\tilde z + \omega(\varepsilon)\delta z) - P(\varphi_\varepsilon(\tilde z + \omega(\varepsilon)\delta z))}{\omega(\varepsilon)}, \tag{4.3.24}$$

где

$$dP_{\tilde z}^{-1} : \operatorname{co}(\{dp_0, \dots, dp_s\}) \to \operatorname{co}(\{\delta z_0, \dots, \delta z_s\})$$

— обратное непрерывное отображение к отображению (4.3.9).

Правую часть уравнения (4.3.24) можно рассматривать как непрерывное отображение симплекса $\operatorname{co}(\{\delta z_0, \dots, \delta z_s\})$ в себя и, следовательно, всякая неподвижная точка этого отображения является решением уравнения (4.3.24) (см. теорему 4.1.2). Тем самым доказана разрешимость уравнения (4.3.21) при произвольном p, удовлетворяющем (4.3.22), а значит, разрешимость уравнения (4.3.4) при достаточно малых по модулю p. □

Теорема 4.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.3.1. *Тогда для любой точки, принадлежащей всем множествам из* Φ, *в которой существует дифференциал* (4.3.2), *найдутся такой элемент* $\hat W \in \Phi$ *и такая ненулевая* s*-мерная строка* $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$, *что*

$$\pi dP_{\tilde z}(\delta z) = \sum_{i=1}^{s} \pi_i dP_{\tilde z}^{i}(\delta z) \leqslant 0 \ \ \forall \delta z \in \operatorname{cone}(\operatorname{co}(\tilde W) - \tilde z), \tag{4.3.25}$$

где $\operatorname{cone}(M)$ — *конус, порожденный множеством* M.

Доказательство. Множество (4.3.3), как образ выпуклого множества при линейном отображении, само выпукло. Так как $0 \in E^s_{dp}$ — граничная точка выпуклого множества (4.3.3), по теореме 4.1.3 существует ненулевой s-мерный вектор, для которого

$$\pi dP_{\tilde z}(\delta z) \leqslant 0 \ \ \forall \delta z \in \operatorname{co}(\tilde W) - \tilde z.$$

Отсюда вытекает (4.3.25). □

5. Квазивыпуклые фильтры

В этом параграфе доказана квазивыпуклость фильтров, возникающих в оптимальных задачах с запаздыванием в управлениях. Выявление управляемых систем, обладающих квазивыпуклыми фильтрами, представляет определенный интерес, ибо для таких систем оптимальная задача может быть изучена при помощи необходимого условия критичности. При доказательстве квазивыпуклости фильтра существенную роль играет аппроксимационная лемма Гамкрелидзе, поэтому п. 5.1 целиком посвящается этой проблеме.

5.1. Аппроксимационная лемма Гамкрелидзе. Семейство подынтервалов

$$\sigma = \{I_\beta = [t_\beta, t_{\beta+1}] : \beta = 1, \dots, m\}$$

где

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = b,$$

называется *разбиением* (σ*-разбиением, подразделением*) интервала $J = [a, b]$.

Пусть в $E_f^{(1)} = E^{(1)}(J \times 0, \mathbb{R}^n)$ заданы $s+1$ точек $f_0, \dots, f_s$ и некоторое σ-разбиение интервала J. С помощью этих данных можно однозначным образом сопоставить точке λ s-мерного симплекса

$$\Sigma = \left\{\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_s) : \lambda_i \geqslant 0, \ \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1\right\}$$

подразделение каждого из отрезков I_β на $s+1$ отрезок $I_{\beta_i}(\lambda)$, $i = \overline{0, s}$, определенное условием

$$\operatorname{mes} I_{\beta_i}(\lambda) = \lambda_i \operatorname{mes} I_\beta, i = \overline{0, s}; \tag{5.1.1}$$

если $\lambda_i = 0$, то соответствующий отрезок вырождается в точку.

Элемент $f_\lambda(t,x) \in E_f^{(1)}$ определим как класс эквивалентности функций

$$f_\lambda(t,x) = f_i(t,x), \quad t \in I_{\beta_i}(\lambda), \quad x \in O, \; \beta = \overline{1,m}, \; i = \overline{0,s}. \tag{5.1.2}$$

Здесь под $f_i(t,x)$ функции подразумевается любой представитель из класса эквивалентности $f_i(t,x)$.

Формула (5.1.2) однозначно определяет функции $f_\lambda(t,x)$, за исключением значений t в концах отрезка $I_{\beta_i}(\lambda)$, что, однако, не имеет значения, поскольку нас интересует класс эквивалентности $f_\lambda(t,x)$. Определим отображение

$$\varphi_\sigma : \Sigma \to E_f^{(1)} \tag{5.1.3}$$

формулой

$$\varphi_\sigma = f_\lambda.$$

Заметим, что соотношения (5.1.1) и (5.1.2) обеспечивают справедливость следующей леммы, которая, в свою очередь, играет важную роль во всех исследованиях этого пункта.

Лемма 5.1.1 (аппроксимационная лемма Гамкрелидзе (см. [25, 117])). *Для произвольного σ-разбиения отображение* (5.1.3) *непрерывно, т.е. для произвольной точки $\hat\lambda \in \Sigma$ и произвольной окрестности $V_{K,\,\varepsilon} \in \Re$ существует такое число $\delta > 0$, что*

$$(f_\lambda - f_{\hat\lambda}) \in V_{K,\varepsilon} \; \forall \lambda \in \{\lambda \in \Sigma : |\lambda - \hat\lambda| < \delta\}.$$

Кроме того, для произвольной окрестности $V_{K,\varepsilon} \in \Re$ можно найти такое σ-разбиение, что при $\lambda \in \Sigma$ получим

$$\left(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \right) \in V_{K,\varepsilon},$$

т.е.

$$\left| \int_{t'}^{t''} \left[\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(t,x) - f_\lambda(t,x) \right] dt \right| \leqslant \varepsilon \quad \forall (t', t'', x, \lambda) \in J^2 \times K \times \Sigma.$$

Здесь $\Re$ — базис окрестностей нуля в пространстве $E_f^{(1)}$ (см. (1.1.9)*), где*

$$V_{K,\varepsilon} = \{\delta f \in E_f^{(1)} : H_0(\delta f; K) \leqslant \delta\}.$$

Семейство $\Re$ в $E_f^{(1)}$ определяет локально выпуклую отделимую векторную топологию.

Следующая лемма о гомеоморфизме неоднократно используется в дальнейшем.

Лемма 5.1.2. *Пусть $z_i \in E_z, i = \overline{0,s}$. Существуют подмножество $\Sigma_0 \subset \Sigma$ и функция $\varphi(z), z \in \operatorname{co}\{z_0, \ldots, z_s\}$ такие, что отображение*

$$\varphi : \operatorname{co}(\{z_0, \ldots, z_s\}) \to \Sigma_0 \tag{5.1.4}$$

является гомеоморфизмом.

Доказательство. Пусть $z \in \operatorname{co}(\{z_0, \ldots, z_s\})$ — произвольная точка. Введем множество

$$\Sigma(z) = \left\{ \lambda \in \Sigma : z = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i z_i \right\},$$

которое, как легко видеть, является выпуклым компактом.

Каждой точке $z \in \operatorname{co}(\{z_0, \ldots, z_s\})$ сопоставим единственную точку $\overset{0}{\lambda} = (\overset{0}{\lambda}_0, \ldots, \overset{0}{\lambda}_s)$, определенную следующим образом:

$$\overset{0}{\lambda}_0 = \inf\{\lambda_0 : \lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_s) \in \Sigma(z)\}, \quad \overset{0}{\lambda}_1 = \inf\{\lambda_1 : \lambda = (\overset{0}{\lambda}_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_s) \in \Sigma(z)\},$$
$$\ldots, \quad \overset{0}{\lambda}_s = \inf\{\lambda_s : \lambda = (\overset{0}{\lambda}_0, \ldots, \overset{0}{\lambda}_{s-1}, \lambda_s) \in \Sigma(z)\}.$$

Множество точек $\overset{0}{\lambda} \in \Sigma$, выбранных таким образом, обозначим через Σ_0. Функцию $\varphi(z)$, $z \in \mathrm{co}(\{z_0, \dots, z_s\})$, определим формулой $\varphi(z) = \overset{0}{\lambda}$. Ясно, что отображение (5.1.4) есть биекция и обратное отображение $\varphi^{-1}(\overset{0}{\lambda}) = \sum\limits_{i=0}^{s} \overset{0}{\lambda}_i z_i$ непрерывно.

Остается доказать непрерывность отображения (5.1.4), что, в свою очередь, означает:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = \varphi(z) \tag{5.1.5}$$

при $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, где

$$z_n = \sum_{i=0}^{s} \overset{0}{\lambda}{}_i^{(n)} z_i, \qquad z = \sum_{i=0}^{n} \overset{0}{\lambda}_i z_i, \qquad \varphi(z_n) = \overset{0}{\lambda}{}^{(n)}, \quad \varphi(z) = \overset{0}{\lambda}.$$

Пусть $\tilde{\lambda} \neq \overset{0}{\lambda}$ — любая фиксированная точка, для которой существует подпоследовательность последовательности $\{\overset{0}{\lambda}{}^{(n)}\}$, сходящаяся к $\tilde{\lambda}$. Для простоты, эту подпоследовательность обозначим опять через $\{\overset{0}{\lambda}{}^{(n)}\}$.

Если $\tilde{\lambda}_0 = 0$, то правило определения точки $\overset{0}{\lambda}$, с учетом $\tilde{\lambda} \in \Sigma(z)$, дает $\tilde{\lambda}_0 = \overset{0}{\lambda}_0$. Поэтому с самого начала, не нарушая общности, будем считать, что $0 \leqslant \overset{0}{\lambda}_0 < \tilde{\lambda}_0$. Очевидно, для произвольного $\alpha \in [0,1]$ точка $\alpha\tilde{\lambda} + (1-\alpha)\overset{0}{\lambda}$ принадлежит $\Sigma(z)$. Пусть $\bar{\alpha}$ — некоторая фиксированная точка из $(0,1)$ и $\bar{\lambda} = \bar{\alpha}\tilde{\lambda} + (1-\bar{\alpha})\overset{0}{\lambda}$. Ясно, что $\bar{\lambda}_0 \in (0, \tilde{\lambda})$ и

$$z_n = z_n + z - z = \sum_{i=0}^{s} (\overset{0}{\lambda}{}_i^{(n)} + \bar{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_i) z_i.$$

При достаточно большом n выполнены неравенства

$$\overset{0}{\lambda}{}_i^{(n)} + \bar{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_i \geqslant 0, \quad i = \overline{0,s},$$

так как если $\bar{\lambda}_i = 0$, $i = \overline{2,s}$ то $\tilde{\lambda}_i = 0$, $i = \overline{2,s}$.

Следовательно,

$$\overset{0}{\lambda}{}^{(n)} + \bar{\lambda} - \tilde{\lambda} \in \Sigma(z).$$

Кроме того,

$$\overset{0}{\lambda}{}_0^{(n)} + \bar{\lambda}_0 - \tilde{\lambda}_0 < \overset{0}{\lambda}{}_0^{(n)},$$

что, как легко видеть, для достаточно большого n противоречит выбору числа $\overset{0}{\lambda}{}_0^{(n)}$. Таким образом, $\overset{0}{\lambda}_0 = \tilde{\lambda}_0$. Продолжая этот процесс, можно доказать равенство $\tilde{\lambda} = \overset{0}{\lambda}$. Следовательно, пределом любой сходящейся подпоследовательности является $\overset{0}{\lambda}$. Итак, последовательность $\{\overset{0}{\lambda}{}_i^{(n)}\}$ сходится к $\overset{0}{\lambda}$, т.е. выполнено (5.1.5). В заключение отметим, что если $\mathrm{co}(\{z_0, \dots, z_s\})$ — s-мерный симплекс, то $\Sigma_0 = \Sigma$. □

Рассмотрим теперь множество функций $f : J \times O \times G \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям: для почти всех $t \in J$ функция $f : O \times G \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по $x \in O$; при каждом $(x,u) \in O \times G$ функция $f(t,x,u)$ и матрица $f_x(t,x,u)$ измеримы на J; для любой рассматриваемой функции $f(t,x,u)$ и любых компактов $K \subset O$, $M \subset G$ существует функция $m_{f,K,M} \in L(J, \mathbb{R}_+)$ такая, что при любом $(x,u) \in K \times M$ и почти для всех $t \in J$

$$|f(t,x,u)| + |f_x(t,x,u)| \leqslant m_{f,K,M}(t).$$

Классы эквивалентных между собой функций образуют векторное пространство, которое обозначим через $E_f^{(2)} = E^{(2)}(J \times O \times G, \mathbb{R}^n)$; мы будем называть эти классы также функциями и обозначим через $f(t,x,u)$.

Пусть $f(t,x,u) \in E_f^{(2)}$. Введем множество

$$\mathcal{F} = \{f(t,x) = f(t,x,u(t)) : u \in \Omega(J,U)\}$$

Легко заметить, что множество $\mathcal{F}$ можно отождествить с подмножеством пространства $E^{(1)}(J \times 0, \mathbb{R}^n)$ (см. теорему 1.3.1). Следующая лемма является непосредственным следствием леммы 5.1.1 и играет важную роль при доказательстве квазивыпуклости фильтров, возникающих в теории оптимального управления.

Лемма 5.1.3. *Пусть*

$$f_i(t,x) = f(t,x,u_i(t) \in \mathcal{F}\,, \quad i = \overline{0,s}.$$

Тогда для произвольной окрестности $V_{K,\varepsilon} \in \Re$ *существует непрерывное отображение*

$$\varphi_0 : \operatorname{co}(\{f_0,\dots,f_s\}) \to \mathcal{F}, \tag{5.1.6}$$

удовлетворяющее условию

$$(z - \varphi_0(z)) \in V_{K,\varepsilon} \ \ \forall z \in \operatorname{co}(\{f_0,\dots,f_s\}). \tag{5.1.7}$$

Доказательство. Интервал J разобьем приведенным выше способом (см. (5.1.1)) на отрезки $I_{\beta_i}(\lambda)$, $\beta = \overline{1,m}$, $i = \overline{0,s}$, $\lambda \in \Sigma$.

Определим отображение

$$\varphi_\sigma : \Sigma \to \mathcal{F} \tag{5.1.8}$$

формулой

$$\varphi_\sigma(\lambda) = f_\lambda(t,x) = f(t,x,u_\lambda(t)),$$

где

$$u_\lambda(t) = u_i(t), \ \ t \in I_{\beta_i}(\lambda).$$

Очевидно,

$$f_\lambda(t,x) = f_i(t,x), \ \ t \in I_{\beta_i}(\lambda). \tag{5.1.9}$$

Условие (5.1.9) позволяет использовать (5.1.1), в силу чего отображение (5.1.8) непрерывно. Кроме того, существует такое σ-разбиение, что

$$\left(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda\right) \in V_{K,\varepsilon} \ \ \forall \lambda \in \Sigma. \tag{5.1.10}$$

Определим непрерывное отображение (5.1.6) формулой $\varphi_0 = \varphi_\sigma \circ \varphi$:

$$z = \sum_{i=0}^{s} \overset{0}{\lambda}_i f_i \xrightarrow{\varphi} \overset{0}{\lambda} = (\overset{0}{\lambda}_0,\dots,\overset{0}{\lambda}_s) \xrightarrow{\varphi_\sigma} f_{\overset{0}{\lambda}} \in \mathcal{F}, \ \ \overset{0}{\lambda} \in \Sigma_0 \subset \Sigma$$

(см. лемму 5.1.2). Из (5.1.10) следует (5.1.7). □

Определение 5.1.1. Будем говорить, что функции $\theta_i(t), i = \overline{1,\nu}$ (запаздывания) удовлетворяют условию *соизмеримости,* если существует абсолютно непрерывная функция $\theta(t), t \in \mathbb{R}$, такая что $\theta(t) < t, \dot{\theta}(t) > 0$ и $\theta_i(t) = \theta^{k_i}(t)$, $i = \overline{1,\nu}$, где $k_\nu > \dots > k_1 \geqslant 0$ — целые числа, $\theta^i(t) = \theta(\theta^{i-1}(t))$, $\theta^0(t) = t$.

Обобщение леммы 5.1.3 на класс функций, содержащих запаздывания в управлениях, позволило бы изучить единым методом оптимальные задачи с запаздываниями в управлениях. Следует однако отметить, что такое обобщение в общем случае сопряжено с большими трудностями. Так обстоит дело, в частности, когда в управлениях присутствуют несоизмеримые запаздывания.

Теперь мы укажем на трудность, которая возникает при обобщении леммы 5.1.3. Пусть $\theta_i(t) = t - \theta_i$, $i = \overline{1,\nu}$, $\theta_\nu > \dots > \theta_1 \geqslant 0$ — произвольные числа.

Рассмотрим функции

$$f_i(t,x) = f(t,x,u_i(\theta_1(t)),\dots,u_i(\theta_\nu(t))), \ \ i = \overline{0,s},$$

где

$$u_i \in \Omega([\theta,b],U), \quad \theta = \theta_\nu(a), \quad f \in E(J \times 0 \times G^\nu, \mathbb{R}^n).$$

Отрезок $[\theta, b]$ разобьем приведенным выше способом (см. (5.1.1)) и определим отображение

$$\lambda \to f_\lambda(t,x) = f(t,x,u_\lambda(\theta_1(t)),\ldots,u_\lambda(\theta_\nu(t))),\ \ \lambda\in\Sigma,$$

где

$$u_\lambda(t) = u_i(t), t\in I_{\beta_i}(\lambda),\ \ i=\overline{0,s},\ \ \beta=\overline{1,m}.$$

Нетрудно заметить, что, вообще говоря

$$f_\lambda \neq f_i, \quad t\in I_{\beta_i}(\lambda)\cap J.$$

Это обстоятельство не позволяет использовать лемму 5.1.1 и, следовательно, доказывать аналог леммы 5.1.3. Пусть $\theta_i = k_i h$, $k_\nu \geqslant \cdots \geqslant k_1 \geqslant 0$ — целые числа, $h>0$ — произвольное число. Тогда запаздывания $\theta i(t)$, $i=\overline{1,\nu}$ удовлетворяют условию соизмеримости: существует $\theta(t) = t-h$ такое, что $\theta i(t) = \theta_i^k(t)$.

В этом случае разбиение отрезка $[\theta, h]$ осуществляется следующим образом. Пусть $\gamma>0$ — наименьшее число, удовлетворяющее условию $b+\gamma-\theta = lh$, где l — натуральное число. Пусть $I^{(\alpha)}, \alpha = \overline{1,l}$ — система пристроенных друг к другу отрезков длины h таких, что левый конец отрезка $I^{(1)}$ совпадает с точкой θ, правый конец совпадает с левым концом последующего отрезка $I^{(2)}$, и т.д., правый конец $I^{(l)}$ совпадает с точкой $b+\gamma$.

Каждый отрезок $I^{(\alpha)}$ разобьем некоторым единым для всех отрезков способом на частичные отрезки $I_\beta^{(\alpha)}$, $\beta=\overline{1,m}$ так, чтобы правый конец одного из частичных отрезков $I_\beta^{(l)}$ совпал с точкой b. Поставим в соответствие произвольной точке $\lambda\in\Sigma$ единое для всех отрезков $I_\beta^{(\alpha)}$ подразделение на частичные отрезки $I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda)$, определенное условием (5.1.1). Легко заметить, что в этом случае

$$f_\lambda = f_i, \quad t\in I_{\alpha_i}^{(\beta)}(\lambda)\cap J,$$

а это, в свою очередь, гарантирует справедливость леммы 5.1.1 и, следовательно, позволяет обобщить лемму 5.1.3 на рассматриваемый случай.

Ниже, для широкого класса функций f и запаздываний в управлениях дано обобщение леммы 5.1.3.

Лемма 5.1.4. *Пусть $f(t,x,u_1,\ldots,u_\nu)\in E(J\times 0\times G^\nu,\mathbb{R}^n)$, функции $\theta_i(t)$, $i=\overline{1,\nu}$, удовлетворяют условию соизмеримости. Тогда для произвольных точек*

$$f_i(t,x) = f(t,x,u_i(\theta_1(t)),\ldots,u_i(\theta_\nu(t))),\ i=\overline{0,s},$$

из множества

$$F_1 = \{f(t,x) = f(t,x,u(\theta_1(t)),\ldots,u(\theta_\nu(t))) : u\in\Omega([\theta,b],U)\}\subset E(J\times 0,\mathbb{R}^n),\ \theta=\theta_\nu(a),$$

(*см. теорему* 1.3.1) *и произвольной окрестности $V_{K,\varepsilon}\in\Re$ существует непрерывное отображение*

$$\varphi_1 : \mathrm{co}(\{f_0,\ldots,f_s\}) \to F_1, \tag{5.1.11}$$

удовлетворяющее условию

$$(z-\varphi_1(z))\in V_{K,\varepsilon}\ \ \forall z\in\mathrm{co}(\{f_0,\ldots,f_s\}). \tag{5.1.12}$$

Доказательство. Пусть $I^{(\alpha)} = [t_\alpha, t_{\alpha+1}]$, $\alpha=-k_\nu,\ldots,0,\ldots,l$ — система отрезков, определенных следующим образом: $t_0 = a$, $t_{-\alpha} = \theta^\alpha(t_0)$, $\alpha=\overline{1,k_\nu}$, $t_1 = \rho^\alpha(t_0)$, $\alpha=\overline{1,l}$, $t_{l+1}=b$, где $\rho(t) = \theta^{-1}(t)$ (см. определение 5.1.1).

Пусть $\sigma_1 = \{I_\beta^{(0)} : \beta=\overline{1,m}\}$ — такое разбиение отрезка $I^{(0)}$, чтобы точка $\theta^l(b)$ совпала с концом какого-либо из частичных отрезков. Поставим в соответствие произвольной точке $\lambda\in\Sigma$ подразделение каждого из отрезков $I_\beta^{(0)}$ на отрезки $I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda)$, $i=\overline{0,s}$ (см. (5.1.1)).

С помощью разбиения отрезка $I^{(0)}$ построим разбиение остальных отрезков $I^{(\alpha)}$ на отрезки $I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda)$:

$$I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) = \{\theta^{-\alpha}(t) : t\in I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda)\},\ \ \alpha=\overline{-1,-k_\nu},$$

$$I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) = \{\rho^{\alpha}(t) : t\in I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda)\},\ \ \alpha=\overline{1,l}.$$

Определим отображение
$$\varphi_{\sigma_1} : \Sigma \to F_1 \tag{5.1.13}$$
формулой
$$\varphi_{\sigma_1}(\lambda) = f_\lambda(t,x) = f(t,x,u_\lambda(\theta_1(t)),\dots,u_\lambda(\theta_\nu(t)) \in F_1,$$
где
$$u_\lambda(t) = u_i(t), \quad t \in I^{(\alpha)}_{\beta_i}(\lambda) \cap [\theta_0, b], \quad \alpha = \overline{-k_\nu, l}, \quad i = \overline{0,s}, \quad \beta = \overline{1,m}.$$
Из специфики разбиения нетрудно заметить, что
$$f_\lambda = f_i, \quad t \in I^{(\alpha)}_{\beta_i}(\lambda) \cap J. \tag{5.1.14}$$
Для произвольных $(t', t'', x, \lambda) \in J^2 \times K \times \Sigma$ оценим интеграл
$$A(t',t'',x,\lambda) = |\int\limits_{t'}^{t''} \Big[\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(t,x) - f_\lambda(t,x)\Big] dt| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\alpha=0}^{l} \max_{s',s'' \in I^{(\alpha)}} \Big| \int_{s'}^{s''} \chi(J;t) \Big[\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(t,x) - f_\lambda(t,x)\Big] dt \Big| = \sum_{\alpha=0}^{l} A_\alpha(t,\lambda),$$
где
$$A_\alpha(t,\lambda) = \max_{s',s'' \in I^{(\alpha)}} \Big| \int_{s'}^{s''} \chi(J;t) \Big[\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(t,x) - f_\lambda(t,x)\Big] dt \Big|$$
После замены переменной получим:
$$A_\alpha(t,\lambda) = \max_{s',s'' \in I^{(\alpha)}} \Big| \int_{\theta^\alpha(s')}^{\theta^\alpha(s'')} \Big[\sum_{i=0}^{s} \lambda_i F^\alpha_i(t,x) - F^\alpha_\lambda(t,x)\Big] dt \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{s',s'' \in I^{(0)}} \Big| \int_{s'}^{s''} \Big[\sum_{i=0}^{s} \lambda_i F^\alpha_i(t,x) - F^\alpha_\lambda(t,x)\Big] dt \Big|,$$
где
$$F^\alpha_i(t,x) = \chi(J;\rho^\alpha(t)) f_i(\rho^\alpha(t),x)\dot\rho^\alpha(t),$$
$$F^\alpha_\lambda(t,x) = \chi(J;\rho^\alpha(t)) f_\lambda(s^\alpha(t),x), \quad \alpha = \overline{0,l}, t \in I^{(0)}.$$
Из равенства (5.1.14) вытекает, что
$$F^\alpha_\lambda(t,x) = F^\alpha_i(t,x), \quad t \in I^{(0)}_{\beta_i}(\lambda). \tag{5.1.15}$$
Условие (5.1.15) позволяет использовать лемму 5.1.1, в силу которой отображение (5.1.13) непрерывно. Кроме того, существует такое σ_1-разбиение, что для произвольных $t', t'' \in I^{(\alpha)}$, $(x,\lambda) \in K \times \Sigma$ выполнены неравенства
$$A_\alpha(x,\lambda) \leqslant \varepsilon(1+l), \quad \alpha = 0,\dots,l.$$
Следовательно, для произвольных $(t',t'',x,\lambda) \in J^2 \times K \times \Sigma$ имеем
$$A(t',t'',x,\lambda) \leqslant \varepsilon. \tag{5.1.16}$$
Определим непрерывное отображение (5.1.1) формулой $\varphi_1 = \varphi_{\sigma_1} \circ \varphi$ (см. лемму 5.1.2). Из (5.1.16) следует (5.1.12). $\square$

Лемма 5.1.5. *Пусть*
$$f(t,x,u_1,\dots,u_{\nu+p}) = g_0(t,x,u_1,\dots,u_\nu) + \sum_{j=1}^{p} g_j(t,x,u_{\nu+j}),$$
$$g_0 \in E^{(2)}(J \times 0 \times G^\nu, \mathbb{R}^n), \ g_j \in E^{(2)}(J \times 0 \times G, \mathbb{R}^n);$$

функции $\theta_i(t), i = \overline{1,\nu}, t \in \mathbb{R}$, *удовлетворяют условию соизмеримости; функции* $\omega_i(t)$, $i = \overline{1,p}$, $t \in \mathbb{R}$, *абсолютно непрерывны и* $\omega_i(t) \leqslant t$, $\dot{\omega}_i(t) > 0$. *Тогда для произвольных точек*

$$f_i(t,x) = g_0(t,x,u(\theta_1(t)),\dots,u(\theta_\nu(t))) + \sum_{j=1}^{p} g_j(t,x,u(\omega_j(t))) =$$
$$= g_{0i}(t,x) + \sum_{j=1}^{p} g_{ji}(t,x), \quad i = \overline{0,s},$$

из множества

$$\mathcal{F}_2 = \{f(t,x) = f(t,x,u(\theta_1(t)),\dots,u(\theta_\nu(t)),u(\omega_1(t)),\dots,u(\omega_p(t))) : u \in \Omega([\theta,b],U)\},$$
$$\theta = \min(\theta_\nu(a),\omega_1(a),\dots,\omega_p(a)),$$

и произвольной окрестности $V_{K,\varepsilon} \in \Re$ *существует непрерывное отображение*

$$\varphi_2 : \mathrm{co}(\{f_0,\dots,f_s\}) \to \mathcal{F}_2, \tag{5.1.17}$$

удовлетворяющее условию

$$(z - \varphi_2(z)) \in V_{K,\varepsilon} \ \ \forall z \in (\{f_0,\dots,f_s\}). \tag{5.1.18}$$

Доказательство. Пусть $I^{(\alpha)} = [t_\alpha, t_{\alpha+1}]$, $\alpha = -k,\dots,0,\dots,l$ — система отрезков, определенных следующим образом: $t_0 = a$, $t_{-\alpha} = \theta^\alpha(t_0)$, $\alpha = 1,\dots,k, t_\alpha = \rho^\alpha(t_0)$, $\alpha = \overline{1,l+1}$, $\rho(t) = \theta^{-1}(t)$ (см. определение 5.1.1); целые числа $k \geqslant 0, l \geqslant 0$ выбраны так, что $\theta \in I^{(-k)}, b \in I^{(l)}$.

Будем предполагать, что

$$\omega_j(b) \leqslant a, \ \ j = \overline{1,\mu}, \ \omega_j(b) > a, \ \ j = \overline{\mu+1,p}.$$

Не исключается случай, когда выполнена лишь первая или вторая группа неравенств; в таком случае, соответственно, будем считать, что $\mu = p$ или $\mu = 0$.

Для каждого $\omega_j(t)$, $j = \overline{1,p}$, существует число $p_j \in \{1,\dots,k\}$ такое, что $\omega_j(a) \in I^{(-p_j)}$, $j = \overline{1,p}$.

Нетрудно заметить, что при $j \in \{1,\dots,\mu\}$ существует такой индекс $q_j \in \{0,\dots,p_j\}$, что $\omega_j(b) \in I^{(-q_j)}$; при $j \in \{\mu+1,\dots,p\}$ существует такой индекс $n_j \in \{0,\dots,l\}$, что $\omega_j(b) \in I^{(n_j)}$.

Следующие включения очевидны:

$$\begin{cases} I_j = [\omega_j(a),\omega_j(b)] \subset I_{1j} = [\theta^{p_j}(a),\theta^{q_j-1}(a)],\ j = 1,\dots,\mu, \\ I_j \subset I_{2j} = [\theta^{p_j}(a), s^{\pi_j+1}(a)],\ j = \overline{\mu+1,p}. \end{cases} \tag{5.1.19}$$

Наконец, заметим, что точки

$$\xi_j = \rho^{p_j+1}(\omega_j(a)), j = \overline{1,p}; \ \ \xi_{p+j} = \rho^{q_j}(\omega_j(b)), \ \ j = \overline{1,\mu};$$
$$\xi_{p+\mu+j} = \theta^{n_j}(\omega_j(b)), j = \overline{\mu+1,p}; \ \ \xi_{2p+\mu+1} = \rho^k(\theta), \ \ \xi_{2p+\mu+2} = \theta^l(b)$$

принадлежат отрезку $I^{(0)}$.

Пусть $\sigma_2 = \{I_\beta^{(0)} : \beta = 1,\dots,m\}$ — такое разбиение отрезка $I^{(0)}$, что точки $\xi_i, i = \overline{1,2p+\mu+2}$ совпадают с концом какого-либо из частичных отрезков $I_\beta^{(0)} : \beta = \overline{1,m}$. Затем произвольной точке $\lambda \in \Sigma$ поставим в соответствие разбиение каждого из отрезков $I_\beta^{(0)}$ на отрезки $I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda)$, $i = \overline{0,s}$ (см. (5.1.1)).

С помощью разбиения отрезка $I^{(0)}$ построим разбиение остальных отрезков $I^{(\alpha)}$ на отрезки $I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda)$:

$$I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) = \{\theta^{-\alpha}(t) : t \in I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda)\}, \ \alpha = \overline{-1,-k};$$
$$I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) = \{\rho^\alpha(t) : I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda)\}, \ \alpha = \overline{1,l}.$$

Определим отображение

$$\varphi_{\sigma_2} : \Sigma \to \mathcal{F}_2 \tag{5.1.20}$$

формулой

$$\varphi_{\sigma_2}(\lambda) = f_\lambda(t,x) = f(t,x,u_\lambda(\theta_1(t)),\dots,u_\lambda(\theta_\nu(t)),u_\lambda(\omega_1(t)),\dots,u_\lambda(\omega_p(t))) \in F_2,$$

где

$$u_\lambda(t) = u_i(t),\ t \in I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) \cap [\theta_0, b],\ \ \alpha = -k,\dots,l,\ i = \overline{0,s},\ \ \beta = \overline{1,m}.$$

Для произвольных $(t', t'', x, \lambda) \in J^2 \times K \times \Sigma$, используя вид функции f, оценим интеграл

$$\left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i f_i(t,x) - f_\lambda(t,x)\right]dt\right| \leqslant \left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{0i}(t,x) - g_{0\lambda}(t,x)\right]dt\right| +$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{ji}(t,x) - g_{j\lambda}(t,x)\right]dt\right| = A(t',t'',x,\lambda) + \sum_{j=1}^{p} B_j(t',t'',x,\lambda), \tag{5.1.21}$$

где

$$A(t',t'',x,\lambda) = \left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{0i}(t,x) - g_{0\lambda}(t,x)\right]dt\right|,$$

$$B_j(t',t'',x,\lambda) = \left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{ji}(t,x) - g_{j\lambda}(t,x)\right]dt\right|.$$

Очевидно, что

$$A(t',t'',x,\lambda) \leqslant \sum_{\alpha=0}^{l}\max_{s',s''\in I^{(\alpha)}}\left|\int_{s'}^{s''} a(t,x,\lambda)dt\right|,$$

где

$$a(t,x,\lambda) = \chi(a,b;t)\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{0i}(t,x) - g_{0\lambda}(t,x)\right]. \tag{5.1.22}$$

После замены переменной получим

$$A(t',t'',x,\lambda) \leqslant \sum_{\alpha=0}^{l}\max_{s',s''\in I^{(\alpha)}}\left|\int_{\theta^\alpha(s')}^{\theta^\alpha(s'')} a(\rho^\alpha(t),x,\lambda)\dot\rho^\alpha(t)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha=0}^{l}\max_{s',s''\in I^{(\alpha)}}\left|\int_{s'}^{s''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i F_i^\alpha(t,x) - F_\lambda^\alpha(t,x)\right]dt\right|,$$

где

$$F_i^\alpha(t,x) = \chi(J;\rho^\alpha(t))g_{0i}(\rho^\alpha(t),x)\dot\rho^\alpha(t),$$

$$F_\lambda^\alpha(t,x) = \chi(J;\rho^\alpha(t))g_{0\lambda}(\rho^\alpha(t),x)\dot\rho^\alpha(t),\ t \in I^{(0)}.$$

Специфика разбиения дает

$$F_\lambda^\alpha(t,x) = F_i^\alpha(t,x),\ t \in I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda),\ \ \beta = \overline{1,m},\ \ i = \overline{0,s}. \tag{5.1.23}$$

Теперь оценим выражение

$$B(t',t'',x,\lambda) = \left|\int_{\omega_j(t')}^{\omega_j(t'')}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{ji}(\rho_j(t),x) - g_{j\lambda}(\rho_j(t),x)\right]\dot\rho_j(t)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{s',s''\in I_j}\left|\int_{s'}^{s''} b_j(t,x,\lambda)dt\right| = B_j(x,\lambda),$$

где

$$b_j(t,x,\lambda) = \chi(I_j;t)\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{ji}(\rho_j(t),x) - g_{j\lambda}(\rho_j(t),x)\right]\dot\rho_j(t), \tag{5.1.24}$$

$\rho_j(t) = \omega_j^{-1}(t)$ (см. (5.1.19)).

При $j \in \{1, \ldots, \mu\}$ имеем

$$B_j(x,\lambda) \leqslant \max_{s',s'' \in I_{1j}} \left| \int\limits_{s'}^{s''} b_j(t,x,\lambda)dt \right| \leqslant \sum_{\alpha=I_j}^{p_j} \max_{s',s'' \in I^{(-\alpha)}} \left| \int_{s'}^{s''} b_j(t,x,\lambda)dt \right| =$$

$$= \sum_{\alpha=q_j}^{p_j} \max_{s',s'' \in I^{(-\alpha)}} \left| \int_{s^\alpha(s')}^{s^\alpha(s'')} b_j(\theta^\alpha(t),x,\lambda)\dot\theta^\alpha(t)dt \right| =$$

$$= \sum_{\alpha=q_j}^{p_j} \max_{s',s'' \in I^{(0)}} \left| \int_{s'}^{s''} \left[\sum_{i=0}^{s} \lambda_i c_{ji}^\alpha(t,x) - c_{j\lambda}^\alpha(t,x) \right] dt \right|,$$

где

$$c_{ji}^\alpha(t,x) = \chi(I_j;\theta^\alpha(t))\dot\rho_j(\theta^\alpha(t))\dot\theta^\alpha(t) g_{ji}(\rho_j(\theta^\alpha(t)),x),$$
$$c_{\lambda j}^\alpha(t,x) = \chi(I_j;\theta^\alpha(t))\dot\rho_j(\theta^\alpha(t))\dot\theta^\alpha(t) g_{j\lambda}(\rho_j(\theta^\alpha(t)),x)$$

(см. (5.1.24)).

Из специфики разбиения следуют равенства

$$c_{j\lambda}^\alpha(t,x) = c_{ji}^\alpha(t,x), \;\; t \in I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda), \;\; j = \overline{1,\mu}, \;\; i = \overline{0,s}, \;\; \beta = \overline{1,m}. \qquad (5.1.25)$$

При $j \in \{\mu+1, \ldots, p\}$ с учетом (5.1.19) имеем

$$B_j(x,\lambda) \leqslant \max_{s',s'' \in I_{2j}} \left| \int_{s'}^{s''} b_j(t,x,\lambda)dt \right| \leqslant \max_{s',s'' \in [\theta^{p_j}(a),a]} \left| \int_{s'}^{s''} b_j(t,x,\lambda)dt \right| +$$

$$+ \max_{s',s'' \in [a,\rho^{n_j}(a),a]} \left| \int_{s'}^{s''} b_j(t,x,\lambda)dt \right| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{p_j} \max_{s',s'' \in I^{(-\alpha)}} \left| \int_{s'}^{s''} b_j(t,x,\lambda)dt \right| +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{p_j} \max_{s',s'' \in I^{(\alpha)}} \left| \int_{s'}^{s''} b_j(t,x,\lambda)dt \right| = \sum_{\alpha=1}^{p_j} \max_{s',s'' \in I^{(-\alpha)}} \left| \int_{\rho^\alpha(s')}^{\rho^\alpha(s'')} b_j(\theta^\alpha(t),x,\lambda)\dot\theta^\alpha(t)dt \right| +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n_j} \max_{s',s'' \in I^{(\alpha)}} \left| \int_{\theta^\alpha(s')}^{\theta^\alpha(s'')} b_j(\rho^\alpha(t),x,\lambda)\dot\rho^\alpha(t)dt \right| = \sum_{\alpha=1}^{p_j} \max_{s',s'' \in I^{(0)}} \left| \int_{s'}^{s''} \left[\sum_{i=0}^{s} \lambda_i d_{ji}^\alpha(t,x) - d_{j\lambda}^\alpha(t,x) \right] dt \right| +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{n_j} \max_{s',s'' \in I^{(0)}} \left| \int_{s'}^{s''} \left[\sum_{i=0}^{s} \lambda_i e_{ji}^\alpha(t,x) - e_{j\lambda}^\alpha(t,x) \right] dt \right|,$$

где

$$d_{ji}^\alpha(t,x) = \chi(I_j;\theta^\alpha(t))\dot\rho_j(\theta^\alpha(t))\dot\theta^\alpha(t) g_{ji}(\rho_j(\theta^\alpha(t)),x),$$
$$d_{j\lambda}^\alpha(t,x) = \chi(I_j;\theta^\alpha(t))\dot\rho_j(\theta^\alpha(t))\dot\theta^\alpha(t) g_{j\lambda}(\rho_j(\theta^\alpha(t)),x), \quad \alpha = \overline{1,p_j};$$
$$c_{ji}^\alpha(t,x) = \chi(I_j;\rho^\alpha(t))\dot\rho_j(\rho^\alpha(t))\dot\rho^\alpha(t) g_{ji}(\rho_j(s^\alpha(t)),x),$$
$$e_{j\lambda}^\alpha(t,x) = \chi(I_j;\rho^\alpha(t))\dot\rho_j(\rho^\alpha(t))\dot\rho^\alpha(t) g_{j\lambda}(\rho_j(s^\alpha(t)),x), \alpha = \overline{0,n_j}.$$

Исходя из специфики разбиения, можно заключить, что

$$d_{j\lambda}^\alpha(t,x) = d_{ji}^\alpha(t,x), \quad e_{j\lambda}^\alpha(t,x) = e_{ji}^\alpha(t,x), \quad t \in I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda). \qquad (5.1.26)$$

Условия (5.1.23), (5.1.25), (5.1.26) позволяют использовать лемму 5.1.1, в силу которой отображение (5.1.20) непрерывно. Кроме того, существует такое σ_2-разбиение, что для произвольных $t', t'' \in I^{(0)}$,

$(x,\lambda)\in K\times\Sigma$ выполнены следующие неравенства:

$$\left|\int_{s'}^{s''}\left[\sum_{i=0}^{s'}\lambda_i F_i^{\alpha}(t,x)-F_{\lambda}^{\alpha}(t,x)\right]dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(1+l)},\quad \alpha=\overline{0,l};$$

$$\left|\int_{s'}^{s''}\left[\sum_{i=0}^{s'}\lambda_i C_{ji}^{\alpha}(t,x)-C_{j\lambda}^{\alpha}(t,x)\right]dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{6kp},\quad \alpha=\overline{q_j,p_j},\ j=\overline{1,\mu};$$

$$\left|\int_{s'}^{s''}\left[\sum_{i=0}^{s'}\lambda_i d_{ji}^{\alpha}(t,x)-d_{ji}^{\alpha}(t,x)\right]dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{6kp},\quad \alpha=\overline{0,p_j},\ j=\overline{\mu+1,p};$$

$$\left|\int_{s'}^{s''}\left[\sum_{i=0}^{s'}\lambda_i e_{ji}^{\alpha}(t,x)-e_{j\lambda}^{\alpha}(t,x)\right]dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{6(l+1)p},\quad \alpha=\overline{0,n_j},\ j=\overline{\mu+1,p}.$$

Следовательно, для произвольных $(t',t'',x,\lambda)\in J^2\times K\times\Sigma$ имеем:

$$A(t',t'',x,\lambda)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad B_j(t',t'',x,\lambda)\leqslant\frac{\varepsilon}{2p},\quad j=\overline{1,p}. \tag{5.1.27}$$

Определим непрерывное отображение (5.1.17) формулой $\varphi_2=\varphi_{\sigma_2}\circ\varphi$ (см. (5.1.2)). Из (5.1.21), с учетом (5.1.27), следует (5.1.18). □

Лемма 5.1.6. *Пусть*

$$f(t,x,u_0,\dots,u_\nu)=g_0(t,x,u_0)+g_1(t,x,u_1,\dots,u_\nu),$$
$$g_0\in E^{(2)}(J\times O\times G,\mathbb{R}^n),\ g_1\in E^{(2)}(J\times O\times G^{\nu},\mathbb{R}^n);$$
$$\theta_i(t)=t-m_i(t)h-\omega(t),\ i=\overline{1,\nu},\ t\in J,\ h>0,$$

$m_i(t)$ — кусочно-постоянная функция, принимающая неотрицательные целые значения; $\omega(t)\geqslant 0$ — кусочно абсолютно непрерывная функция, с конечным числом точек разрыва первого рода, удовлетворяющая условию $\dot\omega(t)<1$. Тогда для произвольных точек

$$f_i(t,x)=g_0(t,x,u_i(t))+g_1(t,x,u_i(\theta_1(t)),\dots,u_i(\theta_\nu(t)))=g_{0i}(t,x)+g_{1i}(t,x),\ i=\overline{0,s},$$

из множества

$$F_3=\{F(t,x)=F(t,x,u(t),u(\theta_1(t)),\dots,u(\theta_\nu(t))):u\in\Omega([\theta,h],U)\},$$
$$\theta=a-\hat m h-\hat\omega,\quad \hat m=\max_{1\leqslant i\leqslant\nu}\operatorname*{Sup}_{t\in J}m_i(t),\ \hat\omega=\operatorname*{Sup}_{t\in J}\omega(t),$$

и произвольной окрестности $V_{K,\varepsilon}\in\Re$ существует непрерывное отображение

$$\varphi_3:\operatorname{co}(\{f_0,\dots,f_s\})\to F_3, \tag{5.1.28}$$

удовлетворяющее условию

$$(z-\varphi_3(z))\in V_{K,\varepsilon}\ \ \forall z\in\operatorname{co}(\{f_0,\dots,f_s\}). \tag{5.1.29}$$

Доказательство. Пусть $\gamma\geqslant 0$ — наименьшее число, удовлетворяющее условию $b+\gamma-\theta=mh$, $m\in\mathbb{N}$; $I^{(\alpha)}$, $\alpha=-k,\dots,0,\dots,b$ — система отрезков длины h, пристроенных друг к другу, такая, что левый конец отрезка $I^{(-k)}$ совпадает с точкой θ, правый конец совпадает с левым концом последующего отрезка $I^{(-k+1)}$ и т.д., $a\in I^{(0)}$, правый конец последнего отрезка $I^{(b)}$ совпадает с точкой $b+\gamma$.

Пусть функция $\omega_p(t)=t-\omega(t)$ при $t\in I_p=[t_p,t_{p+1}]$, $p=1,\dots,\mu,t_1=a,t_{\mu+1}=b$ абсолютно непрерывна. Легко заметить, что существуют целые числа $m_{1p},m_{2p},p=\overline{1,\mu},m_3$ такие, что $\xi_{1p}=\omega_p(t_p)+m_{1p}h$, $\xi_{2p}=\omega_p(t_{p+1})+m_{2p}h$, $p=\overline{1,\mu}$, $\xi_3=b+m_3h$ принадлежат отрезку $I^{(0)}$.

Пусть $\sigma_3=\{I_\beta^{(0)}:\beta=\overline{1,q}\}$ — такое разбиение отрезка $I^{(0)}$, чтобы точки ξ_{1p}, ξ_{2p}, $p=\overline{1,\mu}$, ξ_3 и a совпали с концом какого-либо из частичных отрезков $I_\beta^{(0)}$.

Произвольной точке $\lambda \in \Sigma$ поставим в соответствие разбиение каждого из отрезков $I_\beta^{(0)}$ на частичные отрезки $I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda)$ (см. (5.1.1)).

С помощью разбиения отрезка I^0 построим разбиение остальных отрезков $I^{(\alpha)}$ на отрезки $I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda)$:

$$I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda) = \{t + \alpha h : t \in I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda)\},\ \alpha = \overline{-1,\mu};\ I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) = \{t + \alpha h : t \in I_{\beta_i}^{(0)}(\lambda)\}, \alpha = \overline{1,l}.$$

Определим отображение

$$\varphi_{\sigma_3} : \Sigma \to F_3 \tag{5.1.30}$$

формулой

$$\varphi_{\sigma_3}(\lambda) = f_\lambda(t,x) = f(t,x,u_\lambda(t),u_\lambda(\theta_1(t)),\dots,u_\lambda(\theta_\nu(t))) \in F_3,$$

где

$$u_\lambda(t) = u_i(t),\ t \in I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) \cap [\theta,b], i = \overline{0,s},\ \beta = \overline{1,m},\ \alpha = \overline{-k,l}.$$

Для произвольных $(t',t'',x,\lambda) \in \Im^2 \times K \times \Sigma$, используя вид функции f, оценим интеграл

$$\left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i f_i(t,x) - f_\lambda(t,x)\right]dt\right| \leqslant \left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{oi}(t,x) - g_{0\lambda}(t,x)\right]dt\right| +$$
$$+\left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{1i}(t,x) - g_{1\lambda}(t,x)\right]dt\right| = a(t',t'',x,\lambda) + b(t',t'',x,\lambda), \tag{5.1.31}$$

где

$$a(t',t'',x,\lambda) = \left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{0i}(t,x) - g_{0\lambda}(t,x)\right]dt\right|,$$
$$b(t',t'',x,\lambda) = \left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{1i}(t,x) - g_{1\lambda}(t,x)\right]dt\right|.$$

После замены переменной получим

$$b(t',t'',x,\lambda) \leqslant \sum_{p=1}^{\mu}\max_{s',s''\in I_p}\left|\int_{s'}^{s''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{1i}(t,x) - g_{1\lambda}(t,x)\right]dt\right| =$$
$$= \sum_{p=1}^{\mu}\max_{s',s''\in I_{pp}}\left|\int_{s'}^{s''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{1i}(\rho_p(t),x) - g_{1\lambda}(\rho_p(t),x)\right]\dot\rho_p(t)dt\right|,$$

где $I_{pp} = [\omega_p(t_p),\omega_p(t_{p+1})]$, $\rho_p(t) = \omega_p^{-1}(t)$.

Из специфики разбиения следуют равенства

$$g_{0\lambda}(t,x) = g_{0i}(t,x),\ t \in I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) \cap J;\ g_{1\lambda}(\rho_p(t),x) = g_{1i}(\rho_p(t),x),\ t \in I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) \cap I_{pp}. \tag{5.1.32}$$

Условие (5.1.32) позволяет использовать лемму 5.1.1, в силу которой отображение (5.1.30) непрерывно. Кроме того, существует такое σ_3-разбиение, что для произвольных $(t',t'',x,\lambda) \in J^2 \times K \times \Sigma$ выполнено неравенство

$$a(t',t'',x,\lambda) \leqslant \varepsilon/2,\ b(t',t'',x,\lambda) \leqslant \varepsilon/2. \tag{5.1.33}$$

Определим непрерывное отображение (5.1.28) формулой $\varphi_3 = \varphi_{\sigma_3} \circ \varphi$ (см. лемму 5.1.2). Из (5.1.31), с учетом (5.1.33), следует (5.1.29). □

Лемма 5.1.7. *Пусть*

$$f(t,x,u_1,\dots,u_\nu) = \sum_{j=1}^{\nu} g_j(t,x,u_j),\ g_j \in E^{(2)}(J \times O \times G, \mathbb{R}^n);$$

функции $\theta_j(t)$, $j=\overline{1,\nu}$, $t\in J$, *кусочно абсолютно непрерывны и удовлетворяют условиям* $\theta_j(t)\leqslant t, \dot\theta_j(t)>0$. *Тогда для произвольных точек*

$$f_i(t,x)=\sum_{j=1}^{\nu} g_j(t,x,u_i(\theta_j(t)))=\sum_{j=1}^{\nu} g_{ji}(t,x),\ \ i=\overline{0,s},$$

из множества

$$\digamma_4=\{f(t,x)=f(t,x,u(\theta_1(t),\ldots,u(\theta_\nu(t)):u\in\Omega([\theta,h],U)\},\ \ \theta=\min_{1\leqslant j\leqslant\nu}\inf_{t\in J}\theta_j(t),$$

и произвольной окрестности $V_{K,\varepsilon}\in\Re$ *существует непрерывное отображение*

$$\varphi_4:\mathrm{co}(\{f_0,\ldots,f_s\})\to\digamma_4, \tag{5.1.34}$$

удовлетворяющее условию

$$(z-\varphi_4(z))\in V_{K,\varepsilon}\ \ \forall z\in\mathrm{co}(\{f_0,\ldots,f_s\}). \tag{5.1.35}$$

Доказательство. Пусть функции $\theta_j(t)=\theta_{j\alpha}(t)$ при $t\in I^{(\alpha)}=[t_\alpha,t_{\alpha+1}]$, $\alpha=\overline{1,p}$, $t_1=a$, $t_{p+1}=b$ абсолютно непрерывны. Рассмотрим такое разбиение $\sigma_4=\{I_\beta:\beta=1,\ldots,m\}$ отрезка $[\theta,b]$, чтобы точки $\theta_{j\alpha}(t_\alpha),\theta_{j\alpha}(t_{\alpha+1})$, $j=1,\ldots,\nu$, $\alpha=1,\ldots,p$ совпали с концами каких-либо частичных отрезков I_β. Произвольной точке $\lambda\in\Sigma$ поставим в соответствие разбиение каждого из отрезков I_β на частичные отрезки $I_{\beta_i}(\lambda)$ (см. (5.1.1)).

Определим отображение

$$\varphi_{\sigma_4}:\Sigma\to\digamma_4 \tag{5.1.36}$$

формулой

$$\varphi_{\sigma_4}(\lambda)=f_\lambda(t,x)=\sum_{j=1}^{\nu} g_j(t,x,u_\lambda(\theta_j(t)))=\sum_{j=1}^{\nu} g_{j\lambda}(t,x),$$

где

$$u_\lambda(t)=u_i(t),\ \ t\in I_{\beta_i}(\lambda).$$

После замены переменной, используя вид функции f, для произвольных $(t',t'',x,\lambda)\in J^2\times K\times\Sigma$ получим

$$\left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i f_i(t,x)-f_\lambda(t,x)\right]dt\right|\leqslant\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{\alpha=1}^{p}\max_{s',s''\in I^{(\alpha)}}\left|\int_{t'}^{t''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{ji}(t,x)-g_{j\lambda}(t,x)\right]dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{\alpha=1}^{p}\max_{s',s''\in I_j^{(\alpha)}}\left|\int_{s'}^{s''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{ji}(\rho_{j\alpha}(t),x)-g_{j\lambda}(\rho_{j\alpha}(t),x)\right]\rho_{j\alpha}(t)dt\right|=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{\alpha=1}^{p}A_{j\alpha}(x,\lambda), \tag{5.1.37}$$

где

$$A_{j\alpha}(x,\lambda)=\max_{s',s''\in I_j^{(\alpha)}}\left|\int_{s'}^{s''}\left[\sum_{i=0}^{s}\lambda_i g_{ji}(\rho_{j\alpha}(t),x)-g_{j\lambda}(\rho_{j\alpha}(t),x)\right]\rho_{j\alpha}(t)dt\right|,$$

$$I_j^{(\alpha)}=[\theta_{j\alpha}(t_\alpha),\theta_{j\alpha}(t_{\alpha+1})],\ \ s_{j\alpha}(t)=\theta_{j\alpha}^{-1}(t).$$

Нетрудно заметить, что

$$g_{j\lambda}(\rho_{j\lambda}(t),x)=g_{ji}(\rho_{j\alpha}(t),x),\quad t\in I_{\beta_i}(\lambda)\cap I_j^{(\alpha)}.$$

Это равенство позволяет использовать лемму 5.1.1, в силу которой отображение (5.1.36) для каждого σ_4-разбиения непрерывно, а для $\varepsilon/\nu p$ существует такое σ_4-разбиение, что

$$A_{j\alpha}(x,\lambda)\leqslant\varepsilon/\nu p,\quad j=\overline{1,\nu},\quad \alpha=\overline{1,p},\quad x\in K,\ \ \lambda\in\Sigma. \tag{5.1.38}$$

Определим непрерывное отображение (5.1.34) формулой $\varphi_4=\varphi_{\sigma_4}\circ\varphi$ (см. лемму 5.1.2). Из (5.1.37), с учетом (5.1.38), следует (5.1.35). □

5.2. Примеры квазивыпуклых фильтров.

Квазивыпуклость фильтра ϕ_1. Пусть $f(t,x,u_1,\dots,u_\nu) \in E^2(J\times 0\times G^\nu,\mathbb{R}^n)$; функции $\theta_i(t)$, $i=\overline{1,\nu}$ удовлетворяют условию соизмеримости.

Рассмотрим множество

$$F_1^{(1)} = \{f(t,x) = f(t,x,u(\theta_1(t),\dots,u(\theta_\nu(t)) : u \in \Omega([\theta,b],U)\},\ \theta=\theta_\nu(a).$$

Ясно, что множество $F_1^{(1)}$ можно отождествить с подмножеством пространства $E_f^{(1)}$ (см. лемму 1.1.5).

Пусть $\tilde f(t,x) = f(t,x,\tilde u(\theta_1(t),\dots,\tilde u(\theta_\nu(t)) \in F_1^{(1)}$ — фиксированная точка. Определим в $F_1^{(1)}$ фильтр Φ_1 с помощью базиса

$$B_1 = \{W_{K,\delta}^{(1)} :\subset O \text{ — компактное множество, } \delta>0 \text{ — произвольное число}\},$$

где

$$W_{K,\delta}^{(1)} = \{f(t,x) \in F_1^{(1)}:\ \ H_1(f-\tilde f;K)\leqslant\delta\},$$

$$H_1(f;K) = \int\limits_J \sup_{x\in K}(|f(t,x)|+|f_x(t,x)|)dt,\quad f\in E_f^{(1)}$$

(см. лемму 2.1.1).

Теорема 5.2.1. *Фильтр* Φ_1 *является квазивыпуклым.*

Доказательство. Пусть заданы произвольный элемент $W_{\tilde f}^{(1)} \subset \Phi_1$ и произвольное число $s\in\mathbb{N}$. Существует такой элемент $W_{K,\delta}^{(1)}\in B_1$, что $W_{K,\delta}^{(1)}\subset W_{\tilde f}^{(1)}$. Покажем, что в качестве W_1, фигурирующего в определении квазивыпуклости фильтра, можно взять $W^{(1)}_{K,\frac{\delta}{s+1}}$.

Допустим, что заданы точки

$$f_i(t,x) = f(t,x,u(\theta_1(t)),\dots,u(\theta_\nu(t)) \in W^{(1)}_{K,\frac{\delta}{s+1}},$$

так что

$$H_1(f-\tilde f;K)\leqslant \frac{\delta}{s+1},\quad i=\overline{1,s},$$

и окрестность нуля $V_{K,\varepsilon}\in\Re$.

В силу леммы 5.1.4 существует непрерывное отображение

$$\varphi_1 : \mathrm{co}(\{f_0,\dots,f_s\}) \to F_1^{(1)},$$

определенное формулой $\varphi_1(z)=\varphi_{\sigma_1}\circ\varphi(z)=f_\lambda$, $\lambda\in\Sigma_0$ и удовлетворяющее условию

$$(z-\varphi_1(z))\in V_{K_1,\varepsilon}\ \ \forall z\in\mathrm{co}(\{f_0,\dots,f_s\}).$$

Остается показать, что $f_\lambda \in W_{K,\delta}^{(1)}$ $\forall\lambda\in\Sigma_0$. Для этого оценим величину

$$H_1(f-\tilde f;K). \tag{5.2.1}$$

В силу специфики разбиения

$$f_\lambda(t,x) = f_\lambda(t,x),\ \ t\in I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda)\cap J$$

(см. доказательство леммы 5.1.4).

Теперь с учетом последнего равенства оценим выражение (5.2.1). Получим:

$$H_1(f_\lambda-\tilde f;K) = \sum_{\alpha=0}^{l}\int_{I^{(\alpha)}\cap J}\sup_{x\in K}\left(|f_\lambda(t,x)-\tilde f(t,x)| + \left|\frac{\partial f_\lambda(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial\tilde f(t,x)}{\partial x}\right|\right)dt =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{l}\sum_{\beta=1}^{m}\sum_{i=0}^{s}\int_{I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda)\cap J}\sup_{x\in K}\left(|f_i(t,x)-\tilde f(t,x)| + \left|\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial\tilde f(t,x)}{\partial x}\right|\right)dt \leqslant \sum_{i=0}^{s} H_1(f_i-\tilde f;K)\leqslant\delta.$$

Следовательно, $\varphi_1(z) \in W^{(1)}_{K,\delta}$. □

Теорема 5.2.2. *Пусть в пространстве* $E^{(1)}_{\tilde f}$ *задано множество*

$$W^{(1)} = \{f : H_1(f - \tilde f; K_0) \leqslant \delta_0\},$$

где $\delta_0 > 0$ — *фиксированное число,* $K_0 \subset O$ — *компактное множество. Тогда для произвольного* $W^{(1)}_{\tilde f} \in \Phi_1$ *имеет место включение*[3]

$$\operatorname{cone}([W^{(1)}]_{w^{(1)}_{\tilde f}} - \tilde f) \supset \digamma^{(1)}_1 - \tilde f^{3)}. \tag{5.2.2}$$

Доказательство. Ясно, что $W^{(1)}_{K_0,\delta_0} \subset W^{(1)}$ и существует $W^{(1)}_{K_1,\delta_1}$, содержащийся в $W^{(1)}_{\tilde f}$.

Таким образом,

$$W^{(1)} \cap W^{(1)}_{\tilde f} \supset W^{(1)}_{K_1,\delta_1} \cap W^{(1)}_{K_0,\delta_0} \supset W^{(1)}_{K_2,\delta_2}, \tag{5.2.3}$$

где

$$K_2 = K_0 \cup K_1, \;\; \delta_2 = \min(\delta_1, \delta_2).$$

Чтобы доказать включение (5.2.2), достаточно показать, что

$$\operatorname{cone}([W^{(1)}]_{W^{(1)}_{K_z,\delta_z}} - \tilde f) > \digamma^{(1)}_1 - \tilde f.$$

Пусть $f - \tilde f \in \digamma^{(1)}_1$ и $z_\lambda = (1-\lambda)\tilde f + \lambda f$, $\lambda \in [0,1]$; $\{\varepsilon_i\}$ — стремящаяся к нулю последовательность. В силу леммы 5.1.4 можно построить такую последовательность непрерывных отображений

$$\varphi^{(i)}_1 : \operatorname{co}(\{\tilde f, f\}) \to \digamma^{(1)}_1, \;\; i = 1, 2, \ldots,$$

что

$$z_\lambda - \varphi^{(i)}_1(z_\lambda) \in V_{K_\varepsilon,\varepsilon_i} \;\; \forall \lambda \in [0,1], \;\; i = 1, 2, \ldots, \tag{5.2.4}$$

где

$$\begin{gathered} \varphi^{(i)}_1(r_\lambda) = f_\lambda(t,x) = f(t, x, u_\lambda(\theta_1(t), \ldots, u_\lambda(\theta_\nu(t)), \\ u_\lambda(t) = \begin{cases} \hat u(t), & t \in I^{(\alpha)}_{\beta_0}(\lambda) \cap [\theta, h], \\ u(t), & t \in I^{(\alpha)}_{\beta_1}(\lambda) \cap [\theta, h], \end{cases} \\ \alpha = \overline{-k_\nu, l}, \;\; \beta = \overline{1, m_i} = m(\varepsilon_i) \end{gathered} \tag{5.2.5}$$

(см. доказательство леммы 5.1.4).

Теперь докажем существование такого $\lambda_0 \in (0,1)$, что

$$\varphi^{(i)}_1(z_\lambda) \in W^{(1)}_{K_2,\delta_2}, \;\; i = 1, 2, \ldots \;\; \forall \lambda \in [0, \lambda_0]. \tag{5.2.6}$$

Для выражения $H_1(f - \tilde f; K_2)$ с учетом равенства $f_\lambda(t,x) = \tilde f(t,x)$, $t \in I^{(\alpha)}_{\beta_0}(\lambda) \cap J$ получим

$$H_1(f_\lambda - \tilde f; K) = \sum_{\alpha=0}^{l} \int_{J^{(\alpha)}_{1i}} \sup_{x \in K_2} (|f(t,x) - \tilde f(t,x)| + |f_x(t,x) - \tilde f_x(t,x)|) dt,$$

где

$$J^{(\alpha)}_{1i} = \bigcup_{\beta=1}^{m_i} (I^{(\alpha)}_{\beta_1} \cap J).$$

[3] $[W^{(1)}]_{W^{(1)}_{\tilde f}}$ означает замыкание относительно $W^{(1)}$ множества $W^{(1)} \cap W^{(1)}_{\tilde f}$ в топологии, индуцируемой на $W^{(1)}$ топологией из $E^{(1)}_f$.

После замены переменной получаем:

$$H_1(f_\lambda - \tilde{f}; K_2) \leqslant \sum_{\alpha=0}^{l} \int_{J_{2i}} \chi(J; \rho^\alpha(t)) \dot{\rho}^\alpha(t) \sup_{x \in K_2} (|f(\rho^\alpha(t), x) - \tilde{f}(\rho^\alpha(t), x)| +$$
$$+ |f_x(\rho^\alpha(t), x) - \tilde{f}_x(\rho^\alpha(t), x)|) dt$$

где

$$J_{2i} = \bigcup_{\beta=1}^{m_i} (I_{\beta_1}^{(\alpha)}(\lambda)) \tag{5.2.7}$$

(см. доказательство леммы 5.1.4).

Из специфики разбиения следует, что

$$\operatorname{mes} J_{ri} = \sum_{\beta=1}^{m_i} \operatorname{mes} I_{\beta_1}^{(0)}(\lambda) \leqslant \sum_{\beta=1}^{m_i} I_\beta^{(0)} \leqslant \lambda \operatorname{mes} I^{(0)} \tag{5.2.8}$$

Таким образом, $\operatorname{mes} J_{ri} \to 0$ при $\lambda \to 0$ равномерно по $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует такое $\lambda_0 \in (0,1)$, для которого

$$H_1(f_\lambda - \tilde{f}; K_2) \leqslant \delta_2.$$

Включение (5.2.6) доказано.

Из условия (5.2.4) следует, что $\varphi_1^{(i)}(z) \to z_\lambda$ при $i \to \infty$. Итак, $z_\lambda \in [W^{(1)}]_{W^{(1)}_{K_2,\delta_2}}$ при $\lambda \in [0, \lambda_0]$, следовательно, $z_\lambda - \tilde{f} \in \operatorname{cone}([W^{(1)}]_{W^{(1)}_{K_2,\delta_2}} - \tilde{f})$, $\lambda \in [0, \lambda_0]$, но $z_\lambda - \tilde{f} = \lambda(f - \tilde{f})$, поэтому $f - \tilde{f} \in \operatorname{cone}([W^{(1)}]_{W^{(1)}_{K_2,\delta_2}} - \tilde{f})$. $\square$

Квазивыпуклость фильтра Φ_2. Пусть

$$f(t, x, u_1, \ldots, u_{\nu+p}) = g_0(t, x, u_1, \ldots, u_\nu) + \sum_{j=1}^{p} g_j(t, x, u_{\nu+j}),$$
$$g_0 \in E^{(1)}(J \times 0 \times G^\nu, \mathbb{R}^n), \quad g_j \in E^{(2)}(J \times 0 \times G, \mathbb{R}^n);$$

функции $\theta_i(t)$, $i = \overline{1,\nu}$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяют условию соизмеримости, функции $\omega_i(t)$, $i = \overline{1,p}$, $t \in \mathbb{R}$, абсолютно непрерывны и $\omega_i(t) \leqslant t$, $\dot{\omega}_i(t) > 0$.

Рассмотрим множество

$$F_2^{(1)} = \{f(t,x) = g_0(t, x, u(\theta_1(t), \ldots, u(\theta_\nu(t)) + \sum_{j=1}^{p} g_j(t, x, u(\omega_j(t))) =$$
$$= g_0(t,x) + \sum_{j=1}^{p} g_j(t,x) : u \in \Omega([\theta, h], U)\}, \quad \theta = \min(\theta_\nu(a), \omega_1(a), \ldots, \omega_p(a)).$$

Пусть

$$\tilde{f}(t,x) = g_0(t, x, \tilde{u}(\theta_1(t), \ldots, \tilde{u}(\theta_\nu(t)) + \sum_{j=1}^{p} g_j(t, x, \tilde{u}(\omega_j(t))) =$$
$$= \tilde{g}_0(t,x) + \sum_{j=1}^{p} \tilde{g}_j(t,x) \in F_2^{(1)}$$

— фиксированная точка.

Определим в $F_2^{(1)}$ фильтр Φ_2 с помощью базиса:

$$B_2 = \{W_{K,\delta}^{(2)} : K \subset O \text{ — компактное множество, } \delta > 0 \text{ — произвольное число}\},$$

где

$$W^{(2)}_{K,\delta} = \left\{ f(t,x) \in \mathcal{F}^{(1)}_2 : H_1(g_0 - \tilde{g}_0; K) + \sum_{j=1}^{p} H_1(g_j - \tilde{g}_j; K) \leqslant \delta \right\}.$$

Теорема 5.2.3. *Фильтр Φ_2 является квазивыпуклым.*

Доказательство. Пусть заданы произвольный элемент $W^{(2)}_{\tilde{f}} \in \Phi_2$ и произвольное число $s \in \mathbb{N}$ и пусть $W^{(2)}_{K,\delta} \subset W^{(2)}_{\tilde{f}}$. В качестве W_1, фигурирующего в определении 4.2.6, можно взять $W^{(2)}_{K,\frac{\delta}{s+1}}$.

Допустим, что заданы точки

$$f_i(t,x) = g_{0i}(t,x) + \sum_{j=1}^{p} g_{ji}(t,x) = g_0(t,x,u(\theta_1(t),\ldots,u(\theta_\nu(t)) + \sum_{j=1}^{p} g_j(t,x,u_i(\omega_j(t))) \in W^{(2)}_{K,\frac{\delta}{k+1}},$$
$$i = 0,\ldots,s,$$

так что

$$H_1(g_{0i} - \tilde{g}_0; K) + \sum_{j=1}^{p} H_1(g_i - \tilde{g}_j; K) \leqslant \frac{\delta}{s+1}, \ \ i = 0,\ldots,s,$$

и окрестность нуля $V_{K_1,\varepsilon} \in \Re$.

В силу леммы 5.1.5 существует непрерывное отображение

$$\varphi_2 : \mathrm{co}(\{f_0,\ldots,f_s\}) \to \mathcal{F}^{(1)}_z,$$

определенное формулой $\varphi_2(z) = \varphi_{\sigma_2} \circ \varphi = f_\lambda \in \mathcal{F}^{(1)}_2$, $\lambda \in \Sigma_0$ и удовлетворяющее условию

$$(z - \varphi_2(z)) \in V_{K,\varepsilon} \ \ \forall z \in \mathrm{co}(\{f_0,\ldots,f_s\}).$$

Остается показать, что $f_\lambda \in W^{(2)}_{K,\delta}$ $\forall \lambda \in \Sigma_0$. Для этого оценим величину

$$A_1 = H_1(g_0 - \tilde{g}_0; K) + \sum_{j=1}^{p} H_1(g_j - \tilde{g}_j; K). \tag{5.2.9}$$

В силу специфики разбиения

$$g_{0\lambda}(t,x) = g_{0i}(t,x), \quad t \in I^{(\alpha)}_{\beta_i}(\lambda) \cap J$$

(см. доказательство леммы 5.1.5).

Теперь, с учетом последнего равенства, аналогично доказательству теоремы 5.2.1 можно оценить первое слагаемое в выражении (5.2.9). А именно, мы получим

$$H_1(g_{0\lambda} - \tilde{g}_0; K) \leqslant \sum_{i=0}^{s} H_1(g_{0i} - \tilde{g}_0; K).$$

Далее, после замены переменной, для остальных слагаемых в выражении (5.2.9) получаем

$$H_1(g_{j\lambda} - \tilde{g}_j; K) = \int_{\omega_j(a)}^{\omega_j(b)} \left\{ \dot{\rho}_j(t) \sup_{x \in K} \left(|g_{j\lambda}(\rho_j(t),x) - \tilde{g}(\rho_j(t);x)| + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left| \frac{\partial g_{j\lambda}(\rho_j(t),x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_j(\rho_j(t),x)}{\partial x} \right| \right) \right\} dt =$$
$$= \sum_{\alpha=-k}^{l} \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=0}^{s} \int_{I^{(\alpha)}_{p_i}(\lambda)} \left\{ \chi(J;t)\dot{\rho}_j(t) \sup_{x \in} \left(|g_{ji}(\rho_j(t),x) - \tilde{g}(\rho_j(t);x)| + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left| \frac{\partial g_{j\lambda}(\rho_j(t),x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_j(\rho_j(t),x)}{\partial x} \right| \right) \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{s}\int_{\omega_j(a)}^{\omega_j(b)}\left\{\dot\rho(t)\sup_{x\in K}\left(|g_{j\lambda}(\rho_j(t),x)-\tilde g(\rho_j(t);x)|+\left|\frac{\partial g_{j\lambda}(\rho_j(t),x)}{\partial x}-\frac{\partial \tilde g_j(\rho_j(t),x)}{\partial x}\right|\right)\right\}dt=$$
$$=\sum_{i=0}^{s}H_1(g_{ji}-\tilde g_j;K)$$

(см. доказательство леммы 5.1.5).

Таким образом,

$$A_1\leqslant \sum_{i=1}^{s}H_1(g_{0i}-\tilde g;K)+\sum_{j=1}^{p}H_1(g_{ji}-\tilde g_j;K)\leqslant \delta.$$

Следовательно, $\varphi_2(z)\in W^{(2)}_{K,\delta}$. □

Теорема 5.2.4. *Пусть в $E_f^{(1)}$ задано множество*

$$W^{(2)}=\left\{f=\sum_{j=0}^{p}g_j:\sum_{j=0}^{p}H_1(g_j-\tilde g_j;K_0)\leqslant\delta_0\right\},$$

где $\delta_0>0$ — фиксированное число, $K_0\subset O$ — компактное множество.

Тогда для произвольного $W^{(2)}_{\tilde f}\in\Phi_2$ имеет место включение

$$\operatorname{cone}([W^{(2)}]_{w^{(2)}_{\tilde f}}-\tilde f)\supset F_2^{(1)}-\tilde f. \tag{5.2.10}$$

Доказательство. Чтобы доказать включение (5.2.10), достаточно показать, что

$$\operatorname{cone}([W^{(2)}]_{w^{(2)}_{K_2,\delta_2}}-\tilde f)\supset F_2^{(1)}-\tilde f$$

(см. (5.2.3)).

Пусть $f-\tilde f\in F_2^{(1)}-\tilde f$. В силу леммы 5.1.5 можно построить такую последовательность непрерывных отображений

$$\varphi_2^{(i)}:\operatorname{co}\{\tilde f,f\}\to F_2^{(1)},\ \ i=1,2,\dots,$$

что

$$z_\lambda-\varphi_2^{(i)}(z_\lambda)\in V_{K_2,\varepsilon_i}\ \ \forall\lambda\in[0,1],i=1,2,\dots,$$

где

$$z_\lambda=(1-\lambda)\tilde f+\lambda f,\ \varphi_2^{(i)}(z_\lambda)=f_\lambda(t,x)=g_0(t,x,u_\lambda(\theta_1(t),\dots,u_\lambda(\theta_\nu(t))+$$
$$+\sum_{j=1}^{p}g_j(t,x,u_\lambda(\omega_j(t)))=\sum_{j=0}^{p}g_{j\lambda}(t,x);$$

$\varepsilon_i\to0$ при $i\to\infty$; функция $u_\lambda(t)$ определяется формулой (5.2.5) (см. доказательство леммы 5.1.5).

Теперь докажем существование такого числа $\lambda_0\in(0,1)$, что

$$\varphi_2^{(i)}(z_\lambda)\in W^{(2)}_{K,\delta_2},\ \ i=1,2,\dots\ \ \forall\lambda\in[0,\lambda_0]. \tag{5.2.11}$$

Оценим выражение

$$A_2=\sum_{j=0}^{p}H_1(g_{j\lambda}-\tilde g_j;K). \tag{5.2.12}$$

Для первого слагаемого в выражении (5.2.12) аналогично доказательству теоремы 5.2.2 можно доказать существование такого числа $\lambda_0'\in(0,1)$, что

$$H_1(g_{0\lambda}-\tilde g_0;K)\leqslant\delta_2/2\ \ \forall\lambda\in[0,\lambda_0'].$$

Для остальных слагаемых выражения (5.2.12) после замены переменной получаем

$$H_1(g_{j\lambda}-\tilde g_j;K)=\int_{\omega_j(a)}^{\omega_j(b)}\dot\rho_j(t)b_j(t,\lambda)dt=$$

$$=\sum_{\alpha=k}^{1}\int_{I^{(-\alpha)}}\chi(J;t)\dot\rho_j(t)b_j(t,\lambda)dt+\sum_{\alpha=0}^{p}\int_{I^{(\alpha)}}\chi(J;t)\dot\rho_j(t)b_j(t,\lambda)dt=A_3+A_4,$$

где

$$A_3=\sum_{\alpha=k}^{1}\int_{I^{(-\alpha)}}\chi(J;t)\dot\rho_j(t)b_j(t,\lambda)dt, A_4=\sum_{\alpha=0}^{p}\int_{I^{(\alpha)}}\chi(J;t)\dot\rho_j(t)b_j(t,\lambda)dt,$$

$$b_j(t,\lambda)=\sup_{x\in K}\left(|g_{j\lambda}(\rho_j(t),x)-\tilde g_j(\rho_j(t),x)|+\left|\frac{\partial g_{j\lambda}(\rho_j(t),x)}{\partial x}-\frac{\partial\tilde g_j(\rho_j(t),x)}{\partial x}\right|\right)$$

(см. доказательство леммы 5.1.5).

Оценим первое слагаемое. Легко видеть, что

$$A_3=\sum_{\alpha=k}^{1}\sum_{\beta=1}^{m_i}\int_{I^{(-\alpha)}}\chi(J;t)\dot\rho_j(t)b_j(t,\lambda)dt=\sum_{\alpha=k}^{1}\int_{J_{ri}}\chi(J;\theta^\alpha(t))\dot\rho_j(\theta^\alpha(t))\dot\theta^\alpha(t)b_j(\theta^\alpha(t))dt,$$

где

$$b_j(t)=\sup_{x\in K_2}\left(|g_j(\rho_j(t),x)-\tilde g_j(\rho_j(t),x)|+\left|\frac{\partial g_j(\rho_j(t),x)}{\partial x}-\frac{\partial\tilde g_j(\rho_j(t),x)}{\partial x}\right|\right),$$

I_{2i} имеет вид (5.2.7). Далее,

$$A_4\leqslant\sum_{\alpha=0}^{p}\sum_{\beta=1}^{m_i}\int_{I^{(\alpha)}_{\beta_i}(\lambda)}\chi(J;t)\dot\rho_j(t)b_j(t)dt=\sum_{\alpha=0}^{p}\int_{J_{ri}}\chi(J;\rho^\alpha(t))\dot\rho_j(\rho^\alpha(t))\dot\rho^\alpha(t)b_j(\rho^\alpha(t))dt.$$

Из этих оценок с учетом (5.2.8) следует существование такого $\lambda_0''\in(0,1)$, что

$$\sum_{i=0}^{s}H_1(g_{ji}-\tilde g_j;k)\leqslant\delta_2/2p,\ \ j=1,\ldots,p,\ \ \lambda\in[0,\lambda''].$$

Таким образом,

$$A_2\leqslant\delta_2\ \ \forall\lambda\in[0,\lambda_0],\ \ \lambda_0=\min(\lambda_0',\lambda_0'').$$

Включение (5.2.11) доказано.

После этого аналогично получается, что

$$f-\tilde f\in\operatorname{cone}([W^{(2)}]_{W^{(2)}_{K_2,\delta_2}}-\tilde f)$$

(см. доказательство теоремы 5.2.2). □

Квазивыпуклость фильтра ϕ_3. Пусть

$$f(t,x,u_0,\ldots,u_\nu)=g_0(t,x,u_0)+g_1(t,x,u_1,\ldots,u_\nu),\ \ g_0\in E^{(2)}(J\times0\times G,\mathbb{R}^n),$$
$$g_1\in E^{(2)}(J\times0\times G^\nu,\mathbb{R}^n);\ \ \theta_i(t)=t-m_i(t)h-\omega(t),i=1,\ldots,\nu,\ t\in J,h>0,$$

$m_i(t)$ — кусочно-постоянная функция, принимающая неотрицательные целые значения, $w(t)\geqslant0$ — кусочно абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\dot\omega(t)<1$.

Рассмотрим множество

$$F_3^{(1)}=\{f(t,x)=g_0(t,x,u(t))+g_1(t,x,u(\theta_1(t)),\ldots,u(\theta_\nu(t)))=g_0(t,x)+g_1(t,x):u\in\Omega([\theta,b],U)\},$$
$$\theta=a-\hat mh-\hat\omega,\ \hat m=\max_{1\leqslant i\leqslant\nu}\sup_{t\in J}m_i(t),\ \hat\omega=\sup_{t\in J}\omega(t).$$

Определим в $F_3^{(1)}$ фильтр Φ_3 с помощью базиса:

$$B_3=\{W^{(3)}_{K,\delta}:K\subset0 — \text{компактное множество},\ \delta>0 — \text{произвольное число}\},$$

где

$$W^{(3)}_{K,\delta} = \left\{ f(t,x) \in F^{(1)}_3 : H_1(g_0 - \tilde{g}_0; K) + \sum_{j=1}^{p} H_1(g_j - \tilde{g}_j; K) \leqslant \delta \right\}.$$

Теорема 5.2.5. *Фильтр Φ_3 является квазивыпуклым.*

Доказательство. Пусть заданы произвольный элемент

$$W^{(3)}_{\tilde{f}} \in \Phi_3$$

и произвольное число $s \in \mathbb{N}$ и пусть

$$W^{(3)}_{K,\delta} \in W^{(3)}_{\tilde{f}}.$$

В качестве W_1 в определении 4.2.6 можно взять

$$W^{(3)}_{K,\frac{\delta}{s+1}}.$$

Допустим, что заданы точки

$$f_i(t,x) = g_{0i}(t,x) + g_{1i}(t,x) = g_0(t,x,u_i(t)) + g_1(t,x,u_i(\theta_1(t)),\ldots,u_i(\theta_\nu(t)) \in W^{(3)}_{K,\frac{\delta}{s+1}},\ i = \overline{0,s},$$

так что

$$H_1(g_{0i} - \tilde{g}_0; K) + H_1(g_{1i} - \tilde{g}_1; K) \leqslant \frac{\delta}{s+1},\ i = 0,\ldots,s,$$

и произвольная окрестность $V_{K_1,\varepsilon} \in \Re$.

В силу леммы 5.1.6 существует непрерывное отображение

$$\varphi_3 : \mathrm{co}(\{f_0,\ldots,f_s\}) \to F^{(1)}_3,$$

определенное формулой $\varphi_3(z) = \varphi_{\sigma_3} \circ \varphi(z) = f_\lambda \in F^{(1)}_3$, $\lambda \in \Sigma_0$, и удовлетворяющее условию

$$(z - \varphi_3(z)) \in V_{K_1,\varepsilon}\ \ \forall z \in \mathrm{co}(\{f_0,\ldots,f_s\}).$$

Остается показать, что $f_\lambda \in V^{(3)}_{K,\varepsilon}$. Для этого оценим величину

$$A_5 = H_1(g_{0\lambda} - \tilde{g}_0; K) + H_1(g_{1\lambda} - \tilde{g}_1; K).$$

Используя специфику разбиения, для первого слагаемого получим

$$H_1(g_{0\lambda} - \tilde{g}_0; K) = \sum_{\alpha=0}^{l} \int_{I^{(\alpha)} \cap J} \sup_{x \in K} \left(|g_{0\lambda}(t,x) - \tilde{g}_0(t,x)| + \left| \frac{\partial g_{0\lambda}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_0(t,x)}{\partial x} \right| \right) dt =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{l} \sum_{\beta=1}^{m} \sum_{i=0}^{s} \int_{I^{(\alpha)} \cap J} \sup_{x \in K} \left(|g_{0\lambda}(t,x) - \tilde{g}_0(t,x)| + \left| \frac{\partial g_{0\lambda}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_0(t,x)}{\partial x} \right| \right) dt \leqslant \sum_{i=0}^{s} H_1(g_{0i} - \tilde{g}_0; K)$$

(см. доказательство леммы 5.1.6).

Пусть функция $\omega_p(t) = t - \omega(t)$ при $t \in I_p = [t_p, t_{p+1}]$, $p = 1, \ldots, \mu$, $t_1 = a$, $t_{\mu+1} = b$ абсолютно непрерывна. Для второго слагаемого после замены переменной получаем

$$H_1(g_{1\lambda} - \tilde{g}_1; K) = \sum_{r=1}^{\mu} \int_{J_p} \sup_{x \in K} \left(|g_{1\lambda}(t,x) - \tilde{g}_1(t,x)| + \left| \frac{\partial g_{1\lambda}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_1(t,x)}{\partial x} \right| \right) dt =$$

$$= \sum_{p=1}^{\mu} \int_{J_{pp}} \dot{\rho}_p(t) \sup_{x \in K} \left(|g_{1\lambda}(t,x) - \tilde{g}_1(\rho_p(t),x)| + \left| \frac{\partial g_{1\lambda}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_1(t,x)}{\partial x} \right| \right) dt =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\mu} \sum_{\alpha=-k}^{l} \int_{I^{(\alpha)}} \chi(I_{pp}; t) \dot{\rho}_p(t) \sup_{x \in K} \left(|g_{1\lambda}(t,x) - \tilde{g}_1(s\rho_p(t),x)| + \left| \frac{\partial g_{1\lambda}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_1(t,x)}{\partial x} \right| \right) dt =$$

$$= \sum_{p=1}^{\mu} \sum_{\alpha=-k}^{l} \sum_{\beta=1}^{\mu} \sum_{\alpha=0}^{s} \int_{I^{(0)}_{\beta_i(\lambda)}} \chi(I_{pp}; t) \dot{\rho}_p(t) \sup_{x \in K} \Bigg(|g_{1i}(\rho_p(t),x) - \tilde{g}_1(\rho_p(t),x)| +$$

$$+ \left| \frac{\partial g_{1i}(\rho_1(t),x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_1(\rho_p(t),x)}{\partial x} \right| \Bigg) dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{s} \sum_{p=1}^{\mu} \int_{I_p} \sup_{x \in K} \left(|g_{1i}(t,x) - \tilde{g}_1(t,x)| + \left| \frac{\partial g_{1i}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_1(t,x)}{\partial x} \right| \right) dt = \sum_{i=0}^{s} H_1(g_{1i} - \tilde{g}_1; K). \quad (5.2.13)$$

Здесь $I_{pp} = [\omega_p(t_p), \omega_p(t_{p+1})]$, $s\rho_p(t) = \omega_p^{-1}(t)$.

Таким образом,

$$A_5 \leqslant \sum_{i=0}^{s} [H_1(g_{0i} - g_0; K) + H_1(g_{1i} - \tilde{g}_1; K)] \leqslant \delta.$$

□

Теорема 5.2.6. *Пусть в $E_f^{(1)}$ задано множество*

$$W^{(3)} = \{f = g_0 + g_1 : H_1(g_0 - \tilde{g}_0; K) + H_1(g_1 - \tilde{g}_1; K) \leqslant \delta_0\},$$

где $\delta_0 >$ — фиксированное число, $K_0 \subset 0$ — компактное множество. Тогда для произвольного $W_{\tilde{f}}^{(3)} \in \Phi_3$ имеет место включение

$$\operatorname{cone}([W^{(3)}]_{W_{\tilde{f}}^{(3)}} - \tilde{f}) \supset F_3^{(1)} - \tilde{f}. \quad (5.2.14)$$

Доказательство. Чтобы доказать включение (5.2.14), достаточно показать, что

$$\operatorname{cone}([W^{(3)}]_{W_{K_2,\delta_2}^{(3)}} - \tilde{f}) \supset F_3^{(1)} - \tilde{f}$$

(см. (5.2.3)).

Пусть $f - \tilde{f} \in F_3^{(1)} - \tilde{f}$, в силу леммы 5.1.6 можно построить последовательность таких непрерывных отображений

$$\varphi_3^{(i)} : \operatorname{co}(\{\tilde{f}, f\}) \to F_3^{(1)}, \;\; i = 1, 2, \ldots,$$

что

$$z_\lambda - \varphi_3^{(i)}(z_\lambda) \in V_{K_2,\varepsilon_i} \; \forall \lambda \in [0,1], \;\; i = 1, 2, \ldots,$$

где

$$z_\lambda = (1 - \lambda)\tilde{f} + \lambda f,$$

$$\varphi_3^{(i)}(z_\lambda) = f_\lambda(t,x) = g_{0\lambda}(t,x) + g_{1\lambda}(t,x) = g_0(t,x,u_\lambda(t)) + g_1(t,x,u_\lambda(\theta_1(t)), \ldots, u_\lambda(\theta_\nu(t)));$$

$\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$; функция $u_\lambda(t)$ определяется по формуле (5.2.5).

Теперь докажем существование такого числа $\lambda_0 \in (0,1)$, что

$$\varphi_3^{(i)}(z_\lambda) \in W_{K_2,\delta_2}^{(3)}, \;\; i = 1, 2, \ldots, \forall \lambda \in [0, \lambda_0]. \quad (5.2.15)$$

Оценим выражение

$$A_6 = H_1(g_{0\lambda} - \tilde{g}_0; K_2) + H_1(g_{1\lambda} - \tilde{g}_1; K_2).$$

Используя специфику разбиения, для первого слагаемого получим

$$H_1(g_{0\lambda} - \tilde{g}_0; K_2) = \int_{J_{1i}} \sup_{x \in K_2} \left(|g_0(t,x) - \tilde{g}_0(t,x)| + \left| \frac{\partial g_0(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_0(t,x)}{\partial x} \right| \right) dt,$$

где

$$J_{1i} = \bigcup_{\alpha=0}^{l} \bigcup_{\beta=1}^{m_i} (I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) \cap J).$$

Ясно, что

$$\operatorname{mes} J_{1i} \leqslant \sum_{\alpha=0}^{l} \sum_{\beta=1}^{m_i} \operatorname{mes} I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) \leqslant \lambda \operatorname{mes} J.$$

Следовательно, найдется такое $\lambda_0' \in (0,1)$, что

$$H_1(g_{0\lambda} - \tilde{g}_0; K_2) \leqslant \delta_2/2 \ \forall \lambda \in [0, \lambda_0'].$$

Для второго слагаемого аналогично (5.2.13) получаем

$$H_1(g_{1\lambda} - \tilde{g}_1; K_2) = \sum_{p=1}^{\mu} \int_{I_{pi}} \sup_{x \in K_2} \left(|g_1(t,x) - \tilde{g}_1(t,x)| + \left| \frac{\partial g_1(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_1(t,x)}{\partial x} \right| \right) dt,$$

где

$$\hat{I}_{pi} = \bigcup_{\alpha=-K}^{l} \bigcup_{\beta=1}^{m_i} (I_{\beta_i}^{(\alpha)}(\lambda) \cap I_p).$$

Ясно, что

$$\operatorname{mes} \hat{I}_{Pi} \leqslant \lambda(b - \theta).$$

Таким образом, существует такое $\lambda_0'' \in (0,1)$, что

$$H_1(g_{1\lambda} - \tilde{g}_1; K_2) \leqslant \delta_2/2 \ \ \forall \lambda \in [0, \lambda_0''].$$

Следовательно,

$$H_1(g_{0\lambda} - \tilde{g}_0; K_2) + H_1(g_{1\lambda} - \tilde{g}_1; K_2) \leqslant \delta_2 \ \ \forall \lambda \in [0, \lambda_0], \ \ \lambda_0 = \min(\lambda_0', \lambda_0'').$$

Включение (5.2.15) доказано. После этого аналогично получается, что

$$f - \hat{f} \in \operatorname{cone}([W^{(3)}]_{W^{(3)}_{K_2,\delta_2}} - \tilde{f})$$

(см. доказательство теоремы 5.2.2). □

Квазивыпуклость фильтра Φ_4. Пусть

$$f(t, x, u_1, \ldots, u_\nu) = \sum_{j=1}^{\nu} g_j(t, x, u_j), \ \ g_j \in E_f^{(2)};$$

функции $\theta_j(t), j = \overline{1,\nu}$, $t \in J$, кусочно абсолютно непрерывны и удовлетворяют условиям $\theta_j(t) \leqslant t$; $\dot{\theta}_j(t) > 0$.

Рассмотрим множество

$$F_4^{(1)} = \left\{ f(t,x) = \sum_{j=1}^{\nu} g_j(t, x, u(\theta_j(t))) = \sum_{j=1}^{\nu} g_j(t,x) : u(\cdot) \in \Omega([\theta, b], U) \right\},$$

$$\theta = \min_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \inf_{t \in J} \theta_j(t).$$

Определим в $F_4^{(1)}$ фильтр с помощью базиса

$$B_4 = \{W_{K,\delta}^{(4)} : K \subset 0 - \text{компактное множество},\ \delta > 0 - \text{произвольное число}\},$$

где

$$W_{K,\delta}^{(4)} = \Big\{ f(t,x) \in \digamma_4^{(1)} : \sum_{j=1}^{\nu} H_1(g_j - \tilde{g}_j; K) \leqslant \delta \Big\}.$$

Теорема 5.2.7. *Фильтр Φ_4 является квазивыпуклым.*

Доказательство. Пусть заданы произвольный элемент $W_{\tilde{f}}^{(4)} \in \Phi_4$ и произвольное число $s \in \mathbb{N}$ и пусть $W_{K,\delta}^{(4)} \subset W_{\tilde{f}}^{(4)}$. В качестве W_1 в определении 4.2.6 можно взять $W_{K,\frac{\delta}{s+1}}^{(4)}$.

Допустим, что заданы точки

$$f_i(t,x) = \sum_{j=1}^{\nu} g_{ji}(t,x) = \sum_{j=1}^{\nu} g_j(t,x,u_i(\theta_j(t))) \in W_{K,\frac{\delta}{s+1}}^{(n)}, \ \ i = \overline{0,s},$$

так что

$$\sum_{j=1}^{\nu} H_1(g_{ji} - \tilde{g}_j : K) = \frac{\delta}{s+1}, \ i = \overline{0,s},$$

и произвольная окрестность $V_{K,\varepsilon} \in \Re$.

В силу леммы 5.1.7 существует непрерывное отображение

$$\varphi_4 : \mathrm{co}(\{f_0,\dots,f_s\}) \to \digamma_4^{(1)},$$

определенное формулой $\varphi_4(z) = \varphi_{\sigma_4} \circ \varphi(z) = f_\lambda \in \Sigma_0$ и удовлетворяющее условию

$$(z - \varphi_4(z)) \in V_{K,\varepsilon} \ \ \forall z \in \mathrm{co}(\{f_0,\dots,f_s\}).$$

Остается показать, что $f_\lambda \in W_{K,\delta}^{(4)}, \lambda \in \Sigma_0$. Для этого оценим величину

$$A_6 = \sum_{j=1}^{\nu} H_1(g_{j\lambda} - \tilde{g}_j : K).$$

Пусть $\theta_j(t) = \theta_{j\alpha}(t)$ абсолютно непрерывна при $t \in I^{(\alpha)} = [t_\alpha, t_{\alpha+1}]$, $\alpha = \overline{1,p}, t_1 = a, t_{p+1} = b$.

После замены переменной, используя специфику разбиения, получим

$$\begin{aligned} &H_1(g_{j\lambda} - \tilde{g}_j : K) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{p} \int_J \sup_{x\in K} \left(|g_{j\lambda}(s_{j\alpha}(t),x) - \tilde{g}_j(\rho_{j\alpha}(t),x)| + \left| \frac{\partial g_{j\lambda}(\rho_{jk}(\nu,x))}{\partial x} - \frac{\partial g_j(\rho_{j\alpha}(\nu,x))}{\partial x} \right| \right) \dot{\rho}_{j\alpha}(t)dt = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{p=1}^{m}\sum_{i=0}^{s} \int_{J_{p_i}(\lambda)\cap I^{(\alpha)}} \sup_{x\in K} \Bigg(|g_{ji}(\rho_{j\alpha}(t),x) - \tilde{g}_j(\rho_{j\alpha}(t),x)| + \\ &+ \left| \frac{\partial g_{ji}(\rho_{j\alpha}(t),x)}{\partial x} - \frac{\partial \hat{g}_j(\rho_{j\alpha}(t),x)}{\partial x} \right| \Bigg) \dot{\rho}_{j\alpha}(t)dt \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=0}^{s} \int_{I^{(\alpha)}} \sup_{x\in K} \left(|g_{ji}(t,x) - \tilde{g}_j(t,x)| + \left| \frac{\partial g_{ji}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_j(t,x)}{\partial x} \right| \right) dt = \\ &= \sum_{i=0}^{s} H_1(g_{ji} - \tilde{g}_j : K) \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

(см. (5.1.37)).

Следовательно,

$$A_6 \leqslant \sum_{i=0}^{\nu} \bigg(\sum_{j=1}^{\nu} H_1(g_{j\lambda} - \tilde{g}_j : K) \bigg) \leqslant \delta,$$

поэтому $\varphi_4(z) \in W_{K,\delta}^{(4)}$. □

Теорема 5.2.8. *Пусть в $E_f^{(1)}$ задано множество*

$$W^{(4)} = \left\{ f = \sum_{j=1}^{\nu} g_j : \sum_{j=1}^{\nu} H_1(g_j - \tilde{g}_j : K_0) \leqslant \delta_0 \right\},$$

где $\delta_0 > 0$ — фиксированное число, $K_0 \subset 0$ — компактное множество. Тогда для произвольного $W_{\tilde{f}}^{(4)} \in \Phi_4$ имеет место включение

$$\operatorname{cone}([W^{(4)}]_{W_{\tilde{f}}^{(4)}} - \tilde{f}) \supset F_4^{(1)} - \tilde{f}. \tag{5.2.17}$$

Доказательство. Чтобы доказать включение (5.2.17), достаточно показать, что

$$\operatorname{cone}([W^{(4)}]_{W_{K_2,\delta_2}^{(4)}} - \tilde{f}) \supset F_4^{(1)} - \tilde{f}$$

(см. (5.2.3)).

Пусть $f - \tilde{f} \in F_4^{(1)} - \tilde{f}$, в силу леммы 5.1.7 можно построить последовательность таких непрерывных отображений

$$\varphi_4^{(i)} : \operatorname{co}\{\tilde{f}, f\} \to F_4^{(1)}, \;\; i = 1, 2, \ldots,$$

что

$$z_\lambda - \varphi_4^{(i)}(z_\lambda) \in V_{K_2,\varepsilon_i} \;\; \forall \lambda \in [0,1], \;\; i = 1, 2, \ldots,$$

где

$$z_\lambda = (1-\lambda)\tilde{f} + \lambda f, \varphi_4^{(i)}(z_\lambda) = f_\lambda(t,x) = \sum_{j=1}^{\nu} g_{j\lambda}(t,x) = \sum_{j=1}^{\nu} g_j(t,x,u_\lambda(\theta_j(t)));$$

$\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$; функция $u_\lambda(t)$ определяется формулой (5.2.5).

Теперь докажем существование такого числа $\lambda \in (0,1)$, что

$$\varphi_4^{(i)}(z_\lambda) \in W_{K_2,\delta_2}^{(4)}, \; i = 1, 2, \ldots \;\; \forall \lambda \in [0, \lambda_0]. \tag{5.2.18}$$

Оценим выражение

$$A_7 = \sum_{j=1}^{\nu} H_1(g_{j\lambda} - \tilde{g}_j : K_2).$$

Аналогично можно доказать, что

$$H_1(g_{j\lambda} - \tilde{g}_j : K_2) = \sum_{\alpha=1}^{p} \int_{I_{ji}^{(\alpha)}} \sup_{x \in K} \left(|g_j(t,x) - \tilde{g}_j(t,x)| + \left| \frac{\partial g_j(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{g}_j(t,x)}{\partial x} \right| \right) dt,$$

где

$$I_{ji}^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta=1}^{m_i} (I_{\beta_1}(\lambda) \bigcap I_j^{(\alpha)}).$$

Ясно, что

$$\operatorname{mes} I_{ji}^{(\alpha)} \leqslant \lambda(b - \theta).$$

Таким образом, существует такое $\lambda_0 \in (0,1)$, что

$$H_1(g_{j\lambda} - \tilde{g}_j : K) \leqslant \delta_2/\nu.$$

Следовательно,

$$A_7 \leqslant \delta_2.$$

Включение (5.2.18) доказано. После этого аналогично получается, что

$$f - \tilde{f} \in \operatorname{cone}([W^{(4)}]_{W_{K_2,\delta_2}^{(4)}} - \tilde{f})$$

(см. доказательство теоремы 5.2.2). □

Замечание 5.2.1. Все утверждения, приведенные в пп. 5.1 и 5.2, остаются в силе, если пространства

$$E^{(1)}(J\times 0,\mathbb{R}^n),\;\; E^{(2)}(J\times 0\times G^{\nu},\mathbb{R}^n)$$

заменены, соответственно, пространствами

$$E^{(1)}(J\times 0^s,\mathbb{R}^n),\;\; E^{(2)}(J\times 0^s\times G^{\nu},\mathbb{R}^n).$$

Например, в этом случае фильтр Φ_1 задается базисом, элементами которого служат множества

$$W^{(1)}_{K,\delta}=\{f(t,x_1,\dots,x_s)\in F^{(1)}_1 : H_1(f-\tilde f;K^s)\leqslant\delta\},$$

где

$$F^{(1)}_1=\{f(t,x_1,\dots,x_s)=f(t,x_1,\dots,x_s,u(\theta_1(t)),\dots,u(\theta_\nu(t))):u\in\Omega([\theta,b])\},$$

$$H_1(f-\tilde f;K)=\int\limits_J \sup_{(x_1,\dots,x_s)\in K^s}|f(t,x_1,\dots,x_s)|+\sum_{i=1}^{s}|f_{x_i}(t,x_1,\dots,x_s)|dt.$$

6. Оптимальные задачи с запаздываниями и разрывным начальным условием. Необходимые условия оптимальности

В этом параграфе для оптимальных задач с переменными запаздываниями в фазовых координатах и с переменными соизмеримыми запаздываниями в управлениях, на основе необходимого условия критичности, доказаны необходимые условия оптимальности: в форме интегрального и точечного принципов максимума для управлений и начальной функции; в форме неравенств и равенств для начального и конечного моментов. Общие необходимые условия конкретизированы: для задач с интегральным функционалом; для линейной задачи; для задачи быстродействия. Отдельно рассмотрен случай, когда запаздывания в управлениях несоизмеримы.

6.1. Постановка задачи. Формулировка основных результатов. Рассмотрим оптимальную задачу

$$\dot x(t)=f(t,x(\tau_1(t)),\dots,x(\tau_s(t)),u(\theta_1(t)),\dots,u(\theta_\nu(t))),\qquad(6.1.1)$$
$$t\in[t_0,t_1]\subset J,\ u\in\Omega_0,$$

$$x(t)=\varphi(t),t\in[\tau,t_0),x(t_0)=x_0,\varphi\in\Delta_0,x_0\in O,\qquad(6.1.2)$$

$$q^i(t_0,t_1,x_0,x(t_1))=0,i=1,\dots,l,\qquad(6.1.3)$$

$$q^0(t_0,t_1,x_0,x(t_1))\to\min,\qquad(6.1.4)$$

где $f\in E^{(2)}_f(J\times O^s\times G^s)$; запаздывания $\theta_i(t),i=1,\dots,\nu$ удовлетворяют условию соизмеримости (см. определение (5.2.1)); $\Delta_0=\{\varphi\in\Delta:\varphi(t)\in M\},M\subset G$ — выпуклое множество; $\Omega_0=\{u\in\Omega:u(t)\in U\}$, $U\subset G$ — произвольное множество; скалярные функции $q^i(t_0,t_1,x_0,x_1),i=\overline{1,l}$, непрерывно дифференцируемы на $J^2\times O^2$.

Задача (6.1.1)–(6.1.4) называется *оптимальной задачей с разрывным начальным условием.*

Определение 6.1.1. Соответствующее элементу

$$\sigma=(t_0,t_1,x_0,\varphi,u)\in B_2=J^2\times O\times\Delta_0\times\Omega_0$$

решение $x(t;\sigma)$ называется решением $x(t;\varrho)$, $\varrho=(t_0,x_0,\varphi,u)$, определенным на $[\tau,t_1]$ (см. определение 1.2.2).

Определение 6.1.2. Элемент $\sigma=(t_0,t_1,x_0,\varphi,u)\in B_2$ называется *допустимым,* если соответствующее решение $x(t)=x(t;\sigma)$ удовлетворяет граничным условиям (6.1.3).

Множество допустимых элементов обозначим B_{20}.

Определение 6.1.3. Элемент $\tilde{\sigma} = (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{u}) \in B_{20}$ называется *оптимальным,* если существуют число $\tilde{\delta} > 0$ и компакт $\tilde{K} \subset O$ такие, что для произвольных элементов $\sigma \in B_{20}$, удовлетворяющих условию

$$|\tilde{t}_0 - t_0| + |\tilde{t}_1 - t_1| + |\tilde{x}_0 - x_0| + \|\tilde{\varphi} - \varphi\| + H_1(\tilde{f} - f; \tilde{K}^s) \leqslant \tilde{\delta},$$

выполняется неравенство

$$q^0(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}(\tilde{t}_1)) \leqslant q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1)).$$

Здесь

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\omega) = f(\omega, \tilde{u}(\theta_1(t)), \ldots, \tilde{u}(\theta_\nu(t))),\ f = f(\omega) = f(\omega, u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))),$$

$$\omega = (t, x_1, \ldots, x_s), H_1(\tilde{f} - f; \tilde{K}^s) = \int_J \sup\{|\tilde{f}(t, x_1, \ldots, x_s) - f(t, x_1, \ldots, x_s)| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} |\tilde{f}_{x_i}(t, x_1, \ldots, x_s) - f_{x_i}(t, x_1, \ldots, x_s)| dt : (x_1, \ldots, x_s) \in \tilde{K}^s\};\ \tilde{x}(t) = x(t; \tilde{\sigma}).$$

Наша основная задача будет заключаться в нахождении необходимых условий оптимальности. Для формулировки основных результатов нам понадобятся следующие обозначения:

$$\omega_{0i}^-, \omega_{0i}^+, i = \overline{1, s};\ \omega_{1i}^-, \omega_{1i}^+, i = \overline{p+1, s};\ \gamma_i(t), \gamma_i, \dot{\gamma}_i^-, \dot{\gamma}_i^+, i = \overline{1, s};\ \hat{\gamma}_i^-, \hat{\gamma}_i^+, i = \overline{0, p+1}.$$

Эти обозначения были введены в п. 2.2;

$$Q = (q^0, \ldots, q^l)^*, \tilde{Q}_{x_0} = Q_{x_0}(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}(\tilde{t}_1));\ \tilde{f}[t] = \tilde{f}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(t))).$$

Теорема 6.1.1. *Пусть $\tilde{\sigma}$ — оптимальный элемент, $\tilde{t}_0 > a$ и выполнены следующие условия*:

6.1.1. $\gamma_i = \tilde{t}_0,\ i = \overline{1, p},\ \gamma_{p+1} < \cdots < \gamma_s < \tilde{t}_1$;

6.1.2. *существует такое число $\delta > 0$, что*

$$\gamma_1(t) \leqslant \cdots \leqslant \gamma_p(t),\ t \in (\tilde{t}_0 - \delta, \tilde{t}_0];$$

6.1.3. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\gamma}_i^-, i = \overline{1, s};$$

$$\lim_{\omega \to \omega_{0i}^-} \tilde{f}(\omega) = f_i^-,\ \omega \in (\tilde{t}_0 - \delta, \tilde{t}_0] \times O^s,\ i = \overline{0, p};$$

$$\lim_{(\omega_1, \omega_2) \to (\omega_{0i}^-, \omega_{1i}^-)} [\tilde{f}(\omega_1) - \tilde{f}(\omega_2)] = f_i^-,\ \omega_1, \omega_2 \in (\gamma_i - \delta, \gamma_i] \times O^s,\ i = \overline{p+1, s};$$

6.1.4. *существует конечный предел*

$$\lim_{\omega \to \omega_{s+1}^-} \tilde{f}(\omega) = f_{s+1}^-,\ \omega \in (\tilde{t}_1 - \delta, \tilde{t}_1] \times O^s,\ \omega_{s+1}^- = (\tilde{t}_1, \tilde{x}(\tau_1(\tilde{t}_1-)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(\tilde{t}_1-))).$$

Тогда существуют вектор $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$ и решение $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ уравнения

$$\dot{\psi}(t) = -\sum_{i=1}^{s} \psi(\gamma_i(t)) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t),\ t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1],\ \ \psi(t) = 0,\ t > \tilde{t}_1, \tag{6.1.5}$$

такие, что выполнены следующие условия:

6.1.5. *интегральный принцип максимума для управления*

$$\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \psi(t) \tilde{f}[t] dt \geqslant \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \psi(t) f(t, \tilde{x}(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))) dt\ \forall u \in \Omega_0;$$

6.1.6. *интегральный принцип максимума для начальной функции*

$$\sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\tilde{t}_0)}^{\tilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t)) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \tilde{\varphi}(t) dt \geqslant \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\tilde{t}_0)}^{\tilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t)) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \varphi(t) dt\ \forall \varphi \in \Delta_0;$$

6.1.7. *условия для функции $\psi(t)$*

$$\pi \tilde{Q}_{x_0} = -\psi(\tilde{t}_0),\ \pi \tilde{Q}_{x_1} = \psi(\tilde{t}_1);$$

6.1.8. *условия для моментов* $\tilde{t}_0$ *и* $\tilde{t}_1$

$$\pi\tilde{Q}_{t_0} \geqslant -\psi(\tilde{t}_0)\sum_{i=0}^{p}\left(\hat{\gamma}_{i+1}^{-} - \hat{\gamma}_{i}^{-}\right) f_i^{-} + \sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i)f_i^{-}\dot{\gamma}_i^{-}, \tag{6.1.6}$$

$$\pi\tilde{Q}_{t_1} \geqslant -\psi(\tilde{t}_1)f_{s+1}^{-}. \tag{6.1.7}$$

Теорема 6.1.2. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1 < b$ *и пусть выполнены условие* 6.1.1 *и следующие условия*:

6.1.9. *существует такое число* $\delta > 0$, *что*

$$\gamma_1(t) \leqslant \cdots \leqslant \gamma_p(t),\ t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \delta);$$

6.1.10. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\gamma}_i^{+},\ i = \overline{1, s};$$

$$\lim_{\omega\to\omega_{0i}^{+}} \tilde{f}(\omega) = f_i^{+},\ \omega \in (\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \delta] \times O^s,\ i = \overline{0, p};$$

$$\lim_{(\omega_1,\omega_2)\to(\omega_{0i}^{+},\omega_{1i}^{+})} [\tilde{f}(\omega_1) - \tilde{f}(\omega_2)] = f_i^{+},\ \omega_1, \omega_2 \in (\gamma_i, \gamma_i + \delta] \times O^s,$$

$$i = \overline{p+1, s};$$

6.1.11. *существует конечный предел*

$$\lim_{\omega\to\omega_{s+1}} \tilde{f}(\omega) = f_{s+1}^{+},\ \omega \in (\tilde{t}_1, \tilde{t}_1 + \delta] \times O^s.$$

Тогда существуют вектор $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$ *и решение* $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.5–6.1.7. *Кроме того,*

$$\pi\tilde{Q}_{t_0} \leqslant -\psi(\tilde{t}_0)\sum_{i=0}^{p}\left(\hat{\gamma}_{i+1}^{+} - \hat{\gamma}_{i}^{+}\right) f_i^{+} + \sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i)f_i^{+}\dot{\gamma}_i^{+}, \tag{6.1.8}$$

$$\pi\tilde{Q}_{t_1} \leqslant -\psi(\tilde{t}_1)f_{s+1}^{+}. \tag{6.1.9}$$

Теорема 6.1.3. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$ *и выполнены условия теорем* 6.1.1 *и* 6.1.2. *Пусть, кроме того,*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{p}\left(\hat{\gamma}_{i+1}^{-} - \hat{\gamma}_{i}^{-}\right) f_i^{-} = \sum_{i=0}^{p}\left(\hat{\gamma}_{i+1}^{+} - \hat{\gamma}_{i}^{+}\right) f_i^{+} = f_0, \\ f_i^{-}\dot{\gamma}_i^{-} = f_i^{+}\dot{\gamma}_i^{+},\ i = \overline{p+1, s}, \end{cases} \tag{6.1.10}$$

$$f_{s+1}^{-} = f_{s+1}^{+} = f_{s+1}. \tag{6.1.11}$$

Тогда существуют вектор $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_s) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$ *и решение* $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.5–6.1.7. *Кроме того,*

$$\pi\tilde{Q}_{t_0} = -\psi(\tilde{t}_0)f_0 + \sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i)f_i, \tag{6.1.12}$$

$$\pi\tilde{Q}_{t_1} = -\psi(\tilde{t}_1)f_{s+1}. \tag{6.1.13}$$

Точечный принцип максимума. Из принципов максимума 6.1.5, 6.1.6 стандартным способом можно получить точечные принципы максимума. Для этого нам понадобится вспомнить понятие точки Лебега.

Пусть $g(\cdot) \in L(J, \mathbb{R}^n)$. Точка $t' \in (a, b)$ называется точкой Лебега, если выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{t'}^{t'+\varepsilon} g(t)dt = g(t_0).$$

Почти все точки интервала J являются точками Лебега.

Пусть $u_k \in U$, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность, всюду плотная во множестве U. Через $I_k \subset (\theta_0, \theta_1)$ обозначим множество точек Лебега функций

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_i(t)) \psi(\omega_i(t)) \tilde{f}[\omega_i(t)] \dot{\omega}_i(t), \\ \sum_{i=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}]; \omega_i(t)) \psi(\omega_i(t)) f_i[\omega_i(t); u_k] \dot{\omega}_i(t),\end{gathered} \tag{6.1.14}$$

где

$$\begin{gathered}\theta_0 = \min(\theta_1(\tilde{t}_0), \ldots, \theta_\nu(\tilde{t}_0)),\ \ \theta_1 = \max(\theta_1(\tilde{t}_1), \ldots, \theta_\nu(\tilde{t}_1)); \\ f_i[t; u_k] = f(t, \tilde{x}(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(t)), \tilde{u}(\theta_1(t)), \ldots, \tilde{u}(\theta_{i-1}(t)), u_k, \\ \tilde{u}(\theta_{i+1}(t)), \ldots, \tilde{u}(\theta_\nu(t))); \omega_i(t) = \theta_i^{-1}(t).\end{gathered}$$

Пусть $t' \in I_k$. Функция

$$u_{\varepsilon k}(t) = \begin{cases} u_k, & t \in (t', t' + \varepsilon), \\ \tilde{u}(t), & t \notin (t', t' + \varepsilon), \end{cases}$$

принадлежит множеству Ω_0.

Следовательно,

$$\begin{gathered}\alpha = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; t) \psi(t) \tilde{f}[t] dt \geqslant \beta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; t) \psi(t) f(t, \tilde{x}(\tau_1(t)), \\ \ldots, \tilde{x}(\tau_s(t)), u_{\varepsilon k}(\theta_1(t)), \ldots, u_{\varepsilon k}(\theta_\nu(t))) dt.\end{gathered} \tag{6.1.15}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{i=1}^{\nu} \int_{\omega_i(t')}^{\omega_i(t'+\varepsilon)} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; t) \psi(t) \tilde{f}[t] dt + \int_{J_\theta} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; t) \psi(t) \tilde{f}[t] dt \geqslant \\ &\geqslant \beta = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{\omega_i(t')}^{\omega_i(t'+\varepsilon)} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; t) \psi(t) f_i[t; u_k] dt + \int_{J_\theta} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; t) \tilde{f}[t] dt,\end{aligned}$$

где

$$J_\theta = J \setminus \Bigg(\bigcup_{i=1}^{\nu} [\omega_i(t'), \omega_i(t' + \delta)] \Bigg).$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon} \int_{t'}^{t'+\varepsilon} \sum_{i=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_i(t)) \psi(\omega_i(t)) \tilde{f}[\omega_i(t)] \dot{\omega}_i(t) dt \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{t'}^{t'+\varepsilon} \sum_{i=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_i(t)) \psi(\omega_i(t)) f_i[\omega_i(t); u_k] \dot{\omega}_i(t) dt\end{aligned} \tag{6.1.16}$$

(см. (6.1.15)).

При $\varepsilon \to 0$ из (6.1.16) получаем, что для каждого $t' \in I_k$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_i(t')) \psi(\omega_i(t')) \tilde{f}[\omega_i(t')] \dot{\omega}_i(t') \geqslant \sum_{i=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_i(t')) \psi(\omega_i(t')) f_i[\omega_i(t'); u_k] \dot{\omega}_i(t'). \tag{6.1.17}$$

Пусть $I = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k$. Ясно, что $\operatorname{mes} I_k = \theta_1 - \theta_0$ и

$$I = [\theta_0, \theta_1] \setminus \Bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} ([\theta_0, \theta_1] \setminus I_k) \Bigg);$$

поэтому $\operatorname{mes} I = \theta_1 - \theta_0$.

Таким образом, для каждого $k = 1, 2, \ldots$ неравенство (6.1.17) выполнено почти всюду на $[\theta_0, \theta_1]$.

Отсюда можно заключить, что для почти всех $t \in [\theta_0, \theta_1]$ выполняется точечный принцип максимума

$$\sum_{i=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_i(t))\psi(\omega_i(t))\tilde{f}[\omega_i(t)]\dot{\omega}_i(t) = \max_{u\in U} \sum_{i=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_i(t))\psi(\omega_i(t)) f_i[\omega_i(t); u]\dot{\omega}_i(t). \quad (6.1.18)$$

Теперь докажем точечный принцип максимума для начальной функции.

Легко видеть, что из интегрального принципа максимума непосредственно следует

$$\int_{\tau}^{\tilde{t}_0} \sum_{i=p+1}^{s} [\chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \gamma_i(t))\psi(\gamma_i(t))\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)]\tilde{\varphi}(t)dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\tau}^{\tilde{t}_0} \sum_{i=p+1}^{s} [\chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \gamma_i(t))\psi(\gamma_i(t))\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)]\varphi(t)dt \ \forall \varphi \in \Delta_0. \quad (6.1.19)$$

Пусть $t' \in (\tau, \tilde{t}_0)$ — точка Лебега функций

$$\sum_{i=p+1}^{s} [\chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \gamma_i(t))\psi(\gamma_i(t))\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)]\tilde{\varphi}(t),$$
$$\sum_{i=p+1}^{s} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \gamma_i(t))\psi(\gamma_i(t))\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t).$$

Пусть $\varphi \in M$ — произвольная точка. Функция

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(t), \ t \in (t', t'+\varepsilon), \\ \varphi, \ \ t \notin (t', t'+\varepsilon), \end{cases}$$

принадлежит множеству Δ_0. Следовательно,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t'}^{t'+\varepsilon} \sum_{i=p+1}^{s} [\chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \gamma_i(t))\psi(\gamma_i(t))\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)]\tilde{\varphi}(t)dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{t'}^{t'+\varepsilon} \sum_{i=p+1}^{s} [\chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \gamma_i(t))\psi(\gamma_i(t))\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)]\varphi dt$$

(см. (6.1.19)).

При $\varepsilon \to 0$ получим

$$\sum_{i=p+1}^{s} [\chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \gamma_i(t'))\psi(\gamma_i(t'))\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t')]\dot{\gamma}_i(t')]\tilde{\varphi}(t') \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=p+1}^{s} [\chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \gamma_i(t'))\psi(\gamma_i(t'))\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t')]\dot{\gamma}_i(t')]\varphi.$$

Таким образом, для почти всех $t \in [\tau, \tilde{t}_0]$ выполняется точечный принцип максимума

$$\sum_{i=p+1}^{s} [\chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \gamma_i(t))\psi(\gamma_i(t))\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)]\tilde{\varphi}(t) =$$
$$= \max_{\varphi\in M} \sum_{i=p+1}^{s} [\chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \gamma_i(t))\psi(\gamma_i(t))\tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)]\varphi. \quad (6.1.20)$$

Некоторые замечания. 6.1.12. Пусть $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0-) = \tilde{x}_0$, тогда $f_0^- = \dots = f_p^-$, $f_i^- = 0$, $i = \overline{p+1, s}$. Поэтому условие (6.1.6) принимает вид

$$\pi \tilde{Q}_{t_0} \geqslant \psi(\tilde{t}_0) f_0^- .$$

6.1.13. Пусть $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0+) = \tilde{x}_0$, тогда $f_0^+ = \dots = f_p^+$, $f_i^+ = 0$, $i = \overline{p+1, s}$. Поэтому условие (6.1.8) принимает вид

$$\pi \tilde{Q}_{t_0} \leqslant \psi(\tilde{t}_0) f_0^+ .$$

6.1.14. Пусть функции $\dot{\gamma}_i(t)$, $i = \overline{1, s}$, $\tilde{u}(t)$, $f(t, x_1, \dots, x_s, u_1, \dots, u_\nu)$ кусочно непрерывны по t. Тогда выполнены условия 6.1.3, 6.1.4, 6.1.10 и 6.1.11.

6.1.15. Пусть

$$\dot{\gamma}_p^- < \dots < \dot{\gamma}_1^-, \quad \dot{\gamma}_1^+ < \dots < \dot{\gamma}_p^+ .$$

Тогда выполнены, соответственно, условия 6.1.2 и 6.1.9 (см. (2.2.10)).

6.1.16. Пусть

$$\operatorname{rank}(\tilde{Q}_{x_0}, \tilde{Q}_{x_1}) = 1 + l,$$

Тогда в теоремах 6.1.1 и 6.1.2 решение $\psi(t)$ является нетривиальным.

6.1.17. Пусть

$$\operatorname{rank}(\tilde{Q}_{t_0}, \tilde{Q}_{t_1}, \tilde{Q}_{x_0}, \tilde{Q}_{x_1}) = 1 + l.$$

Тогда в теореме 6.1.3 решение $\psi(t)$ является нетривиальным.

6.1.18. Пусть числа γ_i, $i = \overline{p+1, s}$, отличаются друг от друга, а максимальное из них меньше $\tilde{t}_1$. Тогда, без нарушения общности, вторая часть условия 6.1.1 выполнена.

6.1.19. Пусть $\gamma_i > \tilde{t}_0$, $i = \overline{1, s}$, тогда в формуле (6.1.6) $p = 0$, т.е.

$$\pi \tilde{Q}_{t_0} \geqslant \psi(\tilde{t}_0) f_0^- + \sum_{i=1}^{s} \psi(\gamma_i) f_i^- \dot{\gamma}_i^- .$$

6.1.20. Пусть $\gamma_i = \tilde{t}_0$, $i = \overline{1, s}$, тогда формула (6.1.6) принимает вид

$$\pi \tilde{Q}_{t_0} \geqslant -\psi(\tilde{t}_0) \sum_{i=0}^{s} (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^- .$$

6.1.21. Пусть $\gamma_i > \tilde{t}_1$, $i = \overline{\hat{s}, s}$, тогда теорема 6.1.1 также справедлива. В этом случае формула (6.1.6) принимает вид

$$\pi \tilde{Q}_{t_0} \geqslant -\psi(\tilde{t}_0) \sum_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^- + \sum_{i=p+1}^{\hat{s}} \psi(\gamma_i) f_i^- \dot{\gamma}_i^- .$$

Случай, когда некоторое $\gamma_i = \tilde{t}_1$, не рассматривается.

6.1.22. Теоремы 6.1.1 и 6.1.2 соответствуют случаям, когда вариация в точках $\tilde{t}_0$ и $\tilde{t}_1$ одновременно происходит слева и справа. Теорема 6.1.3 соответствует случаю, когда в точках $\tilde{t}_0$ и $\tilde{t}_1$ одновременно происходят двусторонние вариации.

Следующие теоремы соответствуют случаям, когда в точках $\tilde{t}_0$ и $\tilde{t}_1$ происходят смешанные вариации.

Теорема 6.1.4. *Пусть $\tilde{\sigma}$ — оптимальный элемент, $\tilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, и выполнены условия* 6.1.1–6.1.3 *и* 6.1.11. *Тогда существуют вектор $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, и решение $\psi(t)$ уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.5–6.1.7, (6.1.6) *и* (6.1.9).

Теорема 6.1.5. *Пусть $\tilde{\sigma}$ — оптимальный элемент, $\tilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, и выполнены условия* 6.1.1–6.1.3 *и* (6.1.19). *Тогда существуют вектор $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, и решение $\psi(t)$ уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.5–6.1.7, (6.1.6) *и* (6.1.13).

Теорема 6.1.6. *Пусть $\tilde{\sigma}$ — оптимальный элемент и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.4, 6.1.9 *и* 6.1.10. *Тогда существуют вектор $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, и решение $\psi(t)$ уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.5–6.1.7, (6.1.7) *и* (6.1.8).

Теорема 6.1.7. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ *— оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1 < b$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.9, 6.1.10 *и* (6.1.11). *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.5–6.1.7, (6.1.8) *и* (6.1.13).

Теорема 6.1.8. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ *— оптимальный элемент,* $\tilde{t}_0 > a$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.4 *и* (6.1.10). *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.5–6.1.7, (6.1.7) *и* (6.1.12).

Теорема 6.1.9. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ *— оптимальный элемент,* $\tilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.11 *и* (6.1.10). *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.5–6.1.7, (6.1.9) *и* (6.1.12).

Доказательство теоремы 6.1.1 на основе теорем 1.2.1, 2.2.1, 4.3.2 и квазивыпуклости фильтра Φ_1 приведено в пункте 6.5.

Квазивыпуклость фильтров Φ_i, $i = 2, 3, 4$, позволяет доказывать теоремы, аналогичные теоремам 6.1.1–6.1.9, для оптимальных задач вида (6.1.1)–(6.1.4), где уравнение (6.1.1) заменено, соответственно, уравнениями с несоизмеримыми запаздываниями в управлениях:

6.1.23.

$$\dot{x}(t) = g_0(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t))) + \sum_{j=1}^{p} g_j(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_{\nu+j}(t))),$$

где

$$g_0 \in E^{(2)}(J \times O^s \times G^\nu, \mathbb{R}^n),\ g_j \in E^{(2)}(J \times O^s \times G, \mathbb{R}^n);$$

$\theta_i(t)$, $i = 1, \dots, \nu$, удовлетворяют условию соизмеримости; функции $\theta_{\nu+j}(t)$, $j = 1, \dots, p$, $t \in \mathbb{R}$ абсолютно непрерывны и $\theta_{\nu+j}(t) \leqslant t$, $\dot{\theta}_{\nu+j}(t) > 0$.

6.1.24.

$$\dot{x}(t) = g_0(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(t)) + g_1(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t))),$$

где

$$g_0 \in E^{(2)}(J \times O^s \times G, \mathbb{R}^n),\ g_1 \in E^{(2)}(J \times O^s \times G^\nu, \mathbb{R}^n),$$
$$\theta_i(t) = t - m_i(t)h - \omega(t),\ i = 1, \dots, \nu,\ t \in \mathbb{R},$$

$m_i(t)$ — кусочно-постоянная функция, принимающая неотрицательные целые значения; $h > 0$, $\omega(t) \geqslant 0$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\dot{\omega}(t) < 1$.

6.1.25.

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{\nu} g_j(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_j(t))),$$

где $g_j \in E^{(2)}(J \times O^s \times G, \mathbb{R}^n)$; $\theta_j(t)$, $j = 1, \dots, \nu$, $t \in \mathbb{R}$ — кусочно абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\theta_j(t) \leqslant t$, $\dot{\theta}_j(t) > 0$.

6.2. Задача с закрепленными концами и интегральным функционалом. Пусть $F = (f^0, f)^* \in E^{(2)}(J \times O^s \times G^\nu, \mathbb{R}^{1+n})$, $x_{ii} \in O$, $i = 0, 1$ — фиксированные точки; функции $\theta_i(t)$, $i = 1, \dots, \nu$, удовлетворяют условию соизмеримости.

Рассмотрим оптимальную задачу

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t))), \tag{6.2.1}$$
$$t \in [t_0, t_1] \subset J,\ u \in \Omega_0,$$

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [\tau, t_0),\ x(t_0) = x_{00},\ x(t_1) = x_{11},\ \varphi \in \Delta_0, \tag{6.2.2}$$

$$I(\lambda) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t)))dt \to \min, \tag{6.2.3}$$

где

$$\lambda = (t_0, t_1, \varphi, u) \in B_3 = J^2 \times \Delta_0 \times \Omega_0.$$

Определение 6.2.1. Решение, соответствующее элементу $\lambda = (t_0, t_1, \varphi, u) \in B_3 = J^2 \times \Delta_0 \times \Omega_0$, называется решением $x(t;\sigma)$, $t \in [\tau, t_1]$, $\sigma = (t_0, t_1, x_{00}, \varphi, u)$ и обозначается через $x(t;\lambda)$, $t \in [\tau, t_1]$ (см. определение 6.1.1).

Определение 6.2.2. Элемент $\lambda \in B_3$ называется *допустимым,* если соответствующее решение $x(t) = x(t;\lambda)$, $t \in [\tau, t_1]$ удовлетворяет условию (6.2.2).

Множество допустимых элементов обозначим B_{30}.

Определение 6.2.3. Элемент $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{\varphi}, \widetilde{u}) \in B_{30}$ называется *оптимальным,* если существуют число $\widetilde{\delta} > 0$ и компакт $\widetilde{K} \subset O$ такие, что для произвольных элементов $\lambda \in B_{30}$, удовлетворяющих условию

$$|\widetilde{t}_0 - t_0| + |\widetilde{t}_1 - t_1| + \|\widetilde{\varphi} - \varphi\| + H_1(\widetilde{f} - f; \widetilde{K}^s) \leqslant \widetilde{\delta},$$

выполнено неравенство

$$I(\widetilde{\lambda}) \leqslant I(\lambda).$$

Задача (6.2.1)–(6.2.3) известным способом сводится к задаче вида (6.1.1)–(6.1.4) в пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$. Для этого введем обозначения:

$$x^0(t) = \int_{t_0}^{t} f^0(\xi, x(\tau_1(\xi)), \ldots, x(\tau_s(\xi)), u(\theta_1(\xi)), \ldots, u(\theta_\nu(\xi)))d\xi,\ \overline{\varphi} = (0, \varphi)^*,$$
$$\overline{x} = (x^0, x)^* \in \mathbb{R}^{1+n}, \overline{x}_{00} = (0, x_{00})^*, \overline{x}_1 = (x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^n)^*,$$
$$q^0(\overline{x}_1) = x_1^0,\ q^i(\overline{x}_1) = x_1^i - x_{11}^i,\ i = \overline{1, n}.$$

Легко заметить, что задача (6.2.1)–(6.2.3) эквивалентна следующей задаче:

$$\dot{\overline{x}}(t) = F(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))), \tag{6.2.4}$$
$$t \in [t_0, t_1] \subset J,\ u \in \Omega_0,$$
$$\overline{x}(t) = (0, \varphi(t))^*,\ t \in [\tau, t_0), \overline{x}(t_0) = \overline{x}_{00},\ \varphi \in \Omega_0, \tag{6.2.5}$$
$$q^i(\overline{x}(t_1)) = x^i(t_1) - x_{11}^i,\ i = \overline{1, n}, \tag{6.2.6}$$
$$q^0(\overline{x}(t_1)) \to \min. \tag{6.2.7}$$

Задача (6.2.4)–(6.2.7) представляет собой частный случай задачи (6.1.1)–(6.1.4). Поэтому следующие теоремы, с учетом специфики задачи (6.2.4)–(6.2.7) непосредственно вытекают, соответственно, из теорем 6.1.1–6.1.9.

Теорема 6.2.1. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент* $\widetilde{t}_0 > a$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.2. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

6.2.1. *существуют конечные пределы*:

$$\dot{\gamma}_i^-,\ i = \overline{1, s};$$
$$\lim_{\omega \to \omega_{0i}^-} \widetilde{F}(\omega) = F_i^-,\ \omega \in (a, \widetilde{t}_0] \times O^s,\ i = \overline{0, p};$$
$$\lim_{(\omega_1, \omega_2) \to (\omega_{0i}^-, \omega_{1i}^-)} [\widetilde{F}(\omega_1) - \widetilde{F}(\omega_2)] = F_i^-,\ \omega_1, \omega_2 \in (a, \gamma_i] \times O^s,\ \ i = \overline{p+1, s};$$

6.2.2. *существует конечный предел*

$$\lim_{\omega \to \omega_{s+1}} \widetilde{F}(\omega) = F_{s+1}^-,\ \omega \in (a, \widetilde{t}_1] \times O^s.$$

Тогда существует нетривиальное решение $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения*

$$\dot{\psi}(t) = -\sum_{i=1}^{s} \overline{\psi}(\gamma_i(t)) \overline{F}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t),\ t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1],\ \ \overline{\psi}(t) = 0,\ t > \widetilde{t}_1, \tag{6.2.8}$$

такое, что выполнены следующие условия:

$$\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1}\overline{\psi}(t)\tilde{F}[t]dt \geqslant \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1}\overline{\psi}(t)F(t,\tilde{x}(\tau_1(t)),\ldots,\tilde{x}(\tau_s(t)),u(\theta_1(t)),\ldots,u(\theta_\nu(t)))dt\ \forall u\in\Omega_0; \qquad (6.2.9)$$

$$\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\widetilde{\varphi}(t)dt \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\varphi(t)dt\ \ \forall\varphi\in\Delta_0; \qquad (6.2.10)$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_0)\sum_{i=0}^{p}\left(\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-\right)F_i^- - \sum_{i=p+1}^{s}\overline{\psi}(\gamma_i)F_i^-\dot{\gamma}_i^- \geqslant 0, \qquad (6.2.11)$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1)F_{s+1}^- \geqslant 0. \qquad (6.2.12)$$

Здесь

$$\widetilde{F}(\omega) = F(\omega,\widetilde{u}(\theta_1(t)),\ldots,\widetilde{u}(\theta_\nu(t))),\ \ \widetilde{F}[t] = \widetilde{F}(t,\widetilde{x}(\tau_1(t)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_s(t))),$$
$$\widetilde{F}_{x_i}[t] = \widetilde{F}_{x_i}(t,\widetilde{x}(\tau_1(t)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_s(t)));$$

всюду в обозначениях ω_{0i}, $i=\overline{1,s}$, ω_{1j}, $j=\overline{p+1,s}$, *вектор* $\widetilde{x}_0$ *заменен вектором* x_{00}.

Из (6.2.9) и (6.2.10), соответственно, следуют точечные принципы максимума:

$$\sum_{i=1}^{\nu}\chi([\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1];\omega_i(t))\overline{\psi}(\omega_i(t))\widetilde{F}[\omega_i(t)]\dot{\omega}_i(t) =$$

$$= \max_{u\in U}\sum_{i=1}^{\nu}\chi([\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1];\omega_i(t))\overline{\psi}(\omega_i(t))F_i[\omega_i(t);u]\ \text{п.в. на}\ [\theta_0,\theta_1], \qquad (6.2.13)$$

где

$$F_i[t;u] = F(t,\widetilde{x}(\tau_1(t)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_s(t)),\widetilde{u}(\theta_1(t)),\ldots,\widetilde{u}(\theta_{i-1}(t)),u,\widetilde{u}(\theta_{i+1}(t)),\ldots,\widetilde{u}(\theta_\nu(t)));$$

$$\sum_{i=p+1}^{s}[\chi([\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1];\gamma_i(t))\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)]\widetilde{\varphi}(t) =$$

$$= \max_{\varphi\in M}\sum_{i=p+1}^{s}[\chi([\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1];\gamma_i(t))\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)]\varphi\ \text{п.в. на}\ [\tau,\widetilde{t}_0]. \qquad (6.2.14)$$

Теорема 6.2.2. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ *— оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_1 < b$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.9. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

6.2.3. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\gamma}_i^+,\ i=1,\ldots,s;\ \lim_{\omega\to\omega_{0i}^+}\widetilde{F}(\omega) = F_i^+,\ \omega\in[\widetilde{t}_0,b)\times O^s,\ i=\overline{0,p};$$

$$\lim_{(\omega_1,\omega_2)\to(\omega_{0i}^+,\omega_{1i}^+)}[\widetilde{F}(\omega_1)-\widetilde{F}(\omega_2)] = F_i^+,\ \omega_1,\omega_2\in[\gamma_i,b)\times O^s,\ \ i=\overline{p+1,s};$$

6.2.4. *существует конечный предел*

$$\lim_{\omega\to\omega_{s+1}}\widetilde{F}(\omega) = F_{s+1}^+,\ \omega\in[\widetilde{t}_1,b)\times O^s.$$

Тогда существует такое нетривиальное решение $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.2.8), *что выполнены условия* (6.2.9) *и* (6.2.10). *Кроме того,*

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_0) \sum_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^{+} - \hat{\gamma}_i^{+}) F_i^{+} - \sum_{i=p+1}^{s} \overline{\psi}(\gamma_i) F_i^{+} \dot{\gamma}_i^{+} \leqslant 0, \tag{6.2.15}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1) F_{s+1}^{+} \leqslant 0. \tag{6.2.16}$$

Здесь всюду в обозначениях ω_{0i}^{+}, $i = \overline{1, s}$, ω_{1i}^{+}, $i = p+1, \ldots, s$, вектор $\widetilde{x}_0$ заменен вектором x_{00}.

Теорема 6.2.3. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$ *и выполнены условия теорем 6.2.1 и 6.2.2. Пусть, кроме того,*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^{-} - \hat{\gamma}_i^{-}) F_i^{-} = \sum\limits_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^{+} - \hat{\gamma}_i^{+}) F_i^{+} = F_0, \\ F_i^{-} \dot{\gamma}_i^{-} = F_i^{+} \dot{\gamma}_i^{+} = F_1,\ i = \overline{p+1, s}; \end{cases} \tag{6.2.17}$$

$$F_{s+1}^{-} = F_{s+1}^{+} = F_{s+1}. \tag{6.2.18}$$

Тогда существует такое нетривиальное решение $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.2.8), *что выполнены условия* (6.2.9) *и* (6.2.10). *Кроме того,*

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_0) F_0 - \sum_{i=p+1}^{s} \overline{\psi}(\gamma_i) F_i = 0, \tag{6.2.19}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1) F_{s+1} = 0. \tag{6.2.20}$$

Теорема 6.2.4. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.2, 6.2.1 *и* 6.2.4. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.2.8), *что выполнены условия* (6.2.9), (6.2.11) *и* (6.2.16).

Теорема 6.2.5. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.2, (6.2.18). *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.2.8), *что выполнены условия* (6.2.9)–(6.2.11) *и* (6.2.20).

Теорема 6.2.6. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.9, 6.2.2 *и* 6.2.3. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.2.8), *что выполнены условия* (6.2.9), (6.2.10), (6.2.12) *и* (6.2.15).

Теорема 6.2.7. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_1 < b$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.9, 6.2.3 *и* (6.2.18). *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.2.8), *что выполнены условия* (6.2.9), (6.2.10), (6.2.12) *и* (6.2.20).

Теорема 6.2.8. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_0 > a$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.2.2 *и* (6.2.17). *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.2.8), *что выполнены условия* (6.2.9), (6.2.10), (6.2.12) *и* (6.2.19).

Теорема 6.2.9. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.2.4 *и* (6.2.17). *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.2.8), *что выполнены условия* (6.2.9), (6.2.10), (6.2.16) *и* (6.2.19).

6.3. Линейная оптимальная задача. Пусть в задаче (6.2.1)–(6.2.3) функции f^0 и f линейны:

$$f^0(t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu) = \sum_{i=1}^{s} a_i^0(t) x_i + \sum_{j=1}^{\nu} b_j^0(t) u_j + f_0(t),$$

$$f(t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu) = \sum_{i=1}^{s} A_i(t) x_i + \sum_{j=1}^{\nu} B_j(t) u_j + f(t),$$

где
$$(a_i^0(t))^* \in \mathbb{R}^n,\ (b_j^0(t))^* \in \mathbb{R}^r,\ A_i(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B_j(t) \in \mathbb{R}^{n\times r},\ f(t) \in \mathbb{R}^n,\ f^0(t) \in \mathbb{R}$$
— суммируемые функции.

Для рассматриваемой линейной задачи множество допустимых элементов $\lambda = (t_0, t_1, \varphi, u)$ обозначим B_{31}.

Прежде чем сформулировать теоремы, аналогичные теоремам 6.2.1–6.2.9, введем обозначения
$$\overline{A}_i(t) = (a_i^0(t), A_i(t))^*, \overline{B_j(t)} = (b_j^0(t), B_j(t))^*, \overline{f} = (f^0(t), f(t))^*.$$

Теорема 6.3.1. *Пусть $\tilde{\lambda}$ — оптимальный элемент, $\tilde{t}_0 > a$ и выполнены условия* 6.1.1 *и* 6.1.2. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

6.3.1. *существуют конечные пределы*
$$\dot{\gamma}_i^-,\ \overline{A}_{i0}^- = \overline{A}_i(\tilde{t}_0-),\ i = \overline{1,s};\ \overline{B}_{j0}^- = \overline{B}_j(\tilde{t}_0-),\ u_{j0}^- = \tilde{u}(\theta_j(\tilde{t}_0-)),\ j = \overline{1,\nu};$$
$$\overline{A^-}_{i2} = \overline{A}_i(\gamma_i-),\ i = \overline{p+1,s},\ \overline{f}_0^- = \overline{f}(\tilde{t}_0-);$$

6.3.2. *существуют конечные пределы*
$$\overline{A}_{i1}^- = \overline{A}_i(\tilde{t}_1-),\ i = \overline{1,s}; \overline{B}_{j1}^- = \overline{B}_j(\tilde{t}_1-),\ u_{j1}^- = \tilde{u}(\theta_j(\tilde{t}_1-)),\ \overline{f}_1^- = \overline{f}(\tilde{t}_1-).$$

Тогда существует нетривиальное решение $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$, уравнения
$$\begin{aligned} &\dot{\psi}(t) = -\sum_{i=1}^{s} \overline{\psi}(\gamma_i(t))\overline{A}_i(\gamma_i(t))\dot{\gamma}_i(t),\ t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1], \\ &\overline{\psi}(t) = 0,\ t > \tilde{t}_1, \end{aligned} \tag{6.3.1}$$
такое, что выполнены следующие условия:
$$\Psi_0(t)\tilde{u}(t) = \max_{u\in U} \Psi_0(t)u,\ \textit{п.в. на } [\theta_0, \theta_1], \tag{6.3.2}$$
$$\Psi_1(t)\tilde{\varphi}(t) = \max_{\varphi\in M} \Psi_1(t)\varphi,\ \textit{п.в. на } [\tau, \tilde{t}_0] \tag{6.3.3}$$
(*см.* (6.2.13), (6.2.14));
$$\overline{\psi}(\tilde{t}_0)\hat{F}_0^- - \sum_{i=p+1}^{s} \overline{\psi}(\gamma_i)\hat{F}_i^- \geqslant 0, \tag{6.3.4}$$
$$\overline{\psi}(\tilde{t}_1)\hat{F}_1^- \geqslant 0, \tag{6.3.5}$$
где
$$\Psi_0(t) = \sum_{i=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_i(t))\overline{\psi}(\omega_i(t))\overline{B}_i(\omega_i(t))\dot{\omega}_i(t),$$
$$\Psi_1(t) = \sum_{i=p+1}^{s} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \gamma_i(t))\overline{\psi}(\gamma_i(t))\overline{A}_i(\gamma_i(t))\dot{\gamma}_i(t),$$
$$\hat{F}_0^- = \sum_{i=0}^{p}(\dot{\gamma}_{i+1}^- - \dot{\gamma}_i^-)\Bigg[\Bigg(\sum_{k=1}^{i}\overline{A}_{k0}^-\Bigg)x_{00} + \Bigg(\sum_{k=i+1}^{p}\overline{A}_{k0}^-\Bigg)\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0-) + \sum_{k=p+1}^{s}\overline{A}_{k0}^-\tilde{\varphi}(\tau_k(\tilde{t}_0-)) +$$
$$+\sum_{j=1}^{\nu}\overline{B}_{j0}^-u_{j0}^- + \overline{f}_0^-\Bigg],\ \hat{F}_i^- = \overline{A}_{i2}^-\dot{\gamma}_i^-,\ i = \overline{p+1,s},\ \hat{F}_1^- = \sum_{i=1}^{s}\overline{A}_{i1}^-\tilde{x}(\tau_i(\tilde{t}_1)) + \sum_{j=1}^{\nu}\overline{B}_{j1}^-u_{j1}^- + \overline{f}_1^-.$$

Теорема 6.3.2. *Пусть $\tilde{\lambda}$ — оптимальный элемент, $\tilde{t}_1 < b$ и выполнены условия* 6.1.1 *и* 6.1.9. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

6.3.3. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\gamma}_i^+,\ \overline{A}_{i0}^+ = \overline{A}_i(\tilde{t}_0+),\ i=\overline{1,s};\ \overline{B}_{j0}^+ = \overline{B}_j(\tilde{t}_0+),\ u_{j0}^+ = \tilde{u}(\theta_j(\tilde{t}_0+)),\ j=\overline{1,\nu};$$

$$\overline{A^+}_{i2} = \overline{A}_i(\gamma_i+),\ i=\overline{p+1,s},\ \overline{f}_0^+ = \overline{f}(\tilde{t}_0+);$$

6.3.4. *существуют конечные пределы*

$$\overline{A}_{i1}^+ = \overline{A}_i(\tilde{t}_1+),\ i=\overline{1,s};\ \overline{B}_{j1}^+ = \overline{B}_j(\tilde{t}_1+),\ u_{j1}^+ = \tilde{u}(\theta_j(\tilde{t}_1+)),\ \overline{f}_1^+ = \overline{f}(\tilde{t}_1+).$$

Тогда существует нетривиальное решение $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1) *такое, что выполнены условия* (6.3.2)–(6.3.3). *Кроме того,*

$$\overline{\psi}(\tilde{t}_0)\hat{F}_0^+ - \sum_{i=p+1}^{s} \overline{\psi}(\gamma_i)\hat{F}_i^+ \leqslant 0, \tag{6.3.6}$$

$$\overline{\psi}(\tilde{t}_1)\hat{F}_1^+ \geqslant 0, \tag{6.3.7}$$

где

$$\hat{F}_0^+ = \sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^+ - \hat{\gamma}_i^+)\Bigg[\Bigg(\sum_{k=1}^{i}\overline{A}_{k0}^+\Bigg)x_{00} + \Bigg(\sum_{k=i+1}^{p}\overline{A}_{k0}^+\Bigg)\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0+) + \sum_{k=p+1}^{s}\overline{A}_{k0}^+\tilde{\varphi}(\tau_k(\tilde{t}_0+)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\nu}\overline{B}_{j0}^+u_{j0}^+ + \overline{f}_0^+\Bigg],\ \hat{F}_i^+ = \overline{A}_{i2}^+\gamma_i^+,\ i=\overline{p+1,s},\ \hat{F}_1^+ = \sum_{i=1}^{s}\overline{A}_{i1}^+\tilde{x}(\tau_i(\tilde{t}_1)) + \sum_{j=1}^{\nu}\overline{B}_{j1}^+u_{j1}^+ + \overline{f}_1^+.$$

Теорема 6.3.3. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_i \in (a,b)$, $i=0,1$ *и выполнены условия теорем* 6.3.1–6.3.2. *Пусть, кроме того,*

$$\hat{F}_0^- = \hat{F}_0^+ = \hat{F}_0,\ \hat{F}_i^- = \hat{F}_i^+ = \hat{F}_i,\ i=\overline{p+1,s}, \tag{6.3.8}$$

$$\hat{F}_1^- = \hat{F}_1^+ = \hat{F}_1. \tag{6.3.9}$$

Тогда существует нетривиальное решение $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1) *такое, что выполнены условия* (6.3.2)–(6.3.3). *Кроме того,*

$$\overline{\psi}(\tilde{t}_0)\hat{F}_0 - \sum_{i=p+1}^{s} \overline{\psi}(\gamma_i)\hat{F}_i = 0, \tag{6.3.10}$$

$$\overline{\psi}(\tilde{t}_1)\hat{F}_1^+ = 0. \tag{6.3.11}$$

Теорема 6.3.4. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_i \in (a,b)$, $i=0,1$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.2, 6.3.1 *и* 6.3.4. *Тогда существует нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1) *такое, что выполнены условия* (6.3.2)–(6.3.4) *и* (6.3.7).

Теорема 6.3.5. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_i \in (a,b)$, $i=0,1$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.2, 6.3.1 *и* (6.3.9). *Тогда существует нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1) *такое, что выполнены условия* (6.3.2)–(6.3.4) *и* (6.3.11).

Теорема 6.3.6. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.9, 6.3.2 *и* 6.3.3. *Тогда существует нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1) *такое, что выполнены условия* (6.3.2), (6.3.3), (6.3.5) *и* (6.3.6).

Теорема 6.3.7. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1 < b$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.9, 6.3.3 *и* (6.3.9). *Тогда существует нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1) *такое, что выполнены условия* (6.3.2), (6.3.3), (6.3.6) *и* (6.3.11).

Теорема 6.3.8. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_0 > a$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.2, 6.3.2 *и* (6.3.8). *Тогда существует нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1) *такое, что выполнены условия* (6.3.2), (6.3.3), (6.3.5) *и* (6.3.10).

Теорема 6.3.9. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_i \in (a,b)$, $i = 0,1$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.2, 6.1.9, 6.3.4 *и* (6.3.8). *Тогда существует нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1) *такое, что выполнены условия* (6.3.2), (6.3.3), (6.3.7) *и* (6.3.10).

Пусть

$$U = \{u = (u^1, \dots, u^r)^* : \alpha_0^i \leqslant u^i \leqslant \alpha_1^i, i = \overline{1,\nu}\},$$
$$M = \{\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)* : \beta_0^i \leqslant \varphi^i \leqslant \beta_1^i, i = \overline{1,n}\},$$
$$\Psi_0(t) = (\Psi_0^1(t), \dots, \Psi_0^n(t)), \Psi_1(t) = (\Psi_1^1(t), \dots, \Psi_1^n(t)).$$

Тогда из принципов максимума (6.3.2) и (6.3.3), соответственно, можно определить определены оптимальное управление $\tilde{u}(t) = (\tilde{u}^1(t), \dots, \tilde{u}^r(t))^*$ и оптимальную начальную функцию $\tilde{\varphi}(t) = (\tilde{\varphi}^1(t), \dots, \tilde{\varphi}^n(t))^*$:

$$\tilde{u}^i(t) = \begin{cases} \alpha_0^i & \text{при } \Psi_0^i(t) < 0, \\ \alpha_1^i & \text{при } \Psi_0^i(t) > 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}^i(t) = \begin{cases} \beta_0^i & \text{при } \Psi_1^i(t) < 0, \\ \beta_1^i & \text{при } \Psi_1^i(t) > 0. \end{cases}$$

Задача быстродействия. Пусть $a_i^0(t) = 0$, $i = \overline{1,s}$, $b_j^0(t) = 0$, $j = \overline{1,\nu}$, $f^0(t) = 0$.

Теорема 6.3.10. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_0 > a$ *и выполнены условия* 6.1.1 *и* 6.1.2. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

6.3.5. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\gamma}_i^-, A_{i0}^- = A_i(\tilde{t}_0-),\ i = \overline{1,s};\ B_{j0}^- = B_j(\tilde{t}_0-), u_{j0}^- = \tilde{u}(\theta_j(\tilde{t}_0-)), j = \overline{1,\nu};$$
$$A_{i2}^- = A_i(\gamma_i-),\ i = \overline{p+1,s},\ \overline{f_0^-} = \overline{f}(\tilde{t}_0-);$$

6.3.6. *существуют конечные пределы*

$$A_{i1}^- = A_i(\tilde{t}_1-),\ i = \overline{1,s};\ B_{j1}^- = B_j(\tilde{t}_1-), u_{j1}^- = \tilde{u}(\theta_j(\tilde{t}_1-)),\ \overline{f_1^-} = \overline{f}(\tilde{t}_1-).$$

Тогда существует нетривиальное решение $\psi(t)$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения*

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}(t) = -\sum_{i=1}^{s} \psi(\gamma_i(t)) A_i(\gamma_i(t)) \dot{\gamma}_i(t),\ t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1], \\ &\psi(t) = 0,\ t > \widetilde{t}_1, \end{aligned} \tag{6.3.12}$$

такое, что выполнены следующие условия:

$$\Psi_2(t)\tilde{u}(t) = \max_{u \in U} \Psi_2(t) u \ \ \textit{п.в. на}\ \ [\theta_0, \theta_1], \tag{6.3.13}$$

$$\Psi_3(t)\tilde{\varphi}(t) = \max_{\varphi \in M} \Psi_3(t) \varphi \ \ \textit{п.в. на}\ \ [\tau, \tilde{t}_0], \tag{6.3.14}$$

$$\psi(\tilde{t}_0)\hat{f}_0^- - \sum_{i=p+1}^{s} \psi(\gamma_i)\hat{f}_i^- \geqslant -\psi(\tilde{t}_1)\hat{f}_1^-, \psi(\tilde{t}_1)\hat{f}_1^- \geqslant 0.$$

Здесь

$$\Psi_2(t) = \sum_{i=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_i(t)) \overline{\psi}(\omega_i(t)) B_i(\omega_i(t)) \dot{\omega}_i(t),$$

$$\Psi_3(t)=\sum_{i=p+1}^{s}\chi([\tilde t_0,\tilde t_1];\gamma_i(t))\overline{\psi}(\gamma_i(t))A_i(\gamma_i(t))\dot\gamma_i(t),$$

$$\hat f_0^-=\sum_{i=0}^{p}(\hat\gamma_{i+1}^- -\hat\gamma_i^-)\Bigg[\bigg(\sum_{k=1}^{i}A_{k0}^-\bigg)x_{00}+\bigg(\sum_{k=i+1}^{p}A_{k0}^-\bigg)\tilde\varphi(\tilde t_0-)+\sum_{k=p+1}^{s}A_{k0}^-\tilde\varphi(\tau_k(\tilde t_0-))+$$

$$+\sum_{j=1}^{\nu}B_{j0}^-u_{j0}^-+f_0^-\Bigg],\ \hat f_i^-=A_{i2}^-\gamma_i^-,\ i=\overline{p+1,s},\ \hat f_1^-=\sum_{i=1}^{s}A_{i1}^-\tilde x(\tau_i(\tilde t_1))+\sum_{j=1}^{\nu}B_{j1}^-u_{j1}^-+f_1^-.$$

Теорема 6.3.11. *Пусть $\tilde\lambda$ — оптимальный элемент, $\tilde t_1<b$ и выполнены условия* 6.1.1 *и* 6.1.9. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия:*

6.3.7. *существуют конечные пределы*

$$\dot\gamma_i^+,\ A_{i0}^+=A_i(\tilde t_0+),\ i=\overline{1,s};\ B_{j0}^+=B_j(\tilde t_0+),\ u_{j0}^+=\tilde u(\theta_j(\tilde t_0+)),\ j=\overline{1,\nu};$$
$$A_{i2}^+=A_i(\gamma_i+),\ i=\overline{p+1,s},\ \overline{f}_0^+=\overline{f}(\tilde t_0+);$$

6.3.8. *существуют конечные пределы*

$$A_{i1}^+=A_i(\tilde t_1+),\ i=\overline{1,s};\ B_{j1}^+=B_j(\tilde t_1+),\ u_{j1}^+=\tilde u(\theta_j(\tilde t_1+)),\ \overline{f}_1^+=\overline{f}(\tilde t_1+).$$

Тогда существует нетривиальное решение $\psi(t)$, $t\in[\tilde t_0,\tilde t_1]$, уравнения (6.3.12) *такое, что выполнены условия* (6.3.13), (6.3.14). *Кроме того,*

$$\psi(\tilde t_0)\hat f_0^+-\sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i)\hat f_i^+\leqslant 0,\psi(\tilde t_1)\hat f_1^+-\sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i)\hat f_i^+\leqslant -\psi(\tilde t_1)\hat f_1^+,$$

где

$$\hat f_0^+=\sum_{i=0}^{p}(\hat\gamma_{i+1}^+ -\hat\gamma_i^+)\Bigg[\bigg(\sum_{k=1}^{i}A_{k0}^+\bigg)x_{00}+\bigg(\sum_{k=i+1}^{p}A_{k0}^+\bigg)\tilde\varphi(\tilde t_0+)+\sum_{k=p+1}^{s}A_{k0}^+\tilde\varphi(\tau_k(\tilde t_0+))+$$

$$+\sum_{j=1}^{\nu}B_{j0}^-u_{j0}^++f_0^-\Bigg],\hat f_i^+=A_{i2}^-\gamma_i^+,\ i=\overline{p+1,s},\hat f_1^+=\sum_{i=1}^{s}A_{i1}^+\tilde x(\tau_i(\tilde t_1))+\sum_{j=1}^{\nu}B_{j1}^+u_{j1}^++f_1^+.$$

Теорема 6.3.12. *Пусть $\tilde\lambda$ — оптимальный элемент, $\tilde t_i\in(a,b)$ и выполнены условия теорем* 6.3.10 *и* 6.3.11,

$$\hat f_0^-=\hat f_0^+=\hat f_0,\ \hat f_i^-=\hat f_i^+=\hat f_i, i=\overline{p+1,s}, \tag{6.3.15}$$
$$\hat f_1^-=\hat f_1^+=\hat f_1. \tag{6.3.16}$$

Тогда существует нетривиальное решение $\psi(t)$, $t\in[\tilde t_0,\tilde t_1]$, уравнения (6.3.12) *такое, что выполнены условия* (6.3.13) *и* (6.3.14). *Кроме того,*

$$\psi(\tilde t_0)\hat f_0-\sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i)\hat f_i\geqslant 0,\psi(\tilde t_1)f_1\geqslant 0.$$

Теорема 6.3.13. *Пусть $\tilde\lambda$ — оптимальный элемент, $\tilde t_i\in(a,b)$, $i=0,1$ и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.2, 6.3.5 *и* 6.3.8. *Тогда существует функция $(\psi_0,\psi(t))$, где $\psi_0=\mathrm{const}\leqslant 0,\psi(t)$ удовлетворяет уравнению* (6.3.12) *и выполнены условия* (6.3.13) *и* (6.3.14). *Кроме того,*

$$\psi(\tilde t_0)\hat f_0^- -\sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i)\hat f_i^-\geqslant\psi_0,\ \psi_0+\psi(\tilde t_1)\hat f_1^+\leqslant 0.$$

Теорема 6.3.14. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_i \in (a,b)$, $i = 0,1$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.2, 6.3.5 *и* 6.3.16. *Тогда существует нетривиальное решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12) *такое, что выполнены условия* (6.3.13) *и* (6.3.14). *Кроме того,*

$$\psi(\tilde{t}_0)\hat{f}_0^- - \sum_{i=p+1}^{s} \psi(\gamma_i)\hat{f}_i^- \geqslant -\psi(\tilde{t}_1)\hat{f}_1, \;\; \psi(\tilde{t}_1)\hat{f}_1 \geqslant 0.$$

Теорема 6.3.15. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.9, 6.3.6 *и* 6.3.7. *Тогда существует нетривиальное решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12) *такое, что выполнены условия* (6.3.13) *и* (6.3.14). *Кроме того,*

$$\psi(\tilde{t}_0)\hat{f}_0^+ - \sum_{i=p+1}^{s} \psi(\gamma_i)\hat{f}_i^+ \leqslant 0, \;\; \psi(\tilde{t}_1)\hat{f}_1^- \geqslant 0.$$

Теорема 6.3.16. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1 < b$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.9, 6.3.7 *и* 6.3.16. *Тогда существует нетривиальное решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12) *такое, что выполнены условия* (6.3.13) *и* (6.3.14). *Кроме того,*

$$\psi(\tilde{t}_0)\hat{f}_0^+ - \sum_{i=p+1}^{s} \psi(\gamma_i)\hat{f}_i^+ \leqslant \psi(\tilde{t}_1)\hat{f}_1^+, \;\; \psi(\tilde{t}_1)\hat{f}_1^+ \geqslant 0.$$

Теорема 6.3.17. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_0 > a$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.2, 6.1.9, 6.3.6 *и* 6.3.15. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12), *что выполнены условия* (6.3.13) *и* (6.3.14). *Кроме того,*

$$\psi(\tilde{t}_0)\hat{f}_0 - \sum_{i=p+1}^{s} \psi(\gamma_i)\hat{f}_i \geqslant -\psi(\tilde{t}_1)\hat{f}_1^-, \;\; \psi(\tilde{t}_1)\hat{f}_1^- \geqslant 0.$$

Теорема 6.3.18. *Пусть* $\tilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_i \in (a,b), i = 0,1$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.2, 6.1.9, 6.3.8 *и* (6.3.15). *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12), *что выполнены условия* (6.3.13) *и* (6.3.14). *Кроме того,*

$$\psi(\tilde{t}_0)\hat{f}_0 - \sum_{i=p+1}^{s} \psi(\gamma_i)\hat{f}_i \leqslant 0, \;\; \psi(\tilde{t}_0)\hat{f}_0 - \sum_{i=p+1}^{s} \psi(\gamma_i)\hat{f}_i \leqslant -\psi(\tilde{t}_1)\hat{f}_1^+.$$

6.4. Задача с несоизмеримыми запаздываниями в управлениях. Пусть в задаче (6.1.1)–(6.1.4) правая часть f дифференциального уравнения (6.1.1) принадлежит пространству $E^{(1)}(J \times O^s \times G^\nu, \mathbb{R}^n)$; запаздывания $\theta_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,\nu}$, кусочно абсолютно непрерывны и удовлетворяет условиям $\theta_i(t) \leqslant t$, $\dot{\theta}_i(t) > 0$, $U \subset O$ — выпуклое множество.

Множество допустимых элементов $\sigma = (t_0, t_1, x_0, \varphi, u) \in B_2$ обозначим B_{21}.

Определение 6.4.1. Элемент $\tilde{\sigma} = (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{u}) \in B_2$ называется *оптимальным,* если существует число $\tilde{\delta} > 0$ такое, что для произвольных элементов $\sigma \in B_2$, удовлетворяющих условию

$$|\tilde{t}_0 - t_0| + |\tilde{t}_1 - t_1| + |\tilde{x}_0 - x_0| + \|\tilde{\varphi} - \varphi\| + \|\tilde{u} - u\| \leqslant \tilde{\delta},$$

выполнено неравенство

$$q^0(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}(\tilde{t}_1)) \leqslant q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1)).$$

Для рассматриваемой задачи также справедливы теоремы, аналогичные теоремам 6.1.1–6.1.9, лишь с тем изменением, что вместо интегрального принципа максимума относительно управления выполняется линеаризованный принцип максимума.

Переходим к формулировке основных теорем.

Теорема 6.4.1. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_0 > a$ *и выполнены условия теоремы* 6.1.1. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие,* *что выполнены условия* 6.1.6–6.1.8. *Кроме того, для управления* $\tilde{u}(t)$ *выполняется линеаризованный принцип максимума*

$$\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \psi(t) \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_j}[t]\tilde{u}(\theta_i(t))dt \geqslant \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \psi(t) \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_j}[t]u(\theta_i(t))dt \ \ \forall u \in \Omega_0. \tag{6.4.1}$$

Теорема 6.4.2. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1 < b$ *и выполнены условия теоремы* 6.1.2. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.6, 6.1.7, (6.1.8), (6.1.9) *и* (6.4.1).

Теорема 6.4.3. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1 \in (a, b)$ *и выполнены условия теоремы* 6.1.3. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.6, 6.1.7, (6.1.12), (6.1.13) *и* (6.4.1).

Теорема 6.4.4. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1 \in (a, b)$ *и выполнены условия* 6.1.1–6.1.3, 6.1.11. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.6, 6.1.7, (6.1.6), (6.1.9) *и* (6.4.1).

Теорема 6.4.5. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1 \in (a, b)$ *и выполнены условия* 6.1.1–6.1.3, 6.1.11. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.6, 6.1.7, (6.1.6), (6.1.13) *и* (6.4.1).

Теорема 6.4.6. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ — *оптимальный элемент и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.4, 6.1.9, 6.1.10. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.6, 6.1.7, (6.1.7), (6.1.8) *и* (6.4.1).

Теорема 6.4.7. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1 < b$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.9, 6.1.10, 6.1.11. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$ *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.6, 6.1.7, (6.1.8), (6.1.13) *и* (6.4.1).

Теорема 6.4.8. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_0 > a$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.4, (6.1.10). *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$ *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.6, 6.1.7, (6.1.7), (6.1.12) *и* (6.4.1).

Теорема 6.4.9. *Пусть* $\tilde{\sigma}$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$ *и выполнены условия* 6.1.1, 6.1.11, (6.1.10). *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0, \pi_0 \leqslant 0$ *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.1.5) *такие, что выполнены условия* 6.1.6, 6.1.7, (6.1.7), (6.1.9) *и* (6.4.1).

Замечание 6.4.1. Пусть $\theta_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, \nu}$ — абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\theta_i(t) \leqslant t, \dot{\theta}_i(t) > 0$, $i = \overline{1, \nu}$. Тогда из интегрального принципа максимума (6.4.1) следует точечный принцип максимума

$$\left[\sum_{j=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_j(t))\psi(\omega_j(t))\tilde{f}_{u_j}[\omega_j(t)]\dot{\omega}_j(t)\right]\tilde{u}(t) =$$

$$= \max_{u \in U}\left[\sum_{j=1}^{\nu} \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1];\ \omega_j(t))\psi(\omega_j(t))\tilde{f}_{u_j}[\omega_j(t)]\dot{\omega}_j(t)\right]u \ \text{ п.в. на } \ [\theta_0, \theta_1].$$

6.5. Доказательство теоремы 6.1.1.

Вспомогательные утверждения. Пусть $K \subset O$ — компактное множество, $\alpha > 0$ — некоторое заданное число. В пространствах $E_f^{(1)}(J \times O^s, \mathbb{R}^n)$ и $E_f(J \times O^s, \mathbb{R}^n)$, соответственно, определим множества

$$W^{(1)}(K; \alpha) = \{\delta f : H_1(\delta f; K^s) \leqslant \alpha\},$$

$$W(K; \alpha) = \Big\{\delta f : \exists m_{\delta,K}(\cdot), L_{\delta f,K}(\cdot) \in L(J, \mathbb{R}_+),\ \int_J [m_{\delta,K}(t) + L_{\delta f,K}(t)]dt \leqslant \alpha\Big\}.$$

Лемма 6.5.1. *Пусть* $K_i \subset O, i = 0, 1$ — *компактные множества*; *при этом* $K_0 \subset \operatorname{int} K_1, \alpha_1 > 0$ — *некоторое число. Тогда существует такое число* $\alpha_0 > 0$, *что*

$$W^{(1)}(K; \alpha_1) \subset W(K_0; \alpha_0). \tag{6.5.1}$$

Доказательство. Пусть $\delta f \in W^{(1)}(K; \alpha_1)$. Следовательно,

$$\int_J \sup\Big\{|\delta f(t, x_1, \dots, x_s)| + \sum_{i=1}^{s} |\delta f_{x_i}(t, x_1, \dots, x_s)| : (x_1, \dots, x_s) \in K_1^s\Big\} dt \leqslant \alpha_1.$$

Аналогично доказательству леммы 2.1.2 можно установить, что при $t \in J$ для произвольных $x_i', x_i'' \in K_0, i = \overline{1, s}$, выполнены неравенства

$$|\delta f(t, x_1', \dots, x_s') - \delta f(t, x_1'', \dots, x_s'')| \leqslant L_{\delta f, K_0}(t) \sum_{i=1}^{s} |x_i' - x_i''|,$$

где

$$L_{\delta f, K_0}(t) = n^2(\beta + 1) \sup\{|\delta f(t, x_1, \dots, x_s)| + \sum_{i=1}^{s} |\delta f_{x_i}(t, x_1, \dots, x_s)| : (t, x_1, \dots, x_s) \in K_1^s\};$$

положительное число β вычисляется по формуле (2.1.1).

С другой стороны, очевидно, что при $(t, x_1, \dots, x_s) \in J \times K_0^s$ имеем

$$|\delta f(t, x_1, \dots, x_s)| \leqslant m_{\delta f, K_0}(t),$$

где

$$m_{\delta f, K_0}(t) = \sup\{|\delta f(t, x_1, \dots, x_s)| : (t, x_1, \dots, x_s) \in K_i^s\}.$$

На основе этих соотношений получим

$$\int_J [m_{\delta f, K_0}(t) + L_{\delta f, K_0}(t)] dt \leqslant \alpha_1(1 + n^2)(\beta + 1) = \alpha_0.$$

Включение (6.5.1) доказано. □

Каждому элементу

$$\kappa = (t_0, t_1, x_0, \varphi, f) \in J^2 \times O \times \Delta \times E_f^{(1)}$$

сопоставим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t), \dots, x(\tau_s(t))), \ \ t \in [t_0, t_1]$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), t \in [\tau, t_0), \ \ x(t_0) = x_0.$$

Определение 6.5.1. Решение, соответствующее элементу $\kappa = (t_0, t_1, x_0, \varphi, f)$, называется решением $x(t; \mu)$, $\mu = (t_0, x_0, \varphi, f)$, определенным на $[\tau, t_1]$, и обозначается $x(t; \kappa)$ (см. определение 1.2.1).

Таким образом,

$$\tilde{x}(t) = x(t; \tilde{\sigma}) = x(t; \tilde{\kappa}) = x(t; \tilde{\mu}), t \in [\tau, \tilde{t}_1], \tag{6.5.2}$$

где

$$\tilde{\kappa} = (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{f}), \tilde{f} = f(t, x_1, \dots, x_s, \tilde{u}(\theta_1(t)), \dots, \tilde{u}(\theta_\nu(t))).$$

Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы 1.2.1.

Теорема 6.5.1. *Пусть* $\alpha_1 > 0$ — *некоторое заданное число,* $K_1 \subset G$ — *компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества* $\operatorname{cl} \tilde{\varphi}(J_1) \cup \tilde{x}([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1])$. *Тогда существует число* $\delta_1 > 0$ *такое, что каждому элементу*

$$\kappa \in V(\tilde{\kappa}; K_1, \delta_1, \alpha_1) = (V(\tilde{t}_0; \delta_1) \cap J) \times (V(\tilde{t}_1; \delta_1) \cap J) \times (V(\tilde{x}_0; \delta_1) \cap O) \times$$
$$\times (V(\tilde{\varphi}; \delta_1) \cap \Delta) \times [\tilde{f} + (W^{(1)}(K_1; \alpha_1) \cap V_{K_1, \delta_1})]$$

соответствует решение $x(t;\kappa) \in \operatorname{int} K_1$. *Кроме того, для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_1]$, *что для произвольного* $\kappa \in V(\tilde{\kappa}; K_1, \delta, \alpha_1)$ *выполнено неравенство*

$$|x(\tilde{t}_1; \tilde{\kappa}) - x(t_1; \kappa)| \leqslant \varepsilon.$$

Замечание 6.5.1. Теорема 6.5.1 остается в силе, если множество $V(\tilde{\kappa}; K_1, \delta_1, \alpha_1)$ заменено множеством

$$V(\tilde{\kappa}; K_1, \delta_1) = (V(\tilde{t}_0; \delta_1) \cap J) \times (V(\tilde{t}_1; \delta_1) \cap J) \times (V(\tilde{x}_0; \delta_1) \cap O) \times$$
$$\times (V(\tilde{\varphi}; \delta_1) \cap \Delta) \times [\tilde{f} + (W^{(1)}(K_1; \delta_1).$$

Теперь рассмотрим топологическое векторное пространство

$$E_\kappa = \mathbb{R}_{t_0} \times \mathbb{R}_{t_1} \times \mathbb{R}^n_{x_0} \times E_\varphi \times E^{(1)}_f = \mathbb{R}^{2+n}_y \times E_\varsigma$$

точек $\kappa = (t_0, t_1, x_0, \varphi, f) = (y, \varsigma)$, где $y = (t_0, t_1, x_0)^*$, $\varsigma = (\varphi, f)$.

Множество

$$X_0 = [a, \tilde{t}_0] \times [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1] \times O \subset \mathbb{R}^{2+n}_y$$

является локально выпуклым подпространством относительно индуцируемой из $\mathbb{R}^{2+n}_y$ топологии.

Через $D_0 \subset E_\kappa$ обозначим множество элементов $\kappa \in X_0 \times \Delta \times E^{(1)}_f$, каждому из которых соответствует решение $x(t;\kappa)$. Множество D_0 не пусто, так как $\tilde{\kappa} \in D_0$.

Лемма 6.5.2. *Множество* D_0 *конечно локально выпукло.*

Доказательство. Пусть $\kappa_0 = (y_0, \varsigma_0) = (t^0_0, t^0_1, x^0_0, \varphi_0, f_0) \in D_0$ — произвольная фиксированная точка и пусть $L_{\varsigma_0} \subset E\varsigma$ — линейное многообразие (см. п. 4.1), т.е.

$$L_{\varsigma_0} = \left\{ \varsigma_0 + \delta\varsigma : \delta\varsigma = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta\varsigma_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, s} \right\},$$

где $\delta\varsigma_i$, $i = \overline{1, k}$ — фиксированные точки.

Существует такое число $\delta_1 > 0$, что каждому элементу

$$\kappa \in V(\tilde{\kappa}_0; K_1, \delta_1) = (V(t^0_0; \delta_1) \cap [a, \tilde{t}_0]) \times (V(t^0_1; \delta_1) \cap [\tilde{t}^0_0, \tilde{t}^0_1]) \times (V(x^0_0; \delta_1) \cap O) \times$$
$$\times (V(\varphi_0; \delta_1) \cap \Delta) \times [f_0 + W^{(1)}(K_1; \delta_1)]$$

соответствует решение $x(t;\kappa) \in \operatorname{int} K_1$ (см. замечание 6.5.1 и теорему 6.5.1).

Пусть число $\delta \in (0, \delta_1]$ настолько мало, что окрестность точки ς_0

$$V_{\varsigma_0} = \left\{ \varsigma_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta\varsigma_i : |\lambda_i| \leqslant \delta, i = \overline{1, k} \right\} \subset L_{\varsigma_0}$$

содержится во множестве

$$(V(\varphi_0; \delta_1) \cap \Delta) \times [f_0 + W^{(1)}(K_1; \delta_1)].$$

Таким образом, существуют выпуклые окрестности

$$V_{y_0} = (V(t^0_0; \delta) \cap [a, \tilde{t}_0]) \times (V(t^0_1; \delta) \cap [\tilde{t}^0_0, \tilde{t}^0_1]) \times (V(x^0_0; \delta) \cap O)) \subset X_0, \;\; V_{\varsigma_0} \subset L_{\varsigma_0}$$

такие, что

$$V_{y_0} \times V_{\varsigma_0} \subset D_0.$$

Следовательно, множество D_0 является конечно локально выпуклым относительно пространства $X_0 \times E_\varsigma$. □

На множестве D_0 определим отображение

$$T : D_0 \to \mathbb{R}^n_T$$

формулой

$$T(\kappa) = x(t_1; \kappa).$$

Лемма 6.5.3. *Отображение T дифференцируемо в точке $\tilde\kappa$ и*

$$dT_{\tilde\kappa}(\delta\kappa) = \delta x(\tilde t_1;\delta\mu) + f^-_{s+1}\delta t_1 \ \ \forall\delta\kappa = (\delta t_0, \delta t_1, \delta x_0, \delta\varphi, \delta f) \in E_\kappa - \tilde\kappa, \tag{6.5.3}$$

где

$$\delta x(\tilde t_1;\delta\mu) = \left\{Y(\tilde{t_0};\tilde t_1)\sum_{i=0}^{p}(\hat\gamma^-_{i+1} - \hat\gamma^-_i)f^-_i - \sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i;\tilde t_1)f^-_i\dot\gamma^-_i\right\}\delta t_0 +$$

$$+Y(\tilde{t_0};\tilde t_1)\delta x_0 + \sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(t);\tilde t_1)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(t)]\dot\gamma_i t)dt + \int_{\tilde{t_0}}^{\tilde t_1} Y(t;\tilde t_1)\delta f[t]dt \tag{6.5.4}$$

(*см. теорему* 2.2.1).

Доказательство. Пусть $L_{\tilde\varsigma} \subset E_\varsigma$ — линейное многообразие и пусть

$$V_0 \subset X_0 - \tilde y, V \subset L_{\tilde\varsigma} - \tilde\varsigma$$

— ограниченные выпуклые окрестности нуля, где $\tilde y = (\tilde t_0, \tilde t_1, \tilde x_1)^*$, $\tilde\varsigma = (\tilde\varphi, \tilde f)$.

Из конечной локальной выпуклости множества D_0 и теоремы 2.2.1 следует существование такого числа $\varepsilon_0 > 0$, что для произвольного $(\varepsilon, \delta\varsigma) \in [0, \varepsilon_0] \times V_0 \times V$

$$\tilde\varsigma + \varepsilon\delta\varsigma \in D_0$$

и

$$x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \tilde\kappa + \varepsilon\delta\kappa) - x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \tilde\kappa) = x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \tilde\mu + \varepsilon\delta\mu) - x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \tilde\mu) =$$
$$= \Delta x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \varepsilon\delta\mu) = \varepsilon\delta x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \delta\mu) + o(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \varepsilon\delta\mu),$$

где вариация $\delta x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \delta\mu)$ вычисляется по формуле (2.2.4) (см. определение 6.5.1 и (6.5.2)).

Имеем:

$$T(\tilde\kappa + \varepsilon\delta\varsigma) - T(\tilde\kappa) = x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \tilde\kappa + \varepsilon\delta\kappa) - \tilde x(\tilde t_1) = x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \tilde\kappa + \varepsilon\delta\kappa) +$$
$$+\tilde x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1) - \tilde x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1) - \tilde x(\tilde t_1) = \varepsilon\delta x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \delta\mu) + o(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \varepsilon\delta\mu) +$$
$$+\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1} \tilde f[t]dt, \ \ \delta\mu = (\delta t_0, \delta x_0, \delta\varphi, \delta f). \tag{6.5.5}$$

Легко заметить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta x(\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1; \delta\mu) = \delta x(\tilde t_1; \delta\mu)$$

равномерно по $\delta\kappa = (\delta t_0, \delta t_1, \delta x_0, \delta\varphi, \delta f) \in V_0 \times V$ и

$$\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_1 + \varepsilon\delta t_1} \tilde f[t]dt = \varepsilon f^-_{s+1}\delta t_1 + o(\varepsilon\delta\varsigma).$$

С учетом этих равенств и формулы вариации (2.2.4), из (6.5.5) получаем:

$$T(\tilde\kappa + \varepsilon\delta\kappa) - T(\tilde\kappa) = \varepsilon[\delta x(\tilde t_1;\delta\mu) + f^-_{s+1}\delta t_1] + o(\varepsilon\delta\kappa) = \varepsilon dT_{\tilde\kappa}(\delta\kappa) + o(\varepsilon\delta\kappa), \tag{6.5.6}$$

где $\delta x(\tilde t_1;\delta\mu)$ имеет вид (6.5.4). □

Конечно локально выпуклое множество D. Дифференцируемость отображения P в точке $\tilde z$. Рассмотрим векторное пространство

$$E_z = \mathbb{R}_\xi \times E_\kappa$$

точек $z = (\xi, \kappa)$.

Введем множества

$$X = [0, \infty) \times X_0, D = [0, \infty) \times D_0.$$

Множество D является конечно локально выпуклым в подпространстве $X \times E_\varsigma \subset E_z$ (см. лемму 6.5.2).

На множестве D определим отображение

$$P : D \to \mathbb{R}^{1+l}_p$$

формулой
$$P(z) = Q(t_0, t_1, x_0, T(\kappa)) + (\xi, 0, \dots, 0)^*,$$
где $Q = (q^0, \dots, q^l)^*$.

Лемма 6.5.4. *Отображение P дифференцируемо в точке $\tilde{z} = (0, \tilde{\kappa})$ и*
$$dP_{\tilde{z}}(\delta z) = \Big\{\tilde{Q}_{t_0} + \tilde{Q}_{x_1}\Big[Y(\tilde{t_0};\tilde{t}_1)\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-)f_i^- - \sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i;\tilde{t}_1)f_i^-\dot{\gamma}_i^-\Big]\Big\}\delta t_0 +$$
$$+[\tilde{Q}_{t_1} + \tilde{Q}_{x_1}f_{s+1}^-]\delta t_1 + [\tilde{Q}_{x_0} + \tilde{Q}_{x_1}Y(\tilde{t_0};\tilde{t}_1)]\delta x_0 + \sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} \tilde{Q}_{x_1}Y(\gamma_i(t);\tilde{t}_1)\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)dt +$$
$$+\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1} \tilde{Q}_{x_1}Y(t;\tilde{t}_1)\delta f[t]dt + (\delta\xi, 0, \dots, 0)^*, \quad \delta z = (\delta\xi, \delta\kappa) \in E_z - \delta z. \tag{6.5.7}$$

Доказательство. Пусть $L_{\tilde{\varsigma}} \subset E_\varsigma$ — произвольное линейное многообразие и пусть
$$V_0 \subset X - \tilde{y}, \quad V \subset L_{\tilde{\varsigma}}$$
— произвольные выпуклые ограниченные окрестности нуля, где
$$\tilde{y} = (0, \tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0)^*, \tilde{\varsigma} = (\tilde{\varphi}, \tilde{f}).$$
Существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для произвольных $(\varepsilon, \delta z) = (\varepsilon, \delta\xi, \delta\kappa) \in [0, \varepsilon_0] \times V_0 \times V$
$$\tilde{z} + \varepsilon\delta z \in D$$
и справедлива формула (6.5.6).

Имеем:
$$P(\tilde{z}+\varepsilon\delta z) - P(\tilde{z}) = Q(\tilde{t}_0+\varepsilon\delta t_0, \tilde{t}_1+\varepsilon\delta t_1, \tilde{x}_0+\varepsilon\delta x_0, T(\tilde{\kappa}+\varepsilon\delta\kappa)) - Q(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, T(\tilde{\kappa})) + \varepsilon(\delta\xi, 0, \dots, 0)^*.$$
Пусть число $\varepsilon_0 > 0$ настолько мало, что
$$T(\tilde{\kappa}) + (T(\tilde{\kappa}+\varepsilon\delta\kappa) - T(\tilde{\kappa})) \in O \ \ \forall (t, \varepsilon, \delta\xi, \delta\kappa) \in [0,1] \times [0, \varepsilon_0] \times V_0 \times V$$
(см. теорему 6.5.1).

Теперь преобразуем разность
$$Q(\tilde{t}_0+\varepsilon\delta t_0, \tilde{t}_1+\varepsilon\delta t_1, \tilde{x}_0+\varepsilon\delta x_0, T(\tilde{\kappa}+\varepsilon\delta\kappa)) - Q(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, T(\tilde{\kappa})) =$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}Q(\tilde{t}_0+\varepsilon t\delta t_0, \tilde{t}_1+\varepsilon t\delta t_1, \tilde{x}_0+\varepsilon t\delta x_0, T(\tilde{\kappa}) + t(T(\tilde{\kappa}+\varepsilon\delta\kappa) - T(\tilde{\kappa}))dt =$$
$$= \varepsilon[\tilde{Q}_{t_0}\delta t_0 + \tilde{Q}_{t_1}\delta t_1 + \tilde{Q}_{x_0}\delta x_0 + \tilde{Q}_{x_1}dT_{\tilde{\kappa}}(\delta\kappa)] + \alpha(\varepsilon\delta z),$$
где
$$\alpha(\varepsilon\delta z) = \varepsilon\int_0^1 \{[\tilde{Q}_{t_0}[\varepsilon;t] - \tilde{Q}_{t_0}]\delta t_0 + [\tilde{Q}_{t_1}[\varepsilon;t] - \tilde{Q}_{t_1}]\delta t_1 + [\tilde{Q}_{x_0}[\varepsilon;t] - \tilde{Q}_{x_0}]\delta x_0 +$$
$$+[\tilde{Q}_{x_1}[\varepsilon;t] - \tilde{Q}_{x_1}]dT_{\tilde{\kappa}}(\delta\kappa)\}dt + \int_0^1 \tilde{Q}_{x_1}[\varepsilon;t]o(\varepsilon\delta\kappa)dt, \tilde{Q}_{t_0} = Q_t(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, T(\tilde{\kappa})),$$
$$\tilde{Q}_{t_0}[\varepsilon;t] = Q_{t_0}(\tilde{t}_0+\varepsilon t\delta t_0, \tilde{t}_1+\varepsilon t\delta t_1, \tilde{x}_0+\varepsilon t\delta x_0, T(\tilde{\kappa}) + t(T(\tilde{\kappa}+\varepsilon\delta\kappa) - T(\tilde{\kappa})).$$
Нетрудно заметить, что
$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\tilde{Q}_{t_i}[\varepsilon;t] - \tilde{Q}_{t_i}) = 0, \ \lim_{\varepsilon\to 0}(\tilde{Q}_{x_i}[\varepsilon;t] - \tilde{Q}_{x_i}) = 0, \ i = 0, 1,$$
равномерно по $(t, \delta z) \in [0,1] \times V_0 \times V$. Поэтому $\alpha(\varepsilon\delta z) = o(\varepsilon\delta z)$.

Таким образом,
$$P(\tilde{z}+\varepsilon\delta z) - P(\tilde{z}) = \varepsilon[\tilde{Q}_{t_0}\delta t_0 + \tilde{Q}_{t_1}\delta t_1 + \tilde{Q}_{x_0}\delta x_0 + \tilde{Q}_{x_1}dT_{\tilde{\kappa}}(\delta\kappa) + (\delta\xi, 0, \dots, 0)] + o(\varepsilon\delta z).$$
Отсюда, согласно равенствам (6.5.3) и (6.5.4), получаем (6.5.7). □

Квазивыпуклость фильтра $\Phi_{\tilde z}$. Непрерывность отображения P на фильтре $\mathrm{co}([\Phi_{\tilde z}])$. В топологическом векторном пространстве E_z определим фильтр $\Phi_{\tilde z}$ как прямое произведение фильтров

$$\Phi_{\tilde z} = \Phi_{\tilde y} \times \Phi_{\tilde\varphi} \times \Phi_1,$$

где фильтры $\Phi_{\tilde y}$ и $\Phi_{\tilde\varphi}$, соответственно, определяются выпуклыми базисами

$$\{(V_0 \cap [0,\infty)) \times (V_{\tilde t_0} \cap [a, \tilde t_0]) \times (V_{\tilde t_1} \cap [\tilde t_0, \tilde t_1]) \times V_{\tilde x_0} : V_0 \subset \mathbb{R}_\xi;$$
$$V_{\tilde t_i} \subset \mathbb{R}_{t_i}, i = 1, 2, V_{\tilde x_0} \subset O \text{ — выпуклые окрестности}\};$$
$$\{V_{\tilde\varphi} \cap \Delta_0 : V_{\tilde\varphi} \subset E_\varphi \text{ — выпуклая окрестность}\};$$

фильтр Φ_1 был введен в п. 5.2.

Фильтр $\Phi_{\tilde z}$ является квазивыпуклым, так как это прямое произведение выпуклых фильтров $\Phi_{\tilde y}, \Phi_{\tilde\varphi}$ на квазивыпуклый фильтр Φ_1.

Согласно теореме 6.5.1 и замечанию 6.5.1, существует такое число $\delta_1 > 0$, что множество

$$W = [0,\infty) \times (V(\tilde t_0;\delta_1) \cap [a,\tilde t_0]) \times (V(\tilde t_1;\delta_1) \cap [\tilde t_0,\tilde t_1]) \times V(\tilde x_0;\delta_1) \times [V(\tilde\varphi;\delta_1) \cap \Delta_0] \times [\tilde f + W^{(1)}(K_1;\delta_1)] \subset D;$$

при этом отображение

$$P : W \to \mathbb{R}_p^{1+l}$$

непрерывно в индуцируемой из E_z топологии. Здесь $V(\tilde x_0;\delta_1) \subset O$.

Элемент $W^{(1)}_{K_1,\delta_1}$ фильтра Φ_1 содержится в выпуклом множестве $\tilde f + W^{(1)}(K_1;\delta_1)$ (см. п. 5.1). Поэтому

$$\mathrm{co}(W_{\tilde z}(K_1;\delta_1)) \subset W \subset D,$$

где

$$W_{\tilde z}(K_1;\delta_1) = [0.\infty) \times (V(\tilde t_0;\delta_1) \cap [a,\tilde t_0]) \times (V(\tilde t_1;\delta_1) \cap [\tilde t_0,\tilde t_1]) \times V(\tilde x_0;\delta_1) \times$$
$$\times V(\tilde\varphi;\delta_1) \cap \Delta_0 \times W^{(1)}(K_1;\delta_1) \in \Phi_{\tilde z}.$$

Следовательно, существует элемент $W_{\tilde z}(K_1;\delta_1)$ фильтра $\Phi_{\tilde z}$ такой, что

$$P : \mathrm{co}\, W_{\tilde z}(K_1;\delta_1) \to \mathbb{R}_p^{1+l}$$

непрерывно.

Таким образом, отображение P определено и непрерывно на фильтре $\mathrm{co}([\Phi_{\tilde z}])$.

Критичность отображения P на фильтре $\Phi_{\tilde z}$. Точка $\tilde z = (0, \tilde\kappa) = (0, \tilde t_0, \tilde t_1, \tilde x_0, \tilde\varphi, \tilde f)$ принадлежит всем элементам фильтра $\Phi_{\tilde z}$, при этом $P(\tilde z) = (q^0(\tilde t_0, \tilde t_1, \tilde x_0, \tilde x(\tilde t_1)), 0, \dots, 0)^*$.

Введем множество

$$\hat B_{20} = \{\kappa = (t_0, t_1, x_0, \varphi, f) : f = f(t, x_1, \dots, x_s, u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t)),\ (t_0, t_1, x_0, \varphi, u) \in B_{20}\}.$$

Для произвольного элемента

$$z = (\xi, \kappa) \in W_{\tilde z} \cap ([0,\infty) \times \hat B_{20}),$$

где $W_{\tilde z} \in \Phi_{\tilde z}$, имеем

$$P(z) = (q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1;\kappa)), 0, \dots, 0)^*.$$

Элемент $\tilde\sigma = (\tilde t_0, \tilde t_1, \tilde x_0, \tilde\varphi, \tilde u) \in B_{20}$ является оптимальным, поэтому существует такой элемент $W(K_2;\delta_2) \in \Phi_{\tilde z}$, где $\delta_2 \in (0, \tilde\delta)$, $K_2 \subset O$ — компактное множество, содержащее $\tilde K$, что для произвольного элемента

$$z \in W_{\tilde z}(K_2;\delta_2) \cap ([0,\infty) \times \hat B_{20})$$

имеет место неравенство

$$q^0(\tilde t_0, \tilde t_1, \tilde x_0, \tilde x(\tilde t_1)) \leqslant q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1;\kappa)) + \xi.$$

Легко видеть, что

$$P(W_{\tilde z}(K_2;\delta_2) \cap ([0,\infty) \times \hat B_{20})) \subset L = \{(p^0, 0, \dots, 0)^* \in \mathbb{R}_p^{1+p} : p^0 \in \mathbb{R}\},$$

и точка $P(\tilde z)$ является граничной точкой множества

$$P(W_{\tilde z}(K_2;\delta_2) \cap ([0,\infty) \times \hat B_{20}))$$

относительно пространства L.

Таким образом,

$$P(\tilde z) \in \partial(P(W_{\tilde z}(K_2;\delta_2)\cap L))$$

и, тем более,

$$P(\tilde z) \in \partial(P(W_{\tilde z}(K_2;\delta_2))).$$

Вывод необходимых условий оптимальности. Все предпосылки теоремы 4.3.2 выполнены. Следовательно, существуют ненулевой вектор $\pi = (\pi_0,\ldots,\pi_l)$ и такой элемент $\tilde W_{\tilde z} \in \Phi_{\tilde z}$, что выполнено неравенство

$$\pi dP_{\tilde z}(\delta z) \leqslant 0 \ \ \forall \delta z \in \operatorname{cone}(\tilde W_{\tilde z} - \tilde z), \tag{6.5.8}$$

где $dP_{\tilde z}$ имеет вид (6.5.7).

Введем функцию

$$\psi(t) = \pi \tilde Q_{x_1} Y(t;\tilde t_1), \tag{6.5.9}$$

которая, как легко видеть, удовлетворяет уравнению (6.1.5) и условиям

$$\psi(\tilde t_1) = \pi \tilde Q_{x_1}, \psi(t) = 0, t > \tilde t_1. \tag{6.5.10}$$

Из неравенства (6.5.8), с учетом (6.5.7), (6.5.9), (6.5.10), получим

$$\Big[\pi \tilde Q_{t_0} + \psi(\tilde t_0)\sum_{i=0}^{p}(\hat\gamma_{i+1}^- - \hat\gamma_i^-)f_i^- - \sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i)f_i^-\dot\gamma_i^-\Big]\delta t_0 +$$
$$+[\pi\tilde Q_{t_1} + \psi(\tilde t_{-1})f_{s+1}^-]\delta t_1 + [\pi\tilde Q_{x_0} + \psi(\tilde t_0)]\delta x_0 + \sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\tilde t_0)}^{\tilde t_0}\psi(\gamma_i(t))\tilde f_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot\gamma_i(t)dt +$$
$$+\int_{\tilde t_0}^{\tilde t_1}\psi(t)\delta f[t]dt + \pi_0\delta\xi \leqslant 0 \ \ \forall \delta z \in \operatorname{cone}(\tilde W_{\tilde z} - \tilde z). \tag{6.5.11}$$

Условие $\delta z \in \operatorname{cone}(\tilde W_{\tilde z} - \tilde z)$ эквивалентно условиям $\delta\xi \in [0,\infty)$, $\delta t_0 \in (-\infty,0]$, $\delta t_1 \in (-\infty,0]$, $\delta x \in_0 \in \mathbb{R}^n_{x_0}$, $\delta\varphi \in \operatorname{cone}(\tilde W_{\tilde\varphi} - \tilde\varphi)$, $\delta f \in \tilde W^{(1)}_{\tilde f} - \tilde f$, где

$$\tilde W_{\tilde\varphi} = \tilde V_{\tilde\varphi} \cap \Delta \in \Phi_{\tilde\varphi}, \quad \tilde W^{(1)}_{\tilde f} \in \Phi_1.$$

Пусть $\delta t_0 = 0\delta t_1 = 0$, $\delta x_0 = \delta\varphi = \delta f = 0$, тогда

$$\pi_0\delta\xi \leqslant 0 \ \ \forall \delta\xi \in [0,\infty).$$

Отсюда следует

$$\pi_0 \leqslant 0.$$

Полагая в (6.5.11) $\delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = 0, \delta x_0 = \delta\varphi = 0$, получаем

$$\int_{\tilde t_0}^{\tilde t_1}\psi(t)\delta f[t]dt \leqslant 0 \ \ \forall \delta f \in \operatorname{cone}(\tilde W^{(1)}_{\tilde f} - \tilde f). \tag{6.5.12}$$

Теперь на основе неравенства (6.5.12) докажем интегральный принцип максимума. Для этого нам необходимо показать непрерывность отображения

$$\delta f \to \int_{\tilde t_0}^{\tilde t_1}\psi(t)\delta f[t]dt, \quad \delta f[t] = \delta f(t, \tilde x(\tau_1(t)),\ldots,\tilde x(\tau_s(t))) \tag{6.5.13}$$

на множестве $W^{(1)}(K_1;\alpha)$ в индуцируемой из $E^{(1)}_f$ топологии. Здесь, как выше, $K_1 \subset O$ — компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества $\tilde x[\tau,\tilde 1]$, а $\alpha > 0$ — некоторое число.

Пусть $\delta f_i \in W^{(1)}(K_1;\alpha), i = 1,2,\ldots$ и

$$\lim_{i\to\infty} H_0(\delta f_i; K_1^s) = 0$$

(см. п. 1.1).

Отображение (6.5.13) непрерывно, если

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1}\psi(t)\delta f_i[t]dt=0. \tag{6.5.14}$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1}\psi(t)\delta f_i[t]dt=\psi(\tilde{t}_1)\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1}\delta f_i[t]dt-\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1}\dot{\psi}(t)\left(\int_{\tilde{t_0}}^{t}\delta f_i[\xi_0]d\xi_0\right)dt.$$

В силу леммы 1.1.4 получим

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\tilde{t_0}}^{t}\psi(\xi_0)\delta f_i[\xi_0]d\xi_0=0,$$

равномерно по $t\in[\tilde{t}_0,\tilde{t}_1]$.

Таким образом, равенство (6.5.14) выполняется. Непрерывность отображения (6.5.13) позволяет усилить неравенство (6.5.12) следующим образом:

$$\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1}\psi(t)\delta f[t]dt\leqslant 0\ \ \forall\delta f\in\operatorname{cone}([W^{(1)}(K_1;\alpha)]_{\tilde{W}^{(1)}_{\tilde{f}}}-\tilde{f}). \tag{6.5.15}$$

Согласно теореме 5.2.2,

$$\operatorname{cone}([W^{(1)}(K_1;\alpha)]_{\tilde{W}^{(1)}_{\tilde{f}}}-\tilde{f})\supset F^{(1)}_1-\tilde{f}.$$

Из (6.5.15), принимая во внимание предыдущее соотношение, получаем интегральный принцип максимума 6.1.5.

Пусть в неравенстве (6.5.11) $\delta\xi=\delta t_0=\delta t_1=0,\delta x_0=\delta f=0$, тогда получаем

$$\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}}\psi(\gamma_i(t))\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma_i}(t)dt\leqslant 0\ \ \forall\delta\varphi\in\operatorname{cone}(\tilde{W}_{\tilde{\varphi}}-\tilde{\varphi}). \tag{6.5.16}$$

Существует выпуклый элемент $\hat{W}_{\tilde{\varphi}}$ такой, что $\hat{W}_{\tilde{\varphi}}\subset\tilde{W}_{\tilde{\varphi}}$. Докажем включение

$$\operatorname{cone}(\hat{W}_{\tilde{\varphi}}-\tilde{\varphi})\supset\Delta_0-\tilde{\varphi}. \tag{6.5.17}$$

Действительно, пусть φ — произвольная функция из Δ_0. Множество $M\subset O$ выпукло, поэтому для произвольного $\varepsilon\in[0,1]$ функция $\varphi_\varepsilon=\tilde{\varphi}+\varepsilon(\varphi-\tilde{\varphi})\in\Delta_0$. С другой стороны, для достаточно малого $\varepsilon>0$ функция $\varphi_\varepsilon\in\hat{W}_{\tilde{\varphi}}$. Следовательно, $\varphi_\varepsilon-\tilde{\varphi}=\varepsilon(\varphi-\tilde{\varphi})\in\hat{W}_{\tilde{\varphi}}-\tilde{\varphi}$. Отсюда следует $\varphi-\tilde{\varphi}\in\operatorname{cone}(\hat{W}_{\tilde{\varphi}}-\tilde{\varphi})$.

Из неравенства (6.5.16), принимая во внимание (6.5.17), получаем для начальной функции интегральный принцип максимума 6.1.6.

Пусть $\delta\varphi=\delta x_0=\delta f=0,\delta\xi=\delta t_1=0$, тогда из (6.5.11) с учетом $\delta t_0\in(-\infty,0]$ получаем условие для начального момента $\tilde{t}_0$:

$$\pi\tilde{Q}_{t_0}+\psi(\tilde{t}_0)\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}^-_{i+1}-\hat{\gamma}^-_i)f^-_i-\sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i)f^-_i\dot{\gamma}^-_i\geqslant 0.$$

Если в неравенстве (6.5.11) $\delta x_0=\delta\varphi=\delta f=0,\delta\xi=\delta t_0=0$, то, принимая во внимание $\delta t_1\in(-\infty,0]$, получаем условие для конечного момента $\tilde{t}_1$:

$$\pi\tilde{Q}_{t_1}+\psi(\tilde{t}_1)f^-_{s+1}\geqslant 0.$$

Наконец, полагая в (6.5.11) $\delta\xi=\delta t_0=\delta t_1=0$, $\delta\varphi=\delta f=0$, с учетом $\delta x_0\in\mathbb{R}^n_{x_0}$ получаем

$$\pi\tilde{Q}_{x_0}+\psi(\tilde{t}_0)=0.$$

Это равенство вместе с первым равенством (6.5.10) дает условие 6.1.7. Теорема 6.1.1 полностью доказана.

В заключение этого подпункта заметим, что теоремы 6.1.2 и 6.1.3 на основе теорем 2.2.2 и 2.2.3, соответственно, доказываются аналогично.

Для этого достаточно в качестве X_0 брать, соответственно, множества

$$[\tilde{t}_0, b] \times [\tilde{t}_1, b] \times O, \quad J^2 \times O.$$

Аналогично доказываются и остальные теоремы 6.1.4–6.1.9.

6.6. Доказательство теоремы 6.4.1.

Вспомогательные утверждения. Каждому элементу

$$\sigma = (t_0, t_1, x_0, \varphi, u) \in B_4 = J \times O \times \Delta \times \Omega$$

сопоставим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t))), \;\; t \in [t_0, t_1]$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \;\; t \in [\tau, t_0], \;\; x(t_0) = x_0.$$

Решение, соответствующее элементу $\sigma \in B_4$, обозначим через $x(t;\sigma)$ (см. определение 6.1.1).

Теорема 6.6.1. *Существует число $\delta_1 > 0$ такое, что каждому элементу*

$$\sigma \in V(\tilde{\sigma};\delta_1) = (V(\tilde{t}_0;\delta_1) \cap J) \times (V(\tilde{t}_1;\delta_1) \cap J) \times (V(\tilde{x}_0;\delta_1) \cap O) \times (V(\tilde{\varphi};\delta_1) \cap \Delta) \times (V(\tilde{u};\delta_1) \cap \Omega)$$

соответствует решение $x(t;\sigma)$. Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_1]$, что для произвольного $\sigma \in V(\tilde{\sigma};\delta)$ выполнено неравенство

$$|x(\tilde{t}_1;\tilde{\sigma}) - x(t_1;\sigma)| \leqslant \varepsilon.$$

Эта теорема следует из теоремы 1.2.2.

Рассмотрим топологическое векторное пространство

$$E_\sigma = \mathbb{R}_{t_0} \times \mathbb{R}_{t_1} \times \mathbb{R}_{x_0} \times E_\varphi \times E_\varsigma,$$

где

$$\sigma = (y, \varsigma), y = (t_0, t_1, x_0)^*, \varsigma = (\varphi, u).$$

В пространстве $\mathbb{R}_y^{2+n}$ множество

$$X_0 = [a, \tilde{t}_0] \times [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1] \times O$$

является локально выпуклым подпространством относительно индуцируемой из $\mathbb{R}_y^{2+n}$ топологии. Через $D_0 \subset X_0 \times E_\varsigma$ обозначим множество элементов $\sigma \in X_0 \times \Delta \times \Omega$, каждому из которых соответствует решение $x(t;\sigma)$.

Согласно теореме 6.6.1, множество D_0 открыто относительно подпространства $X_0 \times E_\varsigma$ и тем более конечно локально выпукло.

На множестве D_0 определим отображение

$$T : D_0 \to \mathbb{R}_T^n$$

формулой

$$T(\sigma) = x(t_1;\sigma).$$

На основе теоремы 2.2.4, аналогично лемме 6.5.3, доказывается следующая лемма.

Лемма 6.6.1. *Отображение T дифференцируемо в точке $\tilde{\sigma}$ и*

$$dT_{\tilde{\sigma}}(\delta\sigma) = \delta x(\tilde{t}_1;\delta\rho) + f_{s+1}^- \delta t_1 \;\; \forall \delta\sigma = (\delta t_0, \delta t_1, \delta x_0, \delta\varphi, \delta u) \in E_\sigma - \tilde{\sigma},$$

где

$$\delta x(\tilde{t}_1;\delta\rho) = \Big\{ Y(\tilde{t_0};\tilde{t}_1) \sum_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^- - \sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i;\tilde{t}_1) f_i^- \dot{\gamma}_i^- \Big\} \delta t_0 +$$

$$+ Y(\tilde{t_0};\tilde{t}_1)\delta x_0 + \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} Y(\gamma_i(t);\tilde{t}_1) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) dt + \int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1} Y(t;\tilde{t}_1) \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_i}[t] \delta u(\theta_i(t)) dt.$$

Теперь рассмотрим векторное пространство

$$E_z = \mathbb{R}_\xi \times E_\sigma$$

точек $z = (\xi, \sigma)$ и множества

$$X = [0, \infty) \times X_0, \quad D = [0, \infty) \times D_0.$$

Множество D является открытым относительно подпространства $X \times E_\varsigma \subset E_z$.

На множестве D определим отображение

$$P : D \to \mathbb{R}_p^{1+l}$$

формулой

$$P(z) = Q(t_0, t_1, x_0, T(\sigma)) + (\xi, 0, \ldots, 0)^*.$$

С помощью леммы 6.6.1 аналогично лемме 6.5.4 доказывается следующая лемма.

Лемма 6.6.2. *Отображение P дифференцируемо в точке $\tilde{z} = (0, \tilde{\sigma})$ и*

$$dP_{\tilde{z}}(\delta z) = \left\{ \tilde{Q}_{t_0} + \tilde{Q}_{x_1} \left[Y(\tilde{t_0}; \tilde{t}_1) \sum_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^- - \sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i; \tilde{t}_1) f_i^- \dot{\gamma}_i^- \right] \right\} \delta t_0 +$$

$$+ [\tilde{Q}_{t_1} + \tilde{Q}_{x_1} f_{s+1}^-] \delta t_1 + [\tilde{Q}_{x_0} + \tilde{Q}_{x_1} Y(\tilde{t_0}; \tilde{t}_1)] \delta x_0 + \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}} \tilde{Q}_{x_1} Y(\gamma_i(t); \tilde{t}_1) \tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) dt +$$

$$+ \int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1} \tilde{Q}_{x_1} Y(t; \tilde{t}_1) \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_i[t]} \delta u(\theta_i(t)) dt + (\delta \xi, 0, \ldots, 0)^*, \quad \delta z = (\delta \xi, \delta \sigma) \in E_z - \tilde{z}. \tag{6.6.1}$$

В топологическом векторном пространстве E_z определим фильтр $\Phi_{\tilde{z}}$ как прямое произведение выпуклых фильтров, т.е.

$$\Phi_{\tilde{z}} = \Phi_{\tilde{y}} \times \Phi_{\tilde{\varphi}} \times \Phi_{\tilde{u}},$$

где фильтры $\Phi_{\tilde{y}}$ и $\Phi_{\tilde{\varphi}}$ были определены п. 6.5; фильтр $\Phi_{\tilde{u}}$ определяется с помощью выпуклого базиса

$$\{V_{\tilde{u}} \cap \Omega : V_{\tilde{u}} \subset E_u \text{ — выпуклая окрестность}\}.$$

Фильтр $\Phi_{\tilde{z}}$ является выпуклым и тем более квазивыпуклым. В силу теоремы 6.6.1 отображение P непрерывно на фильтре $\Phi_{\tilde{z}}$ и, следовательно, непрерывно на $\mathrm{co}([\Phi_{\tilde{z}}])$.

Критичность отображения P на фильтре $\Phi_{\tilde{z}}$. Точка $\tilde{z}$ принадлежит всем элементам фильтра $\Phi_{\tilde{z}}$; при этом $P(\tilde{z}) = (q^0(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}(\tilde{t}_1)), 0, \ldots, 0)^*$. Кроме того, для произвольного элемента

$$z = (\xi, \sigma) \in W_{\tilde{z}} \cap ([0, \infty) \times B_{21}),$$

где $W_{\tilde{z}} \in \Phi_{\tilde{z}}$,

$$P(z) = (q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1; \sigma)) + \xi, 0, \ldots, 0)^*,$$

элемент $\tilde{\sigma} = (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{u}) \in B_{21}$ является оптимальным, поэтому существует такой элемент

$$W_{\tilde{z}}(\delta_1) = [0, \infty) \times (V(\tilde{t}_0; \delta_1) \cap [a, \tilde{t}_0]) \times (V(\tilde{t}_1; \delta_1) \cap [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]) \times V(\tilde{x}_0; \delta_1) \times$$
$$\times [V(\tilde{\varphi}; \delta_1) \cap \Delta_0] \times [V(\tilde{u}; \delta_1) \cap \Omega_0] \in \Phi_{\tilde{z}},$$

где $\delta_1 \in (0, \tilde{\delta}]$, что для любого $z \in W_{\tilde{z}}(\delta_1) \cap ([0, \infty) \times B_{20})$ имеет место неравенство

$$q^0(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}(\tilde{t}_1)) \leqslant q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1; \sigma)) + \xi.$$

После этого аналогично теореме 6.1.1 доказывается, что

$$P(\tilde{z}) \in \partial P(W_{\tilde{z}}(\delta_1)).$$

Вывод необходимых условий оптимальности. Все условия теоремы 4.3.2 выполнены. Следовательно, существуют ненулевой вектор $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l)$ и такой выпуклый элемент $\tilde{W}_{\tilde{z}} \in \Phi_{\tilde{z}}$, что справедливо неравенство (6.5.8), где $dP_{\tilde{z}}(\delta z)$ имеет вид (6.6.1).

Введем функцию $\psi(t)$ (см. (6.5.9)); тогда из (6.5.8) с учетом (6.6.1) получим

$$\left[\pi\tilde{Q}_{t_0} + \psi(\tilde{t}_0)\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-} - \hat{\gamma}_i^{-})f_i^{-} - \sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i)f_i^{-}\dot{\gamma}_i^{-}\right]\delta t_0 +$$

$$+[\pi\tilde{Q}_{t_1} + \psi(\tilde{t}_1)f_{s+1}^{-}]\delta t_1 + [\pi\tilde{Q}_{x_0} + \psi(\tilde{t}_0)]\delta x_0 + \sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\tilde{t_0})}^{\tilde{t_0}}\psi(\gamma_i(t))\tilde{f_{x_i}}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)dt +$$

$$+\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1}\psi(t)\sum_{i=1}^{\nu}\tilde{f}_{u_i}[t]\delta u(\theta_i(t))dt + \pi_0\delta\xi \leqslant 0 \ \ \forall\delta z \in \operatorname{cone}(\tilde{W}_{\tilde{z}} - \tilde{z}).$$

Пусть $\delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = 0, \delta x_0 = \delta\varphi = 0$, тогда последнее неравенство дает

$$\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t}_1}\psi(t)\sum_{i=1}^{\nu}\tilde{f}_{u_i}[t]\delta u(\theta_i(t))dt \leqslant 0 \ \ \forall\delta u \in \operatorname{cone}(\tilde{W}_{\tilde{u}} - \tilde{u}). \tag{6.6.2}$$

Аналогично доказывается включение

$$\operatorname{cone}(\tilde{W}_{\tilde{u}} - \tilde{u}) \supset \Omega_0 - \tilde{u}$$

(см. (6.5.11)), что, в свою очередь, вместе с (6.6.2) дает линеаризованный интегральный принцип максимума (6.4.1).

Остальные необходимые условия доказываются стандартным способом (см. доказательство теоремы 6.1.1).

7. Оптимальные задачи с запаздываниями и непрерывным начальным условием. Необходимые условия оптимальности

В этом параграфе для нелинейных оптимальных задач с переменными запаздываниями в фазовых координатах и с переменными соизмеримыми запаздываниями в управлениях доказаны необходимые условия оптимальности. Отдельно рассмотрен случай, когда запаздывания в управлениях несоизмеримы.

7.1. Постановка задачи. Формулировка основных результатов. Рассмотрим оптимальную задачу с непрерывным начальным условием

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))), \tag{7.1.1}$$

$$t \in [t_0, t_1] \subset J,\ u \in \Omega_0,$$

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [\tau, t_0],\ \varphi \in \Delta_0, \tag{7.1.2}$$

$$q^i(t_0, t_1, \varphi(t_0), x(t_1)) = 0,\ \ i = 1, \ldots, l, \tag{7.1.3}$$

$$q^0(t_0, t_1, \varphi(t_0), x(t_1)) \longrightarrow \min. \tag{7.1.4}$$

О функциях $f(t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu)$, $\theta_i(t)$, $i = \overline{1, \nu}$, $q^i(t_0, t_1, x_0, x_1)$, $i = \overline{0, l}$ и множествах Ω_0, Δ_0 см. п. 6.1.

Определение 7.1.1. Соответствующее элементу

$$\lambda = (t_0, t_1, \varphi, u) \in B_3 = J^2 \times \Delta_0 \times \Omega_0$$

решение $x(t) = x(t; \lambda)$ называется решением $x(t; \varrho)$, $\varrho = (t_0, \varphi(t_0), \varphi, u)$, определенным на $[\tau, t_1]$ (см. определение 1.2.2).

Множество допустимых элементов B_{32} определяется аналогично (см. определение 6.1.2).

Определение 7.1.2. Элемент $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{\varphi}, \widetilde{u}) \in B_{32}$ называется *оптимальным,* если существуют число $\widetilde{\delta} > 0$ и компакт $\widetilde{K} \subset O$ такие, что для произвольных элементов $\lambda = (t_0, t_1, \varphi, u) \in B_{32}$ удовлетворяющих условию

$$|\widetilde{t}_0 - t_0| + |\widetilde{t}_1 - t_1| + \|\widetilde{\varphi} - \varphi\| + H_1(\widetilde{f} - f; K^s) \leqslant \widetilde{\delta},$$

выполняется неравенство

$$q^0(\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0), \widetilde{x}(\widetilde{t}_1)) \leqslant q^0(t_0, t_1, \varphi(t_0), x(t_0))$$

(о функции $H_1(\cdot)$ см. п. 6.1).

Наша основная задача будет заключаться в нахождении необходимых условий оптимальности.

Теорема 7.1.1. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ *— оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_0 > a$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и пусть выполнены следующие условия*:

7.1.1. *функция* $\widetilde{\varphi}(t)$ *абсолютно непрерывна в полуокрестности* $(\widetilde{t}_0 - \delta, \widetilde{t}_0]$, $\delta > 0$;

7.1.2. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\varphi}^- = \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0),\ \lim_{\omega \to \omega_0^-} \widetilde{f}(\omega) = f_0^-,\ \omega \in (\widetilde{t}_0 - \delta, \widetilde{t}_0] \times O^s,$$

$$\omega_0^- = (\widetilde{t}_0, \widetilde{\varphi}(\tau_1(\widetilde{t}_0-)), \ldots, \widetilde{\varphi}(\tau_s(\widetilde{t}_0-)));$$

7.1.3. *существует конечный предел*

$$\lim_{\omega \to \omega_0^-} \widetilde{f}(\omega) = f_1^-,\ \omega \in (\widetilde{t}_1 - \delta, \widetilde{t}_1] \times O^s,\ \omega_1^- = (\widetilde{t}_0, \widetilde{x}(\tau_1(\widetilde{t}_1-)), \ldots, \widetilde{x}(\tau_s(\widetilde{t}_1-))).$$

Тогда существуют вектор $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$ *и решение* $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ *уравнения*

$$\dot{\psi}(t) = -\sum_{i=1}^{s} \psi(\gamma_i(t)) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t),\ \ t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1],\ \ \psi(t) = 0,\ t > \widetilde{t}_1, \tag{7.1.5}$$

такие, что выполнены следующие условия:

7.1.4. *интегральный принцип максимума для управления*:

$$\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \psi(t) \widetilde{f}[t] dt \geqslant \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \psi(t) f(t, \widetilde{x}(\tau_1(t)), \ldots, \widetilde{x}(\tau_s(t)), u(\theta_3(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))) dt\ \ \forall u \in \Omega_0;$$

7.1.5. *интегральный принцип максимума для начальной функции*:

$$\sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t)) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \widetilde{\varphi}(t) dt \geqslant \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t)) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \varphi(t) dt\ \ \forall \varphi \in \Delta_0;$$

7.1.6. *условия для функции* $\psi(t)$:

$$(\pi \widetilde{Q}_{x_0} + \psi(\widetilde{t}_0)) \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-) \geqslant (\pi \widetilde{Q}_{x_0} + \psi(\widetilde{t}_0)) \varphi\ \forall \varphi \in M, \pi \widetilde{Q}_{x_1} = \psi(\widetilde{t}_1); \tag{7.1.6}$$

7.1.7. *условия для моментов* $\widetilde{t}_0$ *и* $\widetilde{t}_1$:

$$\pi(\widetilde{Q}_{t_0} + \widetilde{Q}_{x_0} \dot{\varphi}^-) \geqslant \psi(\widetilde{t}_0)(f_0^- - \dot{\varphi}^-), \tag{7.1.7}$$

$$\pi \widetilde{Q}_{t_1} \geqslant -\psi(\widetilde{t}_1) f_1^-. \tag{7.1.8}$$

Теорема 7.1.2. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ *— оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены следующие условия*:

7.1.8. *функция* $\widetilde{\varphi}(t)$ *абсолютно непрерывна в полуокрестности* $[\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_0 + \delta)$, $\delta > 0$;

7.1.9. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\varphi}^+ = \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0+),\ \lim_{\omega \to \omega_0^+} \widetilde{f}(\omega) = f_0^+, \omega \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_0 + \delta) \times O^s,$$

$$\omega_0^+ = (\widetilde{t}_0, \widetilde{x}(\tau_1(\widetilde{t}_0+)), \ldots, \widetilde{x}(\tau_s(\widetilde{t}_0+)));$$

7.1.10. *существует конечный предел*

$$\lim_{\omega\to\omega_1^+}\widetilde{f}(\omega)=f_1^+,\ \omega\in[\widetilde{t}_1,\widetilde{t}_1+\delta)\times O^s,\ \omega_1^+=(\widetilde{t}_1,\widetilde{x}(\tau_1(\widetilde{t}_1+)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_s(\widetilde{t}_1+))).$$

Тогда существуют вектор $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_l)\neq 0$, $\pi_0\leqslant 0$ *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* 7.1.4, 7.1.5, (7.1.6). *Кроме того,*

$$(\pi\widetilde{Q}_{x_0}+\psi(\widetilde{t}_0))\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)\geqslant(\pi\widetilde{Q}_{x_0}+\psi(\widetilde{t}_0))\varphi\ \forall\varphi\in M, \tag{7.1.9}$$

$$\pi(\widetilde{Q}_{t_0}+\widetilde{Q}_{x_0}\dot{\varphi}^+)\leqslant\psi(\widetilde{t}_0)(f_0^+-\dot{\varphi}^+), \tag{7.1.10}$$

$$\pi\widetilde{Q}_{t_0}\leqslant-\psi(\widetilde{t}_1)f_1^+. \tag{7.1.11}$$

Теорема 7.1.3. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $t_i\in(a,b)$, $i=0,1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0)=\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и пусть выполнены следующие условия*:

7.1.11. *функция* $\widetilde{\varphi}(t)$ *непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $\widetilde{t}_0$, *функция* $\widetilde{f}[t]$ *непрерывна в точке* $\widetilde{t}_0$;

7.1.12. *функция* $\widetilde{f}[t]$ *непрерывна в точке* $\widetilde{t}_1$.

Тогда существуют вектор $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_l)\neq 0$, $\pi_0\leqslant 0$ *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* 7.1.4, 7.1.5, (7.1.6). *Кроме того,*

$$(\pi\widetilde{Q}_{x_0}+\psi(\widetilde{t}_0))\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)\geqslant(\pi\widetilde{Q}_{x_0}+\psi(\widetilde{t}_0))\varphi\ \forall\varphi\in M, \tag{7.1.12}$$

$$\pi(\widetilde{Q}_{t_0}+\widetilde{Q}_{x_0}\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0))=\psi(\widetilde{t}_0)(\widetilde{f}[\widetilde{t}_0]-\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)), \tag{7.1.13}$$

$$\pi\widetilde{Q}_{t_1}=-\psi(\widetilde{t}_1)\widetilde{f}[\widetilde{t}_1]. \tag{7.1.14}$$

Пусть $\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)\in\operatorname{int}M$, тогда

$$\pi\widetilde{Q}_{x_0}=-\psi(\widetilde{t}_0).$$

В этом случае условие (7.1.6) принимает вид

$$\pi\widetilde{Q}_{t_0}\geqslant\psi(\widetilde{t}_0)f_0^-.$$

Если

$$\operatorname{rank}(\widetilde{Q}_{t_0}+\widetilde{Q}_{x_0}\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0),\widetilde{Q}_{t_0},\widetilde{Q}_{x_1})=1+l,$$

то в теореме 7.1.3 $\psi(t)\neq 0$.

Теоремы 7.1.1 и 7.1.2 соответствуют случаям, когда вариация в точках $\widetilde{t}_0$ и $\widetilde{t}_1$ одновременно происходит слева и справа. Теорема 7.1.3 соответствует случаю, когда в точках $\widetilde{t}_0$ и $\widetilde{t}_1$ одновременно происходят двусторонние вариации.

Следующие теоремы соответствуют случаям, когда в точках $\widetilde{t}_0$ и $\widetilde{t}_1$ происходят смешанные вариации.

Теорема 7.1.4. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i\in(a,b)$, $i=0,1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0)=\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнены условия* 7.1.1, 7.1.2 *и* 7.1.10. *Тогда существуют вектор* $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_l)\neq 0$, $\pi_0\leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* 7.1.4–7.1.6, (7.1.7) *и* (7.1.11).

Теорема 7.1.5. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i\in(a,b)$, $i=0,1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0)=\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнены условия* 7.1.1, 7.1.2 *и* 7.1.12. *Тогда существуют вектор* $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_l)\neq 0$, $\pi_0\leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* 7.1.4–7.1.6, (7.1.7) *и* (7.1.14).

Теорема 7.1.6. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0)=\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены условия* 7.1.3, 7.1.8 *и* 7.1.9. *Тогда существуют вектор* $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_l)\neq 0$, $\pi_0\leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* 7.1.4, 7.1.5, (7.1.6), (7.1.8)–(7.1.10).

Теорема 7.1.7. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0)=\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены условия* 7.1.8, 7.1.9 *и* 7.1.12. *Тогда существуют вектор* $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_l)\neq 3$, $\pi_0\leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* 7.1.4, 7.1.5, (7.1.6), (7.1.9), (7.1.10) *и* (7.1.14).

Теорема 7.1.8. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_0 > a$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и выполнены условия* 7.1.3 *и* 7.1.11. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* 7.1.4, 7.1.5, (7.1.6), (7.1.8), (7.1.12) *и* (7.1.13).

Теорема 7.1.9. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и выполнены условия* 7.1.10 *и* 7.1.11. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* 7.1.4, 7.1.5, (7.1.6), (7.1.11)–(7.1.13).

Доказательство теоремы 7.1.1 на основе теорем 1.2.1, 3.1.1, 4.3.2 и квазивыпуклости фильтра Φ_1 приведено в п. 7.6.

Квазивыпуклость фильтров Φ_i, $i = 2, 3, 4$, позволяет доказывать теоремы, аналогичные теоремам 7.1.1–7.1.9, для оптимальных задач вида (7.1.1)–(7.1.4), где уравнение (7.1.1) заменено, соответственно, уравнениями 6.1.19–6.1.21, содержащими несоизмеримые запаздывания в управлениях.

7.2. Оптимальная задача с закрепленным правым концом и интегральным функционалом. Рассмотрим оптимальную задачу

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t))), \tag{7.2.1}$$

$$t \in [t_0, t_1] \subset J,\ u \in \Omega_0,$$

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [\tau, t_0],\ x(t_1) = x_{11},\ \varphi \in \Delta_0, \tag{7.2.2}$$

$$I(\lambda) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t)))dt \to \min, \tag{7.2.3}$$

где $F = (f^0, f)^* \in E^{(2)}(J \times O^S \times U^\nu, \mathbb{R}^{1+n})$, $x_{11} \in O$ — фиксированная точка; $\lambda = (t_0, t_1, \varphi, u) \in B_3$.

Решение $x(t; \lambda)$, соответствующее элементу $\lambda \in B_3$, определяется аналогично определению 7.1.1.

Определение 7.2.1. Элемент $\lambda \in B_3$ называется *допустимым,* если соответствующее решение $x(t; \lambda)$, $t \in [\tau, t_1]$ удовлетворяет условию (7.2.2).

Множество допустимых элементов обозначим B_{33}.

Определение 7.2.2. Элемент $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{\varphi}, \widetilde{u}) \in B_{34}$ называется *оптимальным,* если существуют число $\widetilde{\delta} > 0$ и компакт $\widetilde{K} \subset O$ такие, что для произвольных элементов $\lambda = (t_0, t_1, \varphi, u) \in B_{34}$, удовлетворяющих условию

$$|\widetilde{t}_0 - t_0| + |\widetilde{t}_1 - t_1| + \|\widetilde{\varphi} - \varphi\| + H_1(\widetilde{f} - f; \widetilde{K}^s) \leqslant \widetilde{\delta},$$

выполнено неравенство

$$I(\widetilde{\lambda}) \leqslant I(\lambda).$$

Задача (7.2.1)–(7.2.3) стандартным способом (см. п. 6.2) сводится к эквивалентной задаче

$$\dot{\overline{x}}(t) = F(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t))), \tag{7.2.4}$$

$$t \in [t_0, t_1] \subset J,\ u \in \Omega_0,$$

$$\overline{x}(t) = (0, \varphi(t))^*,\ t \in [\tau, t_0],\ \varphi \in \Delta_0, \tag{7.2.5}$$

$$q^i(\overline{x}(t_1)) = x^i(t_1) - x^i_{11} = 0,\ i = \overline{1, n}, \tag{7.2.6}$$

$$q^0(\overline{x}(t_1)) = x^0(t_1) \to \min. \tag{7.2.7}$$

Задача (7.2.4)–(7.2.7) является частным случаем задачи (7.1.1)–(7.1.4). Поэтому следующие теоремы, с учетом специфики задачи (7.2.4)–(7.2.7), непосредственно следуют, соответственно, из теорем 7.1.1–7.1.9.

Теорема 7.2.1. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_0 > a$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнено условие* 7.1.1. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

7.2.1. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\varphi}^- = \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0-),\ \lim_{\omega \to \omega_0^-} \widetilde{F}(\omega) = F_0^-,\ \omega \in (a, \widetilde{t}_0] \times O^s;$$

7.2.2. *существует конечный предел*

$$\lim_{\omega\to\omega_1^-}\widetilde{F}(\omega)=F_1^-,\ \omega\in(a,\widetilde{t}_1]\times O^s.$$

Тогда существует нетривиальное решение $\overline{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t))$, $\psi_0(t)\equiv\mathrm{const}\leqslant 0$, $t\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1]$, *уравнения*

$$\dot{\psi}(t)=-\sum_{i=0}^{s}\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t),\ t\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1],\ \ \overline{\psi}(t)=0,\ t>\widetilde{t}_1, \tag{7.2.8}$$

такое, что выполнены следующие условия:

$$\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1}\overline{\psi}(t)\overline{F}[t]dt\geqslant\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1}\overline{\psi}(t)F(t,\widetilde{x}(\tau_1(t)),\dots,\widetilde{x}(\tau_s(t)),u(\theta_1(t)),\dots,u(\theta_\nu(t)))dt\ \ \forall u\in\Omega_0; \tag{7.2.9}$$

$$\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\widetilde{\varphi}(t)dt\geqslant\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\varphi(t)dt\ \ \forall\varphi\in\Delta_0; \tag{7.2.10}$$

$$\psi(\widetilde{t}_0)\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)\geqslant\psi(\widetilde{t}_0)\varphi\ \forall\varphi\in M; \tag{7.2.11}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_0)(F_0^--(0,\dot{\varphi}^-)^*)\leqslant 0, \tag{7.2.12}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1)F_1^-\geqslant 0. \tag{7.2.13}$$

Из (7.2.9) *и* (7.2.10), *соответственно, следуют точечный принцип максимума* (6.2.13) *и*

$$\left[\sum_{i=1}^{s}\chi([\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1];\gamma_i(t))\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\right]\widetilde{\varphi}(t)=$$
$$=\max_{\varphi\in M}\left[\sum_{i=1}^{s}\chi([\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1];\gamma_i(t))\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\right]\varphi\ \ \text{п.в. на }[\tau,\widetilde{t}_0].$$

Теорема 7.2.2. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_1<b$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0)=\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнено условие* 7.1.8. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

7.2.3. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\varphi}^+=\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0+),\ \lim_{\omega\to\omega_0^+}\widetilde{F}(\omega)=F_0^+,\ \omega\in[\widetilde{t}_0,b)\times O^s;$$

7.2.4. *существует конечный предел*

$$\lim_{\omega\to\omega_1^+}\widetilde{F}(\omega)=F_1^+,\ \omega\in[\widetilde{t}_1,b)\times O^s.$$

Тогда существует такое нетривиальное решение $\overline{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t))$, $\psi_0(t)\equiv\mathrm{const}\leqslant 0$, $t\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1]$, *уравнения* (7.2.8), *что выполнены условия* (7.2.9) *и* (7.2.10). *Кроме того,*

$$\psi(\widetilde{t}_0)\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)\geqslant\psi(\widetilde{t}_0)\varphi\ \forall\varphi\in M; \tag{7.2.14}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_0)(F_0^+-(0,\dot{\varphi}^+)^*)\geqslant 0, \tag{7.2.15}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1)F_1^+\leqslant 0. \tag{7.2.16}$$

Теорема 7.2.3. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i\in(a,b)$, $i=0,1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0)=\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и пусть выполнены следующие условия*:

7.2.5. *функция* $\widetilde{\varphi}(t)$ *непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $\widetilde{t}_0$; *функция* $\widetilde{F}[t]$ *непрерывна в точке* $\widetilde{t}_0$;

7.2.6. *функция* $\widetilde{F}[t]$ *непрерывна в точке* $\widetilde{t}_1$.

Тогда существует такое нетривиальное решение $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (7.2.8), *что выполнены условия* (7.2.9) *и* (7.2.10). *Кроме того,*

$$\psi(\widetilde{t}_0)\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0) \geqslant \psi(\widetilde{t}_0)\varphi \;\; \forall\, \varphi \in M; \tag{7.2.17}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_0)(\widetilde{F}[\widetilde{t}_0] - (0, \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0))^*) = 0, \tag{7.2.18}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1)\widetilde{F}[\widetilde{t}_1] = 0. \tag{7.2.19}$$

Теорема 7.2.4. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнены условия* 7.1.1, 7.2.1 *и* 7.2.4. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (7.2.8), *что выполнены условия* (7.2.9)–(7.2.12) *и* (7.2.16).

Теорема 7.2.5. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнены условия* 7.1.1, 7.2.1 *и* 7.2.6. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (7.2.8), *что выполнены условия* (7.2.9)–(7.2.12) *и* (7.2.18).

Теорема 7.2.6. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены условия* 7.1.8, 7.2.2, 7.2.3. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (7.2.8), *что выполнены условия* (7.2.9), (7.2.10), (7.2.13)–(7.2.15).

Теорема 7.2.7. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_1 < b$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены условия* 7.1.8, 7.2.3 *и* 7.2.6. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (7.2.8), *что выполнены условия* (7.2.9), (7.2.10), (7.2.14), (7.2.15) *и* (7.2.19).

Теорема 7.2.8. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_0 > a$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и выполнены условия* 7.2.2 *и* 7.2.5. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (7.2.8), *что выполнены условия* (7.2.9), (7.2.10), (7.2.13), (7.2.17) *и* (7.2.18).

Теорема 7.2.9. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и выполнены условия* 7.2.4 *и* 7.2.5. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (7.2.8), *что выполнены условия* (7.2.9), (7.2.10), (7.2.16)–(7.2.18).

7.3. Линейная оптимальная задача. Рассмотрим оптимальную задачу

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{s} A_i(t)x(\tau_i(t)) + \sum_{j=1}^{\nu} B_j(t)u(\theta_j(t)) + f(t), \; t \in [t_0, t_1] \subset J, \; u \in \Omega_0,$$

$$x(t) = \varphi(t), \; t \in [\tau, t_0], \; x(t_1) = x_{11}, \; \varphi \in \Delta_0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{s} a_i^0(t)x(\tau_i(t)) + \sum_{j=1}^{\nu} b_j^0(t)u(\theta_j(t)) + f^0(t) \right] dt \to \min$$

(см. п. 6.3).

Множество допустимых элементов $\lambda = (t_0, t_1, \varphi, u) \in B_3$ и оптимальный элемент, соответственно, обозначим через B_{34} и $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{\varphi}, \widetilde{u})$ (см. определения 7.2.1 и 7.2.2).

Чтобы сформулировать теоремы, аналогичные теоремам 7.2.1–7.2.9, нам понадобятся следующие обозначения:

$$\overline{A}_i(t), \, \overline{B}_j(t), \, \overline{f}(t), \, \overline{A}_{i0}^-, \, \overline{A}_{i0}^+, \, \overline{A}_{i1}^-, \, \overline{A}_{i1}^+, \, \overline{B}_{j0}^-, \, \overline{B}_{j0}^+, \, \overline{B}_{j1}^-, \, \overline{B}_{j1}^+,$$

$$u_{j0}^-, \, u_{j0}^+, \, u_{j1}^-, \, u_{j1}^+, \, \overline{f}_0^-, \, \overline{f}_0^+, \, \overline{f}_1^-, \, \overline{f}_1^+,$$

которые были введены в п. 6.3.

Теорема 7.3.1. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_0 > a$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнено условие* 7.1.1. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

7.3.1. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\varphi}^-,\ \overline{A}_{i0}^-,\ i=\overline{1,s},\ \overline{B}_{j0}^-,\ u_{j0}^-,\ j=\overline{1,\nu},\ \overline{f}_0^-;$$

7.3.2. *существуют конечные пределы*

$$\overline{A}_{i1}^-,\ i=1,\dots,s,\ \overline{B}_{j1}^-,\ u_{j1}^-,\ j=1,\dots,\nu,\ \overline{f}_1^-.$$

Тогда существует нетривиальное решение $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1) *такое, что выполнены условия* (6.3.2) *и* (7.2.11). *Кроме того,*

$$\Psi_4(t)\widetilde{\varphi}(t) = \max_{\varphi\in M} \Psi_4(t)\varphi \text{ п.в. на } [\tau, \widetilde{t}_0], \tag{7.3.1}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_0)(\widehat{F}_0^- - (0, \dot{\varphi}^-)^*) \leqslant 0, \tag{7.3.2}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1)\widehat{F}_1^- \geqslant 0. \tag{7.3.3}$$

Здесь

$$\Psi_4(t) = \sum_{i=1}^{s} \chi([\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]; \gamma_i(t))\psi(\gamma_i(t))B_i(\gamma_i(t))\dot{\gamma}_i(t),$$

$$\widehat{F}_0^- = \sum_{i=1}^{s} \overline{A}_{i0}^-\widetilde{\varphi}(\tau_i(\widetilde{t}_0-)) + \sum_{j=1}^{\nu} \overline{B}_{j0}^- u_{j0}^- + \overline{f}_0^-,$$

$$\widehat{F}_1^- = \sum_{i=1}^{s} \overline{A}_{i1}^-\widetilde{x}(\tau_i(\widetilde{t}_1-)) + \sum_{j=1}^{\nu} \overline{B}_{j1}^- u_{j1}^- + \overline{f}_1^-.$$

Теорема 7.3.2. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_1 < b$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнено условие* 7.1.8. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

7.3.3. *существуют конечные пределы*

$$\dot{\varphi}^+,\ \overline{A}_{i0}^+,\ i=\overline{1,s},\ \overline{B}_{j0}^+,\ u_{j0}^+,\ j=\overline{1,\nu},\ \overline{f}_0^+;$$

7.3.4. *существуют конечные пределы*

$$\overline{A}_{i1}^+,\ i=\overline{1,s},\ \overline{B}_{j1}^+,\ u_{j1}^+,\ j=\overline{1,\nu},\ \overline{f}_1^+.$$

Тогда существует нетривиальное решение $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1) *такое, что выполнены условия* (6.3.2), (7.2.14) *и* (7.3.1). *Кроме того,*

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_0)(\widehat{F}_0^+ - (0, \dot{\varphi}^+)^*) \geqslant 0, \tag{7.3.4}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1)\widehat{F}_1^+ \leqslant 0. \tag{7.3.5}$$

Здесь

$$\widehat{F}_0^+ = \sum_{i=1}^{s} \overline{A}_{i0}^+\widetilde{\varphi}(\tau_i(\widetilde{t}_0+)) + \sum_{j=1}^{\nu} \overline{B}_{j0}^+ u_{j0}^+ + \overline{f}_0^+,\quad \widehat{F}_1^+ = \sum_{i=1}^{s} \overline{A}_{i1}^-\widetilde{x}(\tau_i(\widetilde{t}_0+)) + \sum_{j=1}^{\nu} \overline{B}_{j1}^+ u_{j1}^+ + \overline{f}_1^+.$$

Теорема 7.3.3. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a,b)$, $i = 0,1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и пусть выполнены следующие условия*:

7.3.5. *функция* $\widetilde{\varphi}(t)$ *непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $\widetilde{t}_0$; *функции* $\overline{A}_i(t)$, $\widetilde{\varphi}(\tau_i(t))$, $i=\overline{1,s}$, $\overline{B}_j(t)$, $\widetilde{u}(\theta_j(t))$, $j=\overline{1,\nu}$, $\overline{f}(t)$ *непрерывны в точке* $\widetilde{t}_0$;

7.3.6. *функции* $\overline{A}_i(t)$, $\widetilde{x}(\tau_i(t))$, $i=\overline{1,s}$, $\overline{B}_j(t)$, $u(\theta_j(t))$, $j=\overline{1,\nu}$, $\overline{f}(t)$ *непрерывны в точке* $\widetilde{t}_1$.

Тогда существует нетривиальное решение $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1) *такое, что выполнены условия* (6.3.2), (7.2.17) *и* (7.3.1). *Кроме того,*

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_0)(\widehat{F}_0 - (0, \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0))^*) = 0, \tag{7.3.6}$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1)\widehat{F}_1 = 0. \tag{7.3.7}$$

Здесь

$$\widehat{F}_0 = \sum_{i=1}^{s} \overline{A}_i(\widetilde{t}_0)\widetilde{\varphi}(\tau_i(\widetilde{t}_0)) + \sum_{j=1}^{\nu} \overline{B}_j(\widetilde{t}_0)\widetilde{u}(\theta_j(\widetilde{t}_0)) + \overline{f}(\widetilde{t}_0),$$

$$\widehat{F}_1 = \sum_{i=1}^{s} \overline{A}_i(\widetilde{t}_1)\widetilde{x}(\tau_i(\widetilde{t}_0)) + \sum_{j=1}^{\nu} \overline{B}_j(\widetilde{t}_1)\widetilde{u}(\theta_j(\widetilde{t}_1)) + \overline{f}(\widetilde{t}_1).$$

Теорема 7.3.4. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ *— оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнены условия* 7.1.1, 7.3.1 *и* 7.3.4. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1), *что выполнены условия* (6.3.2), (7.2.11), (7.3.1), (7.3.2) *и* (7.3.5).

Теорема 7.3.5. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ *— оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнены условия* 7.1.1, 7.3.1 *и* 7.3.6. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1), *что выполнены условия* (6.3.2), (7.2.11), (7.3.1), (7.3.2) *и* (7.3.7).

Теорема 7.3.6. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ *— оптимальный элемент,* $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены условия* 7.1.8, 7.3.2, 7.3.3. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1), *что выполнены условия* (6.3.2), (7.2.14), (7.3.1), (7.3.3) *и* (7.3.4).

Теорема 7.3.7. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ *— оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_1 < b$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены условия* 7.1.8, 7.3.3 *и* 7.3.6. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1), *что выполнены условия* (6.3.2), (7.2.14), (7.3.1), (7.3.4) *и* (7.3.7).

Теорема 7.3.8. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ *— оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и выполнены условия* 7.3.2 *и* 7.3.5. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1), *что выполнены условия* (6.3.2), (7.2.17), (7.3.1), (7.3.3) *и* (7.3.6).

Теорема 7.3.9. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ *— оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и выполнены условия* 7.3.4 *и* 7.3.5. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\psi_0(t) \equiv \mathrm{const} \leqslant 0$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, *уравнения* (6.3.1), *что выполнены условия* (6.3.2), (7.2.17), (7.3.1), (7.3.5) *и* (7.3.6).

Задача быстродействия. Пусть $a_i^0(t) \equiv 0$, $i = \overline{1, s}$, $b_j^0(t) \equiv 0$, $j = \overline{1, \nu}$, $f^0(t) \equiv 1$. Обозначения, используемые при формулировке следующих теорем, были введены в п. 6.3.

Теорема 7.3.10. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ *— оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_0 > a$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнено условие* 7.1.1. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

7.3.7. *существуют конечные пределы*

$$A_{i0}^-,\ i = \overline{1, s},\ B_{j0}^-,\ u_{j0}^-,\ j = \overline{1, \nu},\ f_0^-;$$

7.3.8. *существуют конечные пределы*

$$A_{i1}^-,\ i = \overline{1, s},\ B_{j1}^-,\ u_{j1}^-,\ j = \overline{1, \nu},\ f_1^-.$$

Тогда существует нетривиальное решение $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12) *такое, что выполнены условия* (6.3.13) *и* (7.2.11). *Кроме того,*

$$\Psi_5(t)\widetilde{\varphi}(t) = \max_{\varphi \in M} \psi_s(t)\varphi \text{ п.в. на } [\tau, \widetilde{t}_0];\ \ \psi(\widetilde{t}_0)(\widehat{f}_0^- - \dot{\varphi}^-) \leqslant \psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1^-,\ \psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1^- \geqslant 0. \tag{7.3.8}$$

Здесь

$$\Psi_5(t) = \sum_{i=1}^{s} \chi([\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]; \gamma_i(t))\psi(\gamma_i(t))A_i(\gamma_i(t))\dot{\gamma}_i(t), \widehat{f}_0^- = \sum_{i=1}^{s} A_{i0}^- \widetilde{\varphi}(\tau_i(\widetilde{t}_0-)) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\nu} B_{j0}^- u_{j0}^- + f_0^-, \widehat{f}_1^- = \sum_{i=1}^{s} A_{i1}^- \widetilde{x}(\tau_i(\widetilde{t}_1-)) + \sum_{j=1}^{\nu} B_{j1}^- u_{j1}^- + f_1^-.$$

Теорема 7.3.11. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_1 < b$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнено условие* 7.1.8. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*:

7.3.9. *существуют конечные пределы*

$$A_{i0}^+,\ i = \overline{1, s},\ B_{j0}^+,\ u_{j0}^+,\ j = \overline{1, \nu},\ f_0^+;$$

7.3.10. *существуют конечные пределы*

$$A_{i1}^+,\ i = \overline{1, s},\ B_{j1}^+,\ u_{j1}^+,\ j = \overline{1, \nu},\ f_1^+.$$

Тогда существует нетривиальное решение $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12) *такое, что выполнены условия* (6.3.13), (7.2.14) *и* (7.3.8). *Кроме того,*

$$\psi(\widetilde{t}_0)(\widehat{f}_0^+ - \dot{\varphi}^+) \geqslant 0,\ \psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1^+ \leqslant \psi(\widetilde{t}_0)(\widehat{f}_0^+ - \dot{\varphi}^+).$$

Здесь

$$\widehat{f}_0^+ = \sum_{i=1}^{s} A_{i0}^+ \widetilde{\varphi}(\tau_i(\widetilde{t}_0+)) + \sum_{j=1}^{\nu} B_{j0}^+ u_{j0}^+ + f_0^+,\ \ \widehat{f}_1^+ = \sum_{i=1}^{s} A_{i1}^+ \widetilde{x}(\tau_i(\widetilde{t}_1+)) + \sum_{j=1}^{\nu} B_{j1}^+ u_{j1}^+ + f_1^+.$$

Теорема 7.3.12. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и пусть выполнены следующие условия*:

7.3.11. *функция* $\widetilde{\varphi}(t)$ *непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $\widetilde{t}_0$; *функции* $A_i(t)$, $\widetilde{\varphi}(\tau_i(t))$, $i = 1, \ldots, s$, $B_j(t)$, $\widetilde{u}(\theta_j(t))$, $j = 1, \ldots, \nu$, $f(t)$ *непрерывны в точке* $\widetilde{t}_0$;

7.3.12. *функции* $A_i(t)$, $\widetilde{x}(\tau_i(t))$, $i = 1, \ldots, s$, $B_j(t)$, $\widetilde{u}(\theta_j(t))$, $j = 1, \ldots, \nu$, $f(t)$ *непрерывны в точке* $\widetilde{t}_1$.

Тогда существует нетривиальное решение $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12) *такое, что выполнены условия* (6.3.13), (7.2.17) *и* (7.3.8). *Кроме того,*

$$\psi(\widetilde{t}_0)(\widehat{f}_0 - \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)) \geqslant 0,\ \psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1 \geqslant 0,$$

где

$$\widehat{f}_0 = \sum_{i=1}^{s} A_i(\widetilde{t}_0)\widetilde{\varphi}(\tau_i(\widetilde{t}_0)) + \sum_{j=1}^{\nu} B_j(\widetilde{t}_0)\widetilde{u}(\theta_j(\widetilde{t}_0)) + f(\widetilde{t}_0),$$
$$\widehat{f}_1 = \sum_{i=1}^{s} A_i(\widetilde{t}_1)\widetilde{x}(\tau_i(\widetilde{t}_1)) + \sum_{j=1}^{\nu} B_j(\widetilde{t}_1)\widetilde{u}(\theta_j(\widetilde{t}_1)) + f(\widetilde{t}_1).$$

Теорема 7.3.13. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнены условия* 7.1.1, 7.3.5 *и* 7.3.8. *Тогда существует такая функция* $(\psi_0, \psi(t)) \neq 0$, *где* $\psi_0 = \mathrm{const} \leqslant 0$, $\psi(t)$ *удовлетворяет уравнению* (6.3.12), *что выполнены условия* (6.3.13), (7.2.11) *и* (7.3.8). *Кроме того,*

$$\psi_0 + \psi(\widetilde{t}_0)(\widehat{f}_0^- - \dot{\varphi}^-) \leqslant 0,\ \psi_0 + \psi(\widetilde{t}_1)f_1^+ \leqslant 0.$$

Теорема 7.3.14. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a,b)$, $i = 0,1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнены условия* 7.1.1, 7.3.5 *и* 7.3.12. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12), *что выполнены условия* (6.3.13), (7.2.11) *и* (7.3.8). *Кроме того,*

$$\psi(\widetilde{t}_0)(\widehat{f}_0^- - \dot{\varphi}^-) \leqslant \psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1, \ \psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1 \geqslant 0.$$

Теорема 7.3.15. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены условия* 7.1.8, 7.3.8 *и* 7.3.9. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12), *что выполнены условия* (6.3.13), (7.2.14) *и* (7.3.8). *Кроме того,*

$$\psi(\widetilde{t}_0)(\widehat{f}_0^+ - \dot{\varphi}^+) \geqslant 0, \ \psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1^- \geqslant 0.$$

Теорема 7.3.16. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_1 < b$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены условия* 7.1.8, 7.3.9 *и* 7.3.12. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12), *что выполнены условия* (6.3.13), (7.2.14) *и* (7.3.8). *Кроме того,*

$$\psi(\widetilde{t}_0)(\widehat{f}_0^+ - \dot{\varphi}^+) \geqslant \psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1, \ \psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1 \geqslant 0.$$

Теорема 7.3.17. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_0 > 0$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и выполнены условия* 7.3.8 *и* 7.3.11. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12), *что выполнены условия* (6.3.13), (7.2.17) *и* (7.3.8). *Кроме того,*

$$\psi(\widetilde{t}_0)(\widehat{f}_0 - \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)) \leqslant \psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1^-, \ \psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1^- \geqslant 0.$$

Теорема 7.3.18. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a,b)$, $i = 0,1$ *и выполнены условия* 7.3.10 *и* 7.3.11. *Тогда существует такое нетривиальное решение* $\psi(t)$ *уравнения* (6.3.12), *что выполнены условия* (6.3.13), (7.2.17) *и* (7.3.8). *Кроме того,*

$$\psi(\widetilde{t}_1)\widehat{f}_1^+ \leqslant \psi(\widetilde{t}_0)(\widehat{f}_0 - \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)), \ \psi(\widetilde{t}_0)(\widehat{f}_0 - \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)) \geqslant 0.$$

7.4. Задача с несоизмеримыми запаздываниями в управлениях. Пусть в задаче (7.1.1)–(7.1.4) правая часть f дифференциального уравнения (7.1.1) принадлежит пространству $E^{(1)}(J \times G^s \times G^\nu, \mathbb{R}^n)$; запаздывания $\theta_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, \nu$ кусочно абсолютно непрерывны и удовлетворяют условию $\theta_i(t) \leqslant t$, $\theta_i(t) > 0$; $U \subset O$ — выпуклое множество.

Множество допустимых элементов $\lambda = (t_0, t_1, \varphi, u) \in B_3$ обозначим B_{35}.

Определение 7.4.1. Элемент $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{\varphi}, \widetilde{u}) \in B_{35}$ называется *оптимальным,* если существует число $\widetilde{\delta} > 0$ такое, что для произвольных элементов $\sigma = (t_0, t_1, \varphi, u) \in B_{35}$, удовлетворяющих условию

$$|\widetilde{t}_0 - t_0| + |\widetilde{t}_1 - t_1| + \|\widetilde{\varphi} - \varphi\| + \|\widetilde{u} - u\| \leqslant \widetilde{\delta},$$

выполнено неравенство

$$q^0(\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{\varphi}(t_0), \widetilde{x}(t_1)) \leqslant q^0(t_0, t_1, \varphi(t_0), x(t_1)).$$

Теорема 7.4.1. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_0 > a$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнены условия теоремы* 7.1.1. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* (6.4.1) *и* 7.1.5–7.1.7.

Теорема 7.4.2. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_1 < b$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены условия теоремы* 7.1.2. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* (6.4.1), 7.1.5, 7.1.6 *и* (7.1.9)–(7.1.11).

Теорема 7.4.3. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $t_i \in (a,b)$, $i = 0,1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и выполнены условия теоремы* 7.1.3. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* (6.4.1), 7.1.5, (7.1.6) *и* (7.1.12)–(7.1.14).

Теорема 7.4.4. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $t_i \in (a,b)$, $i = 0,1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнены условия* 7.1.1, 7.1.2 *и* 7.1.10. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* (6.4.1), 7.1.5, 7.1.6, (7.1.7) *и* (7.1.11).

Теорема 7.4.5. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $t_i \in (a,b)$, $i = 0,1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-)$ *и выполнены условия* 7.1.1, 7.1.2 *и* 7.1.12. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* (6.4.1), 7.1.5, 7.1.6, (7.1.7) *и* (7.1.14).

Теорема 7.4.6. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены условия* 7.1.3, 7.1.8 *и* 7.1.9. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* (6.4.1), 7.1.5, (7.1.6), (7.1.8)–(7.1.10).

Теорема 7.4.7. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+)$ *и выполнены условия* 7.1.8, 7.1.9 *и* 7.1.12. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$ *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* (6.4.1), 7.1.5, (7.1.6), (7.1.9), (7.1.10) *и* (7.1.14).

Теорема 7.4.8. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_0 > a$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и выполнены условия* 7.1.3 *и* 7.1.11. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$ *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* (6.4.1), 7.1.5, (7.1.6), (7.1.8), (7.1.12) *и* (7.1.13).

Теорема 7.4.9. *Пусть* $\widetilde{\lambda}$ — *оптимальный элемент,* $\widetilde{t}_i \in (a,b)$, $i = 0,1$, $\widetilde{x}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$ *и выполнены условия* 7.1.10 *и* 7.1.11. *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$ *и решение* $\psi(t)$ *уравнения* (7.1.5) *такие, что выполнены условия* (6.4.1), 7.1.5, (7.1.6), (7.1.11)–(7.1.13).

7.5. Доказательство теоремы 7.1.1.

Вспомогательные утверждения. Каждому элементу

$$q = (t_0, t_1, \varphi, f) \in J^2 \times \Delta \times E_f^{(1)}$$

будем ставить в соответствие дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t))), t \in [t_0, t_1]$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [\tau, t_0].$$

Определение 7.5.1. Решение, соответствующее элементу $q = (t_0, t_1, \varphi, f)$, называется решением $x(t;\eta)$, $\eta = (t_0, \varphi, f)$, определенным на $[\tau, t_1]$, и обозначается $x(t;q)$ (см. определение 1.3.1).

Очевидно,

$$\widetilde{x}(t) = x(t;\widetilde{q}) = x(t;\widetilde{\eta}),\ t \in [\tau, \widetilde{t}_1],$$

где

$$\widetilde{q} = (\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{\varphi}, \widetilde{f}),\ \widetilde{\eta} = (\widetilde{t}_0, \widetilde{\varphi}, \widetilde{f}),\ \widetilde{f} = f(t, x_1, \ldots, x_s, \widetilde{u}(\theta_1(t)), \ldots, \widetilde{u}(\theta_\nu(t))).$$

Теорема 7.5.1. *Пусть* $K_1 \subset O$ — *компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества* $\operatorname{cl}\widetilde{\varphi}(J_1) \cup \widetilde{x}([\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1])$. *Тогда существует число* $\delta_1 > 0$ *такое, что произвольному элементу*

$$q \in V(\widetilde{q}; K_1, \delta_1, \alpha_1) = (V(\widetilde{t}_0;\delta_1) \cap J) \times (V(\widetilde{t}_1;\delta_1) \cap J) \times (V(\widetilde{\varphi};\delta_1) \cap \Delta) \times [\widetilde{f} + (W^{(1)}(K_1;\delta_1) \cap V_{K_1,\delta_1})]$$

соответствует решение $x(t;q) \in \operatorname{int} K_1$. *Кроме того, для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_1]$, *что для произвольного* $q \in V(\widetilde{q}; K_1, \delta_1, \alpha_1)$ *выполнено неравенство*

$$|x(\widetilde{t}_1;\widetilde{q}) - x(t_1;q)| \leqslant \varepsilon.$$

Эта теорема следует из теоремы 6.5.1.

Замечание 7.5.1. Теорема 7.5.1 остается в силе, если множество $V(\widetilde{q}; K_1, \delta_1, \alpha_1)$ заменено множеством

$$V(\widetilde{q}; K_1, \delta_1) = (V(\widetilde{t}_0;\delta_1) \cap J) \times (V(\widetilde{t}_1;\delta_1) \cap J) \times (V(\widetilde{\varphi};\delta_1) \cap \Delta) \times (\widetilde{f} + W^{(1)}(K_1;\delta_1)).$$

Рассмотрим топологическое векторное пространство

$$E_q = \mathbb{R}_{t_0} \times \mathbb{R}_{t_1} \times E_\varphi \times E_f^{(1)} = E_y^2 \times E_\zeta,$$

где $y = (t_0, t_1)^*, \zeta = (\varphi, f)$.

Множество

$$X_0 = [a, \widetilde{t}_0] \times [\widetilde{t}_1, b] \subset \mathbb{R}_y^2$$

является локально выпуклым подпространством относительно индуцируемой из $\mathbb{R}_y^2$ топологии.

Через $D_0 \subset X_0 \times E_\zeta$ обозначим множество элементов $q \in X_0 \times \Delta \times E_f^{(1)}$, каждому из которых соответствует решение $x(t; q)$.

Лемма 7.5.1. *Множество D_0 конечно локально выпукло.*

Доказательство этой леммы полностью совпадает с доказательством леммы 6.5.2.

На множестве D_0 определим отображение

$$T : D_0 \to \mathbb{R}_T^n$$

формулой

$$T(q) = x(t_1; q).$$

Лемма 7.5.2. *Отображение T дифференцируемо в точке $\widetilde{q}$ и*

$$dT_{\widetilde{q}}(\delta q) = \delta x(\widetilde{t}_1; \delta\eta) + f_1^- \delta t_1 \;\; \forall \delta q = (\delta t_0, \delta t_1, \delta\varphi, \delta f) \in E_q - \widetilde{q}, \tag{7.5.1}$$

где

$$\delta x(\widetilde{t}_1; \delta\eta) = Y(\widetilde{t}_0; \widetilde{t}_1)[\delta\varphi(\widetilde{t}_0-) + (\dot{\varphi}^- - f_0^-)\delta t_0] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\gamma_i(t); \widetilde{t}_1) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \delta\varphi(t) dt + \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} Y(t; \widetilde{t}_1) \delta f[t] dt.$$

Эта лемма на основе теоремы 3.1.1 доказывается тем же способом, что и лемма 6.5.3.

Теперь рассмотрим пространство

$$E_z = \mathbb{R}_\xi \times E_q$$

точек $z = (\xi, q)$.

Введем множества

$$X = [0, \infty) \times X_0, \;\; D = [0, \infty) \times D_0.$$

Множество D является конечно локально выпуклым в подпространстве $X \times E_\zeta \subset E_r$ (см. определение 7.5.1 и лемму 7.5.1).

На множестве D определим отображение

$$P : D \to E_p^{1+l}$$

формулой

$$P(z) = Q(t_0, t_1, \varphi(t_0), T(q)) + (\xi, 0, \ldots, 0)^*,$$

где

$$Q = (q^0, \ldots, q^l)^*.$$

Лемма 7.5.3. *Отображение P дифференцируемо в точке $\widetilde{r} = (0, \widetilde{q})$ и*

$$dP_{\widetilde{z}}(\delta z) = [\widetilde{Q}_{t_0} + \widetilde{Q}_{x_1} Y(\widetilde{t}_0; \widetilde{t}_1)(\dot{\varphi}^- - f_0^-) + \widetilde{Q}_{x_0}\dot{\varphi}^-]\delta t_0 +$$
$$+ [\widetilde{Q}_{x_0} + \widetilde{Q}_{x_1} Y(\widetilde{t}_0; \widetilde{t}_1)]\delta\varphi(\widetilde{t}_0-) + [\widetilde{Q}_{t_1} + \widetilde{Q}_{x_1} f_1^-)]\delta t_1 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \widetilde{Q}_{x_1} Y(\gamma_i(t); \widetilde{t}_1) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \delta\varphi(t) dt +$$
$$+ \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \widetilde{Q}_{x_1} Y(t; \widetilde{t}_1) \delta f[t] dt + (\delta\xi, 0, \ldots, 0)^*, \quad \delta z \in E_z - \widetilde{z}. \tag{7.5.2}$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 6.5.3 получим:

$$P(\widetilde{z}+\varepsilon\delta z)-P(\widetilde{z})=Q(\widetilde{t}_0+\varepsilon\delta t_0,\widetilde{t}_1+\varepsilon\delta t_1,\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+\varepsilon\delta t_0)+\varepsilon\delta\varphi(\widetilde{t}_0+\varepsilon\delta t_0),T(\widetilde{q}+\varepsilon\delta q))-$$
$$-Q(\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1,\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0),T(\widetilde{q}))+\varepsilon(\delta\xi,0,\ldots,0)=\varepsilon[(\widetilde{Q}_{t_0}+\widetilde{Q}_{x_0}\dot{\varphi}^-)\delta t_0+\widetilde{Q}_{t_1}\delta t_1+$$
$$+\widetilde{Q}_{x_0}\delta\varphi(\widetilde{t}_0-)+\widetilde{Q}_{x_1}dT_{\widetilde{q}}(\delta q)+(\delta\xi,0,\ldots,0)^*]+o(\varepsilon\delta z).$$

Из этого, принимая во внимание (7.3.1) и группируя члены, получаем формулу (7.5.2).

В топологическом векторном пространстве E_z определим фильтр $\Phi_{\widetilde{z}}$ как прямое произведение фильтров

$$\Phi_{\widetilde{z}}=\Phi_{\widetilde{y}}\times\Phi_{\widetilde{\varphi}}\times\Phi_1,$$

где фильтры $\Phi_{\widetilde{y}}$ и $\Phi_{\widetilde{\varphi}}$, соответственно, определяются выпуклыми базисами

$$\{(V_0\cap[0,\infty))\times(V_{\widetilde{t}_0}\cap[a,\widetilde{t}_0])\times(V_{\widetilde{t}_1}\cap[a,\widetilde{t}_1]):V_0\subset\mathbb{R}_\xi,V_{\widetilde{t}_i}\subset\mathbb{R}_{t_i},i=0,1\text{ — выпуклые окрестности}\};$$
$$\{V_{\widetilde{\varphi}}\cap\Delta_0:V_{\widetilde{\varphi}}\subset E_\varphi\text{ — выпуклая окрестность}\}.$$

Фильтр Φ_1 был определен в п. 5.2.

Фильтр $\Phi_{\widetilde{z}}$ является квазивыпуклым, так как это прямое произведение выпуклого фильтра $\Phi_{\widetilde{y}}\times\Phi_{\widetilde{\varphi}}$ на квазивыпуклый фильтр Φ_1.

На основе теоремы 7.5.1 и замечания 7.5.1 доказывается непрерывность отображения P на фильтре $\mathrm{co}([\Phi_{\widetilde{z}}])$ (см. п. 6.5).

Точка $\widetilde{z}=(0,\widetilde{q})=(0,\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1,\widetilde{\varphi},\widetilde{f})$ принадлежит всем элементам фильтра $\Phi_{\widetilde{z}}$; при этом

$$P(\widetilde{z})=(q^0(\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1,\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0),\widetilde{x}(\widetilde{t}_1)),0,\ldots,0)^*.$$

Определим множество

$$\widehat{B}_{32}=\{q=(t_0,t_1,\varphi,f):f=(t,x_1,\ldots,x_s,u(\theta_1(t)),\ldots,u(\theta_\nu(t))),(t_0,t_1,\varphi,u)\in B_{32}\}.$$

Для произвольного элемента

$$z=(\xi,q)\in W_{\widetilde{r}}\cap([0,\infty)\times\widehat{B}_{32}),$$

где $W_{\widetilde{z}}\in\Phi_{\widetilde{z}}$, имеем:

$$P(z)=(q^0(t_0,t_1,\varphi(t_0),x(t_1;q)),0,\ldots,0)^*.$$

После этого, аналогично доказательству теоремы 6.1.1, можно доказать существование такого элемента $\widehat{W}_{\widetilde{z}}\in\Phi_{\widetilde{z}}$, что

$$P(\widetilde{z})\in\partial P(\widehat{W}_{\widetilde{z}}).$$

Следовательно, отображение P критично на $\Phi_{\widetilde{z}}$. □

Вывод необходимых условий оптимальности. Все условия теоремы 4.3.2 выполнены. Поэтому существуют вектор $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_l)\neq 0$ и элемент $\widehat{W}_{\widetilde{z}}\in\Phi_{\widetilde{z}}$, такие что справедливо неравенство (6.5.8), где $dP_{\widetilde{z}}(\delta z)$ имеет вид (7.5.2).

Ясно, что функция

$$\psi(t)=\pi\widetilde{Q}_{x_1}Y(t;\widetilde{t}_1)\tag{7.5.3}$$

удовлетворяет уравнению (7.1.5) и условиям

$$\psi(\widetilde{t}_1)=\pi\widetilde{Q}_{x_1},\quad\psi(t)=0,\ t>\widetilde{t}_1.\tag{7.5.4}$$

Из неравенства (6.5.8) с учетом (7.5.2)–(7.5.4) получим

$$[\pi\widetilde{Q}_{t_0}+\psi(\widetilde{t}_0)(\dot{\varphi}^--f_0^-)+\pi\widetilde{Q}_{x_0}\dot{\varphi}^-]\delta t_0+[\pi\widetilde{Q}_{x_0}+\psi(\widetilde{t}_0)]\delta\varphi(\widetilde{t}_0-)+$$
$$+[\pi\widetilde{Q}_{t_1}+\psi(\widetilde{t}_1)f_1^-]\delta t_1+\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\psi(\gamma_i(t))\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\delta\varphi(t)dt+$$
$$+\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1}\psi(t)\delta f[t]dt+\pi_0\delta\xi\leqslant 0\ \forall\delta z\in\mathrm{cone}(\widetilde{W}_{\widetilde{z}}-\widetilde{z}).\tag{7.5.5}$$

Условие $\delta z \in \operatorname{cone}(\widetilde{W}_{\widetilde{z}} - \widetilde{z})$ эквивалентно условию $\delta\xi \in [0,\infty)$, $\delta t_i \in (-\infty, 0]$, $i = 0,1$, $\delta\varphi \in \operatorname{cone}(\widetilde{W}_{\widetilde{\varphi}} - \widetilde{\varphi})$, $\delta f \in \operatorname{cone}(\widetilde{W}_{f}^{(1)} - \widehat{f})$, где

$$\widetilde{W}_{\widetilde{\varphi}} = \widetilde{V}_{\widetilde{\varphi}} \cap \Delta_0 \in \Phi_{\widetilde{\varphi}},\ \widetilde{W}_{\widetilde{f}}^{(1)} \in \Phi_1.$$

Пусть в неравенстве (7.5.5) $\delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = 0$, $\delta f = 0$, тогда

$$[\pi\widetilde{Q}_{x_0} + \psi(\widetilde{t}_0)]\delta\varphi(\widetilde{t}_0-)+$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t))\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\delta\varphi(t)dt \leqslant 0,$$
$$\delta\varphi \in \operatorname{cone}(\widetilde{W}_{\widetilde{\varphi}} - \widetilde{\varphi}).$$

Принимая во внимание включения

$$\operatorname{cone}(\widetilde{W}_{\widetilde{\varphi}} - \widetilde{\varphi}) \supset \Delta_0 - \widetilde{\varphi}$$

(см. (6.5.17)), имеем:

$$[\pi\widetilde{Q}_{x_0} + \psi(\widetilde{t}_0)]\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-) + \sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t))\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\widetilde{\varphi}(t)dt \geqslant$$
$$\geqslant [\pi\widetilde{Q}_{x_0} + \psi(\widetilde{t}_0)]\varphi(\widetilde{t}_0) + \sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t))\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\varphi(t)dt\ \ \forall\varphi \in \Delta_0. \tag{7.5.6}$$

Пусть $\varphi \in M$ — произвольная точка. Функция

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases}\varphi, & t \in [\widetilde{t}_0 - \varepsilon, \widetilde{t}_0],\\ \widetilde{\varphi}(t), & t \notin [\widetilde{t}_0 - \varepsilon, \widetilde{t}_0],\end{cases}$$

принадлежит множеству Δ_0 и, следовательно, удовлетворяет неравенству (7.5.6).

Таким образом,

$$[\pi\widetilde{Q}_{x_0} + \psi(\widetilde{t}_0)]\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-) + \sum_{i=1}^{s}\int_{\widetilde{t}_0-\varepsilon}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t))\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\widetilde{\varphi}(t)dt \geqslant$$
$$\geqslant [\pi\widetilde{Q}_{x_0} + \psi(\widetilde{t}_0)]\varphi + \sum_{i=1}^{s}\int_{\widetilde{t}_0-\varepsilon}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t))\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\varphi dt.$$

Из этого неравенства, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, можно заключить, что для произвольного $\varphi \in M$

$$[\pi\widetilde{Q}_{x_0} + \psi(\widetilde{t}_0)]\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-) \geqslant [\pi\widetilde{Q}_{x_0} + \psi(\widetilde{t}_0)]\varphi.$$

Пусть

$$I = \{i \in \{1,\ldots,s\} : \tau_i(\widetilde{t}_0) < \widetilde{t}_0\}$$

и $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\widetilde{t}_0 - \varepsilon > \max\{\tau_i(\widetilde{t}_0) : i \in I\}$.

Определим функцию

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(t) = \begin{cases}\widetilde{\varphi}, & t \in [\widetilde{t}_0 - \varepsilon, \widetilde{t}_0],\\ \varphi(t), & t \notin [\widetilde{t}_0 - \varepsilon, \widetilde{t}_0],\end{cases}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная фиксированная функция из Δ_0.

Очевидно, $\widehat{\varphi} \in \Delta_0$, поэтому

$$\sum_{i\in I}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0-\varepsilon} \psi(\gamma_i(t))\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\widetilde{\varphi}(t)dt \geqslant \sum_{i\in I}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0-\varepsilon} \psi(\gamma_i(t))\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\varphi(t)dt$$

(см. (7.5.5)).

При $\varepsilon \to 0$ из последнего неравенства следует линеаризованный принцип максимума 7.1.5.

Остальные необходимые условия получаются тем же способом, что и при доказательстве теоремы 6.1.1.

В заключение отметим, что теоремы 7.1.2–7.1.9 на основе теорем 3.1.1–3.1.3 доказываются аналогично. Для этого достаточно множества X_0 выбрать соответствующим образом.

7.6. Доказательство теоремы 7.4.1.

Вспомогательные утверждения. Каждому элементу

$$\lambda = (t_0, t_1, \varphi, u) \in J^2 \times \Delta \times \Omega$$

сопоставим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t))), \ t \in [t_0, t_1]$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \ t \in [\tau, t_0].$$

Решение, соответствующее элементу λ, обозначим $x(t;\lambda)$ (см. определение 7.1.1).

Теорема 7.6.1. *Существует число $\delta_1 > 0$ такое, что произвольному элементу*

$$\lambda \in V(\widetilde{\lambda}; \delta_1) = (V(\widetilde{t}_0; \delta_1) \cap J) \times (V(\widetilde{t}_1; \delta_1) \cap J) \times (V(\widetilde{\varphi}; \delta_1) \cap \Delta) \times (V(\widetilde{u}; \delta_1) \cap \Omega)$$

соответствует решение $x(t;\lambda)$. Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_1]$, что для произвольного $\lambda \in V(\widetilde{\lambda}; \delta_1)$ выполнено неравенство

$$|x(\widetilde{t}_1; \widetilde{\lambda}) - x(t_1; \lambda)| \leqslant \varepsilon.$$

Эта теорема следует из теоремы 1.2.2.

Рассмотрим топологическое векторное пространство

$$E_\lambda = \mathbb{R}_{t_0} \times \mathbb{R}_{t_1} \times E_\varphi \times E_u = E_y^2 \times E_\zeta,$$

где $\lambda = (y, \zeta), \ y = (t_0, t_1)^*, \ \zeta = (\varphi, u)$.

В пространстве $\mathbb{R}_y^2$ множество

$$X_0 = [a, \widetilde{t}_0] \times [a, \widetilde{t}_1]$$

является локально выпуклым подпространством относительно индуцируемой из $\mathbb{R}_y^2$ топологии.

Через $D_0 \subset X_0 \times E_\zeta$ обозначим множество элементов $\lambda \in X_0 \times \Delta \times \Omega$, каждому из которых соответствует решение $x(t;\lambda)$.

В силу теоремы 7.6.1 множество D_0 открыто относительно подпространства $X_0 \times E_\zeta$ и, тем более, конечно локально выпукло.

На множестве D_0 определим отображение

$$T : D_0 \to \mathbb{R}_T^n$$

формулой

$$T(\lambda) = x(t_1; \lambda).$$

Лемма 7.6.1. *Отображение T дифференцируемо в точке $\widetilde{\lambda}$ и*

$$dT_{\widetilde{\lambda}}(\delta\lambda) = \delta x(\widetilde{t}_1; \delta v) + f_1^- \delta t_1 \ \ \forall \delta\lambda = (\delta t_0, \delta t_1, \delta\varphi, \delta u) \in E_\lambda - \widetilde{\lambda},$$

где

$$\delta x(\widetilde{t}_1; \delta v) = Y(\widetilde{t}_0; \widetilde{t}_1)[\delta\varphi(\widetilde{t}_0 -) + (\dot{\varphi} - f_0^-)\delta t_0] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\gamma_i(t); \widetilde{t}_1) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \delta\varphi(t) dt + \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} Y(t; \widetilde{t}_1) \sum_{i=1}^{\nu} \widetilde{f}_{u_i}[t] \delta u(\theta_i(t)) dt.$$

Эта лемма на основе теоремы 3.1.4 доказывается тем же способом, что и лемма 6.5.3.

Рассмотрим векторное пространство

$$E_z = \mathbb{R}_\xi \times E_\lambda$$

точек $z = (\xi, \lambda)$.

Множество $D = [0, \infty) \times D_0$ является открытым относительно подпространства $[0, \infty) \times X_0 \times E_\zeta \subset E_z$.

На множестве D определим отображение

$$P : D \to \mathbb{R}_p^{1+l}$$

формулой

$$P(r) = Q(t_0, t_1, x_0, T(\lambda)) + (\xi, 0, \ldots, 0)^*.$$

Лемма 7.6.2. *Отображение P дифференцируемо в точке $\widetilde{z} = (0, \widetilde{\lambda})$ и*

$$\begin{aligned} dP_{\widetilde{z}}(\delta z) = {} & [\widetilde{Q}_{t_0} + \widetilde{Q}_{x_0}\dot{\varphi}^- + \widetilde{Q}_{x_1} Y(\widetilde{t}_0; \widetilde{t}_1)(\dot{\varphi}^- - f_0^-)]\delta t_0 + \\ & + [\widetilde{Q}_{x_0} + \widetilde{Q}_{x_1} Y(\widetilde{t}_0; \widetilde{t}_1)]\delta\varphi(\widetilde{t}_0 -) + [\widetilde{Q}_{t_0} + \widetilde{Q}_{x_1} f_1^-)]\delta t_1 + \\ & + \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \widetilde{Q}_{x_1} Y(\gamma_i(t); \widetilde{t}_1) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \delta\varphi(t) dt + \\ & + \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \widetilde{Q}_{x_1} Y(t; \widetilde{t}_1) \sum_{i=1}^{\nu} \widetilde{f}_{u_i}[t] \delta u(\theta_i(t)) dt + (\delta\xi, 0, \ldots, 0)^*, \quad \delta z \in E_z - \widetilde{z}. \end{aligned} \tag{7.6.1}$$

Доказательство этой леммы с помощью леммы 7.6.1 полностью совпадает с доказательством леммы 7.5.3.

В топологическом векторном пространстве E_z определим выпуклый фильтр $\Phi_{\widetilde{z}}$ как прямое произведение выпуклых фильтров $\Phi_{\widetilde{y}}$, $\Phi_{\widetilde{\varphi}}$ и $\Phi_{\widetilde{u}}$, т.е.

$$\Phi_{\widetilde{z}} = \Phi_{\widetilde{y}} \times \Phi_{\widetilde{\varphi}} \times \Phi_{\widetilde{u}}$$

(см. пп. 6.6 и 7.5).

В силу теоремы 7.6.1 отображение непрерывно на фильтре $\mathrm{co}([\Phi_{\widetilde{z}}])$.

Точка $\widetilde{z} = (0, \widetilde{\lambda})$ принадлежит всем элементам фильтра $\Phi_{\widetilde{z}}$, при этом для произвольного $z = (\xi, \lambda) \in W_{\widetilde{z}} \cap ([0, \infty) \times B_{35})$, где $W_{\widetilde{z}} \in \Phi_{\widetilde{z}}$, имеем:

$$P(z) = (q^0(\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \varphi(\widetilde{t}_0), x(t_1; \lambda)), 0, \ldots, 0)^*.$$

Аналогично (см. доказательство теоремы 6.4.1) можно доказать существование такого элемента $\widehat{W}_{\widetilde{z}} \in \Phi_{\widetilde{z}}$, что

$$P(\widetilde{z}) \in \partial P(\widehat{W}_{\widetilde{z}}).$$

Таким образом, отображение P критично на $\Phi_{\widetilde{r}}$.

Вывод необходимых условий оптимальности. Все условия теоремы 4.3.2 выполнены. Следовательно, существуют вектор $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$ и элемент $\widehat{W}_{\widetilde{z}} \in \Phi_{\widetilde{z}}$ такие, что справедливо неравенство (6.5.8), где $dP_{\widetilde{z}}(\delta z)$ имеет вид (7.6.1).

Из неравенства (6.5.8), с учетом (7.5.2), (7.5.3) и (7.6.1), получаем

$$\begin{gathered} [\pi\widetilde{Q}_{t_0} + \psi(\widetilde{t}_0)(\dot{\varphi}^- - f_0^-) + \pi\widetilde{Q}_{x_0}\dot{\varphi}^-]\delta t_0 + [\pi\widetilde{Q}_{x_0} + \psi(\widetilde{t}_0)]\delta\varphi(\widetilde{t}_0 -) + \\ + [\pi\widetilde{Q}_{t_1} + \psi(\widetilde{t}_1) f_1^-]\delta t_1 + \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t)) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \delta\varphi(t) dt + \\ + \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \psi(t) \sum_{i=1}^{\nu} \widetilde{f}_{u_i}[t] \delta u(\theta_i(t)) dt + \pi_0 \delta\xi \leqslant 0. \end{gathered}$$

Из этого неравенства стандартным образом следуют все необходимые условия оптимальности (см. доказательства теорем 6.4.1 и 7.1.1).

8. Оптимальные задачи с переменной структурой

В этом параграфе поставлены и исследованы оптимальные задачи для систем с переменной структурой. Доказаны необходимые условия оптимальности. Изменение структуры системы означает, что в процессе движения в некоторый, заранее не известный момент времени, объект может перейти от одного закона движения к другому. Начальное условие каждого последующего состояния системы зависит от состояния предыдущего, что объединяет их в единую систему с переменной структурой. Различные классы оптимальных задач для систем с переменной структурой исследовались в $[2,5,9,18,20,21,28,33,50,58,63,77,87,128]$.

8.1. Предварительные сведения. Пусть $O_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, G_i \subset \mathbb{R}^{r_i}, i=\overline{1,m}$ — открытые множества;

$$E^{(1)}_{f_i} = E^{(1)}(J \times O^{s_i}, \mathbb{R}^{n_i}), \quad i=\overline{1,m}$$

— пространства функций $f_i(t, x_{i1}, \ldots, x_{is_i})$, соответственно; $\tau_{ij}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $j=\overline{1,s_i}$ — абсолютно непрерывные скалярные функции, удовлетворяющие условиям $\tau_{ij}(t) \leqslant t$, $\dot{\tau}_{ij}(t) > 0$; $\Delta_i = \Delta(J_{i1}, O_i)$ — множество начальных функций $\varphi_i(t)$, $t \in J_{i1} = [\tau_i, b]$, $\tau_i = \tau_{i0}(a)$, $\tau_{i0}(t) = \min\{\tau_{i1}(t), \ldots, \tau_{is_i}(t)\}$; $g_i(t_i, x_{i-1}) \in \mathbb{R}^{n_i}, i=\overline{2,m}$ — непрерывно дифференцируемые по $(t_i, x_{i-1}) \in J \times O_{i-1}$, $i=\overline{2,m}$, функции, соответственно.

Введем множества

$$A_{i0} = \Big\{\mu_i = (t_1, \ldots, t_{i+1}, x_{10}, \ldots, x_{i0}, \varphi_1, \ldots, \varphi_i, f_1, \ldots, f_i) \in J^{1+i} \times \prod_{j=1}^{i} O_j \times \prod_{j=1}^{i} \Delta_j \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{i} E^{(1)}_{f_j} : t_1 < \cdots < t_{i+1}\Big\}, \quad i=\overline{1,m},$$

где

$$\prod_{j=1}^{i} O_j = O_1 \times \cdots \times O_i.$$

Каждому элементу $\mu_m \in A_{m0}$ будем ставить в соответствие совокупность дифференциальных уравнений с разрывными начальными условиями

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(\tau_{i1}(t)), \ldots, x_i(\tau_{is_i}(t))), \tag{8.1.1}$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), t \in [\tau_i, t_i), x_i(t_i) = x_{i0} + g_i(t_i, x_{i-1}(t_i)), \tag{8.1.2}$$

$$i=\overline{1,m}.$$

Здесь и всюду предполагается, что $g_1 = 0$.

Определение 8.1.1. Пусть $\mu_m \in A_{m0}$. Совокупность функций $\{x_i(t) = x_i(t;\mu_i),\ t \in [\tau_i, t_{i+1}],\ \mu_i \in A_{i0}\colon i=\overline{1,m}\}$ будем называть решением, соответствующим элементу μ_m, если функция $x_i(t)$ принимает значения из O_i и на интервале $[\tau_i, t_i]$ удовлетворяет начальному условию (8.1.2) а на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ — уравнению

$$x_i(t) = x_{i0} + g(t_i, x_{i-1}(t_i)) + \int_{t_i}^{t} f_i(\xi, x_i(\tau_{i1}(\xi)), \ldots, x_i(\tau_{is_i}(\xi)))d\xi. \tag{8.1.3}$$

Очевидно, функция $x_i(t)$ на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ абсолютно непрерывна и п.в. удовлетворяет уравнению (8.1.1).

Следующая теорема легко доказывается последовательным применением теоремы 1.2.2 (см. также лемму 6.5.1).

Теорема 8.1.1. *Пусть* $\{\tilde{x}_i(t) = x_i(t;\tilde{\mu}_i), t \in [\tau_i, \tilde{t}_{i+1}] : i=\overline{1,m}\}$ — *решение, соответствующее элементу*

$$\tilde{\mu}_m = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_{m+1}, \tilde{x}_{10}, \ldots, \tilde{x}_{m0}, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_m, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m) \in A_{m0}, \quad t_{m+1} < b;$$

$K_{i1} \subset O_i$ — компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества $K_{i0} = \operatorname{cl}\tilde\varphi_i(J_{i0}) \cap \tilde x_i([\tilde t_i, \tilde t_{i+1}])$; $\alpha > 0$ — фиксированное число. Тогда справедливы следующие утверждения:

8.1.1. *существуют числа $\delta_i > 0, i = 0, 1$, такие что каждому элементу*

$$\mu_m \in V(\tilde\mu_m; K_{11}, \ldots, K_{m1}, \delta_0, \alpha) = \prod_{i=1}^{m+1}(V(\tilde t_i; \delta_0) \cap J) \times \prod_{i=1}^{m}(V(\tilde x_{i0}; \delta_0) \cap O_i)\times$$
$$\times \prod_{i=1}^{m}(V(\tilde\varphi_i; \delta_0) \cap \Delta_i) \times \prod_{i=1}^{m}[\tilde f_i + W^{(1)}(K_{i1}; \alpha) \cap V_{K_{i1},\delta_0}] \subset A_{m0}$$

соответствует решение $\{x_i(t), t \in [\tau_i, t_{i+1}] : i = \overline{1,m}\}$. При этом функция $x_i(t)$ определена на $[\tau_i, \tilde t_{i+1} + \delta_1] \subset J_{i1}$, на интервале $[t_i, \tilde t_{i+1} + \delta_1]$ удовлетворяет уравнению (8.1.3) *и принимает значения из* $\operatorname{int} K_{i1}$;

8.1.2. *для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_0]$, что для любого $\mu_m \in V(\tilde\mu_m; K_{11}, \ldots, K_{m1}, \delta_2, \alpha)$ выполнены неравенства*

$$|x_i(t) - \tilde x_i(t)| \leqslant \varepsilon \ \ \forall t \in [s_{i0}, \tilde t_{i+1} + \delta_1],\ s_{i0} = \max\{\tilde t_i, t_i\},\ i = \overline{1,m}.$$

В пространстве

$$E_{\mu_i} = \mathbb{R}^{1+i} \times \prod_{j=1}^{i}\mathbb{R}^{n_j}_{x_{j0}} \times \prod_{j=1}^{i}E_{\varphi_j} \times \prod_{j=1}^{i}E^{(1)}_{f_j}$$

определим множества вариаций

$$\Im_{i0} = \Big\{\delta\mu_i = (\delta t_1, \ldots, \delta t_{i+1}, \delta x_{10}, \ldots, \delta x_{i0}, \delta\varphi_1, \ldots, \delta\varphi_i, \delta f_1, \ldots, \delta f_i) \in E_{\mu_i}:$$
$$|\delta t_j| \leqslant \alpha_1, \|\delta x_j\| \leqslant \alpha_1,\ \|\delta\varphi_j\| \leqslant \alpha_1,\ \delta f_j = \sum_{k=1}^{m_j}\lambda_{jk}\delta f_{jk},\ |\lambda_{jk}| \leqslant \alpha_1,\ j = \overline{1,i}\Big\},\ i = \overline{1,m},$$

где $\alpha_1 > 0$ — фиксированное число, $\delta f_{jk} \in E^{(1)}_{f_j}$, $k = \overline{1,m_j}$ — фиксированные точки.

Следующая лемма является непосредственным следствием теоремы 8.1.1.

Лемма 8.1.1. *Пусть $\{\tilde x_i(t), t \in [\tau_i, \tilde t_{i+1}] : i = \overline{1,m}\}$ — решение, соответствующее элементу $\tilde\mu_m \in A_{m0}, \tilde t_{m+1} < b$; $K_{i1} \subset O_i$ — компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества K_{i0}. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_1 > 0$ и $\delta_1 > 0$, что для произвольного $(\varepsilon, \delta\mu_m) \in [0, \varepsilon_1] \times \Im_{m0}$ элемент $\tilde\mu_m + \varepsilon\delta\mu_m \in A_{m0}$ и ему соответствует решение $\{x_i(t; \tilde\mu_i + \varepsilon\delta\mu_i) : [\tau_i, \tilde t_{i+1} + \varepsilon\delta t_{i+1}]\}$. При этом решение $x_i(t; \tilde\mu_i + \varepsilon\delta\mu_i)$ определено на $[\tau_i, \tilde t_{i+1} + \delta_1] \subset J_{i1}$, принимает значения из $\operatorname{int} K_{i0}$ и на интервале $[\tilde t_i + \varepsilon\delta t_i, \delta t_{i+1} + \delta_1]$ удовлетворяет п.в. соответствующему дифференциальному уравнению.*

Лемма 8.1.1 позволяет определить приращение решения $x_i(t; \tilde\mu_i), t \in [\tau_i, \tilde t_{i+1} + \delta_1]$, которое, в свою очередь, является продолжением решения $\tilde x_i(t)$:

$$\Delta x_i(t; \varepsilon\delta\mu_i) = x_i(t; \tilde\mu_i + \varepsilon\delta\mu_i) - \tilde x_i(t; \delta\mu_i),\ (t, \varepsilon, \delta\mu_i) \in [\tau_i, \tilde t_{i+1} + \delta_1] \times [0, \varepsilon_1] \times \Im_{i0}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega^-_{i0j} = (\tilde t_i, \underbrace{\tilde x_i(\tilde t_i), \ldots, \tilde x_i(\tilde t_i)}_{j}, \underbrace{\tilde\varphi_i(\tilde t_i-), \ldots, \tilde\varphi_i(\tilde t_i-)}_{(p_i-j)}, \tilde\varphi_i(\tau_{ip_i+1}(\tilde t_i-)), \ldots, \tilde\varphi_i(\tau_{is_i}(\tilde t_i-))),\ j = \overline{0,p_i};$$

$$\omega^-_{i1j} = (\gamma_{ij}, \tilde x_i(\tau_{i1}(\gamma_{ij})), \ldots, \tilde x_i(\tau_{ij-1}(\gamma_{ij})), \tilde x_i(\tilde t_i), \tilde\varphi(\tau_{ij+1}(\gamma_{ij}-)), \ldots, \tilde\varphi(\tau_{is_i}(\gamma_{ij}-))),$$
$$\omega^-_{\overline{i1}j} = (\gamma_{ij}, \tilde x_i(\tau_{i1}(\gamma_{ij})), \ldots, \tilde x_i(\tau_{ij-1}(\gamma_{ij})), \tilde\varphi_i(\tilde t_i-), \tilde\varphi(\tau_{ij+1}(\gamma_{ij}-)), \ldots, \tilde\varphi(\tau_{is_i}(\gamma_{ij}-))),\ j = \overline{p_i+1, s_i};$$
$$\omega^-_{is_i+1} = (\tilde t_{i+1}, \tilde x_i(\tau_{i1}(\tilde t_{i+1}-)), \ldots, \tilde x_i(\tau_{is_i}(\tilde t_{i+1}-))), \quad i = \overline{1, m-1},\ \gamma_{ij} = \gamma_{ij}(\tilde t_i), \gamma_{ij}(t) = \tau^{-1}_{ij}(t).$$

Аналогично определяются $\omega^+_{i0j}, \omega^-_{\overline{i1}j}, \omega^-_{is_i+1}$.

Теорема 8.1.2. *Пусть выполнены следующие условия*:
8.1.3. $\gamma_{ij}=\tilde{t}_i,\ j=\overline{1,p_i},\ \gamma_{ip_i+1}<\cdots<\gamma_{is_i}<\tilde{t}_i, i=\overline{1,m}$;
8.1.4. *существует такое число* $\delta>0$*, что*

$$\gamma_{i1}(t)\leqslant\cdots\leqslant\gamma_{ip_i}(t), t\in(\tilde{t_0}-\delta,\tilde{t_0}], i=\overline{1,m};$$

8.1.5. *существуют конечные пределы*

$$\dot\gamma_{ij}^-=\dot\gamma_{ij}(\tilde{t_0}-),$$

$$\lim_{\omega_i\to\omega_{i0j}^-}\tilde f_i(\omega_i)=f_{ij}^-,\ \omega_i=(t,x_{i1},\dots,x_{is})\in(\tilde t_i-\delta,\tilde t_i]\times O_i^{s_i},\ j=\overline{0,p_i},$$

$$\lim_{(\omega_{i1},\omega_{i2})\to(\omega_{i0j}^-,\omega_{i1j}^-)}[\tilde f_i(\omega_{i1})-\tilde f_i(\omega_{i2})]=f_{ij}^-,\ \omega_{i1},\omega_{i2}\in(\gamma_{ij}-\delta,\gamma_{ij}]\times O_i^s,$$

$$j=\overline{p_i+1,s_i},\ i=\overline{1,m};$$

$$\lim_{\omega_i\to\omega_{is_i+1}^-}\tilde f_i(\omega_i)=f_{is_i+1}^-,\omega_i\in(\tilde t_{i+1}-\delta,\tilde t_{i+1}]\times O_i^{s_i}, i=\overline{1,m-1}.$$

Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2>0,\delta_2>0$, *что для произвольного*

$$(t,\varepsilon,\delta\mu_i)\in[\tilde t_{i+1}-\delta_2,\tilde t_{i+1}+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times\Im_{i0}^-,$$

где

$$\Im_{i0}^-=\{\delta\mu_i\in\Im_{i0}:\delta t_j\leqslant 0, j=\overline{1,i+1}\},$$

справедлива формула

$$\Delta x_i(t;\varepsilon\delta\mu_i)=\varepsilon\delta x_i(t;\delta\mu_i)+o_i(t;\varepsilon\delta\mu_i), \tag{8.1.4}$$

где

$$\delta x_i(t;\delta\mu_i)=\Bigg\{Y_i(\tilde t_i;t)\Bigg[\sum_{j=0}^{p_i}(\hat\gamma_{ij+1}^- -\hat\gamma_{ij}^-)f_{ij}^- +\frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}f_{i-1s_{i-1}+1}^-\Bigg]-$$

$$-\sum_{j=p_i+1}^{s_i}Y_i(\gamma_{ij};t)f_{ij}^-\dot\gamma_{ij}^-\Bigg\}\delta t_i+\beta_i(t;\delta\mu_i), \tag{8.1.5}$$

$$\hat\gamma_{i0}^-=1,\ \hat\gamma_{ij}^-=\dot\gamma_{ij}^-,\ j=\overline{1,p_i},\ \hat\gamma_{ip_i+1}^-=0;$$

$$\beta_i(t;\delta\mu_i)=Y_i(\tilde t_i;t)\left[\delta x_{i0}+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial t_i}\delta t_i+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(\tilde t_i;\delta\mu_i)\right]+$$

$$+\sum_{j=p_i+1}^{s_i}\int_{\tau_{ij}(\tilde t_i)}^{\tilde t_i}Y_i(\gamma_{ij}(\xi);t)\frac{\partial\tilde f_i[\gamma_{ij}(\xi)]}{\partial x_{ij}}\dot\gamma_{ij}(\xi)\delta\varphi_i(\xi)d\xi+\int_{\tilde t_i}^{t}Y_i(\xi;t)\delta f_i[\xi]d\xi;$$

$Y_i(\xi;t)$ — *матричная функция, удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{\partial Y_i(\xi;t)}{\partial\xi}=-\sum_{j=1}^{s_i}Y_i(\gamma_{ij}(\xi);t)\frac{\partial\tilde f_i[\gamma_{ij}(\xi)]}{\partial x_{ij}}\dot\gamma_{ij}(\xi),\xi\in[\tilde t_i,t] \tag{8.1.6}$$

и условию

$$Y_i(\xi;t)=\begin{cases}I_i, & \xi=t,\\ \Theta_i, & \xi>t,\end{cases} \tag{8.1.7}$$

I_i *и* Θ_i — *единичная и нулевая матрица соответствующей размерности.*

Здесь и всюду предполагается, что

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\tilde g_i=\frac{\partial}{\partial t_i}g(\tilde t_i,\tilde x_{i-1}(\tilde t_i)), f_{0s_0+1}=0,\delta f_i[t]=\delta f_i(t,\tilde x_i(\tau_{i1}(t)),\dots,\tilde x_i(\tau_{is_i}(t))).$$

Доказательство этой теоремы осуществляется последовательно относительно $i=\overline{1,m}$, по схеме, используемой при доказательстве теоремы 1.2.2. При этом должны быть учтены следующие соотношения, которые устанавливаются в процессе доказательства:

$$\Delta x_i(\tilde t_i;\varepsilon\delta\mu_i)=\varepsilon\Big\{\delta x_{i0}+\Big[\sum_{j=0}^{p_i}(\hat\gamma^-_{ij+1}-\hat\gamma^-_{ij})f^-_{ij}+$$
$$\frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}f^-_{i-1s_{i-1}+1}+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial t_i}\Big]\delta t_i+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(\tilde t_i;\delta\mu_i)\Big\}+o_i(\varepsilon\delta\mu_i),\ i=\overline{1,m}.$$

Теорема 8.1.3. *Пусть выполнены условие* 8.1.3 *и следующие условия*:

8.1.6. *существует такое число* $\delta>0$, *что*

$$\gamma_{i1}(t)\leqslant\ldots\leqslant\gamma_{ip_i}(t),\ t\in(\tilde t_i,\tilde t_i+\delta],\ i=\overline{1,m};$$

8.1.7. *существуют конечные пределы*

$$\dot\gamma^+_{ij}=\dot\gamma_{ij}(\tilde t_i+),$$
$$\lim_{\omega_i\to\omega^+_{ioj}}\tilde f_i(\omega_i)=f^+_{ij},\ \omega_i=(t,x_{i1},\ldots,x_{is})\in(\tilde t_i,\tilde t_i+\delta]\times O_i^{s_i},\ j=\overline{0,p_i};$$
$$\lim_{(\omega_{i1},\omega_{i2})\to(\omega^+_{i0j},\omega^+_{i1j})}[\tilde f_i(\omega_{i1})-\tilde f_i(\omega_{i2})]=f^+_{ij},\ \omega_{i1},\omega_{i2}\in(\gamma_{ij},\gamma_{ij}+\delta]\times O_i^{s_i},$$
$$j=\overline{p_i+1,s_i},\ i=\overline{1,m};$$
$$\lim_{\omega_i\to\omega^+_{is_i+1}}\tilde f_i(\omega_i)=f^+_{is_i+1},\omega_i\in(\tilde t_{i+1},\tilde t_{i+1}+\delta]\times O_i^{s_i},\ i=\overline{1,m-1}.$$

Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2>0,\delta_2>0$, *что для произвольного*

$$(t,\varepsilon,\delta\mu_i)\in[\tilde t_{i+1}-\delta_2,\tilde t_{i+1}+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times\Im^+_{i0},$$

где

$$\Im^+_{i0}=\{\delta\mu_i\in\Im_{i0}:\delta t_j\geqslant 0,j=\overline{1,i+1}\},$$

справедлива формула (8.1.4), *где* $\delta x_i(t;\delta\mu_i)$ *имеет вид*

$$\delta x_i(t;\delta\mu_i)=\Big\{Y_i(\tilde t_i;t)\Big[\sum_{j=0}^{p_i}(\hat\gamma^+_{ij+1}-\hat\gamma^+_{ij})f^+_{ij}+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}f^+_{i-1s_{i-1}+1}\Big]-\sum_{j=p_i+1}^{s_i}Y_i(\gamma_{ij};t)f^+_{ij}\dot\gamma^+_{ij}\Big\}\delta t_i+\beta_i(t;\delta\mu_i),$$
$$\hat\gamma^+_{i0}=1,\ \hat\gamma^+_{ij}=\dot\gamma^+_{ij},\ j=\overline{1,p_i},\ \hat\gamma^+_{ip_i+1}=0.$$

Доказательство этой теоремы осуществляется последовательно относительно $i=\overline{1,m}$, по схеме, используемой при доказательстве теоремы 1.2.2. При этом должны быть учтены следующие соотношения, которые устанавливаются в процессе доказательства:

$$\Delta x_i(\tilde t_i+\varepsilon\delta t_i;\varepsilon\delta\mu_i)=\varepsilon\Big\{\delta x_{i0}+\Big[-f^+_{is_i}+$$
$$+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}f^+_{i-1s_{i-1}+1}+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial t_i}\Big]\delta t_i+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(\tilde t_i;\delta\mu_i)\Big\}+o_i(\varepsilon\delta\mu_i),\ i=\overline{1,m}.$$

Следующая теорема следует из теорем 8.1.2 и 8.1.3.

Теорема 8.1.4. *Пусть выполнены условия теорем* 8.1.2 *и* 8.1.3. *Пусть, кроме того, выполнены равенства*

$$\sum_{j=0}^{p_i}(\hat\gamma^-_{ij+1}-\hat\gamma^-_{ij})f^-_{ij}+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}f^-_{i-1s_{i-1}+1}=\sum_{j=0}^{p_i}(\hat\gamma^+_{ij+1}-\hat\gamma^+_{ij})f^+_{ij}+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}f^+_{i-1s_{i-1}+1}=f_{i0},$$
$$f^-_{ij}\dot\gamma^-_{ij}=f^+_{ij}\dot\gamma^+_{ij}=f_{ij}\quad j=\overline{p_i+1,s_i},i=\overline{1,m}.$$

Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2>0,\delta_2>0$, *что для произвольного*

$$(t,\varepsilon,\delta\mu_i)\in[\tilde t_i-\delta_2,\tilde t_i+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times\Im_{i0}$$

справедлива формула (8.1.4)*, где* $\delta x_i(t;\delta\mu_i)$ *имеет вид*

$$\delta x_i(t;\delta\mu_i) = \left\{Y_i(\tilde t_i;t)f_{i0} - \sum_{j=p_i+1}^{s_i} Y_i(\gamma_{ij};t)f_{ij}\right\}\delta t_i + \beta_i(t;\delta\mu_i).$$

Теперь рассмотрим совокупность дифференциальных уравнений (8.1.1) с непрерывными начальными условиями. Для этого введем множества

$$B_{i0} = \left\{v_i = (t_1,\ldots,t_{i+1},\varphi_1,\ldots,\varphi_i,f_1,\ldots,f_i) \in J^{1+i} \times \prod_{j=1}^{i}\Delta_j \times \right.$$
$$\left. \times \prod_{j=1}^{i} E_{f_j}^{(1)} : t_j < \tau_{j0}(t_{j+1}), j=\overline{1,i}\right\},\quad i=\overline{1,m}.$$

Здесь и всюду предполагается, что $B_{i0} \neq \varnothing, i=\overline{1,m}$.

Каждому элементу $v_m \in B_{m0}$ будем ставить в соответствие совокупность дифференциальных уравнений (8.1.1) с непрерывными начальными условиями

$$x_i(t) = \varphi_i(t) + g_i(t,x_{i-1}(t)),\ t\in[\tau_{i0}(t_i),t_i],\ i=\overline{1,m}.$$

Соответствующее элементу v_m решение $\{x_i(t;v_i), t\in[\tau_{i0}(t_i),t_{i+1}] : i=\overline{1,m}\}$ определяется аналогично (см. определение 8.1.1).

Теорема 8.1.5. *Пусть* $\{\tilde x_i(t) = x_i(t;\tilde v_i), t\in[\tau_{i0}(\tilde t_i),\tilde t_{i+1}] : i=\overline{1,m}\}$ *— решение, соответствующее элементу* $\tilde v_m = (\tilde t_1,\ldots,\tilde t_{m+1},\tilde\varphi_1,\ldots,\tilde\varphi_m,\tilde f_1,\ldots,\tilde f_m)$*,* $\tilde t_{m+1} < b$; $K_{i1}\subset O_i$ *— компактное множество, содержащее некоторую окрестность множества* K_{i0}*. Тогда выполнены следующие условия*:

8.1.8. *существуют числа* $\delta_i > 0, i=0,1,$ *такие, что каждому элементу*

$$v_m \in V(\tilde v_m;K_{11},\ldots,K_{m1},\delta_0,\alpha) = \prod_{j=1}^{m+1}(V(\tilde t_j;\delta_0)\cap J)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}(V(\tilde\varphi_j;\delta_0)\cap\Delta_j)\times\prod_{j=1}^{m}[\tilde f_j + W^{(1)}(K_{j1};\alpha)\cap V_{K_{j1},\delta_0}] \subset B_{m0}$$

соответствует решение $\{x_i(t), t\in[\tau_{i0}(t_i),t_{i+1}] : i=\overline{1,m}\}$*. При этом решение* $x_i(t)$ *определено на* $[\tau_{i0}(t_i),\tilde t_{i+1}+\delta_1]\subset J_{i1}$*, на интервале* $[t_i,\tilde t_{i+1}+\delta_1]$ *удовлетворяет уравнению* (8.1.3) *и принимает значения из* $\operatorname{int} K_{i1}$;

8.1.9. *для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)\in(0,\delta_0]$*, что для любого* $v_m \in V(\tilde v_m;K_{11},\ldots,K_{m1},\delta_2,\alpha)$ *выполнены неравенства*

$$|x_i(t)-\tilde x_i(t)| \leqslant \varepsilon\ \ \forall t\in[s_{i0},\tilde t_{i+1}+\delta_1], s_{i0}=\max\{\tilde t_i,t_i\}, i=\overline{1,m}.$$

В пространстве

$$E_{v_i} = \mathbb{R}^{1+i}\times\prod_{j=1}^{i}E_{\varphi_j}\times\prod_{j=1}^{i}E_{f_j}^{(1)}$$

определим множества вариаций

$$\Im_{i1} = \left\{\delta v_i = (\delta t_1,\ldots,\delta t_{i+1},\delta\varphi_1,\ldots,\delta\varphi_i,\delta f_1,\ldots,\delta f_i)\in E_{v_i}: \right.$$
$$\left. |\delta t_j|\leqslant\alpha_1, \delta\varphi_j = \sum_{k=1}^{m_j}\lambda_{jk}\delta\varphi_{jk}, \delta f_j = \sum_{k=1}^{m_j}\lambda_{jk}\delta f_{jk}, |\lambda_{jk}|\leqslant\alpha_1, j=\overline{1,i}\right\},$$

где $\delta\varphi_{jk}\in E_{\varphi_j}, \delta f_{jk}\in E_{f_j}^{(1)}, k=\overline{1,m_j}$ — фиксированные точки.

Аналог леммы 8.1.1 также справедлив и для этого случая, что, в свою очередь, дает возможность определить приращения

$$\Delta x_i(t;\varepsilon\delta v_i) = x_i(t;\tilde{v}_i + \varepsilon\delta v_i) - x_i(t;\tilde{v}_i)$$
$$\forall (t,\varepsilon,\delta v_i) \in [\max(\tau_{i0}(t_i),\tau_{i0}(\tilde{t}_i)), \tilde{t}_{i+1}+\delta_1]\times[0,\varepsilon_1]\times\Im_{i1}, i=\overline{1,m}.$$

Теорема 8.1.6. *Пусть функции $\tilde{\varphi}_i(t), i = \overline{1,m}$, абсолютно непрерывны в некоторой полуокрестности $(\tilde{t}_i - \delta, \tilde{t}_i]$, $i=\overline{1,m}$, соответственно, и пусть существуют конечные пределы*

$$\dot{\varphi}_i^- = \dot{\tilde{\varphi}}_i(\tilde{t}_i -),$$
$$\lim_{\omega_i\to\omega_{io}^-} \tilde{f}_i(\omega_i) = f_{i0}^-,\ \omega_i \in (\tilde{t}_i - \delta, \tilde{t}_i]\times O_i^{s_i},\ \omega_{i0}^- = (\tilde{t}_i, \tilde{\varphi}_i(\tau_{i1}(\tilde{t}_1 -)),\dots,\tilde{\varphi}_i(\tau_{is_i}(\tilde{t}_1 -))),\ \ i=\overline{1,m},$$
$$\lim_{\omega_i\to\omega_{is_i+1}^-} \tilde{f}_i(\omega_i) = f_{is_i+1}^-, \omega_i \in (\tilde{t}_{i+1}-\delta, \tilde{t}_{i+1}]\times O_i^{s_i},\ \ i=\overline{1,m-1}.$$

Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2>0, \delta_2>0$, что для произвольного

$$(t,\varepsilon,\delta v_i) \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i+1}+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times\Im_{i1}^-,$$

где

$$\Im_{i1}^- = \{\delta v_i \in \Im_{i1} : \delta t_j \leqslant 0, j=\overline{1,i+1}\},$$

справедлива формула

$$\Delta x_i(t;\varepsilon\delta v_i) = \varepsilon\delta x_i(t;\delta v_i) + o_i(t;\varepsilon\delta v_i), \tag{8.1.8}$$

где

$$\delta x_i(t;\delta v_i) = Y_i(\tilde{t}_i;t)\left\{\delta\varphi_i(\tilde{t}_i -)) + \left[\dot{\varphi}_i^- + \frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial x_{i-1}} f_{i-1 s_{i-1}+1}^- - f_{i0}^-\right]\delta t_i\right\} + \beta_i(t;\delta v_i), \tag{8.1.9}$$

$$\beta_i(t;\delta v_i) = Y_i(\tilde{t}_i;t)\left[\frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial t_i}\delta t_i + \frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(\tilde{t}_i;\delta v_{i-1})\right] +$$
$$+\sum_{j=1}^{s_i}\int_{\tau_{ij}(\tilde{t}_i)}^{\tilde{t}_i} Y_i(\gamma_{ij}(\xi);t)\frac{\partial\tilde{f}_i[\gamma_{ij}(\xi)]}{\partial x_{ij}}\left[\delta\varphi_i(\xi) + \frac{\partial\tilde{g}_i(\xi,\tilde{x}_{i-1}(\xi))}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(\xi;\delta v_{i-1})\right]\dot{\gamma}_{ij}(\xi)d\xi +$$
$$+\int_{\tilde{t}_0}^{t} Y_i(\xi;t)\delta f_i[\xi]d\xi;$$

матричная функция $Y_i(\xi;t)$ удовлетворяет соответствующему уравнению (8.1.6) *и условию* (8.1.7).

Теорема 8.1.6 доказывается методом, используемым при доказательстве теоремы 3.1.1 и с учетом следующих соотношений:

$$\Delta x_i(\tilde{t}_i;\varepsilon\delta v_i) = \varepsilon\left\{\delta\varphi_i(\tilde{t}_i -) + \left(\dot{\varphi}_i^- + \frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial x_{i-1}} f_{i-1 s_{i-1}+1}^- - f_{i0}^- + \frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial t_i}\right)\delta t_i + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(\tilde{t}_i;\delta v_{i-1})\right\} + o_i(\varepsilon\delta v_i),$$
$$\Delta x_i(t;\varepsilon\delta v_i) = \varepsilon\left[\delta\varphi_i(t) + \frac{\partial\tilde{g}_i(t,\tilde{x}_{i-1}(t))}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(t;\delta v_{i-1})\right],\ \ t\in[\tau_{i0}(\tilde{t}_i),\tilde{t}_i].$$

Замечание 8.1.1. В силу формулы Коши функция

$$\delta x_i(t) = \begin{cases}\delta\varphi_i(t) + \dfrac{\partial\tilde{g}_i(t,\tilde{x}_{i-1}(t))}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(t;\delta v_{i-1}), & t\in[\tau_{i0}(\tilde{t}_i),\tilde{t}_i) \\ \delta x_i(t;\delta v_i), & t\in[\tilde{t}_i,\tilde{t}_{i+1}]\end{cases}$$

является решением уравнения в вариациях

$$\dot{\delta x}_i(t) = \sum_{j=1}^{s_i}\frac{\partial\tilde{f}_i[t]}{\partial x_{ij}}\delta x_i(\tau_{ij}(t)) + \delta f_i[t]$$

с разрывным начальным условием

$$\delta x_i(t) = \delta\varphi_i(t) + \frac{\partial\tilde g_i(t,\tilde x_{i-1}(t))}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(t;\delta v_{i-1}),\ \ t\in[\tau_{i0}(\tilde t_i),\tilde t_i),$$

$$\delta x_i(\tilde t_i) = \delta\varphi_i(\tilde t_i-)) + \left(\dot\varphi_i^- + \frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}f^-_{i-1s_{i-1}+1} - f^-_{i0} + \frac{\partial\tilde g_i}{\partial t_i}\right)\delta t_i + \frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(\tilde t_i;\delta v_{i-1}).$$

Теорема 8.1.7. *Пусть функции* $\tilde\varphi_i(t), i=\overline{1,m}$, *абсолютно непрерывны в некоторой полуокрестности* $[\tilde t_i,\tilde t_i+\delta)$, $i=\overline{1,m}$, *соответственно, и пусть существуют конечные пределы*

$$\dot\varphi_i^+ = \dot{\tilde\varphi}(\tilde t_i+),$$

$$\lim_{\omega_i\to\omega_{io}^+}\tilde f_i(\omega_i) = f_{i0}^+,\ \omega_i\in(\tilde t_i,\tilde t_i+\delta]\times O_i^{s_i},\ \omega_{i0}^+ = (\tilde t_i,\tilde\varphi_i(\tau_{i1}(\tilde t_1+)),\dots,\tilde\varphi_i(\tau_{is_i}(\tilde t_1+))),\ \ i=\overline{1,m};$$

$$\lim_{\omega_i\to\omega^+_{is_i+1}}\tilde f_i(\omega_i) = f^+_{is_i+1},\omega_i\in(\tilde t_{i+1},\tilde t_{i+1}+\delta]\times O_i^{s_i},\ i=\overline{1,m-1}.$$

Тогда для каждого $(s_{11},\dots,s_{m1})\in(\tilde t_1,\tilde t_2)\times\dots\times(\tilde t_m,\tilde t_{m+1})$ *существуют такие числа* $\varepsilon_2>0,\delta_2>0$, *что для произвольного*

$$(t,\varepsilon,\delta v_i)\in[s_{i1},\tilde t_{i+1}+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times\Im^+_{i1},$$

где

$$\Im^+_{i1} = \{\delta v_i\in\Im_{i1}:\delta t_j\geqslant 0, j=\overline{i,i+1}\},$$

справедлива формула (8.1.8)*, где* $\delta x_i(t;\delta v_i)$ *имеет вид*

$$\delta x_i(t;\delta v_i) = Y_i(\tilde t_i;t)\left\{\delta\varphi_i(\tilde t_i+) + \left[\dot\varphi_i^+ + \frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}f^+_{i-1s_{i-1}+1} - f^+_{i0}\right]\delta t_i\right\} + \beta_i(t;\delta v_i).$$

Теорема 8.1.7 доказывается методом, используемым при доказательстве теоремы 3.1.2, с учетом следующих соотношений:

$$\Delta x_i(\tilde t_i+\varepsilon\delta t_i;\varepsilon\delta v_i) = \varepsilon\Bigg\{\delta\varphi_i(\tilde t_i+) + \left(\dot\varphi_i^+ + \frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}f^+_{i-1s_{i-1}+1} - f^+_{i0} + \frac{\partial\tilde g_i}{\partial t_i}\right)\delta t_i +$$

$$+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(\tilde t_i;\delta v_{i-1})\} + o_i(\varepsilon\delta v_i),$$

$$\Delta x_i(t;\varepsilon\delta v_i) = \varepsilon\left[\delta\varphi_i(t) + \frac{\partial\tilde g_i(t,\tilde x_{i-1}(t))}{\partial x_{i-1}}\delta x_{i-1}(t;\delta v_{i-1})\right],\ t\in[\tau_{i0}(\tilde t_i+\varepsilon\delta t_i),\tilde t_i)].$$

Следующая теорема вытекает из теорем 8.1.6 и 8.1.7.

Теорема 8.1.8. *Пусть выполнены условия теорем* 8.1.6 *и* 8.1.7. *Кроме того, пусть*

$$\dot\varphi_i^- + \frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}f^-_{i-1s_{i-1}+1} - f^-_{i0} = \dot\varphi_i^+ + \frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}}f^+_{i-1s_{i-1}+1} - f^+_{i0} = f_{i0},$$

функции $\delta\varphi_{jk}, j=\overline{1,m}, k=\overline{1,m_j}$ *непрерывны в точке* $\tilde t_j, j=\overline{1,m}$, *соответственно. Тогда для каждого* $(s_{11},\dots,s_{m1})\in(\tilde t_1,\tilde t_2)\times\dots\times(\tilde t_m,\tilde t_{m+1})$ *существуют такие числа* $\varepsilon_2>0,\delta_2>0$, *что для произвольного* $(t,\varepsilon,\delta v_i)\in[s_{i1},\tilde t_{i+1}+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times\Im_{i1}$, *справедлива формула* (8.1.8)*, где* $\delta x_i(t;\delta v_i)$ *имеет вид*

$$\delta x_i(t;\delta v_i) = Y_i(\tilde t_i;t)[\delta\varphi_i(\tilde t_i) + f_{i0}] + \beta_i(t;\delta v_i).$$

8.2. Задача с разрывным начальным условием. Необходимые условия оптимальности. Пусть $M_i\subset O_i$ — выпуклое множество, $U_i\subset G_i$ — произвольное множество; функция $f_i(t,x_{i1},\dots,x_{is_i},u_{i1},\dots u_{i\nu_i})$ принадлежит пространству $E^{(2)}(J\times O_i^{s_i}\times G_i^{\nu_i},\mathbb{R}^{n_i})$; $\theta_{ij}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,\nu_i}$ — скалярные функции, для каждого $i=\overline{1,m}$ удовлетворяющие условию соизмеримости; $\Omega_{i0}=\{u_i\in\Omega([\theta_i,b],G_i):u_i(t)\in U_i\}$, $\theta_i=\min\{\theta_{i1}(a),\dots,\theta_{i\nu_i}(a)\}$, $\Delta_{i0}=\{\varphi_i\in\Delta_i:\varphi_i(t)\in M_i,t\in J_{i1}\}$; скалярные функции $q^i(t_1,\dots,t_{m+1},x_{10},\dots,x_{m0},x_{m1})$, $i=\overline{0,l}$ непрерывно дифференцируемы по $(t_1,\dots,t_{m+1},x_{10},\dots,x_{m0},x_{m1})\in J^{m+1}\times\prod_{j=1}^m O_i\times O_m$.

Введем множества

$$A_{i1}=\Big\{\sigma_i=(t_1,\ldots,t_{i+1},x_{10},\ldots,x_{i0},\varphi_1,\ldots,\varphi_i,u_1,\ldots,u_i)\in J^{1+i}\times\prod_{j=1}^{i}O_j\times\prod_{j=1}^{i}\Delta_{j0}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{i}\Omega_{j0}:t_1<\ldots<t_{i+1}\Big\},\ \ i=\overline{1,m}.$$

Каждому элементу $\sigma_m\in A_{m1}$ будем ставить в соответствие совокупность управляемых систем с переменной структурой и разрывными начальными условиями

$$\dot x_i(t)=f_i(t,x_i(\tau_{i1}(t)),\ldots,x_i(\tau_{is_i}(t)),u_i(\theta_{i1}(t)),\ldots,u_i(\theta_{i\nu_i}(t))),\ \ t\in[t_i,t_{i+1}]\subset J, \tag{8.2.1}$$
$$x_i(t)=\varphi_i(t),t\in[\tau_i,t_i),x_i(t_i)=x_{i0}+g_i(t_i,x_{i-1}(t_i)),\ \ i=\overline{1,m}.$$

Решение $\{x_i(t;\sigma_i),t\in[\tau_i,t_{i+1}],\sigma_i\in A_{i1}:i=\overline{1,m}\}$, соответствующее элементу σ_m, определяется аналогично (см. определение 8.1.1).

Определение 8.2.1. Элемент $\sigma_m\in A_{m1}$ называется *допустимым,* если выполнены равенства

$$q^j(t_1,\ldots,t_{m+1},x_{10},\ldots,x_{m0},x_m(t_{m+1}))=0,\ \ j=\overline{1,l},$$

где $x_m(t)=x_m(t;\sigma_m)$.

Множество допустимых элементов обозначим A^0_{m1}.

Определение 8.2.2. Элемент $\tilde\sigma_m=(\tilde t_1,\ldots,\tilde t_{m+1},\tilde x_{10},\ldots,\tilde x_{m0},\tilde u_1,\ldots,\tilde u_m)\in A_{m1}$ называется *оптимальным,* если существуют число $\tilde\delta>0$ и компакт $\tilde K_i\subset O_i$, $i=\overline{1,m}$, такие, что для произвольного допустимого элемента σ_m, удовлетворяющего условию

$$\sum_{i=1}^{m+1}|\tilde t_i-t_i|+\sum_{i=1}^{m}(|\tilde x_{i0}-x_{i0}+\|\tilde\varphi_i-\varphi_i\|+H_1(\tilde f_i-f_i;\tilde K^{s_i}))\leqslant\tilde\delta,$$

выполнено неравенство

$$q^0(\tilde t_1,\ldots,\tilde t_{m+1},\tilde x_{10},\ldots,\tilde x_{m0},\tilde x_m(\tilde t_{m+1}))\leqslant q^0(t_1,\ldots,t_{m+1},x_{10},\ldots,x_{m0},x_m(t_{m+1})).$$

Здесь и всюду предполагается, что

$$\tilde x_m(t)=x_m(t;\tilde\sigma_m),\tilde f_i(\omega_i)=f_i(\omega_i,\tilde u_i(\theta_{i1}(t)),\ldots,\tilde u_i(\theta_{i\nu_i}(t))),$$
$$f_i(\omega_i)=f_i(\omega_i,u_i(\theta_{i1}(t)),\ldots,u_i(\theta_{i\nu_i}(t))).$$

Оптимальная задача с переменной структурой и разрывным начальным условием состоит в нахождении оптимального элемента $\tilde\sigma_m$.

Теорема 8.2.1. *Пусть $\tilde\sigma_m$ — оптимальный элемент, $\tilde t_1>a$, $\tilde t_{m+1}\leqslant b$ и выполнены условия теоремы* 8.1.2. *Пусть, кроме того, существует конечный предел*

$$\lim_{\omega_m\to\omega^-_{ms_m+1}}\tilde f_m(\omega_m)=f^-_{ms_m+1},\omega_m\in(a,\tilde t_{m+1}]\times O_m^{s_m}, \tag{8.2.2}$$

где

$$\omega^-_{is_m+1}=(\tilde t_{m+1},\tilde x_m(\tau_{m1}(\tilde t_{m+1}-)),\ldots,\tilde x_m(\tau_{ms_m}(\tilde t_{m+1}-))).$$

Тогда существуют вектор $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_l)\neq0$, $\pi_0\leqslant0$ и решение $\psi_i(t)\in\mathbb{R}^{n_i}$, $i=\overline{1,m}$, соответственно, уравнения

$$\dot\psi_i(t)=-\sum_{j=1}^{s}\psi_i(\gamma_{ij}(t))\frac{\partial\tilde f_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}}\dot\gamma_{ij}(t),\ t\in[\tilde t_i,\tilde t_{i+1}],\ \ \psi_i(t)=0,t>\tilde t_{i+1},\ i=\overline{1,m}, \tag{8.2.3}$$

такие, что выполнены следующие условия:

8.2.1. *интегральный принцип максимума для управления*

$$\int_{\tilde t_i}^{\tilde t_{i+1}} \psi_i(t)\tilde f_i[t]dt \geqslant \int_{\tilde t_i}^{\tilde t_{i+1}} \psi_i(t) f_i(t,\tilde x_i(\tau_{i1}(t)),\ldots,\tilde x_i(\tau_{is_i}(t)),$$
$$u_i(\theta_{i1}(t)),\ldots,u_i(\theta_{i\nu_i}(t)))dt \ \ \forall u_i\in\Omega_{i0}, i=\overline{1,m};$$

8.2.2. *интегральный принцип максимума для начальной функции*

$$\sum_{j=p_i+1}^{s_i}\int_{\tau_{ij}(\tilde t_i)}^{\tilde t_i}\psi_i(\gamma_{ij}(t))\frac{\partial \tilde f_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}}\dot\gamma_{ij}(t)\tilde\varphi_i(t)dt\geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j=p_i+1}^{s_i}\int_{\tau_{ij}(\tilde t_i)}^{\tilde t_i}\psi_i(\gamma_{ij}(t))\frac{\partial \tilde f_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}}\dot\gamma_{ij}(t)\varphi_i(t)dt \ \ \forall\varphi_i\in\Delta_{i0}, i=\overline{1,m};$$

8.2.3. *условия для функций* $\psi_i(t), i=\overline{1,m}$,

$$\pi\frac{\partial\tilde Q}{\partial x_{m1}}=\psi_m(\tilde t_{m+1}),$$
$$\pi\frac{\partial\tilde Q}{\partial x_{i0}}=-\psi_i(\tilde t_i),\ i=\overline{1,m},$$
$$\psi_{i-1}(\tilde t_i)=\psi_i(\tilde t_i)\frac{\partial\tilde g_i}{\partial x_{i-1}},\ i=\overline{2,m};$$

8.2.4. *условия для моментов* $\tilde t_i, i=\overline{1,m+1}$,

$$\pi\frac{\partial\tilde Q}{\partial t_i}\geqslant-\psi_{i-1}(\tilde t_i)f^-_{i-1s_{i-1}+1}-\psi_i(\tilde t_i)\left[\sum_{j=0}^{p_i}(\hat\gamma^-_{ij+1}-\hat\gamma^-_{ij})f^-_{ij}+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial t_{i-1}}\right]+\sum_{j=p_i}^{s_i}\psi_i(\gamma_{ij})f^-_{ij}\dot\gamma^-_{ij},\ \ i=\overline{1,m},$$
$$\pi\frac{\partial\tilde Q}{\partial t_{m+1}}\geqslant-\psi_m(\tilde t_{m+1})f^-_{ms_m+1}.$$

Здесь

$$Q=(q^0,\ldots,q^l)^*,\ \ \frac{\partial\tilde Q}{\partial t_i}=\frac{\partial}{\partial t_i}Q(\tilde t_1,\ldots,\tilde t_{m+1},\tilde x_{10},\ldots,\tilde x_{m0},\tilde x_{m1}),$$
$$\tilde f_i[t]=f_i(t,\tilde x_i(\tau_{i1}(t)),\ldots,\tilde x_i(\tau_{is_i}(t))).$$

Теорема 8.2.2. *Пусть* $\tilde\sigma_m$ — *оптимальный элемент,* $\tilde t_1\geqslant a$, $\tilde t_{m+1}<b$ *и выполнены условия теоремы* 8.1.3. *Пусть, кроме того, существует конечный предел*

$$\lim_{\omega_m\to\omega^+_{ms_m+1}}\tilde f_m(\omega_m)=f^+_{ms_m+1},\omega_m\in(\tilde t_{m+1},b]\times O_m^{s_m},$$
$$\omega^+_{ms_m+1}=(\tilde t_{m+1},\tilde x_m(\tau_{m1}(\tilde t_{m+1}+)),\ldots,\tilde x_m(\tau_{ms_m}(\tilde t_{m+1}+))). \tag{8.2.4}$$

Тогда существуют вектор $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_l)\neq0$, $\pi_0\leqslant0$, *и решение* $\psi_i(t)\in\mathbb{R}^{n_i}, i=\overline{1,m}$, *соответственно, уравнения* (8.2.3) *такие, что выполнены условия* 8.2.1–8.2.3. *Кроме того,*

$$\pi\frac{\partial\tilde Q}{\partial t_i}\leqslant-\psi_{i-1}(\tilde t_i)f^+_{i-1s_{i-1}+1}-\psi_i(\tilde t_i)\left[\sum_{j=0}^{p_i}(\hat\gamma^+_{ij+1}-\hat\gamma^+_{ij})f^+_{ij}+\frac{\partial\tilde g_i}{\partial t_{i-1}}\right]+\sum_{j=p_i}^{s_i}\psi_i(\gamma_{ij})f^+_{ij}\dot\gamma^-_{ij},\ \ i=\overline{1,m},$$
$$\pi\frac{\partial\tilde Q}{\partial t_{m+1}}\leqslant-\psi_m(\tilde t_{m+1})f^+_{ms_m+1}.$$

Теорема 8.2.3. *Пусть* $\tilde\sigma_m$ — *оптимальный элемент,* $\tilde t_1,\tilde t_{m+1}\in(a,b)$ *и выполнены условия теоремы* 8.1.4. *Пусть, кроме того,*

$$f^-_{ms_m+1}=f^+_{ms_m+1}=f_{ms_m+1}.$$

Тогда существуют вектор $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$ *и решение* $\psi_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{1,m}$, *соответственно, уравнения* (8.2.3) *такие, что выполнены условия* 8.2.1–8.2.3. *Кроме того,*

$$\pi \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_i} = -\psi_{i-1}(\tilde{t}_i) f_{i-1 s_{i-1}+1} - \psi_i(\tilde{t}_i)\left[f_{i0} + \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial t_{i-1}}\right] + \sum_{j=p_i}^{s_i} \psi_i(\gamma_{ij}) f_{ij}, \;\; i = \overline{1,m},$$

$$\pi \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_{m+1}} = -\psi_m(\tilde{t}_{m+1}) f_{m s_m+1}.$$

Замечание 8.2.1. Пусть $U_i, i = \overline{1,m}$ — выпуклые множества. Тогда теоремы, аналогичные теоремам 8.2.1–8.2.3, справедливы для оптимальных задач с переменной структурой и несоизмеримыми запаздываниями в управлениях. В этом случае условие 8.2.1 заменяется условием

$$\int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}} \psi_i(t) \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{\partial \tilde{f}_i[t]}{\partial u_{ij}} \tilde{u}_i(\theta_{ij}(t)) dt \geqslant \int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}} \psi_i(t) \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{\partial \tilde{f}_i[t]}{\partial u_{ij}} u_i(\theta_{ij}(t)) dt \;\; \forall u_i \in \Omega_{i0}, \; i = \overline{1,m}.$$

8.3. Задача с непрерывным начальным условием. Необходимые условия оптимальности. Рассмотрим множество

$$B_{i1} = \Big\{\lambda_i = (t_1, \ldots, t_{i+1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_i, u_1, \ldots, u_i) \in J^{1+i} \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{i} \Delta_{j0} \times \prod_{j=1}^{i} \Omega_{j0} : \tau_{i0}(t_j) < t_{j+1}, j = \overline{1,i}\Big\}, \; i = \overline{1,m}.$$

Пусть $B_{i1} \neq \varnothing, i = \overline{1,m}$. Каждому элементу $\lambda_m \in B_{m1}$ будем ставить в соответствие совокупность управляемых систем с переменной структурой (8.2.1) и непрерывными начальными условиями

$$x_i(t) = \varphi_i(t) + g_i(t, x_{i-1}(t)), \;\; t \in [\tau_{i0}(t_i), t_i].$$

Соответствующее элементу λ_m решение $\{x_i(t; \lambda_i), t \in [\tau_{i0}(t_i), t_{i+1}], \lambda_i \in B_{i1} : i = \overline{1,m}\}$ определяется аналогично (см. определение 8.1.1).

Определение 8.3.1. Элемент $\lambda_m \in B_{m1}$ называется *допустимым,* если выполнено равенство

$$q^j(t_1, \ldots, t_{m+1}, \varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_m(t_m), x_m(t_{m+1})) = 0, \; j = \overline{1,l}.$$

Множество допустимых элементов обозначим B_{m1}^0.

Определение 8.3.2. Элемент $\tilde{\lambda}_m = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_{m+1}, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_m, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m) \in B_{mi}$ называется *оптимальным,* если существуют число $\tilde{\delta} > 0$ и компакт $\tilde{K}_i \subset O_i$, $i = \overline{1,m}$, такие, что для произвольного допустимого элемента λ_m, удовлетворяющего условию

$$\sum_{i=1}^{m+1} |\tilde{t}_i - t_i| + \sum_{i=1}^{m} (\|\tilde{\varphi}_i - \varphi_i\| + H_1(\tilde{f}_i - f_i; \tilde{K}_{s_i})) \leqslant \tilde{\delta},$$

выполнено неравенство

$$q^0(\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_{m+1}, \tilde{\varphi}_1(\tilde{t}_1), \ldots, \tilde{\varphi}_m(\tilde{t}_1), \tilde{x}_m(\tilde{t}_{m+1})) \leqslant q^0(t_1, \ldots, t_{m+1}, \varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_m(t_m), x_m(t_{m+1})).$$

Оптимальная задача с переменной структурой и непрерывным начальным условием состоит в нахождении оптимального элемента $\tilde{\lambda}_m$.

Теорема 8.3.1. *Пусть* $\tilde{\lambda}_m$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1 > a, \tilde{t}_{m+1} \leqslant b$, $\tilde{x}_i(\tilde{t}_i) = \tilde{\varphi}_i(\tilde{t}_i-) + g_i(\tilde{t}_i, \tilde{x}_{i-1}(\tilde{t}_i))$, $i = \overline{1,m}$, *и пусть выполнены условия теоремы* 8.1.6 *и условие* (8.2.2). *Тогда* *существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$ *и решение* $\psi_{i-1}(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{2, m+1}$, *соответственно, системы*

$$\dot{\psi}_{i-1}(t) = -\sum_{j=1}^{s_{i-1}} \psi_{i-1}(\gamma_{i-1j}(t)) \frac{\partial \tilde{f}_{i-1}[\gamma_{i-1j}(t)]}{\partial x_{i-1j}} \dot{\gamma}_{i-1j}(t) -$$
$$-\left[\sum_{j=1}^{s_i} \chi([\tau_{ij}(\tilde{t}_i), \tilde{t}_i]; t) \psi_i(\gamma_{ij}(t)) \frac{\partial \tilde{f}_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}} \dot{\gamma}_{ij}(t)\right] \frac{\partial g_i(t, \tilde{x}_{i-1}(t))}{\partial x_{i-1}}, \tag{8.3.1}$$
$$t \in [\tilde{t}_{i-1}, \tilde{t}_i],\ \psi_{i-1}(t) = 0, t > \tilde{t}_i, \quad i = \overline{2, m+1},$$

где $g_{m+1} = 0$, *такие, что выполнены следующие условия*:

8.3.1. *принцип максимума для управлений*

$$\int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}} \psi_i(t) \tilde{f}_i[t] dt \geqslant \int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}} \psi_i(t) f_i(t, \tilde{x}_i(\tau_{i1}(t)), \ldots, \tilde{x}_i(\tau_{is_i}(t)),$$
$$u_i(\theta_{i1}(t)), \ldots, u_i(\theta_{i\nu_i}(t))) dt \ \ \forall u_i \in \Omega_{i0}, i = \overline{1, m};$$

8.3.2. *принцип максимума для начальной функции*

$$\sum_{j=1}^{s_i} \int_{\tau_{ij}(\tilde{t}_i)}^{\tilde{t}_i} \psi_i(\gamma_{ij}(t)) \frac{\partial \tilde{f}_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}} \dot{\gamma}_{ij}(t) \tilde{\varphi}_i(t) dt \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^{s_i} \int_{\tau_{ij}(\tilde{t}_i)}^{\tilde{t}_i} \psi_i(\gamma_{ij}(t)) \frac{\partial \tilde{f}_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}} \dot{\gamma}_{ij}(t) \varphi_i(t) dt \ \ \forall \varphi_i \in \Delta_{i0},\ i = \overline{1, m};$$

8.3.3. *условия для функций* $\psi_i(t), i = \overline{1, m}$:

$$\pi \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} = \psi_m(\tilde{t}_{m+1}),$$
$$\psi_{i-1}(\tilde{t}_i) = \psi_i(\tilde{t}_i) \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial x_{i-1}}, \quad i = \overline{m, 2};$$

8.3.4. *условия для моментов* $\tilde{t}_i, i = \overline{1, m+1}$:

$$\pi \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_i} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{i0}} \dot{\varphi}_i^-\right) \geqslant -\psi_i(\tilde{t}_i) \left[\dot{\varphi}_i^- + \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial t_i} - f_{i0}^-\right] - \psi_{i-1}(\tilde{t}_i) f_{i-1s_{i-1}+1}^-, \quad i = \overline{1, m},$$
$$\pi \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_{m+1}} \geqslant -\psi_m(\tilde{t}_{m+1}) f_{ms_m+1}^-;$$

8.3.5. *условия для* $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_i-), i = \overline{1, m}$:

$$\left(\pi \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{i0}} + \psi_i(\tilde{t}_i)\right) \tilde{\varphi}(\tilde{t}_i-) \geqslant \left(\pi \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{i0}} + \psi_i(\tilde{t}_i)\right) \varphi \ \ \forall \varphi \in M_i.$$

Теорема 8.3.2. *Пусть* $\tilde{\lambda}_m$ *— оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1 \geqslant a$, $\tilde{t}_{m+1} < b$, $\tilde{x}_i(\tilde{t}_i) = \tilde{\varphi}_i(\tilde{t}_i+) + g_i(\tilde{t}_i, \tilde{x}_{i-1}(\tilde{t}_i))$, $i = \overline{1, m}$, *и пусть выполнены условия теоремы* 8.1.7 *и условие* (8.2.4). *Тогда существуют вектор* $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi_{i-1}(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{2, m+1}$, *соответственно, системы* (8.3.1) *такие, что выполнены условия* 8.3.1–8.3.3. *Кроме того,*

8.3.6. *условия для моментов* $\tilde{t}_i, i = \overline{1, m+1}$:

$$\pi \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_i} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{i0}} \dot{\varphi}_i^+\right) \leqslant -\psi_i(\tilde{t}_i) \left[\dot{\varphi}_i^+ + \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial t_i} - f_{i0}^+\right] - \psi_{i-1}(\tilde{t}_i) f_{i-1s_{i-1}+1}^+, \quad i = \overline{1, m},$$
$$\pi \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_{m+1}} \leqslant -\psi_m(\tilde{t}_{m+1}) f_{ms_m+1}^+;$$

8.3.7. *условия для* $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_i+)$, $i = \overline{1,m}$:

$$\left(\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_{i0}} + \psi_i(\tilde{t}_i)\right)\tilde{\varphi}(\tilde{t}_i+) \geqslant \left(\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_{i0}} + \psi_i(\tilde{t}_i)\right)\varphi \;\; \forall\varphi \in M_i.$$

Теорема 8.3.3. *Пусть* $\tilde{\lambda}_m$ — *оптимальный элемент,* $\tilde{t}_1, \tilde{t}_{m+1} \in (a,b)$; *функции* $\tilde{\varphi}_i(t), i = \overline{1,m}$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $\tilde{t}_i$, $i = \overline{1,m}$, *соответственно. Пусть, кроме того,*

$$f_{i0}^- = f_{i0}^+ = f_{i0}, \quad f_{is_i+1} = f_{is_i+1}^+ = f_{is_i+1}.$$

Тогда существуют вектор $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \leqslant 0$, *и решение* $\psi_{i-1}(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{2, m+1}$, *соответственно, системы* (8.3.1) *такие, что выполнены условия* 8.3.1–8.3.3. *Кроме того,*

$$\pi\left(\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial t_i} + \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_{i0}}\dot{\tilde{\varphi}}_i(\tilde{t}_i)\right) = -\psi_i(\tilde{t}_i)\left[\dot{\tilde{\varphi}}_i(\tilde{t}_i) + \frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial t_i} - f_{i0}\right] - \psi_{i-1}(\tilde{t}_i)f_{i-1s_{i-1}+1}, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial t_{m+1}} = -\psi_m(\tilde{t}_{m+1})f_{ms_m+1};$$

$$\left(\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_{i0}} + \psi_i(\tilde{t}_i)\right)\tilde{\varphi}(\tilde{t}_i) \geqslant \left(\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_{i0}} + \psi_i(\tilde{t}_i)\right)\varphi \;\; \forall\varphi \in M_i, \;\; i = \overline{1,m}.$$

8.4. Доказательство теоремы 8.2.1. Рассмотрим топологическое векторное пространство

$$E_{\mu_m} = \prod_{i=1}^{m+1}\mathbb{R}_{t_i} \times \prod_{i=1}^{m}\mathbb{R}^{n_i}_{x_{i0}} \times \prod_{i=1}^{m}E_{\varphi_j} \times \prod_{i=1}^{m}E_{f_i} = \mathbb{R}^{1+m+k}_{y_m} \times E_{\varsigma_m}$$

точек

$$\mu_m = (t_1, \dots, t_{m+1}, x_{10}, \dots, x_{m0}, \varphi_1, \dots, \varphi_m, f_1, \dots, f_m) = (y_m, \varsigma_m),$$

где

$$y_m = (t_1, \dots, t_{m+1}, x_{10}, \dots, x_{m0})^*, \varsigma_m = (\varphi_1, \dots, \varphi_m, f_1, \dots, f_m), \quad k = \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

Множество

$$X_{m0} = [a, \tilde{t}_1] \times (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2] \times \dots \times (\tilde{t}_m, \tilde{t}_{m+1}] \times \prod_{i=1}^{m} O_i \subset \mathbb{R}^{1+m+k}_{y_m}$$

является локально выпуклым подпространством относительно индуцируемой из $\mathbb{R}^{1+m+k}_{y_m}$ топологии.

Через $D_{m0} \subset E_{\mu_m}$ обозначим множество элементов

$$\mu_m \in X_{m0} \times \prod_{j=1}^{m}\Delta_i \times \prod_{j=1}^{m}E^{(1)}_{f_j},$$

каждому из которых соответствует решение $\{x_i(t;\mu_i), t \in [\tau_i, t_{i+1}] : i = \overline{1,m}\}$. Множество D_{m0} не пусто, так как $\tilde{\mu}_m \in D_{m0}$.

Лемма 8.4.1. *Множество* D_{m0} *конечно локально выпукло.*

Эта лемма на основе леммы 8.1.1 доказывается аналогично лемме 6.5.2.

На множестве D_{m0} определим отображение

$$T : D_{m0} \to \mathbb{R}^{n_m}_T$$

формулой

$$T(\mu_m) = x_m(t_{m+1}; \mu_m).$$

Лемма 8.4.2. *Отображение T дифференцируемо в точке $\tilde{\mu}_m$ и*

$$dT_{\tilde{\mu}_m}(\delta\mu_m)=\sum_{i=1}^{m}\Bigg[Y_i(\tilde{t}_i)\Bigg(\sum_{j=0}^{p_i}(\hat{\gamma}^-_{ij+1}-\hat{\gamma}^-_{ij})f^-_{ij}+\frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial t_i}\Bigg)+Y_{i-1}(\tilde{t}_i)f_{i-1s_{i-1}+1}-$$
$$-\sum_{j=p_i+1}^{s_i}Y_i(\gamma_{ij})\dot{\gamma}^-_{ij}f^-_{ij}\Bigg]\delta t_i+f^-_{ms_m+1}\delta t_{m+1}+\sum_{i=1}^{m}Y_i(\tilde{t}_i)\delta x_{i0}+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=p_i}^{s_i}\int_{\tau_{ij}(\tilde{t}_i)}^{\tilde{t}_i}Y_i(\gamma_{ij}(t)\frac{\partial\tilde{f}_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}}\dot{\gamma}_{ij}(t)\delta\varphi_i(t)dt+\sum_{i=1}^{m}\int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}}Y_i(t)\delta f_i[t]dt, \qquad (8.4.1)$$
$$\delta\mu_m\in E_{\mu_m}-\tilde{\mu}_m.$$

где $Y_i(t), i=\overline{1,m}$ — матричные функции, соответственно, удовлетворяющие системе

$$\dot{Y}_i(t)=-\sum_{j=1}^{s_i}Y_i(\gamma_{ij}(t))\frac{\partial\tilde{f}_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}}\dot{\gamma}_{ij}(t),\ t\in[\tilde{t}_i,\tilde{t}_{i+1}],\ i=\overline{1,m},$$

и условиям

$$Y_{i-1}(\tilde{t}_i)=Y_i(\tilde{t}_i)\frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial x_{i-1}},\ i=\overline{m,2},\ Y_i(t)=\Theta_i,\ t>\tilde{t}_{i+1},i=\overline{1,m},\ Y_m(\tilde{t}_{m+1})=I_m.$$

Доказательство. Пусть $L_{\tilde{\varsigma}_m}\subset E_{\varsigma_m}$ — линейное многообразие и пусть

$$V_{m0}\subset X_{m0}-\tilde{y}_m,\ \ V_m\subset L_{\tilde{\varsigma}_m}-\tilde{\varsigma}_m$$

— ограниченные выпуклые окрестности нуля, где

$$\tilde{y}_m=(\tilde{t}_1,\dots,\tilde{t}_m)^*,\ \ \tilde{\varsigma}_m=(\tilde{\varphi}_1,\dots,\tilde{t}_m,\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_m).$$

Из конечной локальной выпуклости множества D_{m0} и из теоремы 8.1.2 следует существование числа $\varepsilon>0$ такого, что для произвольного $(\varepsilon,\delta\mu_m)\in[0,\varepsilon_0]\times V_{0m}\times V_m$

$$\tilde{\mu}_m+\varepsilon\delta\mu_m\in D_{m0}$$

и

$$\Delta x_m(\tilde{t}_{m+1}+\varepsilon\delta t_{m+1};\varepsilon\delta\mu_m)=\varepsilon\delta x_m(\tilde{t}_m+\varepsilon\delta t_m;\delta\mu_m)+o_m(\tilde{t}_{m+1}+\varepsilon\delta t_{m+1};\varepsilon\delta\mu_m),$$

где вариация $\delta x_m(\tilde{t}_m+\varepsilon\delta t_m;\delta\mu_m)$ вычисляется по формуле (8.1.5).

Имеем:

$$T(\tilde{\mu}_m+\varepsilon\delta\mu_m)-T(\tilde{\mu}_m)=x_m(\tilde{t}_{m+1}+\varepsilon\delta t_{m+1};\tilde{\mu}_m+\varepsilon\delta\mu_m)-x_m(\tilde{t}_{m+1};\tilde{\mu}_m)=$$
$$=\varepsilon[\delta x_m(\tilde{t}_{m+1};\delta\mu_m)+f^-_{ms_m+1}\delta t_{m+1}]+o_m(\varepsilon\delta\mu_m) \qquad (8.4.2)$$

(см. доказательство леммы 6.5.2).

Введем обозначения

$$Y_m(t)=Y_m(t;\tilde{t}_{m+1}),\ \ Y_{i-1}(t)=Y_i(\tilde{t}_i)\frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial x_{i-1}}Y_{i-1}(t;\tilde{t}_i),\ i=\overline{m,2},$$

тогда

$$\delta x_m(\tilde{t}_{m+1};\delta\mu_m)=\Bigg[Y_m(\tilde{t}_m)\Bigg(\sum_{j=0}^{p_m}(\hat{\gamma}^-_{mj+1}-\hat{\gamma}^-_{mj})f^-_{mj}+\frac{\partial\tilde{g}_m}{\partial t_m}\Bigg)+Y_{m-1}(\tilde{t}_m)f_{m-1s_{m-1}+1}-$$
$$-\sum_{j=p_m+1}^{s_m}Y_m(\gamma_{mj})\dot{\gamma}^-_{mj}f^-_{mj}\Bigg]\delta t_m+Y_m(\tilde{t}_i)\delta x_{m0}+Y_{m-1}(\tilde{t}_m)\delta x_{m-1}(\tilde{t}_m;\delta\mu_{m-1})+$$
$$+\sum_{j=p_m}^{s_m}\int_{\tau_{mj}(\tilde{t}_m)}^{\tilde{t}_m}Y_m(\gamma_{mj}(t))\frac{\partial\tilde{f}_m[\gamma_{mj}(t)]}{\partial x_{mj}}\dot{\gamma}_{mj}(t)\delta\varphi_m(t)dt+\int_{\tilde{t}_m}^{\tilde{t}_{m+1}}Y_m(t)\delta f_m[t]dt.$$

Продолжая этот процесс относительно вариации $\delta x_j(t;\delta\mu_i)$, $j=\overline{m-1,1}$), и группируя слагаемые подходящим образом, из (8.4.2) получаем формулу (8.4.1). □

Рассмотрим векторное пространство

$$E_{z_m} = \mathbb{R}_\xi \times E_{\mu_m}$$

точек $z_m = (\xi, \mu_m)$.

Введем множества

$$X_m = [0, \infty) \times X_{m0}, \quad D_m = [0, \infty) \times D_{m0}.$$

Множество D_m является конечно локально выпуклым в подпространстве $X_m \times E_{\mu_\mu} \subset E_{z_m}$.

На множестве D_m определим отображение

$$P : D_m \to \mathbb{R}_p^{1+l}$$

формулой

$$P(z_m) = Q(t_1, \ldots, t_{m+1}, x_{10}, \ldots, x_{m0}, T(\mu_m)) + (\xi, 0, \ldots, 0)^*.$$

Лемма 8.4.3. *Отображение P дифференцируемо в точке $\tilde{z}_m = (0, \tilde{\mu}_m)$ и*

$$\begin{gathered}
dP_{\tilde{z}_m}(\delta z_m) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_i} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_i(\tilde{t}_i) \left[\sum_{j=0}^{p_i} (\dot{\tilde{\gamma}}^-_{ij+1} - \dot{\tilde{\gamma}}^-_{ij}) f^-_{ij} + \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial t_i} \right] + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_{i-1}(\tilde{t}_i) f_{i-1 s_{i-1}+1} - \right. \\
\left. - \sum_{j=p_i+1}^{s_i} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_i(\gamma_{ij}) \dot{\gamma}^-_{ij} f^-_{ij} \right\} \delta t_i + \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_{m+1}} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} f^-_{m s_m+1} \right) \delta t_{m+1} + \\
+ \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{i0}} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_i(\tilde{t}_i) \right) \delta x_{i0} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=p_i}^{s_i} \int_{\tau_{ij}(\tilde{t}_i)}^{\tilde{t}_i} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_i(\gamma_{ij}(t)) \frac{\partial \tilde{f}_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}} \dot{\gamma}_{ij}(t) \delta \varphi_i(t) dt + \\
+ \sum_{i=1}^{m} \int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_i(t) \delta f_i[t] dt + (\delta \xi, 0, \ldots, 0)^*, \ \delta z_m = (\delta \xi, \delta \mu_m) \in E_{z_m} - \tilde{z}_m. \qquad (8.4.3)
\end{gathered}$$

Доказательство этой леммы на основе формулы (8.4.1) осуществляется аналогично доказательству леммы 6.5.3.

В топологическом векторном пространстве E_{z_m} определим фильтр $\Phi_{\tilde{z}_m}$ как прямое произведение фильтров

$$\Phi_{\tilde{z}_m} = \Phi_{\tilde{y}_m} \times \prod_{j=1}^{m} \Phi_{\tilde{\varphi}_i} \times \prod_{j=1}^{m} \Phi_{i1},$$

где фильтры $\Phi_{\tilde{y}_m}, \Phi_{\varphi_i}, i = \overline{1, m}$, соответственно, определяются выпуклыми базисами

$$\begin{gathered}
\Big\{ (V_0 \cap [0, \infty)) \times (V_{\tilde{t}_1} \cap (a, \tilde{t}_1]) \times (V_{\tilde{t}_2} \cap (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]) \times \cdots \times (V_{\tilde{t}_{m+1}} \cap (\tilde{t}_m, \tilde{t}_{m+1}]) \times \\
\times \prod_{i=1}^{m} V_{x_{i0}} : V_0 \subset \mathbb{R}_\xi, V_{\tilde{t}_i} \subset \mathbb{R}_{\tilde{t}_i}, i = \overline{1, m+1}, V_{\tilde{x}_{i0}} \subset O_i, i = \overline{1, m} - \text{выпуклые окрестности} \Big\}; \\
\{ V_{\tilde{\varphi}_i} \cap \Delta_{i0} : V_{\tilde{\varphi}_i} \subset E_{\varphi_i} - \text{выпуклая окрестность} \}, \quad i = \overline{1, m};
\end{gathered}$$

фильтры $\Phi_{i1}, i = \overline{1, m}$, определяются аналогично фильтру Φ_1.

Фильтр $\Phi_{\tilde{z}_m}$ является квазивыпуклым, так как это прямое произведение выпуклого фильтра $\Phi_{\tilde{y}_m} \times \Phi_{\tilde{\varphi}_1} \times \cdots \times \Phi_{\tilde{\varphi}_m}$ на квазивыпуклый фильтр $\Phi_{11} \times \cdots \times \Phi_{m1}$.

На основе теоремы 8.1.1 можно доказать, что отображение P определено и непрерывно на $\operatorname{co}([\Phi_{\tilde{z}_m}])$ (см. п. 6.5). Кроме того, легко устанавливается критичность отображения P на фильтре $\Phi_{\tilde{z}_m}$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.3.2. Поэтому существуют вектор $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_l) \neq 0$ и такой элемент $\tilde{W}_{\tilde{z}_m} \in \Phi_{\tilde{z}_m}$, что выполнено неравенство

$$\pi dP_{\tilde{z}_m}(\delta z_m) \leqslant 0 \ \ \forall \delta z_m \in \operatorname{cone}(\tilde{W}_{\tilde{z}_m} - \tilde{z}_m). \qquad (8.4.4)$$

Определим функции

$$\psi_i(t) = \pi \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_i(t), \quad i = \overline{1, m}.$$

Очевидно, что функции $\psi_i(t), i=\overline{1,m}$, соответственно, удовлетворяют уравнению (8.2.3) и условиям

$$\psi_m(\tilde{t}_{m+1})=\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_{m1}},\ \ \psi_{i-1}(\tilde{t}_i)=\psi_i(\tilde{t}_i)\frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial x_{i-1}},\ \ i=\overline{m,2}. \tag{8.4.5}$$

Из (8.4.4) с учетом (8.4.3) и (8.4.5) получаем:

$$\sum_{i=1}^{m}\Bigg\{\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial t_i}+\psi_i(\tilde{t}_i)\Bigg[\sum_{j=0}^{p_i}(\hat{\gamma}^-_{ij+1}-\hat{\gamma}^-_{ij})f^-_{ij}+\frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial t_i}\Bigg]+\psi_{i-1}(\tilde{t}i)(\tilde{t}_i)f_{i-1s_{i-1}+1}-$$
$$-\sum_{j=p_i+1}^{s_i}\psi_i(\gamma_{ij})\dot{\gamma}^-_{ij}f^-_{ij}\Bigg\}\delta t_i+\left(\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial t_{m+1}}+\psi_{m+1}(\tilde{t}_{m+1})f^-_{ms_m+1}\right)\delta t_{m+1}+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_{i0}}+\psi_i(\tilde{t}_i)\right)\delta x_{i0}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=p_i}^{s_i}\int_{\tau_{ij}(\tilde{t}_i)}^{\tilde{t}_i}\psi_i(\gamma_{ij}(t))\frac{\partial\tilde{f}_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}}\dot{\gamma}_{ij}(t)\delta\varphi_i(t)dt+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}}\psi_i(t)\delta f_i[t]dt+\pi_0\delta\xi\leqslant 0,\ \ \delta z_m\in\operatorname{cone}(\tilde{W}_{\tilde{z}_m}-\tilde{z}_m).$$

Из этого неравенства стандартным способом выводятся все необходимые условия (см. п. 6.5).

Доказательство теорем 8.2.2 и 8.2.3 на основе теорем 8.1.2 и 8.1.3 осуществляется тем же способом.

8.5. Доказательство теоремы 8.3.1. Рассмотрим топологическое векторное пространство

$$E_{v_m}=\prod_{i=1}^{m+1}\mathbb{R}_{t_i}\times\prod_{i=1}^{m}E_{\varphi_i}\times\prod_{i=1}^{m}E_{f_i}=\mathbb{R}^{1+m}_{y_m}\times E_{\varsigma_m}$$

точек

$$v_m=(t_1,\ldots,t_{m+1},\varphi_1,\ldots,\varphi_m,f_1,\ldots,f_m)=(y_m,\varsigma_m),$$

где

$$y_m=(t_1,\ldots,t_{m+1})^*,\ \ \varsigma_m=(\varphi_1,\ldots,\varphi_m,f_1,\ldots,f_m).$$

Множество

$$X_{m0}=[a,\tilde{t}_1]\times(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2]\times\cdots\times(\tilde{t}_m,\tilde{t}_{m+1}]\subset\mathbb{R}^{1+m}_{y_m}$$

является локально выпуклым подпространством относительно индуцируемой из $\mathbb{R}^{1+m}_{y_m}$ топологии.

Через $D_{m0}\subset E_{v_m}$ обозначим множество элементов

$$v_m\in X_{m0}\times\prod_{j=1}^{m}\Delta_i\times\prod_{j=1}^{m}E^{(1)}_{f_j},$$

каждому из которых соответствует решение $\{x_i(t;v_i),t\in[\tau_i,t_{i+1}]:i=\overline{1,m}\}$.

На конечно локально выпуклом множестве D_{m0} (см. лемму 8.4.1) определим отображение

$$T:D_{m0}\to\mathbb{R}^{n_m}_T$$

формулой

$$T(v_m)=x_m(t_{m+1};v_m).$$

Лемма 8.5.1. *Отображение T дифференцируемо в точке $\tilde{v}_m$ и*

$$dT_{\tilde{v}_m}(\delta v_m)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}C^j_i+f^-_{ms_m+1}\delta t_{m+1}, \tag{8.5.1}$$

где

$$C_i^1 = Y_i(\tilde t_i)\left[\delta\varphi_i(\tilde t_i-) + \left(\dot\varphi_i^- - f_{i0}^- + \frac{\partial \tilde g_i}{\partial t_i}\right)\delta t_i\right],$$

$$C_i^2 = Y_{i-1}(\tilde t_i) f_{i-1\,s_{i-1}+1}\,\delta t_i \ \ (C_1^2 = 0),$$

$$C_i^3 = \sum_{j=1}^{s_i}\int_{\tau_{ij}(\tilde t_i)}^{\tilde t_i} Y_i(\gamma_{ij}(t)\frac{\partial \tilde f_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}}\dot\gamma_{ij}(t)\delta\varphi_i(t)dt,$$

$$C_i^4 = \sum_{i=1}^{m}\int_{\tilde t_i}^{\tilde t_{i+1}} Y_i(t)\delta f_i[t]dt;$$

матричные функции $Y_{i-1}(t), i = \overline{2, m+1}$, *соответственно, удовлетворяют системе*

$$\dot Y_{i-1}(t) = -\sum_{j=1}^{s_{i-1}} Y_{i-1}(\gamma_{i-1j}(t))\frac{\partial \tilde f_{i-1}[\gamma_{i-1j}(t)]}{\partial x_{i-1j}}\dot\gamma_{i-1j}(t) -$$

$$-\left[\sum_{j=1}^{s_i}\chi([\tau_{ij}, \tilde t_i]; t) Y_i(\gamma_{ij}(t))\frac{\partial \tilde f_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}}\dot\gamma_{ij}(t)\right]\frac{\partial g_i(t, \tilde x_{i-1}(t))}{\partial x_{i-1}},\ \ t\in[\tilde t_{i-1}, \tilde t_i], \tag{8.5.2}$$

$$i = \overline{2, m+1}$$

и условию

$$\begin{cases} Y_{i-1}(\tilde t_i) = Y_i(\tilde t_i)\dfrac{\partial \tilde g_i}{\partial x_{i-1}}, i = \overline{2, m}, \\ Y_{i-1}(t) = \Theta_{i-1}, t > \tilde t_{i+1}, i = \overline{2, m+1},\ \ Y_m(\tilde t_{m+1}) = I_m. \end{cases} \tag{8.5.3}$$

Здесь, как и выше, $g_{m+1} = 0$.

Доказательство. Стандартным способом (см. доказательство леммы 8.4.2) получим

$$T(\tilde v_m + \varepsilon\delta v_m) - T(\tilde v_m) = [\delta x_m(\tilde t_{m+1}; \delta v_m) + f_{ms_m+1}\delta t_{m+1}] + o_m(\varepsilon\delta t_m).$$

Введем функцию

$$Y_m(t) = Y_m(t; \tilde t_{m+1}).$$

Легко видеть, что функция $Y_m(t) = Y_m(t; \underline{\tilde t_{m+1}})$ удовлетворяет уравнению (8.1.6) и условию (8.1.7).

Пусть матричные функции $Y_{i-1}(t),\ i = \overline{m, 2}$ удовлетворяют, соответственно, уравнению (8.5.2) и условию (8.5.3). Тогда на основе формулы (8.1.9) для $\delta x_m(\tilde t_{m+1}; \delta v_m)$ получаем:

$$\delta x_m(\tilde t_{m+1}; \delta v_m) = \sum_{j=1}^{4} C_m^j + C_m^5 + C_m^6,$$

где

$$C_m^5 = \sum_{j=1}^{s_m}\int_{\tau_{mj}(\tilde t_i)}^{\tilde t_m} Y_m(\gamma_{mj}(t)\frac{\partial \tilde f_m[\gamma_{mj}(t)]}{\partial x_{mj}}\dot\gamma_{mj}(t)\frac{\partial g_m(t, \tilde x_{m-1}(t))}{\partial x_{m-1}}\delta x_{m-1}(t; \delta v_{m-1})dt,$$

$$C_m^6 = Y_{m-1}(\tilde t_{m-1})\delta x_{m-1}(\tilde t_m; \delta v_{m-1}).$$

Нетрудно заметить, что

$$C_m^5 = \int_{\tilde t_{m-1}}^{\tilde t_m}\left[\sum_{j=1}^{s_m}\chi([\tau_{ij}(\tilde t_i), \tilde t_i; t]) Y_m(\gamma_{mj}(t))\frac{\partial \tilde f_m[\gamma_{mj}(t)]}{\partial x_{mj}}\dot\gamma_{mj}(t)\right]\frac{\partial g_m(t, \tilde x_{m-1}(t))}{\partial x_{m-1}}\delta x_{m-1}(t; \delta v_{m-1})dt.$$

Далее,

$$C_m^6 = C_m^7 + C_m^8,$$

где

$$C_m^7 = Y_{m-1}(\tilde t_m)\delta x_{m-1}(\tilde t; \delta v_{m-1}) - Y_{m-1}(\tilde t_{m-1})\delta x_{m-1}(\tilde t_{m-1}; \delta v_{m-1}),$$

$$C_m^8 = Y_{m-1}(\tilde t_{m-1})\delta x_{m-1}(\tilde t_{m-1}; \delta v_{m-1}).$$

Теперь преобразуем C_m^7. Имеем:

$$C_m^7 = \int_{\tilde{t}_{m-1}}^{\tilde{t}_m} \frac{d}{dt}\left(Y_{m-1}(t)\delta x_{m-1}(t)\right)dt = \int_{\tilde{t}_{m-1}}^{\tilde{t}_m} \dot{Y}_{m-1}(t)\delta x_{m-1}(t)dt + C_{m-1}^9, \tag{8.5.4}$$

где

$$C_{m-1}^9 = \int_{\tilde{t}_{m-1}}^{\tilde{t}_m} Y_{m-1}(t)\delta\dot{x}_{m-1}(t)dt$$

(см. замечание 8.1.1).

Ясно, что

$$C_{m-1}^9 = \int_{\tilde{t}_{m-1}}^{\tilde{t}_m} Y_{v-1}(t)\left[\sum_{j=1}^{s_{m-1}} \frac{\partial \tilde{f}_{m-1}[t]}{\partial x_{m-1j}}\delta x_{m-1}(\tau_{m-1j}(t)) + \delta f_{m-1}[t]\right]dt = C_{m-1}^4 + C_{m-1}^{10}, \tag{8.5.5}$$

где

$$\begin{aligned}
C_{m-1}^{10} &= \sum_{j=1}^{s_{m-1}} \int_{\tau_{m-1j}(\tilde{t}_{m-1})}^{\tau_{m-1j}(\tilde{t}_m)} Y_{m-1}(\gamma_{m-1j}(t))\frac{\partial \tilde{f}_{m-1}[\gamma_{m-1j}(t)]}{\partial x_{m-1j}}\dot{\gamma}_{m-1j}(t)\delta x_{m-1}(t)dt = \\
&= \sum_{j=1}^{s_{m-1}} \left[\int_{\tau_{m-1j}(\tilde{t}_{m-1})}^{\tilde{t}_{m-1}} Y_{m-1}(\gamma_{m-1j}(t))\frac{\partial \tilde{f}_{m-1}[\gamma_{m-1j}(t)]}{\partial x_{m-1j}}\dot{\gamma}_{m-1j}(t)\delta x_{m-1}(t)dt + \right.\\
&\left. + \int_{\tilde{t}_{m-1}}^{\tau_{m-1j}(\tilde{t}_m)} Y_{m-1}(\gamma_{m-1j}(t))\frac{\partial \tilde{f}_{m-1}[\gamma_{m-1j}(t)]}{\partial x_{m-1j}}\dot{\gamma}_{m-1j}(t)\delta x_{m-1}(t)dt\right]
\end{aligned}$$

(см. замечание 8.1.1).

Так как

$$Y_{m-1}(t) = \Theta_{m-1},\ t > \tilde{t}_m,$$

получаем

$$\begin{aligned}
C_{m-1}^{10} &= \sum_{j=1}^{s_{m-1}} \int_{\tau_{m-1j}(\tilde{t}_{m-1})}^{\tilde{t}_{m-1}} Y_{m-1}(\gamma_{m-1j}(t))\frac{\partial \tilde{f}_{m-1}[\gamma_{m-1j}(t)]}{\partial x_{m-1j}}\dot{\gamma}_{m-1j}(t)\times \\
&\times\left[\delta\varphi_{m-1}(t) + \frac{\partial \tilde{g}_{m-1}(t,\tilde{x}_{m-2}(t))}{\partial x_{m-2}}\delta x_{m-2}(t;\delta v_{m-2})\right]dt + \\
&+ \int_{\tilde{t}_{m-1}}^{\tilde{t}_m} \sum_{j=1}^{s_{m-1}} Y_{m-1}(\gamma_{m-1j}(t))\frac{\partial \tilde{f}_{m-1}[\gamma_{m-1j}(t)]}{\partial x_{m-1j}}\dot{\gamma}_{m-1j}(t)\delta x_{m-1}(t)dt = C_{m-1}^3 + C_{m-1}^5 + \\
&+ \int_{\tilde{t}_{m-1}}^{\tilde{t}_m} \sum_{j=1}^{s_{m-1}} Y_{m-1}(\gamma_{m-1j}(t))\frac{\partial \tilde{f}_{m-1}[\gamma_{m-1j}(t)]}{\partial x_{m-1j}}\dot{\gamma}_{m-1j}(t)\delta x_{m-1}(t)dt.
\end{aligned} \tag{8.5.6}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
C_m^7 + C_m^5 &= \int_{\tilde{t}_{m-1}}^{\tilde{t}_m} \left\{\dot{Y}_{i-1}(t) + \sum_{j=1}^{s_{i-1}} Y_{i-1}(\gamma_{i-1j}(t))\frac{\partial \tilde{f}_{i-1}[\gamma_{i-1j}(t)]}{\partial x_{i-1j}}\dot{\gamma}_{i-1j}(t) + \right.\\
&\left. + \left[\sum_{j=1}^{s_i} \chi([\tau_{ij},\tilde{t}_i];t)Y_i(\gamma_{ij}(t))\frac{\partial \tilde{f}_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}}\dot{\gamma}_{ij}(t)\right]\frac{\partial g_i(t,\tilde{x}_{i-1}(t))}{\partial x_{i-1}}\right\}\delta x_{m-1}(t;\delta v_{m-1})dt + \\
&+ C_{m-1}^3 + C_{m-1}^4 + C_{m-1}^5 = C_{m-1}^3 + C_{m-1}^4 + C_{m-1}^5
\end{aligned}$$

(см. (8.5.4)–(8.5.6)).

С другой стороны,

$$C_m^8 = Y_{m-1}(\tilde{t}_{m-1})\left[\delta\varphi(\tilde{t}_{m-1}-) + \left(\dot{\varphi}_{m-1}^- + \frac{\partial \tilde{g}_{m-1}}{\partial x_{m-2}} f_{m-2s_{m-2}+1}^- - f_{m-10}^- + \frac{\tilde{g}_{m-1}}{t_{m-1}}\right)\delta t_{m-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \tilde{g}_{m-1}}{\partial x_{m-2}} \delta x_{m-2}(\tilde{t}_{m-1}; \delta v_{m-1})\right] = C_{m-1}^1 + C_{m-2}^2 + C_{m-1}^6.$$

Итак,

$$C_m^5 + C_m^6 = \sum_{j=1}^{6} C_{m-1}^j.$$

Следовательно,

$$\delta x_m(\tilde{t}_{m+1}; \delta v_m) = \sum_{i=m-1}^{m} \sum_{j=1}^{4} C_i^j + C_{m-1}^5 + C_{m-1}^6.$$

Продолжая этот процесс, получаем формулу (8.5.1). □

Рассмотрим векторное пространство

$$E_{z_m} = \mathbb{R}_\xi \times E_{v_m}$$

точек $z_m = (\xi, v_m)$. Введем множество

$$X_m = [0, \infty) \times X_{m0}, \quad D_m = [0, \infty) \times D_{m0}.$$

Множество D_m является конечно локально выпуклым в подпространстве $X_m \times E_{v_m} \subset E_{z_m}$.

На множестве D_m определим отображение

$$P : D_m \to \mathbb{R}_p^{1+l}$$

формулой

$$P(z_m) = Q(t_1, \ldots, t_{m+1}, \varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_m(t_m), T(v_m)) + (\xi, 0, \ldots, 0)^*.$$

Лемма 8.5.2. *Отображение P дифференцируемо в точке $\tilde{z}_m = (0, \tilde{v}_m)$ и*

$$dP_{\tilde{z}_m}(\delta z_m) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_i} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_i(\tilde{t}_i)\left(\dot{\varphi}_i^- - f_{i0}^- + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_i}\right) + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_{i-1}(\tilde{t}_i) f_{i-1s_{i-1}+1}^- \right\} \delta t_i +$$
$$+ \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_{m+1}} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} f_{ms_m+1}^-\right)\delta t_{m+1} + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{i0}} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_i(\tilde{t}_i)\right)\delta\varphi_i(\tilde{t}_i-) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_i}\int_{\tau_{ij}(\tilde{t}_i)}^{\tilde{t}_i} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_i(\gamma_{ij}(t)) \frac{\partial \tilde{f}_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}} \dot{\gamma}_{ij}(t)\delta\varphi_i(t)dt +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_{m1}} Y_i(t)\delta f_i[t]dt + (\delta\xi, 0, \ldots, 0)^* \ \ \forall \delta z_m = (\delta\xi, \delta v_m) \in E_{z_m} - \tilde{z}_m. \tag{8.5.7}$$

Эта лемма с помощью леммы 8.5.1 доказывается тем же способом, что и лемма 6.5.3.

В топологическом векторном пространстве E_{z_m} определим фильтр $\Phi_{\tilde{z}_m}$ как прямое произведение фильтров

$$\Phi_{\tilde{z}_m} = \Phi_{\tilde{y}_m} \times \prod_{i=1}^{m} \Phi_{\tilde{\varphi}_i} \times \prod_{i=1}^{m} \Phi_{i1},$$

где фильтр $\Phi_{\tilde{y}_m}$ определяется выпуклым базисом

$$\{(V_0 \cap [0, \infty)) \times (V_{\tilde{t}_1} \cap (a, \tilde{t}_1]) \times (V_{\tilde{t}_2} \cap (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]) \times \cdots \times (V_{\tilde{t}_{m+1}} \cap (\tilde{t}_m, \tilde{t}_{m+1}]):$$
$$V_0 \subset \mathbb{R}_\xi,\ V_{\tilde{t}_i} \subset \mathbb{R}_{t_i}, i = \overline{1, m} \text{ — выпуклые окрестности}\}.$$

Фильтры $\Phi_{\tilde{\varphi}_i}, i = \overline{1, m}$, были определены в предыдущем пункте, а фильтр $\Phi_{i1}, i = \overline{1, m}$, определяется аналогично фильтру Φ_1.

На основе теоремы 8.1.5 можно доказать, что отображение P определено и непрерывно на $\mathrm{co}([\Phi_{\tilde{z}_m}])$; кроме того, оно критично на квазивыпуклом фильтре $\Phi_{\tilde{z}_m}$ (см. п. 6.5).

Таким образом, выполнено неравенство (8.4.4), где $dP_{\tilde{z}_m}(\delta z_m)$ имеет вид (8.5.7). Определим функции

$$\psi_{i-1}(t) = \pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_{m1}}Y_{i-1}(t), i = \overline{2, m+1}.$$

Очевидно, что функции $\psi_{i-1}(t), i = \overline{2, m+1}$, соответственно, удовлетворяют уравнению (8.3.1) и условиям

$$\psi_m(\tilde{t}_{m+1}) = \pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_{m1}}, \quad \psi_{i-1}(\tilde{t}_i) = \psi_i(\tilde{t}_i)\frac{\partial\tilde{g}_i}{\partial x_{i-1}}, \quad i = \overline{m, 2}. \tag{8.5.8}$$

Из (8.4.4) с учетом (8.5.7) и (8.5.8) получаем:

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial t_i} + \left(\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_{i0}} + \psi_i(\tilde{t}_i)\right)\dot{\varphi}_i^- + \psi_i(\tilde{t}_i)\left(\frac{\partial\tilde{g}}{\partial t_i} - f_{i0}^-\right) + \psi_{i-1}(\tilde{t}_i)f_{i-1s_{i-1}+1}\right\}\delta t_i +$$
$$+\left(\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial t_{m+1}} + \psi_m(\tilde{t}_{m+1})f_{ms_m+1}^-\right)\delta t_{m+1} + \sum_{i=1}^{m}\left(\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_{i0}} + \psi_i(\tilde{t}_i)\right)\delta\varphi_i(\tilde{t}_i-) +$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_i}\int_{\tau_{ij}(\tilde{t}_i)}^{\tilde{t}_i}\psi_i(\gamma_{ij}(t)\frac{\partial\tilde{f}_i[\gamma_{ij}(t)]}{\partial x_{ij}}\dot{\gamma}_{ij}(t)\delta\varphi_i(t)dt + \sum_{i=1}^{m}\int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}}\psi_i(t)\delta f_i[t]dt +$$
$$+\pi_0\delta\xi \leqslant 0 \ \ \forall\delta z_m \in \mathrm{cone}(\tilde{W}_{\tilde{z}_m} - \tilde{z}_m).$$

Из этого неравенства стандартным способом выводятся все необходимые условия (см. п. 7.5).

9. Теоремы существования оптимального элемента

В этом параграфе для нелинейных оптимальных задач с запаздываниями как в фазовых координатах, так и в управлениях, доказаны теоремы существования глобального оптимального элемента типа Чезари — Олеха [108, 142, 143] и Филиппова [80].

9.1. Вспомогательные утверждения. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ введено отношение частичного упорядочения с помощью конуса

$$C^k = \{x = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)^* \in \mathbb{R}^n : x^i \geqslant 0, \ i = \overline{1, k}\},$$

т.е.

$$x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^k, x_1^{k+1}, \ldots, x_1^n)^* \geqslant x_2 = (x_2^1, \ldots, x_2^k, x_2^{k+1}, \ldots, x_2^n)^*,$$

если

$$x_1^i \geqslant x_2^i, \ i = \overline{1, k}, \ x_1^j = x_2^j, \ j = \overline{k+1, n}.$$

Если $k = 0$, то будем считать, что

$$C^0 = \{0 \in \mathbb{R}^n\}. \tag{9.1.1}$$

В этом случае $x_1 \geqslant x_2$ и $x_1 = x_2$ равносильны.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое подмножество; определим множество

$$K(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda x + y \in P \ \ \forall\lambda \geqslant 0, \forall y \in P\}.$$

Очевидно, $K(P)$ — непустой конус и, если P — ограниченное множество, то $K(P) = C^0$.

Лемма 9.1.1. *Множество $K(P)$ обладает следующими свойствами*:

$$K(\mathrm{co}\, P) \supset \mathrm{co}\, K(P), \quad K(\mathrm{cl}\, P) \supset \mathrm{cl}\, K(P).$$

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{co} K(P)$. Тогда существуют $x_i \in K(P)$, $i = 1, 2$ и $\alpha \in [0, 1]$ такие, что
$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2.$$
Для произвольного $y \in P$ имеем
$$\lambda x + y = \lambda[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] + y = \alpha(\alpha x_1 + y) + (1 - \alpha)(\lambda x_2 + y),$$
но
$$\lambda x_i + y \in \operatorname{co} P \ \ \forall \lambda \geqslant 0, \ \forall y \in P, \ i = 1, 2.$$
Таким образом,
$$\lambda x + y \in \operatorname{co} P \ \ \forall \lambda \geqslant 0, \ \forall y \in P. \tag{9.1.2}$$
Очевидно, что из (9.1.2) следует
$$\lambda x + y \in \operatorname{co} P \ \ \forall \lambda \geqslant 0, \ \forall y \in \operatorname{co} P.$$
Итак,
$$K(\operatorname{co} P) \supset \operatorname{co} K(P).$$
Далее, пусть $x \in \operatorname{cl} K(P)$ и пусть последовательность $x_i \in K(P)$, $i = 1, 2, \ldots$ сходится к x.

При каждом $i = 1, 2, \ldots$
$$\lambda x_i + y \in \operatorname{cl} P \ \ \forall \lambda \geqslant 0, \ \forall y \in \operatorname{cl} P.$$
Отсюда следует
$$\lambda x + y \in \operatorname{cl} P \ \ \forall \lambda \geqslant 0, \ \forall y \in \operatorname{cl} P.$$
Следовательно,
$$K(\operatorname{cl} P) \supset \operatorname{cl} K(P).$$
□

Определим множество
$$C_0^k = \{\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k, \varsigma) \in \mathbb{R}^n_\psi : \psi_i \leqslant 0, i = \overline{1, k}\}.$$

Замечание 9.1.1. Если выполнено неравенство
$$\psi x \leqslant 0 \ \ \forall \psi \in C_0^k,$$
то $x \in C^k$.

Лемма 9.1.2 (см. [142]). *Пусть*
$$t \to P(t) \subset \mathbb{R}^n, \ \ t \in J$$
— многозначное отображение такое, что для каждого $t \in J$ множество $P(t)$ замкнуто и выпукло. Кроме того, предположим, что
$$K(P(t)) = C^k$$
и для произвольного
$$\psi \in C_0^k$$
существует функция $m(\cdot; \psi) \in L(J, \mathbb{R}_+)$ такая, что
$$\sup_{p \in P(t)} \psi p \leqslant m(t; \psi).$$

Пусть, далее, последовательность абсолютно непрерывных функций $p_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in J$, $i = 1, 2, \ldots$ равномерно ограничена и
$$\dot{p}_i(t) \in P(t) \ \ \text{п.в. на } J.$$
Тогда из нее можно выделить подпоследовательность $p_{1i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, сходящуюся на J поточечно к функции $p(t) + v(t)$, где $p(t)$ — абсолютно непрерывная функция и
$$\dot{p}(t) \in P(t) \ \ \text{п.в. на } J,$$
функция $v(t) \in C^k$ — неубывающая и удовлетворяет условиям $v(a) = 0$, $\dot{v}(t) = 0$ п.в. на J.

Кроме того,

$$\lim_{i\to\infty} p_{1i}^j(t) = p^j(t),\ j = \overline{k+1, n},$$

равномерно на J.

Замечание 9.1.2. Пусть в лемме 9.1.2 $k = 0$, тогда

$$\lim_{i\to\infty} p_{1i}(t) = p(t) \text{ равномерно на } J,$$

а $v(t) = 0$.

Обозначим $\Omega_1(J; U)$ множество измеримых функций $u(t)$, п.в. по $t \in J$ принимающих значения из произвольного множества $U \subset G$, где $G \subset \mathbb{R}^r$ — открытое множество.

Из леммы 9.1.2 вытекает следующее предложение.

Предложение 9.1.1. *Пусть $U_1 \subset G$ — выпуклый компакт. Тогда множество $\Omega_1 = \Omega_1(J; U_1)$ слабо компактно в $L(J, \mathbb{R}^r)$.*

В самом деле, пусть $u_i(\cdot) \in \Omega_1,\ i = 1, 2, \ldots$ — произвольная последовательность и пусть $k = 0$. Нетрудно заметить, что

$$P = \{p \in \mathbb{R}^n : \exists u \in U_1,\ p \geqslant u\} = U_1$$

и

$$K(P) = C^0$$

(см. (9.1.1)).

Последовательность

$$p_i(t) = \int_a^t u_i(\xi) d\xi,\ i = 1, 2, \ldots$$

удовлетворяет условиям леммы 9.1.2. Поэтому из нее можно выделить такую подпоследовательность $p_{1i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{i\to\infty} p_{1i}(t) = p(t)$$

равномерно на J. При этом

$$\dot p(t) \in U_1 \text{ п.в. на } J.$$

Таким образом, при каждом $t \in J$

$$\lim_{i\to\infty} \int_a^t u_{1i}(\xi) d\xi = \int_a^t u(\xi) d\xi,$$

где $u(\xi) = \dot p(\xi)$.

Это означает слабую сходимость последовательности $u_{1i}(\cdot),\ i = 1, 2, \ldots$ к функции $u(\cdot) \in \Omega_1$.

Многозначное отображение

$$x \to P(x), x \in M \subset R^n$$

называется *полунепрерывным сверху* (пнс), если из соотношений

$$y_i \in P(x_i),\ \ \lim_{i\to\infty} y_i = y_0,\ \ \lim_{i\to\infty} x_i = x_0 \in M,$$

следует, что

$$y_0 \in P(x_0).$$

Лемма 9.1.3 (см. [108]). *Пусть многозначное отображение*

$$(t, x) \to P(t, x),\ (t, x) \in J \times M \tag{9.1.3}$$

при каждом $t \in J$ — пнс по $x \in M$, значение $P(t, x)$ — выпуклое множество и

$$K(P(t, x)) = C^k\ \ \forall (t, x) \in J \times M;$$

для произвольного $\psi \in \operatorname{int} C_0^k$ и $\gamma > 0$ существует функция $m(\cdot; \psi, \gamma) \in L(J, \mathbb{R})$ такая, что

$$\sup_{|x|\leqslant\gamma}\ \sup_{p\in P(t,x)}\ \leqslant m(t; \psi, \gamma).$$

Тогда отображение (9.1.3) *при каждом* $t \in J$ *обладает свойством*

$$P(t; x_0) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname{cl} \operatorname{co} \bigcup_{|x - x_0| \leqslant \varepsilon} P(t, x).$$

Следующая лемма является обобщением известной леммы Филиппова [80].

Лемма 9.1.4 (см. [142]). *Пусть функция* $g : J \times G \to \mathbb{R}^n$ *при почти всех* $t \in J$ *непрерывна по* $u \in G$, *при фиксированном* $u \in G$ *измерима по* $t \in J$, *а множество* $U_2 \subset G$ *замкнуто. Тогда, если измеримая функция* $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in J$ *удовлетворяет условию*

$$y(t) \in P(t) = \{p \in \mathbb{R}^n : \exists u \in U_2,\ p \geqslant g(t, u)\} \ \text{п.в. на } J,$$

то существует измеримая функция $u(t) \in U_2$ *такая, что*

$$p(t) \geqslant g(t, u(t)) \ \text{п.в. на} J.$$

Пусть функции $\theta_i(t), i = \overline{1, \nu}, t \in \mathbb{R}$, удовлетворяют условию соизмеримости, т.е. существует абсолютно непрерывная функция $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$ такая, что $\theta(t) < t$, $\dot{\theta}(t) > 0$ и $\theta_i(t) = \theta^{k_i}(t)$, $i = \overline{1, \nu}$ где $k_\nu > \ldots > k_1 \geqslant 0$ — целые числа $\theta^i(t) = \theta(\theta^{i-1}(t)), \theta^0 = t$.

Разобьем отрезок $J_2 = [\theta, b], \theta = \theta^{k_\nu}(a)$ на частичные отрезки

$$I_i = [\xi_i, \xi_{i+1}),\ i = -k_\nu, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m-1,\ I_m = [\xi_m, \xi_{m+1}],\ \xi_{m+1} = b,$$

таким образом, чтобы

$$\xi_i = \theta^{-i}(a),\ i = \overline{-1, -k_{-\nu}},\ \xi_0 = a;\ \xi_i = \omega^i(a), i = \overline{1, m},\ \omega^{m+1}(a) \geqslant b,$$

где $\omega(t) = \theta^{-1}(t)$.

Пусть функция $g(t, u_1, \ldots, u_\nu) \in \mathbb{R}^n$ при почти всех $t \in J$ непрерывна по $(u_1, \ldots, u_\nu) \in G^\nu$; при фиксированном $(u_1, \ldots, u_\nu) \in G^\nu$ измерима по $t \in J$; $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in J$ — измеримая функция.

Введем обозначения

$$P(t) = \{(p_0, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^{(m+1)n} : \exists (u_{-k_\nu}, \ldots, u_{m-k_1}) \in U_2^{m-k_1+k_\nu+1},$$
$$p_i \geqslant g(\omega^i(t), u_{i-k_1}, \ldots, u_{i-k_\nu}),\ i = \overline{0, m-1},\ \ p_m \geqslant \chi(J; \omega^m(t)) g(\omega^m(t), u_{m-k_1}, \ldots, u_{m-k_\nu})\};$$
$$z(t) = (y(\omega^0(t)), \ldots, \chi(J; \omega^m(t)) y(\omega^m(t)))^*,\ \ t \in I_{00} = [\xi_0, \xi_1],$$

где $\chi(J; t)$ — характеристическая функция интервала $J = [a, b]$. Здесь и всюду предполагается, что

$$\chi(J; \omega^m(t)) g(\omega^m(t), \cdot) = 0 \text{ при } t \notin J.$$

Лемма 9.1.5. *Пусть* $z(t) \in P(t)$ *п.в. на* I_{00}. *Тогда существует такая функция* $u(\cdot) \in \Omega_2 = \Omega_1(J_2, U_2)$, *что выполнено неравенство*

$$y(t) \geqslant g(t, u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))) \ \text{п.в. на } \ J. \tag{9.1.4}$$

Доказательство. В силу леммы 9.1.4 существуют такие измеримые функции

$$u_i(t) \in U_2,\ i = \overline{-k_\nu, -k_1 + m},\ t \in I_{00},$$

что

$$y(\omega^i(t)) \geqslant g(\omega^i(t), u_{i-k_1}(t), \ldots, u_{i-k_\nu(t)}),\ i = \overline{0, m-1},$$
$$\chi(J; \omega^m(t)) y(\omega^m(t)) \geqslant \chi(J; \omega^m(t)) g(\omega^m(t), u_{m-k_1}(t), \ldots, u_{m-k_\nu(t)}),\ \ t \in I_{00}.$$

Определим функцию $u(t)$, $t \in J_2$, следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} u_{-k_\nu}(\omega^{k_\nu}(t)), \;\; t \in I_{-k_\nu}, \\ u_{-k_\nu+1}(\omega^{k_\nu+1}(t)), \;\; t \in I_{-k_\nu+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_0(t), t \in I_0, \\ u_1(\theta^1(t)), \;\; t \in I_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{-k_1+m}(\theta^{-k_1+m}(t)), \quad t \in I_{-k_1+m}, \\ \hat{u}, \quad t > t_{-k_1+m+1}, \end{cases}$$

где $\hat{u} \in U_2$ — произвольная фиксированная точка.

Ясно, что $u(\cdot) \in \Omega_2$ и выполнено условие (9.1.4). □

Пусть функция

$$F(t, x_1, \dots, x_s, u_1, \dots, u_\nu) = (f^0, f)^* \in \mathbb{R}^{1+n}$$

определена на $J \times O^s \times G^\nu$ и удовлетворяет следующим условиям: для каждого фиксированного $(x_1, \dots, x_s, u_1, \dots, u_\nu) \in O^s \times U_2^\nu$ функция измерима по $t \in J$; для каждого $t \in J$ функция F непрерывна по $(x_1, \dots, x_s, u_1, \dots, u_\nu) \in O^s \times U_2^\nu$,где $O \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

Определим множества

$$\begin{gathered} P(t; y_0, \dots, y_s) = \{p = (p^0, \dots, p^m, p_0, \dots, p_m) \in \mathbb{R}_{p^0} \times \dots \times \mathbb{R}_{p^m} \times \mathbb{R}^n_{p_0} \times \dots \times \mathbb{R}^n_{p_m} : \\ \exists (u_{-k_\nu}, \dots, u_{-k_1+m}) \in U_2^{k_\nu - k_1 + m + 1}, \; p^i \geqslant \dot{\omega}^i(t) f^0(\omega^i(t), y_i, u_{i-k_1}, \dots, u_{i-k_\nu}), \\ p_i = \dot{\omega}^i(t) f(\omega^i(t), y_i, u_{i-k_1}, \dots, u_{i-k_\nu}), i = \overline{0, m-1}; \; p^m \geqslant \chi(J; \omega^m(t)) \dot{\omega}^m(t) f^0(\omega^m(t), y_m, \\ u_{m-k_1}, \dots, u_{m-k_\nu}), p^m = \chi(J; \omega^m(t)) \dot{\omega}^m(t) f(\omega^m(t), y_m, \\ u_{m-k_1}, \dots, u_{m-k_\nu})\}, y_i = (x_{1i}, \dots, x_{si}) \in O^s, \; t \in I_{00}; \end{gathered} \tag{9.1.5}$$

далее,

$$\begin{gathered} Q(t; s_0, s_1, y_1, \dots, y_m) = \{v = (v^0, \dots, v^m, v_0, \dots, v_m) \in \mathbb{R}_{v^0} \times \dots \times \mathbb{R}_{v^m} \times \mathbb{R}^n_{v_0} \times \dots \times \mathbb{R}^n_{v_m} : \\ \exists (u_{-k_\nu}, \dots, u_{-k_1+m}) \in U_2^{k_\nu - k_1 + m + 1}, v^i \geqslant \chi([s_0, s_1]; \omega^i(t)) \dot{\omega}^i(t) f^0(\omega^i(t), y_i, u_{i-k_1}, \dots, u_{i-k_\nu}), \\ v_i \geqslant \chi([s_0, s_1]; \omega^i(t)) \dot{\omega}^i(t) f(\omega^i(t), y_i, u_{i-k_1}, \dots, u_{i-k_\nu}), \; i = \overline{0, m}\}, t \in I_{00}, s_0, s_1 \in J, y_i \in O^s, \; i = \overline{0, m}. \end{gathered}$$

Здесь измеримые функции $\dot{\omega}^i(t), i = \overline{0, m}$, без ограничения общности, предполагаются определенными всюду на интервале J.

Очевидно,

$$P(t; y_0, \dots, y_m) = Q(t; a, b, y_0, \dots, y_m).$$

Предложение 9.1.2. *Из выпуклости множества $P(t; y_0, \dots, y_m)$ следует выпуклость множества $Q(t; y_0, \dots, y_m)$.*

Доказательство. Пусть

$$(t, s_0, s_1, y_0, \dots, y_m) \in I_{00} \times J^2 \times O^{(m+1)n}$$

— произвольная фиксированная точка.

Если $\omega^i(t) \notin [s_0, s_1]$, $i = \overline{0, m}$, то

$$Q(t; s_0, s_1, y_0, \dots, y_m) = \{v \in \mathbb{R}_v^{(1+m)(1+n)} : v^i \geqslant 0, \; v_i \geqslant 0, \; i = \overline{0, m}\} \tag{9.1.6}$$

и выпуклость этого множества очевидна. Более важным является случай, когда $\omega^i(t) \in [s_0, s_1]$, $i = \overline{q, e}$, $q = q(s_0)$, $e = e(s_1)$. В этом случае имеем

$$\begin{gathered} Q(t; s_0, s_1, y_0, \dots, y_m) = \{v \in \mathbb{R}_v^{(1+m)(1+n)} : \exists (u_{-k_\nu}, \dots, u_{-k_1+m}) \in U_2^{k_\nu - k_1 + m + 1}, \; v^i \geqslant 0, \\ v_i = 0, \; i \in \{0, \dots, m\} \setminus \{q, \dots, e\}, \; v^i \geqslant \dot{\omega}^i(t) f^0(\omega^i(t), y_i, u_{i-k_1}, \dots, u_{i-k_\nu}), \\ v_i = \dot{\omega}^i(t) f(\omega^i(t), y_i, u_{i-k_1}, \dots, u_{i-k_\nu}), \; i = \overline{q, e}\}. \end{gathered} \tag{9.1.7}$$

Пусть

$$\hat{v}_\alpha = (v^{0\alpha}, \ldots, v^{m\alpha}, v_{0\alpha}, \ldots, v_{m\alpha}) \in Q(t; s_0, s_1, y_0, \ldots, y_m), \ \ \alpha = 1, 2,$$

— две произвольные фиксированные точки.

Ясно, что

$$v^{i\alpha} \geqslant 0, \ v_{i\alpha} = 0, \ i \in \{0, \ldots, m\} \setminus \{q, \ldots, e\}.$$

Существуют элементы

$$(u^{(\alpha)}_{-k_\nu}, \ldots, u^{(\alpha)}_{-k_1+m}) \in U_2^{k_\nu - k_1 + m + 1}, \ \alpha = 1, 2,$$

такие что

$$v^{i\alpha} \geqslant \dot{\omega}^i(t) f^0(\omega^i(t), y_i, u^{(\alpha)}_{i-k_1}, \ldots, u^{(\alpha)}_{i-k_\nu}),$$
$$v^{i\alpha} = \dot{\omega}^i(t) f(\omega^i(t), y_i, u^{(\alpha)}_{i-k_1}, \ldots, u^{(\alpha}_{i-k_\nu})), \ i = \overline{q, e}, \ \alpha = 1, 2$$

(см. (9.1.7)).

Нетрудно заметить, что элементы

$$p_\alpha = (p^{0\alpha}, \ldots, p^{m\alpha}, p_{0\alpha}, \ldots, p_{m\alpha}), \ \alpha = 1, 2,$$

где

$$\begin{gathered} p^{0\alpha} = \dot{\omega}^i(t) f^0(\omega^i(t), y_i, u^{(\alpha)}_{i-k_1}, \ldots, u^{(\alpha)}_{i-k_\nu}), p_{i\alpha} = \dot{\omega}^i(t) f(\omega^i(t), y_i, \\ u^{(\alpha)}_{i-k_1}, \ldots, u^{(\alpha)}_{i-k_\nu}), \ i \in \{0, \ldots, m-1\} \setminus \{q, \ldots, e\}; \\ p^{m\alpha} = \chi(J; \omega^m(t)) \dot{\omega}^m(t) f^0(\omega^m(t), y_m, u^{(\alpha)}_{m-k_1}, \ldots, u^{(\alpha)}_{m-k_\nu}), \\ p_{m\alpha} = \chi(J; \omega^m(t)) \dot{\omega}^m(t) f(\omega^m(t), y_m, u^{(\alpha)}_{m-k_1}, \ldots, u^{(\alpha)}_{m-k_\nu}), \\ p^{i\alpha} = v^{i\alpha}, \ p_{i\alpha} = v_{i\alpha}, i = \overline{q, e}, \end{gathered} \tag{9.1.8}$$

принадлежат множеству $P(t; y_0, \ldots, y_m)$ (см. (9.1.5)).

Для произвольного $\lambda \in [0, 1]$ из выпуклости $P(t; y_0, \ldots, y_m)$ следует существование такого элемента

$$(u_{-k_\nu}(\lambda), \ldots, u_{-k_1+m}(\lambda)) \in U_2^{k_\nu - k_1 + m + 1},$$

что выполнены соотношения

$$\begin{cases} \lambda p^{i1} + (1-\lambda) p^{i2} \geqslant \dot{\omega}^i(t) f^0(\omega^i(t), y_i, u_{i-k_1}(\lambda), \ldots, u_{i-k_\nu}(\lambda)), \\ \lambda p_{i1} + (1-\lambda) p_{i2} = \dot{\omega}^i(t) f(\omega^i(t), y_i, u_{i-k_1}(\lambda), \ldots, u_{i-k_\nu}(\lambda)), \\ i = \overline{0, m-1}, \end{cases} \tag{9.1.9}$$

$$\lambda p^{m1} + (1-\lambda) p^{m2} \geqslant \chi(J; \omega^m(t)) \dot{\omega}^m(t) f^0(\omega^m(t), y_m, u_{m-k_1}(\lambda), \ldots, u_{m-k_\nu}(\lambda)),$$
$$\lambda p_{m1} + (1-\lambda) p_{m2} = \chi(J; \omega^m(t)) \dot{\omega}^m(t) f^0(\omega^m(t), y_m, u_{m-k_1}(\lambda), \ldots, u_{m-k_\nu}(\lambda)).$$

Теперь рассмотрим элемент

$$\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 = (v^0(\lambda), \ldots, v^m(\lambda), v_1(\lambda), \ldots, v_m(\lambda)).$$

Ясно, что

$$v^i(\lambda) \geqslant 0, \ v_i(\lambda) = 0, \ i \in \{0, \ldots, m\} \setminus \{q, \ldots, e\},$$

а

$$v^i(\lambda) = \lambda v^{i1}(\lambda) + (1-\lambda) v^{i2}(\lambda), \ v_i(\lambda) = \lambda v_{i1}(\lambda) + (1-\lambda) v_{i2}(\lambda), \ i = \overline{q, e},$$

удовлетворяют соотношению (9.1.9) (см. (9.1.8)).

Таким образом,

$$\lambda \hat{v}_1 + (1-\lambda) \hat{v}_2 \in Q(t; y_0, \ldots, y_m).$$

□

Предложение 9.1.3. *Пусть для каждого* $t \in I_{00}$ *отображение*

$$(y_0, \dots, y_m) \to P(t; y_0, \dots, y_m),\ y_i \in O^s,\ i = \overline{0, m} \tag{9.1.10}$$

— пнс. Тогда для каждого $t \in I_{00}$ *отображение*

$$(s_0, s_1, y_0, \dots, y_m) \to Q(t; s_0, s_1, y_0, \dots, y_m),$$
$$s_\alpha \in J \setminus \{\omega^0(t), \dots, \omega^m(t),\ \alpha = 1, 2,\ y_i \in O,\ i = \overline{0, m},$$

— тоже пнс.

Доказательство. Пусть $\tilde{t} \in I_{00}$ — произвольная фиксированная точка и пусть

$$v_j = (v_j^0, \dots, v_j^m, v_0^{(j)}, \dots, v_m^{(j)}) \in Q(\tilde{t}; s_0^j, s_1^j, y_0^{(j)}, \dots, y_m^{(j)}),\ j = 1, 2, \dots$$

— последовательность. При этом

$$s_\alpha^{(j)} \in J \setminus \{\omega^0(\tilde{t}), \dots, \omega^m(\tilde{t})\},\ y_i^{(j)} \in O^s,\ i = \overline{0, m},$$

и

$$\lim_{i \to \infty} v_j = \tilde{v} = (\tilde{v}^0, \dots, \tilde{v}^m, \tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_m),$$
$$\lim_{i \to \infty} s_\alpha^{(j)} = \tilde{s}_\alpha \in J \setminus \{\omega^0(\tilde{t}), \dots, \omega^m(\tilde{t}),\ \lim_{i \to \infty} y_i^{(j)} = \tilde{y}_i \in O^s,\ i = \overline{0, m}.$$

Пусть $\omega^i(\tilde{t}) \notin (\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)$, тогда $\omega^i(\tilde{t}) \notin (s_0^j, s_1^j)$, $i = \overline{0, m}$, для достаточно большого j. Поэтому

$$\tilde{v} \in Q(\tilde{t}; \tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_m)$$

(см. (9.1.6)).

Пусть $\omega^i(\tilde{t}) \in (\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)$, $i = \overline{q, e}$, $q = q(\tilde{s}_0)$, $e = e(\tilde{s}_1)$. Тогда $q = q(s_0^{(j)})$, $e = e(s_1^{(j)})$ для достаточно большого j.

Поэтому структура множеств

$$Q(\tilde{t}; \tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_m),\ \ Q(\tilde{t}; s_0^j, s_1^j, y_0^{(j)}, \dots, y_m^{(j)})$$

одинакова.

Теперь рассмотрим такую последовательность

$$p_j = (p_j^0, \dots, p_j^{q-1}, v_j^q, \dots, v_j^e, p_j^{e+1}, \dots, p_j^m, p_0^{(j)}, \dots, p_{q-1}^{(j)}, v_q^{(j)}, \dots, v_e^{(j)}, p_{e+1}^{(j)}, \dots, p_m^{(j)}) \in$$
$$\in P(\tilde{t}; y_0^{(j)}, \dots, y_m^{(j)}),\ j = 1, 2, \dots,$$

что

$$\lim_{j \to \infty} p_j^i = \tilde{p}^i,\ \lim_{j \to \infty} p_i^j = \tilde{p}_i,\ i \in \{0, \dots, m\} \setminus \{q, \dots, e\}.$$

Отображение (9.1.10) пнс, поэтому

$$(\tilde{p}^0, \dots, \tilde{p}^{q-1}, \tilde{v}^q, \dots, \tilde{v}^l, \tilde{p}^{e+1}, \dots, \tilde{p}^m, \tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_{q-1}, \tilde{v}_q, \dots, \tilde{v}_e, \tilde{p}_{e+1}, \dots, \tilde{p}_m) \in P(\tilde{t}; \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_m).$$

Следовательно, существует такой элемент $(\tilde{u}_{-k_\nu}, \dots, \tilde{u}_{-k_1+m}) \in U_2^{k_\nu - k_1 + m + 1}$, для которого

$$\tilde{v}^i \geqslant \dot{\omega}^i(\tilde{t}) f^0(\omega^i(\tilde{t}), \tilde{y}_i, \tilde{u}_{i-k_\nu}, \dots, \tilde{u}_{i-k_1}),\ \tilde{v}^i = \dot{\omega}^i(\tilde{t}) f(\omega^i(\tilde{t}), \tilde{y}_i, \tilde{u}_{i-k_\nu}, \dots, \tilde{u}_{i-k_1}),\ i \in \{q, e\}.$$

С другой стороны,

$$\tilde{v}_i \geqslant 0,\ \tilde{v} = 0,\ i \in \{0, \dots, m\} \setminus \{q, \dots, e\}.$$

Итак,

$$\tilde{v} \in Q(\tilde{t}; \tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_m).$$

$\square$

9.2. Теоремы существования для оптимальных задач соизмеримыми запаздываниями в управлениях. Рассмотрим оптимальную задачу

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))), \tag{9.2.1}$$
$$t \in [t_0, t_1] \subset J,\ u \in \Omega_2,$$
$$x(t) = \varphi_0(t), t \in [\tau, t_0), x(t_0) = x_0 \in O, \tag{9.2.2}$$
$$q^i(t_0, t_1, x_0, x(t_1)) = 0, i = 1, \ldots, l, \tag{9.2.3}$$
$$I(\sigma) = q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))) \to \min,$$

где $\sigma = (t_0, t_1, x_0, x(\cdot), u(\cdot))$; $\varphi_0(\cdot) \in \Delta$ — фиксированная начальная функция; $\theta_i(t)$, $i = \overline{1, \nu}$ — запаздывания, удовлетворяющие условию соизмеримости; скалярные функции $q^i(t_0, t_1, x_0, x_1)$, $i = \overline{0, l}$, непрерывны на $J^2 \times O^2$.

Определение 9.2.1. Элемент $\sigma = (t_0, t_1, x_0, x(\cdot), u(\cdot)), t_0, t_1 \in J, x_0 \in O, u(\cdot) \in \Omega_2$ называется *допустимым,* если выполнены следующие условия:

9.2.1. функция $x(t)$ определена на $[\tau, t_1]$ и принимает значения из O; на отрезке $[\tau, t_0]$ она удовлетворяет условию (9.2.2); на отрезке $[t_0, t_1]$ функция $x(t)$ абсолютно непрерывна; совокупность $(t_0, t_1, x_0, x(t_1))$ удовлетворяет условию (9.2.3);

9.2.2. пара $(x(t), u(t))$ п.в. на $[t_0, t_1]$ удовлетворяет системе (9.2.1);

9.2.3. интеграл
$$I_1(\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t)))dt$$
принимает конечное значение.

Множество допустимых элементов обозначим через B_4.

Определение 9.2.2. Элемент $\tilde{\sigma} = (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}(\cdot), u(\cdot)) \in B_4$ называется оптимальным, если
$$I(\tilde{\sigma}) = \inf_{B_4} I(\sigma).$$

Теорема 9.2.1. *Оптимальный элемент существует, если выполняются условия*:

9.2.4. $B_4 \neq \varnothing$;

9.2.5. *существует компактное множество $K_0 \subset O$ такое, что для произвольного $\sigma = (t_0, t_1, x_0, x(\cdot), u(\cdot)) \in B_4$*
$$x(t) \in K_0,\ t \in [t_0, t_1];$$

9.2.6. *для произвольного $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n_\psi$ существует функция $m(\cdot; \psi) \in L(J, \mathbb{R}_+)$ такая, что*
$$-f^0(t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu) + \psi f(t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu) \leqslant m(t; \psi)$$
$$\forall (t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu) \in J \times K_0^s \times U_2^\nu;$$

9.2.7. *при каждом $(t, y_0, \ldots, y_m) \in I_{00} \times K_0^{s(m+1)}$ множество*
$$P(t; y_0, \ldots, y_m)$$
выпукло (*см.* (9.1.5));

9.2.8. *при каждом $t \in I_0$ отображение*
$$(y_0, \ldots, y_m) \to P(t; y_0, \ldots, y_m)$$
является пнс.

Доказательство. В силу предположения 9.2.6 имеем
$$f^0(t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu) \geqslant -m(t; 0)\ \ \forall (t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu) \in J \times K_0^s \times U_2^\nu.$$
Поэтому множество
$$\{I_1(\sigma) : \sigma \in B_4\}$$

ограничено снизу.

Следовательно, существует такая последовательность

$$\sigma_i = (t_0^i, t_1^i, x_0^{(i)}, x_i(\cdot), u_i(\cdot)) \in B_4,\ i = 1, 2, \dots,$$

что

$$\lim_{i\to\infty} I(\sigma_i) = \tilde{I} = \inf_{B_4} I(\sigma) > -\infty;$$

при этом

$$\lim_{i\to\infty} t_\alpha^i = \tilde{t}_\alpha,\ \alpha = 1, 2,\ \lim_{i\to\infty} x_0^{(i)} = \tilde{x}_0,\ \lim_{i\to\infty} x_i(t_1^{(i)}) = \tilde{x}_1.$$

Определим функции

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t_0^i), t < t_0^i, \\ x_i(t),\ \ t \in [t_0^i, t_1^i], \\ x_i(t_1^i),\ \ t > t_1^i; \end{cases}$$

$$z_i^0(t) = \int_a^t \chi([t_0^i, t_1^i; \xi]) f^0(\xi, x(\tau_1(\xi)), \dots, x(\tau_s(\xi)), u(\theta_1(\xi)), \dots, u(\theta_\nu(\xi))) d\xi.$$

Очевидно, что

$$\frac{d}{dt}(z_i^0(t), z_i(t))^* = \chi([t_0^i, t_1^i; t]) F(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t))),\ \ t \in J,$$
$$z_i^0(a) = z_i^0(t_0^i) = 0,\ z_i^0(b) = z_i^0(t_1^i). \tag{9.2.4}$$

Здесь, как и выше, $F = (f_0, f)^*$.

Легко видеть, что

$$I(\sigma_i) = q^0(t_0^i, t_1^i, x_0^{(i)}, x_i(t_1^i)) + z_i^0(t_1^i)$$

и

$$\tilde{I} = q^0(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1) + \tilde{I}_1, \tag{9.2.5}$$

где

$$\tilde{I}_1 = \lim_{i\to\infty} z_i^0(b)$$

(см. (9.2.4)).

Нам понадобятся еще следующие обозначения:

$$\varsigma_i^j(t) = z_i^j(\omega^j(t)),\ \varsigma_j^{(i)}(t) = z_j^{(i)}(\omega^j(t)),\ j = \overline{0, m}, \varsigma_i(t) = (\varsigma_i^0(t), \dots, \varsigma_i^m(t), \varsigma_0^{(i)}(t), \dots, \varsigma_m^{(i)}(t));$$
$$y_i(t) = (t_0^i, t_1^i, x_i(\tau_1(\omega^0(t))), \dots, x_i(\tau_s(\omega^0(t))), \dots, x_i(\tau_1(\omega^m(t))), \dots, x_i(\tau_s(\omega^m(t)))), t \in I_{00}.$$

Здесь предполагается, что $x_i(t) = x_i(t_1^i)$, $t \geqslant t_1^i$; далее,

$$F_{j0}(t, s_0, s_1, y_j, u_{j-k_1}, \dots, u_{j-k_\nu}) = \chi([s_0, s_1]; \omega^j(t)) \dot{\omega}^j(t) f^0(\omega^j(t), y_j, u_{j-k_1}, \dots, u_{j-k_\nu}),$$
$$F_{j1}(t, s_0, s_1, y_j, u_{j-k_1}, \dots, u_{j-k_\nu}) = \chi([s_0, s_1]; \omega^j(t)) \dot{\omega}^j(t) f(\omega^j(t), y_j, u_{j-k_1}, \dots, u_{j-k_\nu}),\ j = \overline{0, m};$$
$$y = (s_0, s_1, y_0, \dots, y_m),\ F_{1+m}(t, y, u_{k_\nu}, \dots, u_{-k_1+m}) = (F_{00}, \dots, F_{m0}, F_{11}, \dots, F_{m1}).$$

Пусть в пространстве $\mathbb{R}_v^{(1+m)(1+n)}$ введено отношение частичного упорядочения конусом C^{1+m}. Множество $Q(\cdot)$ с помощью функции F_{1+m} записывается так:

$$Q(t; y) = \{v \in \mathbb{R}^{(1+m)(1+n)} : \forall (u_{-k_\nu}, \dots, u_{-k_1+m}) \in U_2^{k_\nu - k_1 + m + 1},$$
$$v \geqslant F_{1+m}(t, y, u_{-k_\nu}, \dots, u_{-k_1+m})\},\ t \in I_{00}.$$

Нетрудно заметить, что функции $\varsigma_i^j(t)$, $\varsigma_j^{(i)}(t)$, $t \in I_0$, $j = \overline{0,m}$, $i = 1, 2, \ldots$ абсолютно непрерывны и п.в. на I_{00} удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dot{\varsigma}_i^j(t) = F_{j0}(t, t_0^i, t_1^i, x_i(\tau_1(\omega^j(t))), \ldots, x_i(\tau_s(\omega^j(t))), \\ u_i(\theta_1(\omega^j(t))), \ldots, u_i(\theta_1(\omega^j(t)))), \\ \dot{\varsigma}_j^{(i)}(t) = F_{j1}(t, t_0^i, t_1,^i, x_i(\tau_1(\omega^j(t))), \ldots, x_i(\tau_s(\omega^j(t))), \\ u_i(\theta_1(\omega^j(t))), \ldots, u_i(\theta_1(\omega^j(t)))), \ j = \overline{0,m}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\dot{\varsigma}_i(t) \in Q(t; y_i(t)) \ \text{ п.в. на } \ I_{00}.$$

Определим множества

$$Q_j(t) = \bigcup_{i \geqslant j} Q(t; y_i(t)), \ \ P_j(t) = \operatorname{cl} \operatorname{co} Q_j(t).$$

Ниже будет доказано, что для отображения $t \to P_j(t)$ и последовательности $\varsigma_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ выполнены все условия леммы 9.1.2.

В первую очередь, докажем равенство

$$K(P_j(t)) = C^{1+m}, \ j = 1, 2, \ldots \tag{9.2.6}$$

(см. п. 9.1).

Пусть $\hat{v} \in K(P_j(t))$ и $\hat{v} \notin C^{1+m}$, тогда существует такой вектор

$$\hat{\psi} = (\hat{\psi}_0, \ldots, \hat{\psi}_m, \hat{\psi}^0, \ldots, \hat{\psi}^m) \in \operatorname{int} C^{1+m} \subset \mathbb{R}_\psi \times \cdots \times \mathbb{R}_{\psi_m} \times \mathbb{R}^n_{\psi^0} \times \cdots \times \mathbb{R}^n_{\psi^m},$$

что

$$\hat{\psi}\hat{v} = \sum_{j=1}^m (\hat{\psi}_j \hat{v}^j + \hat{\psi}^j \hat{v}_j) > 0$$

(см. замечание 9.1.1).

В силу условия 9.2.6 для произвольного $v \in Q(t; y)$ и $(t, y) \in I_{00} \times K_0^{s(1+m)}$ получим:

$$\hat{\psi}\hat{v} \leqslant \sum_{j=0}^m \chi([s_0, s_1]; \omega^j(t))\dot{\omega}^j(t)[\hat{\psi}_j f^0(\omega^j(t), y_j, u_{j-k_1}, \ldots, u_{j-k_\nu}) + \hat{\psi}^j f(\omega^j(t), y_j, u_{j-k_1}, \ldots, u_{j-k_\nu})] \leqslant$$

$$\leqslant [-\chi([s_0, s_1]; \omega^j(t))\dot{\omega}^j(t)] m\left(t; -\frac{\hat{\psi}^j}{\hat{\psi}_j}\right) = m(t) \ \ (\hat{\psi}_j < 0).$$

Очевидно, это неравенство остается в силе для произвольного $v \in P_j(t)$.

Пусть $\tilde{v} \in P_j(t)$ — фиксированная точка, тогда

$$v = \lambda\hat{v} + \tilde{v} \in P_j(t) \ \ \forall \lambda \geqslant 0,$$

так как $\hat{v} \in K(P_j(t))$. Следовательно,

$$\hat{\psi}(\lambda\hat{v} + \tilde{v}) \leqslant m(t).$$

С другой стороны,

$$\lambda\hat{\psi}\hat{v} \to \infty \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

Это противоречит суммируемости функции $m(t)$. Таким образом,

$$K(P_j(t)) \subset C^{1+m}.$$

Теперь докажем обратное включение. Пусть $\hat{v} \in C^{1+m}$, тогда из структуры множества $Q(t; y)$ непосредственно следует

$$\lambda\hat{v} + v \in Q_j(t) \ \ \forall v \in Q_j(t), \forall \lambda,$$

т.е.

$$K(Q_j(t)) \supset C^{1+m}.$$

В силу леммы 9.1.1 имеем:

$$K(P_j(t)) \supset \operatorname{cl}\operatorname{co} K(Q_j(t)) \supset C^{1+m}.$$

Равенство (9.2.6) доказано.

Выпуклость и замкнутость множества $P_j(t)$ очевидны. Остается показать равномерную ограниченность последовательности абсолютно непрерывных функций $\varsigma_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Функция

$$\Phi_i(t) = z_i^0(t) + \int_a^t \chi([t_0^i, t_1^i]; \xi) m(\xi; 0) d\xi$$

— неубывающая. Поэтому

$$0 \leqslant \phi_i(t) \leqslant \phi_i(b).$$

Предел последовательности $\phi_i(b)$, $i = 1, 2, \ldots$ является конечным (см. (9.2.5)). Это позволяет заключить, что последовательность $z_i^0(t)$, $t \in J$, $i = 1, 2, \ldots$ равномерно ограничена.

С другой стороны, равномерная ограниченность последовательности $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ обеспечена с требованием 9.2.5.

Таким образом, последовательность $\varsigma_i(t)$, $t \in I_{00}$, $i = 1, 2, \ldots$ равномерно ограничена.

Ясно, что

$$\dot{\varsigma}(t) \in P_1(t), \ i = 1, 2, \ldots \ \text{п.в. на} \ I_{00}.$$

В силу леммы 9.1.2 из последовательности $\varsigma_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ можно выделить такую подпоследовательность $\varsigma_{1i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, что при каждом $t \in I_{00}$

$$\lim_{i\to\infty} \varsigma_{1i}(t) = \zeta(t) + v(t) = (\zeta^0(t), \ldots, \zeta^m(t), \zeta_0(t), \ldots, \zeta_m(t)) + (v^0(t), \ldots, v^m(t), 0, \ldots, 0),$$

где $\zeta(t)$ — абсолютно непрерывная функция; $v^i(t)$ — неубывающая функция, причем $v^i(a) = 0$, $\dot{v}^i(t) = 0$.

Кроме того,

$$\dot{\zeta}(t) \in P_1(t) \text{ п.в. на } I_{00},$$
$$\lim_{i\to\infty} \varsigma_\alpha^{1i}(t) = \zeta_\alpha(t), \alpha = \overline{0, m} \ \text{ равномерно на } \ I_{00}.$$

Для каждого $j = 2, 3, \ldots$

$$\dot{\varsigma}_{1\ i+j}(t) \in P_j(t), \ i = 0, 1, \ldots.$$

Опять используем лемму 9.1.2. Из последовательности $\varsigma_{1i}(t)$, $i = 2, 3, \ldots$ можно выделить подпоследовательность $\varsigma_{2i}(t)$, $i = 2, 3, \ldots$ такую, что

$$\lim_{i\to\infty} \varsigma_{2i}(t) = \zeta_{11}(t) + v_{11}(t), \ v_{11}(a) = 0, \ \dot{v}_{11}(t) = 0.$$

При этом

$$\dot{\zeta}_{11}(t) \in P_2(t).$$

Очевидно,

$$\zeta(t) + v(t) = \zeta_{11}(t) + v_{11}(t).$$

Следовательно,

$$\dot{\zeta}(t) = \dot{\zeta}_{11}(t) \in P_2(t).$$

Продолжая этот процесс, можно доказать, что для каждого $j = 1, 2 \ldots$ справедливо включение

$$\dot{\zeta}(t) \in P_j(t) \ \text{ п.в. на } \ I_{00}.$$

Представим функции $\zeta^i(t) + v^i(t)$, $i = \overline{0, m}$, в виде

$$\zeta^i(t) + v^i(t) = \tilde{\zeta}^i(t) + \tilde{v}^i(t),$$

где

$$\tilde{\zeta}^0(t) = \zeta^0(t), \ \tilde{v}^0(t) = v^0(t), \tilde{\zeta}^\alpha(t) = \zeta^\alpha(t) - \tilde{v}^{\alpha-1}(\xi_1),$$
$$\tilde{v}^\alpha(t) = v^\alpha(t) + v^{\alpha-1}(\xi_1), \alpha = \overline{1, m}, \ (\xi_1 = \omega(a)).$$

Покажем, что
$$\tilde{\zeta}^0(a)=0,\ \tilde{\zeta}^\alpha(a)=\tilde{\zeta}^{\alpha-1}(\xi_1),\ \alpha=\overline{1,m}. \tag{9.2.7}$$
В самом деле, по определению,
$$z^0_{1i}(a)=0,\ z^0_{1i}(\omega^{\alpha-1}(\xi_1))=z^0_{1i}(\omega^\alpha(a)),\ \alpha=\overline{1,m};$$
далее,
$$\tilde{\zeta}^0(a)=\lim_{i\to\infty}z^0_{1i}(a)=0;\ \tilde{\zeta}^{\alpha-1}(\xi_1)+\tilde{v}^{\alpha-1}(\xi_1)=\lim_{i\to\infty}z^0_{1i}(\omega^{\alpha-1}(\xi_1))=\lim_{i\to\infty}z^0_{1i}(\omega^\alpha(a))=$$
$$=\tilde{\zeta}^\alpha(a)+\tilde{v}^\alpha(a)=\tilde{\zeta}^\alpha(a)+v^\alpha(a)+\tilde{v}^{\alpha-1}(\xi_1)=\tilde{\zeta}^\alpha(a)+\tilde{v}^{\alpha-1}(\xi_1),\ \alpha=\overline{1,m}\ \ (v^\alpha(a)=0).$$
Отсюда следует (9.2.7).

Определим абсолютно непрерывные функции
$$\tilde{z}^0(t)=\begin{cases}\tilde{\zeta}^0(t),\ t\in I_0,\\ \tilde{\zeta}^1(\theta_1(t)),\ t\in I_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \tilde{\zeta}^m(\theta^m(t)),\ t\in I_m,\end{cases}$$
$$\tilde{z}(t)=\begin{cases}\zeta^0(t),\ t\in I_0,\\ \zeta^1(\theta_1(t)),\ t\in I_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \zeta^m(\theta^m(t)),\ t\in I_m,\end{cases}$$
$$\tilde{\zeta}(t)=(\tilde{z}^0(\omega^0)(t)),\dots,\tilde{z}^0(\omega^m)(t)),\tilde{z}(\omega^0(t)),\dots,\tilde{z}(\omega^m(t))$$
(см. (9.2.7)). Очевидно,
$$\dot{\tilde{\zeta}}(t)\in P_j(t)\ \text{ п.в. на }\ I_{00}.$$
Пусть $\tilde{t}_0\in I_{m_1}$, $\tilde{t}_1\in I_{m_2}$. В силу леммы, при каждом $t\in I_0\setminus\{\omega^{m_1}(\tilde{t}_0,\omega^{m_2}(\tilde{t}_1)\}$ отображение
$$y\to Q(t;y),\ \ y\in J\setminus\{\omega^0(t),\dots,\omega^m(t)\}\times O^{(m+1)ns}$$
является пнс.

Из предположения 9.2.6 вытекает, что для произвольного $\psi\in\operatorname{int}C_0^{1+m}$ выполнено неравенство
$$\sup\{\sup_{v\in Q(t;y)}\psi v: y\in J^2\times K_0^{(m+1)ns}\}\leqslant m(t;\psi),\ t\in I_{00}.$$
Аналогично можно доказать, что
$$K(Q(t;y))=C^{1+m}.$$
Все условия леммы 9.1.3 выполнены, что, в свою очередь, дает
$$\dot{\tilde{\zeta}}(t)=\bigcap_{j\geqslant1}P_j(t)=Q(t;\tilde{t}_0,\tilde{t}_1,\tilde{x}(\tau_1(\omega^0(t))),\dots,\tilde{x}(\tau_s(\omega^0(t))),\dots,$$
$$\tilde{x}(\tau_1(\omega^m(t))),\dots,\tilde{x}(\tau_s(\omega^m(t)))),\ t\in I_{00},$$
где
$$\tilde{x}(t)=\begin{cases}\varphi_0(t),\ \ t<\tilde{t}_0,\\ \tilde{z}(t),\ \ t\in[\tilde{t}_0,b].\end{cases}$$

В силу леммы 9.1.5 существует функция $\tilde{u}(\cdot)\in\Omega_2$ такая, что
$$\begin{cases}\dot{\tilde{z}}^0(t)\geqslant\chi([\tilde{t}_0,\tilde{t}_1];t)f^0(t,\tilde{x}(\tau_1(t)),\dots,\tilde{x}(\tau_s(t)),\tilde{u}(\theta_1(t)),\dots,\tilde{u}(\theta_1(t))),\\ \dot{\tilde{z}}(t)=\chi([\tilde{t}_0,\tilde{t}_1];t)f(t,\tilde{x}(\tau_1(t)),\dots,\tilde{x}(\tau_s(t)),\tilde{u}(\theta_1(t)),\dots,\tilde{u}(\theta_1(t))),\ \ t\in J.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}\tilde{z}^0(b) \geqslant \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} f^0(t, \tilde{x}(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(t)), \tilde{u}(\theta_1(t)), \ldots, \tilde{u}(\theta_1(t))), \\ \dot{\tilde{x}}(t) = f(t, \tilde{x}(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(t)), \tilde{u}(\theta_1(t)), \ldots, \tilde{u}(\theta_1(t))),\ t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1].\end{gathered} \tag{9.2.8}$$

Ясно, что

$$\tilde{z}^0(b) = \tilde{\zeta}^m(\theta^m(b)) \leqslant \tilde{\zeta}^m(\theta^m(b)) + \tilde{v}^m(\theta^m(b)) = \lim_{i\to\infty} z^0_{1i}(b) = \tilde{I}_1.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\tilde{I} \geqslant q_0(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1) + \tilde{z}^0(b) \geqslant q_0(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1) + \\ + \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} f^0(t, \tilde{x}(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(t)), \tilde{u}(\theta_1(t)), \ldots, \tilde{u}(\theta_1(t)))\end{gathered} \tag{9.2.9}$$

(см. (9.2.5), (9.2.8)).

Из равномерной сходимости последовательности $\zeta^{1i}_\alpha(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ получаем

$$\tilde{x}_0 = \lim_{i\to\infty} x_i(t^i_0) = \lim_{i\to\infty} z_i(t^i_0) = \lim_{i\to\infty} \zeta^{1i}_0(t^i_0) = \zeta_0(\tilde{t}_0) = \tilde{x}(\tilde{t}_0).$$

Пусть $t^i_1 \in I_{m_3}$ для достаточно большого i. Тогда

$$\tilde{x}_1 = \lim_{i\to\infty} x_i(t^i_1) = \lim_{i\to\infty} z_i(t^i_1) = \lim_{i\to\infty} \zeta^{1i}_{m_3}(t^i_1) = \zeta_{m_3}(\tilde{t}_1) = \tilde{z}(\tilde{t}_1) = \tilde{x}(\tilde{t}_1).$$

С учетом этих соотношении можно заключить, что $\tilde{\sigma} = (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \in B_4$, поэтому в (9.2.9) исключается неравенство. Итак, элемент $\tilde{\sigma}$ является оптимальным. □

Замечание 9.2.1. Пусть U_2 — выпуклое множество, f линейна относительно $(u_1, \ldots, u_\nu)$, а функция f^0 выпукла по $(u_1, \ldots, u_\nu)$. Тогда условие 9.2.7 выполнено.

Теорема 9.2.2. *Пусть множество U_2 ограничено и пусть выполнены следующие условия*:

9.2.9. $B_4 \neq \varnothing$;

9.2.10. *существуют функции $m_i(\cdot) \in L(J, \mathbb{R}_+)$, $i = 1, 2$, такие, что*

$$|f(t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu)| \leqslant \sum_{i=1}^{s} m_1(t)|x_i| + m_2(t) \ \ \forall (t, x_1, \ldots, x_s) \in J \times \mathbb{R}^{ns} \times U_2^\nu; \tag{9.2.10}$$

для произвольного компакта $K \subset O$ существует функция $m_K(\cdot) \in L(J, \mathbb{R}_+)$ такая, что

$$|f^0(t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu)| \leqslant m_K(t) \ \ \forall (t, x_1, \ldots, x_s) \in J \times \mathbb{R}^{ns} \times U_2^\nu;$$

9.2.11. *множество*

$$P(t; y_0, \ldots, y_m)$$

выпукло.

Тогда оптимальный элемент существует.

Из условия (9.2.9) стандартным способом, с помощью леммы Гроноулла, выводится равномерная ограниченность траекторий. Условие 9.2.10 и компактность множества U_2 обеспечивают, соответственно, выполнение условий 9.2.6 и 9.2.8.

Следующий пример иллюстрирует важность предположения о выпуклости множества P, без которого, вообще говоря, не существует оптимальный элемент.

Пример 9.2.1. Пусть оптимальная задача имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = -x(t - \sqrt{2}) + u(t) + u^2(t-1),\ t \in [0, 2], u(\cdot) \in \Omega_1([0, 2], [-1, 1]), \\ x(t) = 0,\ t \in [-\sqrt{2}, 0],\ u(t) = 1,\ t \in [-1, 0], \\ \int_0^2 (x(t) - t)^2 dt \to \min.\end{gathered}$$

Для заданного $k = 2, 3, \ldots$ отрезок $[0, 1]$ разобьем на отрезки J^i, $i = \overline{1, k}$ длины $1/k$.

Определим управление

$$u_k(t)=\begin{cases} v_k(t),\ t\in[0,1],\\ 0,\ \ t\in(1,\sqrt{2}],\\ t-\sqrt{2},\ \ t\in(\sqrt{2},2],\end{cases}$$

где $v_k(t)$ является осциллирующим управлением между $+1$ и -1, т.е. $v_k(t)=1$, $t\in J^1$, $v_k(t)=-1$, $t\in J^2$ и т.д.

Далее,

$$\lim_{i\to\infty} x_k(t)=t \ \text{ равномерно по } \ t\in[0,2],$$

а последовательность мер Дирака $\delta_{v_k}(t)$, $k=1,2,\ldots$, $t\in[0,1]$ в смысле слабой сходимости сходится к $1/2\delta_{-1}+1/2\delta_{+1}$.

Легко заметить, что траектория $x(t)=t$, $t\in[0,1]$, которая минимизирует функционал, соответствует управлению

$$u(t)=\begin{cases} 0,\ \ t\in[0,1],\\ 1,\ \ t\in(1,\sqrt{2}],\\ t+1-\sqrt{2},\ \ t\in(\sqrt{2},2].\end{cases}$$

Но $u(t)\notin[-1,1]$, $t\in[\sqrt{2},2]$, т.е. $(x(\cdot),u(\cdot))$ не является допустимым элементом.

Таким образом, в рассматриваемой задаче не существует оптимального элемента, так как при фиксированном $t\in[0,1]$ и $(x_{10},x_{20},x_{11},x_{21})$ множество

$$P(t;x_{10},x_{20},x_{11},x_{21})=\{(p^0,p^1,p_0,p_1):\exists u_0,u_1\in[-1,1],p^0\geqslant(x_{10}-t)^2,p^1\geqslant(x_{11}-t-1)^2,$$
$$p_0\geqslant -x_{20}+u_0+1,p_1\geqslant -x_{21}+u_1+u_0^2\}$$

не является выпуклым.

9.3. Теоремы существования для оптимальных задач с несоизмеримыми запаздываниями в управлениях. Рассмотрим оптимальную задачу

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=1}^{\nu} f_j(t,x(\tau_1(t)),\ldots,x(\tau_s(t)),u(\theta_j(t))), \tag{9.3.1}$$

$$t\in[t_0,t_1]\subset J,\ u\in\Omega_3,$$

$$x(t)=\varphi_0(t),t\in[\tau,t_0),x(t_0)=x_0\in O, \tag{9.3.2}$$

$$q^i(t_0,t_1,x_0,x(t_1))=0,i=\overline{1,l}, \tag{9.3.3}$$

$$I(\sigma)=q^0(t_0,t_1,x_0,x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{\nu} f_j^0(t,x(\tau_1(t)),\ldots,x(\tau_s(t)),u(\theta_j(t)))dt\to\min,$$

где функции $F_j(t,x_1,\ldots,x_s,u)=(f_j^0,f_j)^*$, $j=\overline{1,\nu}$ принадлежат пространству $E^{(2)}(J\times O^s\times G,\mathbb{R}^{1+n})$. Без ограничения общности будем считать, что для каждого $t\in J$ эти функции непрерывны по всем остальным аргументам; $\theta_j(t),j=\overline{1,\nu}$, $t\in\mathbb{R}$ — абсолютно непрерывные запаздывания, удовлетворяющие условиям $\theta_j(t)\leqslant t$, $\dot{\theta}_j(t)>0$; $\Delta_3=\Delta(J_2,U_3)$ — множество управлений, $J_2=[\theta,b]$, $\theta=\min\{\theta_1(a),\ldots,\theta_\nu(a)\}$, $U_3\subset G$ — компактное множество.

Определение 9.3.1. Элемент $\sigma=(t_0,t_1,x_0,x(\cdot),u(\cdot))$, $t_0,t_1\in J$, $x_0\in O,u(\cdot)\in\Omega_2$ называется *допустимым,* если выполнены следующие условия:

9.3.1. функция $x(t)$ определена на $[\tau,t_1]$ и принимает значения из O; на отрезке $[\tau,t_0]$ она удовлетворяет условию (9.3.2); на отрезке $[t_0,t_1]$ функция $x(t)$ абсолютно непрерывна; совокупность $(t_0,t_1,x_0,x(t_1))$ удовлетворяет условию (9.3.3);

9.3.2. пара $(x(t),u(t))$ п.в. на $[t_0,t_1]$ удовлетворяет системе (9.3.1).

Множество допустимых элементов обозначим B_5.

Определение 9.3.2. Элемент $\tilde{\sigma} = (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}(\cdot), u(\cdot)) \in B_4$ называется *оптимальным,* если

$$I(\tilde{\sigma}) = \inf_{B_5} I(\sigma).$$

Теорема 9.3.1. *Оптимальный элемент существует, если выполняются следующие условия*:

9.3.3. $B_5 \neq \varnothing$;

9.3.4. *существует такое компактное множество* $K_0 \subset O$*, что для произвольного* $\sigma = (t_0, t_1, x_0, x(\cdot), u(\cdot)) \in B_5$

$$x(t) \in K_0,\ t \in [t_0, t_1];$$

9.3.5. *для каждого* $s_i \in J$*,* $x_{ij} \in O$*,* $i = \overline{1, s}$*,* $j = \overline{1, \nu}$ *множество*

$$P(s_1, \ldots, s_\nu, x_{11}, \ldots, x_{s1}, \ldots, x_{1\nu}, \ldots, x_{s\nu}) =$$
$$= \{(F_1(s_1, x_{11}, \ldots, x_{s1}, u), \ldots, F_1(s_\nu, x_{1\nu}, \ldots, x_{s\nu}, u))^* : u \in U_3\}$$

выпукло.

Доказательство. Пусть

$$\sigma_i = (t_0^i, t_1^i, x_0^{(i)}, x_i(\cdot), u_i(\cdot)) \in B_5,\ i = 1, 2, \ldots,$$

— минимизирующая последовательность, т.е.

$$\lim_{i\to\infty} I(\sigma_i) = \tilde{I} = \inf_{B_5} I(\sigma);$$

при этом

$$\lim_{i\to\infty} t_\alpha^i = \tilde{t}_\alpha,\ \alpha = 1, 2,\ \lim_{i\to\infty} x_0^{(i)} = \tilde{x}_0,\ \lim_{i\to\infty} x_i(t_1^{(i)}) = \tilde{x}_1.$$

Определим функции

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t_0^i), t < t_0^i, \\ x_i(t), \quad t \in [t_0^i, t_1^i], \\ x_i(t_1^i), \quad t > t_1^i; \end{cases}$$

$$z_i^0(t) = \int_a^t \chi([t_0^i, t_1^i; \xi]) \sum_{j=1}^{\nu} f_j^0(\xi, x_i(\tau_1(\xi)), \ldots, x_i(\tau_s(\xi)), u_i(\theta_j(t)))dt.$$

Легко видеть, что

$$\varsigma_i(t) = (z_i^0(t), z_i(t))^* = \varsigma_0^{(i)} + \int_a^t \chi([t_0^i, t_1^i; \xi]) \sum_{j=1}^{\nu} F_j(\xi, x_i(\tau_1(\xi)), \ldots, x_i(\tau_s(\xi)),$$
$$u_i(\theta_j(t)))dt,\ t \in J,\ \varsigma_0^{(i)} = (0, x_0^{(i)}), \tag{9.3.4}$$

и

$$I(\sigma_i) = q^0(t_0^i, t_1^i, x_0^{(i)}, x_i(t_1^i)) + z_i^0(t_1^i). \tag{9.3.5}$$

После элементарных преобразований получаем:

$$\varsigma_i(t) = \varsigma_0^{(i)} + \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\theta_j(a)}^{\theta_j(t)} \chi([t_0^i, t_1^i]; \omega_j(t))\dot{\omega}_j(t) F_j(\omega(\xi), x_i(\tau_1(\omega(\xi))), \ldots, x(\tau_s(\omega(\xi))),$$
$$u_i(\xi)dt = \varsigma_0^{(i)} + \int_\theta^b \sum_{j=1}^{\nu} \chi([\theta_j(a), \theta_j(t)]; \xi)\chi([t_0^i, t_1^i]; \omega_j(t))\dot{\omega}_j(t) F_j(\omega(\xi), x_i(\tau_1(\omega(\xi))),$$
$$\ldots, x(\tau_s(\omega(\xi))), u_i(\xi))d\xi,\ t \in j,\ \omega_j(t) = \theta_j^{-1}(t). \tag{9.3.6}$$

Из компактности множества U_3 и условия 9.3.4 следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность последовательности $\varsigma_i(t)$, $i = 1, 1, \ldots$ (см. (9.3.4)). В силу леммы Арцела — Асколи из нее можно выделить такую подпоследовательность $\varsigma_{1i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{i\to\infty} \varsigma_{1i}(t) = \tilde{\varsigma}(t) = (\tilde{z}_0(t), \tilde{z}(t)) \text{ равномерно на } J.$$

В дальнейшем нам еще понадобятся следующие обозначения:

$$\zeta_i^j(t) = \int_\theta^t \chi([t_0^{1i}, t_1^{1i}]; \omega_j(t))\dot{\omega}_j(t) F_j(\omega(\xi), x_{1i}(\tau_1(\omega(\xi))), \ldots,$$
$$x(\tau_s(\omega(\xi))), u_i(\xi)) d\xi,\ t \in J_2;\ \zeta_i(t) = (\zeta_i^1(t), \ldots, \zeta_i^\nu(t));$$

далее,

$$Q(t;y) = \{v = (v_1, \ldots, v_\nu) \in \mathbb{R}^{(1+n)\nu} : \exists u \in U_3, v_j = \chi([t_0, t_1]; \omega_j(t))\dot{\omega}_j(t) F_j(\omega_j(t), x_{1j},$$
$$\ldots, x_{sj}, u),\ j = \overline{1\nu}\},\ t \in J_2,$$

где

$$y = (t_0, t_1, x_{11}, \ldots, x_{s1}, \ldots, x_{1\nu}, \ldots, x_{s\nu}) \in J_2^2 \times K_0^{s\nu}.$$

Функции $\zeta_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ абсолютно непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\dot{\zeta}_i(t) \in Q(t; y_i(t)) \ \text{ п.в. на } \ J_2,$$

где

$$y_i(t) = (t_0^{1i}, t_1^{1i}, x_{1i}(\tau_1(\omega_1(t))), \ldots, x_{1i}(\tau_s(\omega_1(t))), \ldots, x_{1i}(\tau_1(\omega_\nu(t))), \ldots, x_{1i}(\tau_s(\omega_\nu(t)))),\ t \in J_2;$$

здесь предполагается, что

$$x_{1i}(t) = \begin{cases} \varphi_0(\tau-),\ t < \tau, \\ x_{1i}(t_1^{1i}),\ t > t_1^{1i}. \end{cases}$$

Определим множества

$$Q_j(t) = \bigcup_{i \geqslant j} Q(t; y_i(t)), \quad P_j(t) = \operatorname{cl}\operatorname{co} Q_j(t)$$

для каждого $t \in J_2$ и $j = 1, 2, \ldots$. Из компактности множества U_3 и условия 9.3.4 непосредственно следует компактность множества $Q_j(t)$. Поэтому

$$K(Q_j(t)) = C^0$$

(см. замечание 9.1.2).

Последовательность $\zeta_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ равномерно ограничена и

$$\dot{\zeta}_i(t) \in P_1(t),\ i = 1, 2, \ldots.$$

Условия леммы 9.1.2 выполнены, поэтому из последовательности $\zeta_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ можно выделить такую подпоследовательность $\zeta_{1i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{i \to \infty} \zeta_{1i}(t) = \tilde{\zeta}(t) = (\tilde{\zeta}^1(t), \ldots, \tilde{\zeta}^\nu(t)) \ \text{ равномерно на } J_2 \tag{9.3.7}$$

(см. замечание 9.1.2) и

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) \in P_1(t) \ \text{ п.в. на } \ J_2.$$

Аналогично (см. доказательство теоремы 9.2.1) устанавливается, что

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) \in P_j(t) \ \text{ п.в. на } \ J_2.$$

Далее, условие 9.3.5 гарантирует выпуклость компактного множества $Q(t; y)$. Для произвольного $t \in J_2$ из компактности множества U_3 следует пнс отображения

$$y \to Q(t; y), \ \ y \in J_2 \setminus \{\omega_(t), \ldots, \omega_\nu(t)\} \times O^{\nu n s}.$$

Равенство

$$K(Q(t; y)) = C^0$$

очевидно.

Все условия леммы 9.1.3 выполнены, что, в свою очередь, дает

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) \in \bigcap_{j \geqslant 1} P_j(t) = Q(t; \tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}(\tau_1(\omega_1(t))), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(\omega_1(t))), \ldots, \tilde{x}(\tau_1(\omega_\nu(t))), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(\omega_\nu(t)))),$$

где

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \varphi_0(\tau-), & t < \tau, \\ \varphi_0(t), & t \in [\tau, \tilde{t}_0], \\ \tilde{z}(t), & t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]. \end{cases}$$

В силу леммы 9.1.4 существует функция $\tilde{u}(\cdot) \in \Delta_3$ такая, что

$$\dot{\tilde{\zeta}}^j(t) = \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_j(t)) F_j(\omega_j(t), \tilde{x}(\tau_1(\omega_j(t))), \ldots, \tilde{x}(\tau_1(\omega_j(t))), \tilde{u}(t)),\ j = \overline{1, \nu},\ t \in J_2.$$

Таким образом, для каждого $t \in J_2$ справедливо равенство

$$\lim_{i \to \infty} \int_\theta^t g_i^j(\xi) d\xi = \int_\theta^t \dot{\tilde{\zeta}}^j(\xi) d\xi = \int_\theta^t \tilde{g}^j(\xi) d\xi$$

(см. (9.3.7)).

Здесь

$$g_i^j(t) = \chi([t_0^{1i}, t_1^{1i}]; \omega_j(t)) F_j(\omega_j(t), x_{1i}(\tau_1(\omega_j(t))), \ldots, x_{1i}(\tau_s(\omega_j(t))), u_{1i}(t)),$$
$$\tilde{g}^j(t) = \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_j(t)) F_j(\omega_j(t), \tilde{x}(\tau_1(\omega_j(t))), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(\omega_j(t))), \tilde{u}(t)).$$

Следовательно, последовательность $g_i^j(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ в смысле пространства $L(J_2, \mathbb{R}^{1+n})$ слабо сходится к функции $\tilde{g}^j(t)$.

Переходя к пределу в равенстве (9.3.6), получим

$$\tilde{\zeta}(t) = \zeta_0 + \int_\theta^t \sum_{j=1}^{\nu} \chi([\theta_j(a), \theta_j(t); t]) \chi([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]; \omega_j(t)) F_j(\omega_j(t), \tilde{x}(\tau_1(\omega_j(t))), \ldots,$$
$$\tilde{x}(\tau_s(\omega_j(t))), \tilde{u}(t)) dt, \zeta_0 = (0, \tilde{x}_0)^*.$$

Из этого равенства получим

$$\tilde{z}^0(t) = \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\tilde{t}_0}^t f_j^0(t, \tilde{x}(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(t)), \tilde{u}(\theta_j(t))) dt,$$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\tilde{t}_0}^t f_j(t, \tilde{x}(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{x}(\tau_s(t)), \tilde{u}(\theta_j(t))) dt,\ t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1].$$

Далее,

$$\tilde{I} = q^0(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1) + \tilde{z}^0(\tilde{t}_1)$$

(см. (9.3.4), (9.3.5)) и

$$\tilde{x}(\tilde{t}_1) = \tilde{z}(\tilde{t}_1) = \lim_{i \to \infty} z_{1i}(t_1^{1i}) = \tilde{x}_1.$$

Таким образом, элемент $\tilde{\sigma} = (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}, \tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ является оптимальным. $\square$

Теперь рассмотрим оптимальную задачу для квазилинейной системы

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{\nu} A_j(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t))) u(\theta_j(t)),\ \ t \in [t_0, t_1] \subset J,\ u(\cdot) \in \Delta_1,$$

$$x(t) = \varphi_0(t),\ t \in [\tau, t_0),\ x(t_0) = x_0 \in O,$$

$$q^i(t_0, t_1, x_0, x(t_1)) = 0,\ i = \overline{1, l},$$

$$I(\sigma) = q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t))) dt \to \min,$$

где $A_j(\cdot) \in E^{(1)}(J \times O^s, \mathbb{R}^{n \times n})$, $f^0(\cdot) \in E^{(2)}(J \times O^s U_1^\nu)$; функция f^0 выпукла по $(u_1, \ldots, u_2) \in U_1^\nu$; запаздывания $\theta_j(t)$, кроме перечисленных условий, удовлетворяют условию $\dot{\theta}_j(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

Множество допустимых элементов и оптимальный элемент определяются аналогично (см. определение 9.3.2).

Теорема 9.3.2. *Оптимальный элемент существует, если выполняются следующие условия*:

9.3.6. $B_6 \neq \varnothing$;

9.3.7. *существует такое компактное множество* $K_0 \subset O$, *что для произвольного* $\sigma = (t_0, t_1, x_0, x(\cdot), u(\cdot)) \in B_6$
$$x(t) \in K_0,\ t \in [t_0, t_1].$$

Доказательство. Пусть
$$\sigma_i = (t_0^i, t_1^i, x_0^{(i)}, x_i(\cdot), u_i(\cdot)) \in B_6,\ i = 1, 2, \ldots,$$
— минимизирующая последовательность, т.е.
$$\lim_{i\to\infty} I(\sigma_i) = \tilde{I} = \inf_{B_6} I(\sigma);$$
при этом
$$\lim_{i\to\infty} t_\alpha^i = \tilde{t}_\alpha,\ \alpha = 1, 2,\ \lim_{i\to\infty} x_0^{(i)} = \tilde{x}_0,\ \lim_{i\to\infty} x_i(t_1^{(i)}) = \tilde{x}_1.$$

Определим функцию
$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t_0^i), t < t_0^i, \\ x_i(t), \quad t \in [t_0^i, t_1^i], \\ x_i(t_1^i), \quad t > t_1^i. \end{cases}$$
Последовательность $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена. Поэтому из последовательности $(z_i(t), u_i(t))$, $i = 1, 2, \ldots$ можно выделить такую подпоследовательность $(z_{1i}(t), u_{1i}(t))$, $i = 1, 2, \ldots$, что
$$\lim_{i\to\infty} z_{1i}(t) = \tilde{z}(t) \text{ равномерно на } J_2,$$
$$\lim_{i\to\infty} u_{1i}(t) = \tilde{u}(t) \text{ слабо на } J_2$$
(см. предложение 9.1.1).

Докажем оптимальность элемента $\tilde{\sigma} = (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$, где
$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), \quad t \in [\tau, \tilde{t}_0), \\ \tilde{z}(t), \quad t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]. \end{cases}$$

Очевидно, что
$$\tilde{x} = \tilde{x}_0,\ \tilde{x}(\tilde{t}_1) = \tilde{x}_1$$
и выполнены условия
$$q^i(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}(\tilde{t}_1)) = 0, \quad i = \overline{1, l}.$$
Функционал
$$\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} f^0(t, h(\tilde{t}, \varphi_0, z)(\tau_1(t)), \ldots, h(\tilde{t}, \varphi_0, z)(\tau_s(t)) u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t)))dt \tag{9.3.8}$$
на $C([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1], \mathbb{R}) \times \Delta_1$ полунепрерывен снизу (см. [38]) (об операторе $h(\cdot)$ см. (1.3.3)), так как, если
$$\lim_{i\to\infty} v_i(t) = v(t) \text{ слабо на } J_2,$$
то
$$\lim_{i\to\infty} v_i(\theta_j(t)) = v(\theta_j(t)) \text{ слабо на } J.$$
Далее,
$$\tilde{I} = q^0(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}(\tilde{t}_1)) + \tilde{I}_1,$$
где
$$\tilde{I}_1 = \lim_{i\to\infty} \int_{t_0^{1i}}^{t_1^{1i}} f^0(t, x_{1i}(\tau_1(t)), \ldots, x_{1i}(\tau_1(t)), u_{1i}(\theta_1(t)), \ldots, u_{1i}(\theta_\nu(t)))dt.$$

Сделав элементарные преобразования и используя полунепрерывность снизу функционала (9.3.8), легко убедиться в том, что

$$\tilde{I}_1 = \lim_{i\to\infty}\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} f^0(t, h(\tilde{t},\varphi_0,z_{1i})(\tau_1(t)),\ldots,h(\tilde{t},\varphi_0,z_{1i})(\tau_s(t)),u_{1i}(\theta_1(t)),\ldots,u_{1i}(\theta_\nu(t)))dt+$$

$$+\lim_{i\to\infty}\int_{t_0^{1i}}^{\tilde{t}_0} f^0(t,x_{1i}(\tau_1(t)),\ldots,x_{1i}(\tau_s(t)),u_{1i}(\theta_1(t)),\ldots,u_{1i}(\theta_\nu(t)))dt+\lim_{i\to\infty}\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_1^{1i}} f^0(t,x_{1i}(\tau_1(t)),$$

$$\ldots,x_{1i}(\tau_s(t)),u_{1i}(\theta_1(t)),\ldots,u_{1i}(\theta_\nu(t)))dt+\lim_{i\to\infty}\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1}[f^0(t,x_{1i}(\tau_1(t)),\ldots,x_{1i}(\tau_s(t)),$$

$$u_{1i}(\theta_1(t)),\ldots,u_{1i}(\theta_\nu(t)))-f^0(t,h(\tilde{t},\varphi_0,z_{1i})(\tau_1(t)),\ldots,h(\tilde{t},\varphi_0,z_{1i})(\tau_s(t)),$$

$$u_{1i}(\theta_1(t)),\ldots,u_{1i}(\theta_\nu(t)))]dt \geqslant \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} f^0(t,\tilde{x}(\tau_1(t)),\ldots,\tilde{x}(\tau_s(t)),\tilde{u}(\theta_1(t)),\ldots,\tilde{u}(\theta_\nu(t)))dt.$$

Таким образом,

$$\tilde{I} \geqslant q^0(\tilde{t}_0,\tilde{t}_1,\tilde{x}_0,\tilde{x}(\tilde{t}_1)) + \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} f^0(t,\tilde{x}(\tau_1(t)),\ldots,\tilde{x}(\tau_s(t)),\tilde{u}(\theta_1(t)),\ldots,\tilde{u}(\theta_\nu(t)))dt.$$

Здесь, по определению $\tilde{I}$, неравенство исключается. Оптимальность элемента $\tilde{\sigma}$ доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абуладзе А. А.* Задачи оптимального управления для систем, описиваемых интегральными уравнениями. — Тбилиси: Тбил. ун-т, 1988. — 127 с.
2. *Авалишвили Н. М.* Принцип максимума для оптимальной задачи с переменной структурой и с запаздыванием // Оптимальные задачи с переменной структурой. — Тбилиси: Тбил. ун-т, 1985. — С. 48–72.
3. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Принцип оптимальности второго порядка для задач быстродействия // Мат. сб. — 1976. — *100(142)*, № 4(8). — С. 610–643.
4. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
5. *Арсенашвили А. И.* Задача оптимального управления для ступенчатых систем с запаздываниями // Тр. ИСУ АН ГССР. — 1985. — *24*, № 1. — С. 17–29.
6. *Арутюнов А. В.* Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Итоги науки и техники, Математический анализ. — 1989. — *27*. — С. 147–235.
7. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968. — 764 с.
8. *Афанасьев А. П., Дикусар В. В., Милютин А. А., Чуканов С. А.* Необходимое условие в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1990. — 319 с.
9. *Ащепков Т. Л.* Оптимальное управление разрывными системами. М.: Наука, 1987. — 226 с.
10. *Бабунашвили Т. Г.* Синтез линейных оптимальных систем // ДАН СССР. — 1964. — *155*, № 2. — С. 295–298.
11. *Балакришнан А.* Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1974. — 259 с.
12. *Бекларян Л. А.* Вариационная задача с запаздывающим аргументом и ее связь с полугруппой отображений отрезка в себя // ДАН СССР. — 1983. — *271*, № 5. — С. 1034–1040.
13. *Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О.* Некоторые вопросы математической теории процессов управления. — М.: ИЛ, 1962. — 336 с.
14. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
15. *Благодатских В. И.* Принцип максимума для дифференциальных включений // Тр. Мат. ин-та В. А. Стеклова. — 1984. — *166*. — С. 23–43.
16. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969. — 408 с.
17. *Болтянский В. Г.* Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи мат. наук. — 1975. — *30*, № 3. — С. 3–55.
18. *Болтянский В. Г.* Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Дифференц. уравн. — 1983. — *19*, № 3. — С. 518–521.
19. *Васильев В. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988. — 549 с.
20. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.

21. *Величенко В. В.* Оптимальное управление составными системами // ДАН СССР. — 1967. — *176*, № 4. — С. 754–756.
22. *Габасов Р., Кириллова Ф.* Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971. — 507 с.
23. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. — Минск: Университетское, 1984. — 207 с.
24. *Гамкрелидзе Р. В.* О скользящих оптимальных режимах // ДАН СССР. — 1962. — *143*, №6. — С. 1243–1245.
25. *Гамкрелидзе Р. В., Харатишвили Г. Л.* Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1969. — *33*, № 4. — С. 781–839.
26. *Гамкрелидзе Р. В.* Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремальных задач // Тр. мат. ин-та В. А. Стеклова. — 1971. — *CXII*. — С. 152–180.
27. *Гамкрелидзе Р. В.* Основы оптимального управления. — Тбилиси: Тбил. ун-т, 1977. — 256 с.
28. *Гогодзе И. К.* Об оптимальном управлении системой, изменяющей свою структуру в смежных интервалах времени // Тр. ИСУ АН ГССР. — 1977. — № 16. — С. 5–9.
29. *Демьянов В. Ф.* О необходимом условии экстремума в задачах с последействием // ДАН СССР. — 1966. — *166*, № 2. — С. 275–277.
30. *Дончев А.* Системы оптимального управления. — М.: Мир, 1987. — 156 с.
31. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Необходимые условия слабого минимума в общей задаче оптимального управления. — М.: Наука, 1971. — 113 с.
32. *Жуковский В. И., Тынянский Н. Т.* Равновесные управления многокритериальных динамических систем. — М.: Моск. ун-т, 1984. — 223 с.
33. *Захаров Г. К.* Оптимизация ступенчатых систем управления // Автомат. и телемех. — 1981. — № 8. — С. 5–9.
34. *Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами. 1 // Успехи мат. наук. — 1962. — *17*, № 2(104). — С. 77–164.
35. *Зеликин М. И., Борисов В. Ф.* Особые отимальные режимы в задачах математической экономики // Современная математика и ее приложения. Т. 11. Оптимальное управление, 2003. — С. 3–161.
36. *Зубов С. В., Зубов Н. В.* Математические методы стабилизации динамических систем. — С.-Пб.: С.-Пб. ун-т, 1996. — 286 с.
37. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1973. — 606 с.
38. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с.
39. *Лейтман Дж.* Введение в теорию оптимального управления. — М.: Наука, 1968. — 190 с.
40. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 574 с.
41. *Каменский Г. Ф., Хвилон Е. Д.* Необходимые условия оптимальности для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Автомат. и телемех. — 1969, № 3. — С. 20–32.
42. *Кантарович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 741 с.
43. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1987. — *30*. — С. 3–103.
44. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
45. *Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А.* Об осцилляционных свойствах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — Тбилиси: Тбил. ун-т, 1977. — 115 с.
46. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. — 1955. — *10*, № 3. — С. 147–152.
47. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с.
48. *Красовский Н. Н.* Об устойчивости квазилинейных систем с последействием // ДАН СССР. — 1958. — *119*, № 3. — С. 435–438.
49. *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров // Чехосл. мат. ж. — 1957. — *7(82)*. — С. 568–583.
50. *Магеррамов Ш. Ф., Мансимов К. Б.* Оптимизация одного класса дискретных систем управления // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 2001. — *41*, № 3. — С. 360–366.
51. *Мансимов К. Б.* Особые управления в системах с запаздываниями. — Баку: ELM, 1999. — 172 с.
52. *Марданов М. Д.* Некоторые вопросы математической теории оптимальных процессов с запаздываниями. — Баку: Азерб. ун-т, 1987. — 120 с.

53. *Маркозашвили Н. И.* Необходимые условия оптимальности для управляемых систем с предысторией // Некоторые вопросы математической теории оптимального управления. — Тбилиси: Тбил. ун-т, 1975. — С. 151–180.
54. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии, лекции о моделях. — М.: Мир, 1983. — 397 с.
55. *Марчук Г. И.* Математические модели в иммунологии. — М.: Наука, 1980. — 264 с.
56. *Мачаидзе З. А.* К вопросу единственности оптимального управления для систем с запаздываниями // Сообщ. АН ГССР. — 1975. — *78*, № 2. — С. 285–288.
57. *Матвеев А. С.* Задачи оптимального управления с запаздываниями общего вида и фазовыми ограничениями // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — *52*, № 6. — С. 1200–1229.
58. *Медведев В. А., Розова В. Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами // Автомат. и телемех. — 1972, № 3. — С. 15–23.
59. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. — Киев: ин-т мат. АН УССР, 1969. — 309 с.
60. *Меликов Т. К.* Особые управления в системах с последействием. — Баку: ELM, 2002. — 187 с.
61. *Мордухович Б. Ш.* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988. — 359 с.
62. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 351 с.
63. *Никольский М. С., Ахмадалиев А.* Одна линейная задача терминального управления составными системами // Вестн. МГУ. Сер. Выч. мат. киб. — 1984. — № 1. — с. 71–77.
64. *Петров Н. Н.* Некоторые достаточные условия непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметров // Вестн. ЛГУ. — 1962, № 19. — С. 26–40.
65. *Петров Н. Н.* О непрерывности решений дифференциальных уравнений по параметру // Вестн. ЛГУ. — 1964. — № 7. — С. 29–36.
66. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1961. — 392 с.
67. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 313 с.
68. *Разумихин Б. С.* Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздываниями // Автомат. и телемех. — 1960. — *21*, № 6. — С. 740–748.
69. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967. — 257 с.
70. *Розоноэр Л. И.* Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автомат. и телемех. — 1959. — *20*, № 12. — С. 1561–1578.
71. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздываниями. — М.: Наука, 1969. — 286 с.
72. *Салуквадзе М. Е.* Задачи векторной оптимизации в теории управления. — Тбилиси: Мецниереба, 1975. — 202 с.
73. *Тадумадзе Т. А.* Принцип максимума для некоторых управляемых систем нейтрального типа // Семинар ин-та прикл. мат. — 1974. — *9*. — С. 9–13.
74. *Тадумадзе Т. А.* О существовании решения в оптимальных задачах с отклоняющимся аргументом // Сообщ. АН ГССР. — 1978. — *89*, № 2. — С. 313–316.
75. *Тадумадзе Т. А.* Некоторые вопросы качественной теории оптимального управления. — Тбилиси: Тбил. ун-т, 1983. — 126 с.
76. *Тадумадзе Т. А.* О существовании решения в оптимальных задачах, описываемых нелинейными дифференциально-функциональными уравнениями // Дифференц. уравн. — 1984. — *XX*, № 4. — С. 597–604.
77. *Тадумадзе Т. А., Авалишвили Н. М.* Регулярные возмущения в оптимальных задачах с переменной структурой // Оптимальные задачи с переменной структурой. — Тбилиси: Тбил. ун-т, 1985. — С. 100–154.
78. *Тер-Крикоров А. М.* Оптимальное управление и математическая экономика. — М.: Наука, 1977. — 214 с.
79. *Федеренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 488 с.
80. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., астрон., физ., хим. — 1959. — № 2. — С. 25–32.
81. *Харатишвили Г. Л.* Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздываниями // ДАН СССР. — 1961. — *136*, № 1. — С. 39–42.
82. *Харатишвили Г. Л.* Оптимальные процессы с запаздываниями. — Тбилиси: Мецниереба, 1966. — 84 с.

83. *Харатишвили Г. Л.* Принцип максимума в экстремальных задачах с запаздываниями // Тр. ТГУ. — 1968. — *128*. — С. 149–156.
84. *Харатишвили Г. Л., Мачаидзе З. А., Маркозашвили Н. И., Тадумадзе Т. А.* Абстрактная вариационная теория и ее применения к оптимальным задачам с запаздываниями. — Тбилиси: Мецниереба, 1973. — 112 с.
85. *Харатишвили Г. Л., Тадумадзе Т. А.* Нелинейные оптимальные системы с переменными запаздываниями // Мат. сб. — 1978. — *107(149)*, № 4(12). — С. 613–633.
86. *Харатишвили Г. Л.* Принцип максимума в оптимальных задачах с переключением // Тр. ИСУ АН ГССР. — 1980. — *1*, № 19, — С. 5–17.
87. *Харатишвили Г. Л.* Полиатомические оптимальные системы // Оптимальные задачи с переменной структурой. — Тбилиси: Тбил. ун-т, 1985. — С. 3–47.
88. *Харатишвили Г. Л., Тадумадзе Т. А.* Регулярные возмущения в задачах оптимального управления с переменными запаздываниями и со свободным правым концом // ДАН СССР. — 1990. — *314*, № 1. — С. 151–155.
89. *Харатишвили Г. Л., Тадумадзе Т. А.* Нелинейная задача оптимального управления с переменными запаздываниями, нефиксированным начальным моментом и кусочно непрерывной предысторией // Тр. мат. ин-та В. А. Стеклова. — 1998. — *220*. — С. 236–255.
90. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 416 с.
91. *Цискаридзе К. Ш.* Экстремальные задачи в банаховых пространствах // Некоторые вопросы математической теории оптимального управления. — Тбилиси: Тбил. ун-т, 1975. — С. 3–150.
92. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972. — 824 с.
93. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979. — 399 с.
94. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.
95. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973. — 238 с.
96. *Якубович В. А.* К абстрактной теории оптимального управления // Сиб. мат. ж. — 1977. — *18*, № 3. — С. 685–707.
97. *Янг В. А.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974. — 488 с.
98. *Янушевский Р. Т.* Управление объектами с запаздываниями. — М.: Наука, 1978. — 416 с.
99. *Akian M., Bliman P., Sorine M.* Control of delay systems with relay // IMA J. Math. Control Inf. — 2002. — *19*. — С. 133–155.
100. *Angel T. S.* Existence theorems for optimal control problems involving functional differential equations // J. Opt. Theory Appl. — 1971. — *7*. — С. 149–189.
101. *Antosievicz H. A.* Linear control systems // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1963. — *12*, № 4. — С. 313–324.
102. *Ashordia M. T.* On the stability of solution of linear boundary value problems for the system of ordinary differential equations // Proc. Georg. Acad. Sci. Math. — 1993. — *1*, № 2. — С. 129–141.
103. *Alkhazishvili L.* The linearized maximum principle for optimal problems with variable delays and continuous initial condition // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2003. — *29*. — С. 153–155.
104. *Azbelev N. V., Rakhmatulina L. F.* Theory of linear abstract functional-differential equations and applications // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 1996. — *8*. — С. 2–102.
105. *Banks H. T.* Necessary conditions for control problems with variable time lags // SIAM J. Control. — 1968. — *6*. — С. 9–47.
106. *Banks H. T.* Modelling and control in the biomedical sciences // Lect. Notes Biomath. — Springer-Verlag, 1975. — Vol. 6.
107. *Berkovitz L. D.* Existence theory for optimal control problems // Optimal Control Diff. Eq. — N.Y.: Acad. Press, 1978. — С. 107–130.
108. *Cesari L.* An existence theorem in problems of optimal control // SIAM J. Control. — 1965. — *A3*, № 1. — С. 7–22.
109. *Clarke F. H.* Optimization and non-smooth analysis. — N.Y.: Wiley, 1983. — 308 p.
110. *Corduneanu C.* Existence of solutions for neutral functional differential equations with causal operators // J. Diff. Eq. — 2000. — *168*. — С. 93–101.
111. *Datko R.* Representation of solution and stability of linear differential-difference equation in Banach space // J. Diff. Eq. — 1978. — *29*, № 1. — С. 105–166.
112. *Driver R. D.* Ordinary and delay differential equations. — N.Y.: Springer, 1977. — 501 p.

113. *Dvalishvili P., Tadumadze T.* Continuous dependence of the solution of the differential equation with distributed delay on the initial data and right-hand side // Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math. Rep. — 2000–2001. — *26–27*, № 15. — С. 15–30.
114. *Dzhgarkava D.* Problem of optimal control with one-side mixed restrictions for controlled objects described by integral equations with measure // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 1997. — *11*. — С. 9–46.
115. *Ergen W. K.* Kinetics of the circulating-fuel nuclear reactor // J. Appl. Phys. — 1954. — *15*. — С. 702–711.
116. *Gamkrelidze R. V.* On some extremal problems in the theory of differential equations with application to the theory of optimal control // SIAM J. Control. — 1965. — *3*. — С. 106–128.
117. *Gamkrelidze R. V., Kharatishvili G. L.* Extremal problems in topological spaces. 1 // Math. Syst. Theory. — *1*, № 1. — С. 229–256.
118. *Gamkrelidze R. V.* Discovery of the maximum principle // J. Dyn. Contr. Syst. — 1999. — *5*, № 4. — С. 437–451.
119. *Gorgodze N.* Necessary conditions of optimality in neutral type optimal problems with non-fixed initial moment // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2000. — *19*. — С. 150–153.
120. *Gu K.* Discretized LMI set in the stability problem of linear uncertain time-delay system // Int. J. Control. — 1997. — *68*, № 4. — С. 923–934.
121. *Halanay A.* Differential equations: stability, oscillations, time lags. — New York–London: Acad. Press, 1966. — 328 с.
122. *Halanay A.* Optimal controls for systems with time-lag // SIAM J. Control. — 1968. — *6*. — С. 215–234.
123. *Halkin H.* Necessary conditions of optimal control problems with differentiable or non-differentiable data // Lect. Notes Math. — 1978. — *680*. — С. 77–118.
124. *Hermes H., Lasalle J. P.* Functional analysis and time optimal control. — New York–London: Acad. Press, 1969. — 136 с.
125. *Hestens M. R.* Optimization theory: the finite dimensional case. — N.Y., 1975. — 447 с.
126. *Kharatishvili G. L.* A maximum principle in extremal problems with delays // Mathematical theory of control. — New York–London: Acad. Press, 1967. — С. 26–34.
127. *Kharatishvili G. L., Tadumadze T. A.* The maximum principle in optimal control problems with concentrated and distributed delays in control // Georgian Math. J. — 1995. — *2*, № 6. — С. 577–591.
128. *Kharatishvili G., Tadumadze T.* Problem of optimal control for nonlinear systems with variable structure, delays and piecewise-continuous prehistory // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 1997. — *11*. — С. 67–88.
129. *Kharatishvili G., Tadumadze T.* Development of theory of optimal systems with delayed arguments in Georgia // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 1997. — *12* — С. 99–105.
130. *Kharatishvili G., Tadumadze T., Gorgodze N.* Continuous dependence and differentiability of solution with respect to initial data and right-hand side for differential equations with deviating argument // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2000. — *19*. — С. 3–105.
131. *Kharatishvili G., Tadumadze T.* Mathematical modelling and optimal control of multistructural control systems with delays // Proc. Inst. Cybern. Georg. Acad. Sci. — *1*, № 1–2. — С. 1–8.
132. *Kiguradze I., Puza B.* On boundary value problems for systems of linear functional-differential equations // Czechosl. Math. J. — 1997. — *47(122)*. — С. 341–373.
133. *Koplatadze R.* On oscillatory properties of solutions of functional-differential equations // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 1994. — *3*. — С. 2–179.
134. *Lakshmikanthan V., Leela S.* A technique in stability theory of delay differential equations // Nonlin. Anal. — 1979. — *3*, № 3. — С. 317–323.
135. *Logeman H.* Destabilizing effects of small time delays on feedback-controlled descriptor systems // Linear Algebra and Appl. — 1998. — *272*. — С. 131–153.
136. *Maksimov V., Pandolfi I.* On a dynamical identification of controls in nonlinear time-lag systems // IMA J. Math. Control Inf. — 2002. — *19*. — С. 173–184.
137. *Manitius A.* Optimal control of hereditary system in control theory and topic in functional analysis // Intern. Atom. Energy Ag. Vienna. — 1976. — С. 43–178.
138. *Nuculescu S. I.* Delay effects on stability // Lect. Notes Control Inf. Sci. — Springer, 2001. — Vol. 269. — 383 с.
139. *Neustadt L. W.* Optimization: a theory of necessary conditions. — Princeton, N.Y.: Princeton Univ. Press, 1976. — 424 с.
140. *Ogustoreli N. M.* Time-delay control systems. — New York–London: Acad. Press, 1966. — 326 с.
141. *Olbrot A. W.* Control of retarded systems with function space constraints, II // Contr. and Cybern. — 1977. — *6*, № 2. — С. 17–69.

142. *Olech C.* Existence theorems for optimal problems with vector valued cost function // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — *136*. — С. 159–180.
143. *Olech C.* Existence theory in optimal control problems // Control theory and topics in functional analysis. — Vienna, 1976. — *1*. — С. 291–328.
144. *Przeworska-Rolevicz D.* Equations with transformed argument, an algebraic approach. — Warszawa: PWN-Polish Sci. Publ., 1973. — 354 с.
145. *Ramishvili I.* The linearized maximum principle for quasi-linear neutral optimal problems with discontinuous initial conditions and variable delays in control // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2004. — *31*. — С. 145–148.
146. *Ramishvili I., Tadumadze T.* Formulas of variation for a solution of neutral differential equations with continuous initial condition // Georgian Math. J. — 2004. — *11*, № 1. — С. 155–175.
147. *Tadumadze T.* Existence theorems for solution of optimal problems with variable delays // Contr. and Cybern. — 1984. — *10*, № 3–4. — С. 125–134.
148. *Tadumadze T.* The maximum principle and existence theorems in the optimal problems with delay and non-fixed initial function // Seminar of I. Vekua Inst. Appl. Math. Rep. — 1993. — *22*. — С. 102–107.
149. *Tadumadze T.* On new necessary condition of optimality of the initial moment in control problems with delay // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 1999. — *17*. — С. 157–159.
150. *Tadumadze T.* Local representation for the variation of solution of delay differential equations // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2000. — *21*. — С. 138–141.
151. *Tadumadze T., Gelashvili K.* An existence theorem for a class of optimal problems with delayed argument // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2000. — *20*. — С. 136–140.
152. *Tadumadze T., Alkhazishvili L.* Necessary conditions of optimality for optimal problems with delays and a discontinuous initial condition // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2001. — *22*. — С. 154–158.
153. *Tadumadze T.* Necessary conditions of optimality for an optimal problem with variable delays and with a continuous initial condition // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2001. — *24*. — С. 136–139.
154. *Tadumadze T., Alkhazishvili L.* Formulas of variation of solution for non-linear controlled delay differential equations with discontinuous initial condition // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2003. — *29*. — С. 125–150.
155. *Tadumadze T., Alkhazishvili L.* Formulas of variation of solution for non-linear controlled delay differential equations with continuous initial condition // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2004. — *31*. — С. 83–97.
156. *Tsintsadze Z.* The Lagrange principle of taking restrictions off and its application to linear optimal control problems in the presence of mixed restrictions and delays // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 1997. — *11*. — С. 105–128.
157. *Yorke J. A.* Selected topics in differential-delay equations // Lect. Notes Math. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1971. — Vol. 243. — С. 16–28.
158. *Yu L.* Stability robustness analysis of linear systems with delayed perturbation // J. Franklin Inst. — 1999. — *336*. — С. 755–765.

Г. Л. Харатишвили
Институт Кибернетики АН Грузии
ул. С. Еули 5, 0186, г. Тбилиси, Грузия
E-mail: kharatishvili@cybernet.ge

Т. А. Тадумадзе
Институт прикладной математики им. И. Н. Векуа
Тбилисского государственного университета,
Университетская 2, 0143, г. Тбилиси, Грузия
E-mail: tamaztad@yahoo.com