

ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 26

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА



Тбилиси
2005

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Е. С. Голод (Московский государственный университет)

И. Т. Кигурадзе (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

А. Лаши (Грузинский технический университет)

Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Овчинников (Московский государственный университет)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Сарычев (Университет Флоренции)

Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 26

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

**Посвящается восьмидесятилетнему юбилею
академика Николая Николаевича Красовского**

**კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი**

2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глобальная управляемость и вычисление управлений в нелинейных системах (Э. Г. Альбрехт, А. А. Усова)	3
Навигация движущихся объектов по геофизическим полям (В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов)	15
Равновесие по Нэшу в играх многих лиц с выбором моментов времени и интегральными функционалами платы (С. А. Брыкалов, О. Н. Головина, А. В. Кряжмский)	42
Обратные задачи о восстановлении параметров системы Навье—Стокса (А. И. Короткий) .	54
Метод функций Ляпунова в задачах реконструкции входов систем с последствием (В. И. Максимов)	78
Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления с субдифференциальными операторами (А. А. Толстоногов)	96
Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна—Чеха (А. Г. Ченцов)	119

ГЛОБАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ВЫЧИСЛЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

© 2005 г. Э. Г. АЛЬБРЕХТ, А. А. УСОВА

Аннотация. Рассматривается задача о построении допустимого программного управления с ограниченной энергией, переводящего нелинейную систему из заданного начального состояния в заданное конечное при условии, что система первого приближения вполне управляема. Обосновывается сходящаяся итерационная процедура вычисления допустимого управления. Показывается, что локально управляемая по первому приближению нелинейная система становится глобально вполне управляемой при любых граничных условиях из области устойчивости, если исходная нелинейная система стабилизируема до асимптотической устойчивости в большом или целом, а нелинейные члены либо удовлетворяют глобальному условию Коши—Липшица, либо являются полиномами некоторой степени относительно фазовых координат с произвольными коэффициентами. Указывается нелинейная система алгебраических уравнений, к вычислению решения которой сводится проблема построения допустимого управления.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Постановка задачи	4
2. Итерационная процедура	6
3. Сходимость итераций в первом случае	7
4. Сходимость итераций во втором случае	9
5. Алгебраические разрешающие уравнения	12
6. Пример	13
Список литературы	14

ВВЕДЕНИЕ

Известно [8, 10], что если система первого приближения является вполне управляемой, то исходная нелинейная система дифференциальных уравнений вполне управляема в достаточно малой окрестности невозмущенного движения. Разработаны итерационные методы построения оптимального или допустимого управления, приводящего нелинейную непрерывную систему в заданное состояние и обоснована их сходимость [1–3, 10, 11, 13, 16], когда возмущения, вызываемые нелинейностями в уравнениях движения, достаточно малы.

В работе рассматривается задача о построении допустимого программного управления с ограниченной энергией, переводящего нелинейную систему из заданного начального состояния в заданное конечное, когда система первого приближения вполне управляема. Допустимое управление строится на основе метода последовательных приближений Пикара как предел последовательности решений линейных задач оптимального управления. Обосновывается сходимость предлагаемой итерационной процедуры в двух случаях, которые нередко возникают при моделировании управления в нелинейных процессах различной физической природы: во-первых, когда нелинейные члены в правой части уравнений движения управляемой системы удовлетворяют глобальному условию Коши—Липшица по фазовым переменным, и, во-вторых, когда нелинейные члены являются полиномом некоторой степени относительно фазовых координат с произвольными коэффициентами и отсутствуют какие-либо дополнительные условия, ограничивающие рост нелинейных членов. Для

упрощения выкладок в статье предполагается, что в уравнения движения компоненты управляющих сил входят только линейно. Это предположение несущественно, и основные утверждения оказываются справедливыми и в общем случае, когда уравнения движения управляемого процесса нелинейно зависят от фазовых координат и управляющих сил.

Итерационная процедура построения допустимого управления сходится [3] при любых краевых условиях, если постоянная Липшица достаточно мала. Вычислительные эксперименты показывают, что это требование является существенным. Таким образом, нелинейные непрерывные системы глобально вполне управляемы по первому приближению, если нелинейные члены достаточно малы. В [1, 10, 13] разработаны методы приближенного вычисления допустимых управлений, когда глобальное условие Коши—Липшица не выполняется, доказана сходимость итерационных процедур, когда малость нелинейных добавок обеспечивается тем, что рассматривается задача приведения управляемой системы на заданное невозмущенное движение при достаточно малых начальных возмущениях, либо предполагается, что система квазилинейна.

При математическом моделировании многих процессов различной физической природы приходится сталкиваться с наличием малоизученных факторов или сил. В некоторых случаях удается аппроксимировать неизвестные силы по статистическим данным полиномами некоторой степени относительно фазовых координат. При идентификации математических моделей таких нелинейных процессов предположение о малости нелинейных членов не выполняется, поскольку, как правило, эволюция многих процессов происходит вдали от возможных динамических положений равновесия. Например, достаточно типичная ситуация анализируется в [4, с. 296—334]. Указанное обстоятельство вынуждает обосновывать способы улучшения сходимости предлагаемой итерационной процедуры. В статье показывается, что одним из таких способов является предварительная стабилизация [9] исходной системы до асимптотической устойчивости по Ляпунову в большом или целом [12]. Обосновывается сходимость итерационной процедуры [3] в случае, когда начальное и конечное состояния содержатся в области притяжения начала координат. Следовательно, показывается, что локально управляемая по первому приближению нелинейная система становится глобально вполне управляемой при любых граничных условиях из области устойчивости, если исходная нелинейная система стабилизируема до асимптотической устойчивости в большом или целом, а нелинейные члены либо удовлетворяют глобальному условию Коши—Липшица, либо являются полиномами некоторой степени относительно фазовых координат с произвольными коэффициентами.

Указывается нелинейная система алгебраических уравнений, к вычислению решения которой сводится проблема построения допустимого управления. Этот результат позволяет использовать для вычисления допустимого управления разнообразные методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и глобально сходящиеся алгоритмы решения нелинейных алгебраических уравнений [5–7, 15].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-00599).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На заданном конечном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ будем рассматривать управляемую динамическую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x). \quad (1.1)$$

Здесь $x = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, описывающий состояние рассматриваемого процесса в произвольный момент времени $t \in T$, $u = \{u_1, \dots, u_m\} \in \mathbb{R}^m$ — управляющее воздействие, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — постоянные матрицы, $f(x) \in \mathbb{R}^n$ — некоторая нелинейная вектор-функция.

На протяжении всей статьи будем предполагать, что система первого приближения, соответствующая уравнению (1.1), вполне управляема [10], т. е. выполнено следующее условие.

Условие 1.1. Ранг матрицы $\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$ равен n .

В зависимости от требований, наложенных на нелинейные члены, будем выделять следующие два случая.

Случай 1. Вектор-функция $f(x)$, описывающая нелинейные члены в уравнениях движения (1.1), удовлетворяет глобальному условию Липшица и условию подлинейного роста, т. е. выполнено следующее условие.

Условие 1.2. Для любых $x^{(1)}, x^{(2)}, x \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$\|f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})\| \leq \alpha \|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (1.2)$$

$$\|f(x)\| \leq \kappa(1 + \|x\|). \quad (1.3)$$

Здесь $\|z\|$ обозначает евклидову норму вектора z , постоянная Липшица $\alpha > 0$ не зависит от выбора $x^{(1)}, x^{(2)}$ и постоянная $\kappa > 0$ не зависит от выбора x .

Случай 2. Нелинейная составляющая $f(x)$ в уравнениях (1.1) является полиномом некоторой степени относительно фазовых координат, т. е. выполнено следующее условие.

Условие 1.3. Вектор-функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = f^{(2)}(x) + \dots + f^{(r)}(x).$$

Здесь $r \geq 2$ — заданное натуральное число, а $f^{(j)}(x)$ — однородная форма j -го порядка переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

В качестве допустимых управлений $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in T$, будем рассматривать элементы пространства $L_2^{(m)}[t_0, t_1]$, т. е. m -мерные вектор-функции, суммируемые с квадратом на отрезке $T = [t_0, t_1]$.

Целью статьи является построение сходящейся итерационной процедуры вычисления управления в системе (1.1), разрешающего следующую задачу об управлении [10].

Задача 1.1. Задана система уравнений движения (1.1), отрезок времени $T = [t_0, t_1]$, начальное $x^{(I)}$ и конечное $x^{(II)}$ значения фазового вектора x . Требуется найти допустимое управление $u(t) \in L_2^{(m)}[t_0, t_1]$, переводящее систему (1.1) из начального состояния $x(t_0) = x^{(I)}$ в конечное $x(t_1) = x^{(II)}$.

Приведем вспомогательные факты, необходимые для дальнейшего изложения, из [10]. Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + g(t), \quad (1.4)$$

где $g(t)$ — некоторая известная непрерывная функция.

Задача 1.2. Задана система уравнений движения (1.4), отрезок времени $T = [t_0, t_1]$, начальное $x^{(I)}$ и конечное $x^{(II)}$ значения фазового вектора x . Требуется найти допустимое управление $u^0(t) \in L_2^{(m)}[t_0, t_1]$, переводящее систему (1.4) из начального состояния $x(t_0) = x^{(I)}$ в конечное $x(t_1) = x^{(II)}$ и минимизирующее функционал

$$J[u] = \int_0^1 u(t)^\top u(t) dt. \quad (1.5)$$

Верхний индекс $\top$ здесь и в дальнейшем означает транспонирование.

Введем обозначения

$$H[t_1, t] = X[t_1, t]B, \quad (1.6)$$

$$D(t) = \int_0^1 H[t, \tau]H^\top[t_1, \tau] d\tau. \quad (1.7)$$

Из условия 1.1 вытекает [10], что матрица $D(t_1)$ определенно положительна и оптимальное управление $u^0(t; g)$, разрешающее задачу 1.2, существует, единственно и является непрерывной функцией времени:

$$u^0(t; g) = H^\top[t_1, t]D^{-1}(t_1)c(g), \quad (1.8)$$

$$c(g) = x^{(II)} - X[t_1, t_0]x^{(I)} - \int_0^1 X[t_1, t]g(t) dt. \quad (1.9)$$

Подставим $u = u^0(t; g)$ в систему (1.4) и вычислим порождаемое им оптимальное движение:

$$x^0(t; g) = X[t, t_0]x^{(I)} + D(t)D^{-1}(t_1)c(g) + \int_0^1 X[t, \tau]g(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Пару функций $\{x^0(t; g), u^0(t; g)\}$ будем называть оптимальным процессом.

2. ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА

Пусть $\{x^{(0)}(t), u^{(0)}(t)\}$ — оптимальный процесс в смысле задачи 1.2 в системе первого приближения

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (2.1)$$

Из соотношений (1.8)–(1.10) находим

$$x^{(0)}(t) = X[t, t_0]x^{(I)} + D(t)D^{-1}(t_1)c^{(0)}, \quad (2.2)$$

$$u^{(0)}(t) = H^\top[t_1, t]D^{-1}(t_1)c^{(0)}, \quad (2.3)$$

$$c^{(0)} = x^{(II)} - X[t_1, t_0]x^{(I)}. \quad (2.4)$$

Оптимальный процесс $\{x^{(0)}(t), u^{(0)}(t)\}$ примем за начальное приближение и вычислим последовательность $\{x^{(k)}(t), u^{(k)}(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) оптимальных процессов в смысле задачи 1.2 для следующей рекуррентной последовательности линейных неоднородных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x^{(k-1)}(t)) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

Снова опираясь на соотношения (1.8)–(1.10), получим при $k = 1, 2, \dots$

$$x^{(k)}(t) = X[t_1, t_0]x^{(I)} + D(t)D^{-1}(t_1)c^{(k)} + \int_0^1 X[t, \tau]f(x^{(k-1)}(\tau)) d\tau, \quad (2.6)$$

$$u^{(k)}(t) = H^\top[t_1, t]D^{-1}(t_1)c^{(k)}, \quad (2.7)$$

$$c^{(k)} = x^{(II)} - X[t_1, t_0]x^{(I)} - \int_0^1 X[t_1, t]f(x^{(k-1)}(t)) dt. \quad (2.8)$$

Из изложенного выше вытекает, что процесс вычисления допустимого управления $u(t) = u(t; x^{(I)}, x^{(II)})$, разрешающего задачу 1.1 при произвольных граничных условиях $x(t_0) = x^{(I)}$ и $x(t_1) = x^{(II)}$, описывается следующим алгоритмом.

Алгоритм вычисления допустимого управления

I. Подготовительные операции:

- 1) проверка условия 1.1;
- 2) вычисление фундаментальной матрицы $X[t]$ решений линейной однородной системы $\dot{x} = Ax$, $X[0] = E$ — единичная матрица;
- 3) вычисление матрицы $H[t_1, t] = X[t_1, t]B = X[t_1 - t]B$;
- 4) вычисление матрицы $D(t)$ по формуле (1.7) и обратной матрицы $D^{-1}(t_1)$;
- 5) вычисление по формулам (2.2)–(2.4) оптимального процесса в системе первого приближения $\{x^{(0)}(t), u^{(0)}(t)\}$.

II. Операции на произвольном k -м шаге:

- 1) вычисление вектора $c^{(k)}$ по формуле (2.8);
- 2) вычисление управления $u^{(k)}(t)$ по формуле (2.7);
- 3) вычисление движения $x^{(k)}(t)$ по формуле (2.6).

III. Пара функций $\{x^{(k)}(t), u^{(k)}(t)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) берется за исходную и повторяются вычисления, указанные в пункте II.

В последующих разделах при различных предположениях о функции $f(x)$ будет показано, что последовательность непрерывных функций $\{x^{(k)}(t), u^{(k)}(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) равномерно относительно $t \in T$ сходится к решению задачи 1.1. Из соотношений (2.6)–(2.8) следует, что для этого достаточно доказать сходимость последовательности

$$x^{(k)}(t) = X[t_1, t_0]x^{(I)} + D(t)D^{-1}(t_1)[x^{(II)} - X[t_1, t_0]x^{(I)}] - \\ - D(t)D^{-1}(t_1) \int_0^1 X[t_1, \tau]f(x^{(k-1)}(\tau)) d\tau + \int_0^1 X[t, \tau]f(x^{(k-1)}(\tau)) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

3. СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИЙ В ПЕРВОМ СЛУЧАЕ

Докажем, что в первом случае последовательность (2.9) непрерывных функций $\{x^{(k)}(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) равномерно относительно $t \in T$ сходится к непрерывной функции $x^*(t)$, $t \in T$.

Функцию $x^{(k)}(t)$ из (2.9) будем рассматривать как элемент пространства $C^{(k)}[t_0, t_1]$ непрерывных вектор-функций $x(t)$ размерности n , определенных на отрезке T , с нормой

$$\rho[x(\cdot)] = \max_{t \in T} \|x(t)\|.$$

Рассмотрим в $C^{(k)}[t_0, t_1]$ оператор

$$F(x(\cdot))(t) = X[t_1, t_0]x^{(I)} + D(t)D^{-1}(t_1)[x^{(II)} - X[t_1, t_0]x^{(I)}] - \\ - D(t)D^{-1}(t_1) \int_0^1 X[t_1, \tau]f(x(\tau)) d\tau + \int_0^1 X[t, \tau]f(x(\tau)) d\tau, \quad (3.1)$$

разность значений которого определяется равенством

$$F(x(\cdot))(t) - F(y(\cdot))(t) = \\ = -D(t)D^{-1}(t_1) \int_0^1 X[t_1, \tau][f(x(\tau)) - f(y(\tau))] d\tau + \int_0^1 X[t, \tau][f(x(\tau)) - f(y(\tau))] d\tau. \quad (3.2)$$

Из (3.2) и условия 1.2 имеем

$$\|F(x(\cdot))(t) - F(y(\cdot))(t)\| \leq \\ \leq \alpha \rho[x(\cdot) - y(\cdot)] \left\{ \max_{t \in T} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| \int_0^1 \|X[t_1, \tau]\| d\tau + \max_{t \in T} \int_0^1 \|X[t, \tau]\| d\tau \right\}. \quad (3.3)$$

Предположим, что постоянная Липшица α такова, что имеет место неравенство

$$\gamma = \alpha \left\{ \max_{t \in T} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| \int_0^1 \|X[t_1, t]\| dt + \max_{t \in T} \int_0^1 \|X[t, \tau]\| d\tau \right\} < 1. \quad (3.4)$$

Из (3.3), (3.4) следует

$$\rho[F(x(\cdot)) - F(y(\cdot))] \leq \gamma \rho[x(\cdot) - y(\cdot)],$$

т. е. отображение $F(x(t))$ из (3.1) является сжимающим.

Из принципа сжимающих отображений вытекает, что последовательность непрерывных функций $\{x^{(k)}(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) из (2.9) равномерно относительно $t \in T$ сходится к непрерывной функции $x^*(t)$, $t \in T$. Предельная функция $x^*(t)$, $t \in T$, единственна и является неподвижной точкой отображения $F(x(t))$ из (3.1), т. е. удовлетворяет равенству

$$x^*(t) = X[t_1, t_0]x^{(I)} + D(t)D^{-1}(t_1)[x^{(II)} - X[t_1, t_0]x^{(I)}] - \\ - D(t)D^{-1}(t_1) \int_0^1 X[t_1, \tau]f(x^*(\tau))d\tau + \int_0^1 X[t, \tau]f(x^*(\tau))d\tau. \quad (3.5)$$

Из сходимости последовательности $\{x^{(k)}(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) следует, что последовательность управлений $\{u^{(k)}(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$), определяемых (2.7), равномерно относительно $t \in T$ сходится к единственной и непрерывной функции $u^*(t)$, $t \in T$. Из условия 1.2 следует (см. [14, 17]), что при $u = u^*(t)$, $t \in T$, система (1.1) имеет единственное решение, продолжимое на весь отрезок T . Поэтому на основании (2.7), (2.8) (3.5) приходим к заключению, что управление $u = u^*(t)$, $t \in T$, порождает в системе (1.1) единственное движение $x = x^*(t)$, $t \in T$, определяемое (3.5), которое удовлетворяет заданным граничным условиям. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений (1.1) и выполнены условия 1.1, 1.2. Если постоянная Липшица α такова, что выполняется неравенство (3.4), то последовательность непрерывных функций $\{x^{(k)}(t), u^{(k)}(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$), генерируемая итерационной процедурой (2.6)–(2.8), равномерно относительно $t \in T$ сходится к решению $\{x^*(t), u^*(t)$, $t \in T\}$ задачи 1.1 при любых граничных условиях $x^{(I)}$, $x^{(II)}$ из $\mathbb{R}$.

Сформулируем важное следствие теоремы 3.1.

Теорема 3.2. Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений (1.1), и пусть система первого приближения (2.1) вполне управляема. Если нелинейные члены удовлетворяют глобальному условию Коши–Липшица по фазовой переменной с достаточно малой постоянной, то исходная нелинейная система (1.1) глобально вполне управляема.

Обсудим теперь случай, когда постоянная Липшица не мала и неравенство (3.4) не выполняется. Из оценки (3.4) видно, что свойства линейной системы $\dot{x} = Ax$ оказывают существенное влияние на сходимость итерационной процедуры (2.6)–(2.8). Предположим, что система $\dot{x} = Ax$ асимптотически устойчива по Ляпунову [12] и, следовательно, имеет место неравенство

$$\|X[t, \tau]\| \leq b e^{-(\lambda - \epsilon)(t - \tau)}, \quad b \geq 1, \quad \lambda > 0. \quad (3.6)$$

Тогда будем иметь

$$\int_0^1 \|X[t_1, t]\| dt \leq b \frac{1 - e^{-(\lambda - \epsilon)(1 - 0)}}{\lambda} = \mu(\lambda) \in [0, b(t_1 - t_0)], \\ \int_0^1 \|X[t, \tau]\| d\tau \leq \mu(\lambda). \quad (3.7)$$

При этом величина $\mu(\lambda)$ стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Поэтому неравенство (3.4) имеет место при фиксированной постоянной Липшица и достаточно больших значениях λ . Значит, теоремы 3.1 и 3.2 справедливы, если выполнено неравенство

$$\mu(\lambda) < [\alpha(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1)]^{-1}. \quad (3.8)$$

Указанное свойство будем использовать следующим образом. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A_1 x + Bv + f(x). \quad (3.9)$$

Предположим, что матрицы A_1 и B удовлетворяют условию 1.1. Допустимое управление $v = v(t)$, $t \in T$, в системе (3.9) будем строить в виде

$$v(t) = w(x(t)) + u(t). \quad (3.10)$$

Здесь $w(x) = Cx$ — управление по принципу обратной связи, которое стабилизирует [9] до асимптотической устойчивости по Ляпунову систему первого приближения в (3.9), т. е. асимптотически устойчива система

$$\dot{x} = A_1 x + Bw = Ax, \quad A = A_1 + BC. \quad (3.11)$$

Воспользуемся тем, что при условии 1.1 постоянную матрицу $C \in \mathbb{R}$ можно выбрать так, чтобы матрица $A = A_1 + BC$ имела любой заданный заранее спектр. По известной постоянной Липшица α матрицу C выберем так, чтобы число λ в (3.6) было таким, что выполняется неравенство (3.8). Таким образом, приходим к следующим выводам.

Теорема 3.3. Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений (3.9) и выполнены условия 1.1, 1.2. Тогда допустимое управление $v = v(t)$, $t \in T$, разрешающее задачу 1.1, имеет вид (3.10), где $w(x) = Cx$ — управление по принципу обратной связи, которое стабилизирует систему (3.11) до асимптотической устойчивости по Ляпунову, приводит ее к виду (1.1), причём имеет место неравенство (3.8), какова бы ни была постоянная Липшица α . Последовательность непрерывных функций $\{x^{(k)}(t), u^{(k)}(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$), генерируемая итерационной процедурой (2.6)—(2.8), равномерно относительно $t \in T$ сходится к непрерывному решению $\{x^*(t), u^*(t)$, $t \in T\}$ задачи 1.1 для системы (1.1) при любых граничных условиях $x^{(I)}$, $x^{(II)}$ из $\mathbb{R}$. Допустимое управление $v^*(t)$, разрешающее задачу 1.1 для исходной системы (3.9), определяется равенством

$$v^*(t) = w(x^*(t)) + u^*(t).$$

Теорема 3.4. Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений (1.1), и пусть система первого приближения (2.1) вполне управляема. Если нелинейные члены удовлетворяют глобальному условию Липшица по фазовой переменной, то при стабилизации линейной системы (3.11) до асимптотической устойчивости по Ляпунову исходная система становится глобально вполне управляемой, какова бы ни была постоянная Липшица.

4. СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИЙ ВО ВТОРОМ СЛУЧАЕ

Пусть поведение управляемого процесса описывается системой (3.9), в которой нелинейная функция $f(x)$ удовлетворяет условию 1.3. Допустимое управление будем строить в виде (3.10), но в отличие от материала раздела 3 будем полагать, что управление $w(x(t))$, вообще говоря, нелинейно. Предположим, что стабилизирующее управление $w(x(t))$ выбрано так, что выполнено неравенство (3.6) и полученная в результате стабилизации система (1.1) асимптотически устойчива в целом.

Требование асимптотической устойчивости в целом необходимо, по существу, для осуществления итерационной процедуры (2.6)—(2.8) при граничных условиях $x(t_0) = x^{(I)}$, $x(t_1) = x^{(II)}$ из произвольной ограниченной области, когда нелинейная функция $f(x)$ удовлетворяет условию 1.3. Дело в том, что когда начальное (или конечное) состояние не содержится в области притяжения начала координат, то при условии 1.3 решение системы (1.1) может оказаться непродолжаемым на весь заданный отрезок времени $T = [t_0, t_1]$ и, следовательно, величины $c^{(k)}$ из (2.8) будут заведомо расходиться при $k \rightarrow \infty$. Другая причина состоит в том, что при достаточно больших значениях $x^{(I)}$, $x^{(II)}$ отображение $F(x(t))$, определяемое (3.2), вообще говоря, не является сжимающим.

Рассмотрим оптимальное движение $x^{(0)}(t)$ системы первого приближения (2.1). Из (2.2), (2.4) имеем

$$x^{(0)}(t) = (X[t, t_0] - D(t)D^{-1}(t_1)X[t_1, t_0])x^{(I)} + D(t)D^{-1}(t_1)x^{(II)}. \quad (4.1)$$

Введем в рассмотрение произвольную область

$$G = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| \leq \delta_0\},$$

в которой могут содержаться начальное $x^{(I)}$ и конечное $x^{(II)}$ состояния системы (1.1). Имеет место оценка

$$\|x^{(0)}(t)\| \leq \delta_0 \left(\max_{\epsilon} \|X[t, t_0] - D(t)D^{-1}(t_1)X[t_1, t_0]\| + \max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| \right) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_1. \quad (4.2)$$

Поэтому все оптимальные движения $x^{(0)}(t)$ системы первого приближения (2.1), удовлетворяющие граничными условиями из области G , содержатся при любом $t \in T$ в области

$$G_1 = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| \leq \delta_1, \delta_1 > \delta_0\}.$$

Рассмотрим последовательность функций $x^{(k)}(t)$ из (2.9), которую представим в виде

$$x^{(k)}(t) = x^{(0)}(t) + \Delta x^{(k)}(t), \quad (4.3)$$

$$\Delta x^{(k)}(t) = -D(t)D^{-1}(t_1) \int_0^1 X[t_1, \tau] f(x^{(k-1)}(\tau)) d\tau + \int_0^1 X[t, \tau] f(x^{(k-1)}(\tau)) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.4)$$

Из (4.4), (3.7) получаем

$$\|\Delta x^{(k)}(t)\| \leq \frac{b}{\lambda} \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) \max_{\epsilon} \|f(x^{(k-1)}(t))\|. \quad (4.5)$$

Приведем вспомогательные оценки, которые понадобятся в дальнейшем. Рассмотрим произвольный вектор $x \in G_1$ и приращение Δx , $\|\Delta x\| < 1$. Из условия 1.3 следует, что

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f_1(x, \Delta x),$$

где $f_1(x, \Delta x)$ — полином степени r относительно компонент вектора Δx с коэффициентами, непрерывно зависящими от $x \in G_1$. Поэтому существует такая положительная постоянная σ , что справедливо неравенство

$$\|f_1(x, \Delta x)\| \leq \sigma(\|\Delta x\| + \|\Delta x\|^2 + \dots + \|\Delta x\|^r) \leq \sigma\|\Delta x\| \frac{1 - \|\Delta x\|}{1 - \|\Delta x\|} \leq \sigma r \|\Delta x\|. \quad (4.6)$$

Так как $x^{(0)}(t) \in G_1$, то

$$\max_{\epsilon} \|f(x^{(0)}(t))\| \leq \max_{\epsilon} \|f(x)\| \stackrel{\text{def}}{=} \chi. \quad (4.7)$$

Выберем λ так, чтобы

$$\lambda > b \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) [\chi + \sigma r]. \quad (4.8)$$

Из (4.5)–(4.8) имеем

$$\|\Delta x^{(1)}(t)\| \leq \frac{b}{\lambda} \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) \max_{\epsilon} \|f(x^{(0)}(t))\| < 1, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \|\Delta x^{(2)}(t)\| &\leq \frac{b}{\lambda} \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) \max_{\epsilon} \|f(x^{(1)}(t))\| \leq \\ &\leq \frac{b}{\lambda} \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) \left[\max_{\epsilon} \|f(x^{(0)}(t))\| + \sigma r \max_{\epsilon} \|\Delta x^{(1)}(t)\| \right] \leq \\ &\leq \frac{b}{\lambda} \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) [\chi + \sigma r] < 1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Предположим по индукции, что $\max_{\epsilon} \|\Delta x^{(k-1)}(t)\| < 1$, и получим

$$\begin{aligned} \|\Delta x^{(k)}(t)\| &\leq \frac{b}{\lambda} \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) \max_{\epsilon} \|f(x^{(k-1)}(t))\| \leq \\ &\leq \frac{b}{\lambda} \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) \left[\max_{\epsilon} \|f(x^{(0)}(t))\| + \sigma r \max_{\epsilon} \|\Delta x^{(k-1)}(t)\| \right] \leq \\ &\leq \frac{b}{\lambda} \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) [\chi + \sigma r] < 1, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Введем обозначение

$$\xi_k = \max_{\epsilon} \|\Delta x^{(k)}(t)\| \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и запишем рекуррентные соотношения, которые следуют из оценок (4.9)–(4.11). Имеем

$$\xi_1 = \zeta, \quad \xi_{k+1} = \zeta + \eta \xi_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.12)$$

Здесь используются обозначения

$$\zeta = \frac{b}{\lambda} \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) \chi < 1, \quad \eta = \frac{b}{\lambda} \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) \sigma r < 1.$$

Величины ξ_k являются частичными суммами сходящегося ряда

$$\xi_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_{i+1} - \xi_i) = \zeta + \zeta \eta \sum_{i=1}^{\infty} \eta^{i-1} = \zeta \frac{1}{1-\eta}.$$

Таким образом, если число λ удовлетворяет неравенству (4.8), то последовательность функций $\Delta x^{(k)}(t)$, $t \in T$, равномерно по $t \in T$ сходится к непрерывной функции $\Delta x^*(t)$, $t \in T$, такой что

$$\|\Delta x^*(t)\| \leq \zeta \frac{1}{1-\eta}, \quad t \in T.$$

Поэтому для движений $\{x^{(k)}(t), t \in T\}$, определяемых (4.3), (4.4), при произвольных граничных условиях из области G справедлива оценка

$$\|x^{(k)}(t)\| \leq \delta_1 + \zeta \frac{1}{1-\eta}, \quad t \in T \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим область

$$G_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \delta_2\}.$$

При произвольном $\delta_2 > \delta_1 + \zeta/(1-\eta)$ и

$$\lambda > b \left(\max_{\epsilon} \|D(t)D^{-1}(t_1)\| + 1 \right) \max \left\{ \chi + \sigma r, \frac{\chi + \sigma r(\delta_2 - \delta_1)}{\delta_2 - \delta_1} \right\} \quad (4.13)$$

все движения $\{x^{(k)}(t), t \in T\}$ ($k = 1, 2, \dots$) будут содержаться во внутренности области G_2 . Это свойство позволяет ослабить требование о стабилизации системы (3.9) до асимптотической устойчивости в целом.

Действительно, предположим, что стабилизирующее управление $w(x)$ удалось выбрать так, что выполнено неравенство (3.6) и что нелинейная система (1.1) асимптотически устойчива в большом [12, с. 519], т. е. известны такие области

$$\Gamma_0 = \{x \in R : \|x\| \leq h\}, \quad \Gamma = \{x \in R : \|x\| \leq H, h < H\},$$

что решение $x(t; x^{(0)}, t_0)$ системы (1.1) при $u \equiv 0$ при любых начальных возмущениях $x^{(0)} \in \Gamma_0$ и всех $t > t_0$ содержится в Γ , причем имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x^{(0)}, t_0) = 0.$$

Выберем произвольную величину $0 < \delta_2 \leq H$ по известной величине λ , фигурирующей в правой части неравенства (3.6). Выберем произвольную величину $0 < \delta_1 < \delta_2$ так, чтобы выполнялось неравенство (4.13), что возможно, поскольку $f(0) = 0$. Наконец, выберем произвольную

величину $0 < \delta_0 < \delta_1$ так, чтобы выполнялась правая часть неравенства (4.2). Повторяя теперь предыдущие рассуждения, покажем, что последовательность оптимальных, в смысле задачи 1.2, движений $\{x^{(\cdot)}(t)\}$, $(k = 1, 2, \dots)$ линейных систем (2.5) равномерно относительно $t \in T$ сходится к единственной непрерывной функции $x^*(t)$, $t \in T$. По построению имеют место вложения $G \subset G_1 \subseteq \Gamma_0 \subset G_2 \subseteq \Gamma$. Это означает, что в области притяжения начала координат Γ_0 можно указать такую область G , что оптимальные движения системы первого приближения (2.1) при произвольных граничных условиях из $G \subset \Gamma_0$ не выходят с течением времени из этой области притяжения, причем последовательность оптимальных движений $\{x^{(\cdot)}(t)\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ линейных систем (2.5) и предельная функция $x^*(t)$, $t \in T$, при всех $t \in T$ содержатся в области $G_2 \subseteq \Gamma$. Если при $u \equiv 0$ система (1.1) асимптотически устойчива в целом, то области G и Γ_0 произвольны.

Из сходимости последовательности $\{x^{(\cdot)}(t)\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ следует, что последовательность управлений $\{u^{(\cdot)}(t)\}$ $(k = 1, 2, \dots)$, определяемых (2.7), равномерно относительно $t \in T$ сходится к единственной непрерывной функции $u^*(t)$, $t \in T$. По доказанному при $u = u^*(t)$, $t \in T$, система (1.1) имеет единственное решение, которое можно продолжить на весь отрезок T . Поэтому на основании (2.7), (2.8) (3.5) приходим к заключению, что управление $u = u^*(t)$, $t \in T$, порождает в системе (1.1) единственное движение $x = x^*(t)$, $t \in T$, определяемое (3.5), которое удовлетворяет заданным граничным условиям. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений (3.9) и выполнены условия 1.1, 1.3. Тогда допустимое управление $v = v(t)$, $t \in T$, разрешающее задачу 1.1, имеет вид (3.10), где $w(x)$ — управление по принципу обратной связи, которое стабилизирует систему (3.9) до асимптотической устойчивости в целом или в большом, приводит ее к виду (1.1), причём имеют место неравенства (3.8), (4.8) или неравенства (3.8), (4.13). Последовательность непрерывных функций $\{x^{(\cdot)}(t), u^{(\cdot)}(t)\}$ $(k = 1, 2, \dots)$, генерируемая итерационной процедурой (2.6)—(2.8), равномерно относительно $t \in T$ сходится к непрерывному решению $\{x^*(t), u^*(t)$, $t \in T\}$ задачи 1.1 для системы (1.1) при любых граничных условиях $x^{(I)}$, $x^{(II)}$ из $\mathbb{R}$ или области $G \subset \Gamma_0$. Допустимое управление $v^*(t)$, решающее задачу 1.1 для системы (3.9) определяется равенством $v^*(t) = w(x^*(t)) + u^*(t)$.

Теорема 4.2. Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений (1.1), и пусть система первого приближения (2.1) вполне управляема. Если нелинейные члены удовлетворяют условию 1.3, то при стабилизации системы (1.1) до асимптотической устойчивости в целом или в большом она становится глобально вполне управляемой или вполне управляемой в большом.

5. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

В разделах 2 и 3 показано, что допустимое управление, решающее задачу об управлении 1.1, имеет вид

$$u(t; c) = H^T[t_1, t]D^{-1}(t_1)c. \quad (5.1)$$

В итерационной процедуре (2.6)—(2.8) производится вычисление последовательности векторов $c^{(\cdot)}$, определяемой (2.8), которая при определенных условиях сходится к некоторому вектору c , зависящему от заданных краевых условий. Сейчас поступим иначе: управление $u = u(t; c)$ из (5.1) подставим в систему (1.1) и найдем ее решение $x = x(t; c)$ при начальном условии $x(t_0; c) = x^{(I)}$. Это решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t; c) = X[t, t_0]x^{(I)} + D(t)D^{-1}(t_1)c + \int_0^t X[t, \tau]f(x(\tau; c))d\tau. \quad (5.2)$$

Неизвестный вектор c будем определять из условия на правом конце $x(t_1; c) = x^{(II)}$. Полагая $t = t_1$ в (5.2), получим

$$c^{(0)} = c + \int_0^1 X[t_1, t]f(x(t; c))dt \stackrel{\text{def}}{=} c + g(c). \quad (5.3)$$

Теорема 5.1. *Допустимое управление $u(t; c)$ вида (5.1) является решением задачи об управлении 1.1 тогда и только тогда, когда вектор c удовлетворяет системе нелинейных алгебраических уравнений (5.3).*

Из выражения для вектора $g(c)$ в равенстве (5.3) и самого равенства вытекает, что итерационная процедура (2.6)—(2.8) интерпретируется следующим образом. Решение $x = x(t; c)$ системы дифференциальных уравнений (1.1) находится методом последовательных приближений Пикара, на каждом шаге итераций вычисляется аппроксимация вектора $g(c)$ и затем методом простой итерации ищется решение системы уравнений (5.3), т. е. производится вычисление аппроксимации вектора c .

Теорема 5.1 позволяет для вычисления допустимого управления $u(t; c)$ использовать многообразные методы приближенного или численного решения дифференциальных уравнений и комбинировать их с методами приближенного или численного решения нелинейных алгебраических уравнений [5–7, 15]. В общем случае, когда стабилизацию нелинейной системы (1.1) до асимптотической устойчивости в целом или в большом выполнить не удастся, такой путь выполнения вычислений может оказаться более предпочтительным. Этот путь связан с большими вычислительными затруднениями: явный вид функции $g(c)$ неизвестен и для вычисления решений нелинейных алгебраических уравнений необходимо опираться на процедуры численного дифференцирования. Применение теоремы 5.1 оказывается наиболее эффективным в тех редких случаях, когда решение $x = x(t; c)$ дифференциальных уравнений удастся найти в явном аналитическом виде и для вычисления корней уравнения (5.3) можно использовать глобально сходящиеся алгоритмы решения нелинейных алгебраических уравнений [7, 15]. В следующем разделе приводится пример глобально управляемой системы, которая не устойчива при $u \equiv 0$, но глобально сходящийся алгоритм [7] позволяет найти решение уравнения (5.3) и построить допустимое управление при любых граничных условиях, не опираясь на предварительную стабилизацию системы.

Отметим в заключение этого раздела, что указанные выше возможности для проведения вычислительных экспериментов при построении допустимого управления могут быть расширены, если управления искать в виде

$$u(t; c) = \hat{H}^\top [t_1, t] \hat{D}^{-1}(t_1) c,$$

где $\hat{H}^\top [t_1, t] \in \mathbb{R}$ — произвольная матрица, удовлетворяющая при всех $t_1 \geq t > t_0$ условию

$$\det \hat{D}(t) = \det \int_0^t H[t, \tau] \hat{H}^\top [t_1, \tau] d\tau \neq 0.$$

6. ПРИМЕР

Рассмотрим управляемый процесс

$$\dot{x} = u - a^2 x^2, \quad t \in [0, 1], \quad (6.1)$$

где u — управление, a — постоянный параметр.

Найдем допустимое управление, которое является решением задачи 1.1 при краевых условиях $x(0) = 0$, $x(1) = \beta$. Из (1.6)—(1.9) следует, что искомое управление постоянно на отрезке $t \in [0, 1]$, причем $u = \text{sign } \beta$.

Предположим сначала, что $\beta > 0$, и положим, что $u = c_*^2$, где c_* — постоянная, подлежащая определению, тогда решение системы (6.1) запишется в виде

$$x(t) = \frac{c_*}{a} \text{th}(ac_* t) \quad (6.2)$$

и для вычисления величины c_* получим уравнение

$$\beta = \frac{c_*}{a} \text{th}(ac_*). \quad (6.3)$$

При любом $\beta > 0$ уравнение (6.3) имеет два корня, одинаковых по величине и противоположных по знаку, нам достаточно найти один из них. Следовательно, систему (6.1) при помощи управления $u = c_*^2$ можно перевести из начала координат в любую точку положительной полуоси x .

Предположим теперь, что $\beta < 0$, и положим, что $u = -c_*^2$, тогда решение системы (6.1) запишется в виде

$$x(t) = \frac{c_*}{a} \operatorname{tg}(ac_* t) \quad (6.4)$$

и для вычисления величины c_* получим уравнение

$$\beta = \frac{c_*}{a} \operatorname{tg}(ac_*). \quad (6.5)$$

При любом $\beta < 0$ уравнение (6.5) опять имеет два корня, одинаковых по величине и противоположных по знаку, нам достаточно найти один из них. Отметим, что при любом конечном $\beta < 0$ решение этого уравнения удовлетворяет неравенству $|ac_*| < \pi/2$, поэтому решение $x(t)$, определяемое (6.4), уравнения (6.1) при всех таких β определено на заданном отрезке времени $[0, 1]$. Следовательно, систему (6.1) при помощи управления $u = -c_*^2$ можно перевести из начала координат в любую точку отрицательной полуоси x .

Таким образом, существует постоянное управление $u = \pm c_*^2$, переводящее систему (6.1) из начала координат в произвольную точку оси x . Проведенные нами вычислительные эксперименты показали, что глобально сходящийся метод Ньютона [7] при любых значениях a и β позволяет вычислить искомое постоянное управление, если использовать уравнение (6.3) (или (6.5)) в зависимости от величины β . При помощи итерационной процедуры (2.6)–(2.8) допустимое управление в системе (6.1) можно вычислить лишь при достаточно малых значениях a и β , если не использовать стабилизирующее управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альбрехт Э. Г. Об управлении движением нелинейных систем // Дифференц. уравн. — 1966. — 2, вып. 3. — С. 324–334.
2. Альбрехт Э. Г. Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем // Дифференц. уравн. — 1969. — 5, вып. 3. — С. 430–442.
3. Альбрехт Э. Г. Об управлении движением нелинейных систем // Труды II Болгарского нац. конгресса по теор. и прикладной механике. Т. 1. — София, 1975. — С. 522–526.
4. Альбрехт Э. Г., Богатырев Л. Л., Бочегов А. В., Калина А. В. и др. Моделирование состояния и прогнозирование развития региональных экономических и энергетических систем. — Экономика, 2004.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. — М.: Наука, 1975.
6. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
7. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. — М.: Мир, 1988.
8. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем // ПММ. — 1959. — 23, вып. 2. — С. 209–229.
9. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — С. 475–514.
10. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
11. Красовский Н. Н., Шелементьев Г. С. О коррекции движения системы с двумя степенями свободы при одной циклической координате // ПММ. — 1965. — 24, вып. 3. — С. 401–407.
12. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.
13. Субботин А. И. Об управлении движением квазилинейной системы // Дифференц. уравн. — 1967. — 3, вып. 7. — С. 1113–1118.
14. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
15. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений. — М.: Мир, 1985.
16. Филимонов Ю. М. К задаче об оптимальном управлении математическим маятником // Дифференц. уравн. — 1965. — 1, вып. 8. — С. 1007–1015.
17. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.

Э. Г. Альбрехт, А. А. Усова

E-mail: ernst.albrekht@usu.ru

НАВИГАЦИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ ПО ГЕОФИЗИЧЕСКИМ ПОЛЯМ© 2005 г. **В. И. БЕРДЫШЕВ, В. Б. КОСТОУСОВ**

Аннотация. В работе рассматривается задача навигации движущегося объекта по геофизическим полям. В рамках предложенных математических моделей процесса навигации исследуются задачи аппроксимации геофизического поля, обеспечивающей наилучшую коррекцию навигационных параметров, описываются алгоритмы совмещения измерений поля с его эталонным образом, приводятся оценки информативности геофизических полей и обсуждается задача поиска наилучшей в смысле информативности траектории.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	15
2. Задача навигации по ГФП	16
3. Алгоритмы совмещения изображений	23
4. Способы оценки информативности ГФП	27
5. Поиск наиболее информативной траектории	35
Список литературы	41

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования методов навигации по геофизическим полям (ГФП) проводятся в нашей стране начиная с 60-х годов усилиями многих ученых и практиков [2, 9, 11]. В ИММ УрО РАН работы по созданию принципов построения и анализу систем навигации и наведения по геофизическим полям проводятся с 1975 года [7]. Эти исследования явились логичным продолжением общих теоретических работ в области управления системами в условиях неопределенности и конфликта [10]. Среди исследований, оказавших влияние на работы по навигации, следует выделить направления, связанные с методами гарантированного управления, с динамическим восстановлением неизвестных параметров в ходе процесса, с методами аппроксимации функций. С другой стороны, прикладная направленность наложила свой отпечаток на работы по навигации движущихся объектов.

Суть рассматриваемой проблемы можно описать следующим образом. При автономной навигации движущегося объекта, например летательного аппарата (ЛА), управляющие воздействия формируются по принципу обратной связи в виде функций от измеряемых величин. Во время движения в системе счисления координат — в инерциальной навигационной системе (ИНС), построенной на гироскопах и акселерометрах, — накапливаются большие погрешности, поэтому реализующаяся траектория может значительно отличаться от желаемой.

Эффективным средством коррекции накопленных ошибок является использование информации о внешних физических полях, наблюдаемых в процессе движения. При этом применяется корреляционно-экстремальный подход [2, 9], который основан на поиске экстремума некоторого функционала сравнения полученных измерений поля с априорной (эталонной) информацией о нем, хранящейся в памяти бортового вычислительного устройства.

В данной работе вводится ряд новых математических моделей процесса навигации, которые отличаются друг от друга способом определения понятия измеряемого фрагмента ГФП. В рамках этих моделей исследуются задачи аппроксимации геофизического поля, обеспечивающей наилучшую коррекцию навигационных параметров, описываются алгоритмы совмещения измерений поля с его эталонным образом, приводятся оценки глобальной и локальной информативности геофизических полей и обсуждается задача поиска наилучшей в смысле информативности траектории.

Модели I—IV, а также задачи из разделов 2.2, 4.1 и 5 предложены и исследованы первым автором, модели V—VI и разделы 3 и 4.2 подготовлены вторым автором. В отдельных пунктах разделов 3 и 4.2 приведены результаты В. Л. Гасилова.

2. ЗАДАЧА НАВИГАЦИИ ПО ГФП

Приведем общее описание задачи навигации по ГФП.

Пусть положение движущегося объекта (в дальнейшем для определенности ЛА) задается координатами центра масс в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ и его угловой ориентацией. При движении объекта центр масс описывает траекторию — некоторую кривую в $\mathbb{R}^3$. Истинная траектория движения ЛА неизвестна, однако на основе данных бортовой системы счисления координат (ИНС) удается описать семейство допустимых траекторий с помощью конечномерного вектора навигационных параметров. В качестве искоемых навигационных параметров могут выступать координаты некоторой фиксированной точки траектории, угловая ориентация в этой точке и поправки к компонентам вектора скорости. Априорные оценки ошибок ИНС позволяют задать ограничения на область поиска неизвестных параметров в виде некоторого компактного множества в пространстве параметров.

Пусть в области $Q \subset \mathbb{R}^2$, называемой в дальнейшем *районом ориентирования*, определено геофизическое поле в виде функции $F = F(u)$ ($u \in Q$), вообще говоря векторной. Компонентами вектор-функции $F(u) = (F_1(u), \dots, F_n(u))$ могут быть высота рельефа, оптическая яркость, радио- или тепловая яркость или функции от этих величин. Эталонная информация о поле (*эталон*) хранится в памяти бортовой ЭВМ либо как таблица значений, либо посредством аналитически заданной функции $p = p(u)$, аппроксимирующей поле F .

Пусть на борту ЛА имеется измеритель поля (датчик), который производит замеры поля и формирует *фрагменты*. Конкретный способ определения понятия «фрагмент поля» и понятия уклонения измеренного фрагмента от эталонного характеризуют ту или иную модель задачи навигации по ГФП, которые обсуждаются ниже.

Задача навигации по ГФП (или задача привязки измерений к эталону) состоит в поиске значений навигационных параметров, при которых соответствующий этим значениям фрагмент поля, снятый с эталона, наиболее близок в смысле выбранной метрики к измеренному фрагменту. Решения этой экстремальной задачи принимаются в качестве приближения неизвестных значений истинных параметров.

В связи с поставленной задачей в данной работе обсуждаются следующие вопросы, которые имеют принципиальное значение для практики:

- поиск методов проверки разрешимости задачи (оценка глобальной информативности);
- оценка влияния ошибок измерения и ошибок построения эталона на ошибку восстановления истинных значений параметров (оценка локальной информативности);
- разработка эффективных алгоритмов решения экстремальной задачи поиска значений навигационных параметров;
- поиск наилучшего способа представления эталона ГФП;
- выбор наилучшей в смысле точности навигации программной траектории.

2.1. Математические модели навигации по ГФП. Рассматриваемые далее модели навигации различаются прежде всего способом определения понятия «фрагмент поля». Фрагмент — это небольшая часть информации о геофизическом поле в целом. Он определяется в зависимости от конкретных условий движения и наблюдения, в частности от возможности точного измерения навигационных параметров: высоты, направления вектора скорости и т. д.

Модель I (см., например, [5]). Предполагается, что ЛА движется в горизонтальной плоскости над плоским горизонтальным участком земной поверхности, на которой задано геофизическое поле. Пусть имеется возможность достаточно точно определять высоту z , поддерживать ее на постоянном уровне и точно определять вертикальное направление. Предполагается также, что датчик ГФП имеет ось визирования (например, это может быть оптическая ось объектива), которая направлена вертикально вниз. Функция F задает поле яркости, компонентами которой могут быть оптическая,

радио-, тепловая яркости. Задача навигации в этом случае состоит в поиске координат ЛА (x, y) и направления (азимута) движения.

Пусть Δ — область из $\mathbb{R}^2$ (область визирования), $0 \in \Delta$, a — преобразование поворота пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг вертикальной оси, t — проекция центра масс аппарата на плоскость $\mathbb{R}^2$.

Назовем фрагментом φ поля F функцию

$$\varphi(u, F) = \varphi(u) = F(a(u) + t), \quad u \in \Delta, \quad (2.1)$$

заданную на Δ . Далее считаем, что t и a неизвестны, но значения $\varphi(u, F)$ известны в результате измерений. Тогда задача определения местоположения ЛА, т. е. определения точки t и преобразования поворота a , может быть поставлена следующим образом:

$$d(t, F)_{\Delta} = \min \{ \|F(A(u) + T) - \varphi(u)\|_{\Delta} = \|\varphi(u) - \varphi(u)\|_{\Delta} : A(\Delta) + T \subset Q \}, \quad (2.2)$$

где $T \in \mathbb{R}^2$, A — преобразование поворота пространства $\mathbb{R}^2$ вокруг вертикальной оси, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\Delta}$ — некоторая норма на пространстве функций, заданных на Δ , Q — район ориентирования.

Модель II (см. [12]). В этой модели, как в предыдущей, предполагается возможность точного выдерживания вертикали. Определению подлежат координаты центра масс $t = (u, z)$, $u = (x, y)$, в том числе и высота z , а также азимут a . Основное отличие этой модели от первой состоит в том, что здесь явно учитывается геометрия непостоянного поля высот. Поле F может быть векторным, $F = (F_1(u), F_2(u))$, где $F_1(u)$ — высота рельефа, $F_2(u)$ — функция яркости, возможно также векторная. Допускается, что функция F_1 разрывная, однако в каждой точке разрыва u_0 существуют конечные нижний и верхний пределы

$$\underline{F}_1(u_0) = \lim_{\rightarrow 0} F_1(u), \quad \overline{F}_1(u_0) = \lim_{\rightarrow 0} F_1(u).$$

Графиком функции $F_1(u)$ будем называть множество

$$\text{graph } F_1 = \bigcup_{\in} [\underline{F}_1(u), \overline{F}_1(u)]$$

из пространства $\mathbb{R}^3$.

Предположим, что задан конус $\Delta = \{l\}$ лучей l с вершиной в начале координат. Пусть центр масс t аппарата имеет координаты $t = (u, z)$, $u = (x, y)$, a — преобразование поворота $\mathbb{R}^3$ вокруг вертикальной оси. Обозначим через Δ множество

$$\Delta = \text{Pr}_{\mathbb{R}^2} [[a(\Delta) + t] \cap^* \text{graph } F_1] - u, \quad (2.3)$$

где $\text{Pr}_{\mathbb{R}^2}$ — операция вертикального проектирования на $\mathbb{R}^2$, через $f = [a(l) + t] \cap^* \text{graph } F_1$ обозначается ближайшая к t точка из пересечения $[a(l) + t] \cap \text{graph } F_1$, $u = \text{Pr}_{\mathbb{R}^2} f$. Заметим, что $z = F_1(u) + |t - f| \cos \eta$, где η — угол между лучом l и осью $-Z$.

Определим фрагмент φ поля F как вектор-функцию

$$\varphi(u) = \varphi(u) = (F_1(a(u) + u) - z, F_2(a(u) + u)) \quad (u \in \Delta), \quad (2.4)$$

заданную на множестве Δ . Графиком первой компоненты функции φ является множество $[(a(\Delta) + t) \cap^* \text{graph } F_1] - t$. Заметим, что в этой модели область Δ определения функции φ , в отличие от случая I, зависит не только от a , но и от t . Она может быть несвязной, даже если конус Δ является выпуклым. Задача навигации в данной модели выглядит так:

$$d(t, F) = \min \| (F_1(A(u) + u) - z, F_2(A(u) + u)) - \varphi(u) \|_{\Delta_{t,a}}, \quad (2.5)$$

где минимум берется по (T, A) из заданной компактной области $\mathcal{W}$, а $\|\cdot\|_{\Delta_t}$ — некоторая норма на пространстве функций с областью определения Δ .

Модель III (см. [4]). Как и в предыдущей модели, поле F предполагается векторным, $F = (F_1(u), F_2(u))$, где F_1 — поле высот, F_2 — поле яркости. Требуется определить координаты центра масс $t = (u, z)$ аппарата и его ориентацию, т. е. преобразование поворота a исходной системы координат (XYZ) в локальную систему $(X'Y'Z') = a(XYZ) + t$, жестко связанную с ЛА. В отличие от предыдущих моделей преобразование a является поворотом относительно произвольной оси.

Местоположение ЛА определяется парой $w = (t, a)$. Обозначим через $\mathcal{W} = \{w = (t, a)\}$ некоторое заданное компактное множество изменения параметров t, a .

Пусть $\Delta = \{l\}$ есть, как и в предыдущей модели, конус лучей с вершиной в начале координат исходной системы (XYZ) . Назовем фрагментом поля F вектор-функцию $\varphi(l)$, заданную на Δ , первой компонентой которой является евклидово расстояние от точки t до множества, являющегося пересечением луча $t + a(l)$ с графиком функции F_1 :

$$\rho(t, [t + a(l)] \cap \text{graph } F_1).$$

Пусть это расстояние достигается на точке $f \in \text{graph } F_1$ и u — проекция точки f на плоскость $\mathbb{R}^2$. Вторая компонента функции φ есть яркость точки f . Яркость точки f , лежащей на графике функций F_1 , обозначим через $\text{Br}(f)$ и для простоты будем считать, что яркость $\text{Br}(f)$ одинакова для всех точек $(t, a) \in \mathcal{W}$, из которых видна точка f . Таким образом,

$$F_2(u) = \text{Br}(f),$$

а фрагмент φ поля F есть вектор-функция, заданная на множестве лучей Δ :

$$\varphi(l) = \varphi(l) = \varphi(l, F) = \varphi(l) = (\rho(t, f), \text{Br}(f)), \quad l \in \Delta. \quad (2.6)$$

Поскольку каждый луч l определяется двумя углами, то $\varphi(l)$ — функция двух переменных. Задача навигации ставится следующим образом:

$$d(w, F) = \min_{(l) \in \mathcal{W}} \|\varphi(l) - \varphi(l)\|_{\Delta}, \quad (2.7)$$

где $\|\cdot\|_{\Delta}$ — некоторая норма на пространстве функций, заданных на Δ .

Модель IV. В изложенных выше моделях предполагается, что фрагмент геофизического поля снимается аппаратом в одной точке t пространства. Можно считать, что снятие производится мгновенно в сравнении с продолжительностью полета ЛА.

Рассмотрим случай, когда ЛА производит замеры геофизического поля на целом отрезке траектории движения или на достаточно густой сетке этого отрезка. Предположим, что задана некоторая (программная) кривая

$$\Gamma = \{t(s) = (x(s), y(s), z(s)): 0 \leq s \leq \vartheta\},$$

$\vartheta > 0$, $t(0) = 0$, и задано однопараметрическое семейство преобразований поворота локальной системы координат аппарата

$$\mathcal{A} = \{a(s) = (a_1(s), a_2(s), a_3(s)): 0 \leq s \leq \vartheta\}.$$

Пара $(\Gamma, \mathcal{A})$ определяет программное движение в исходной системе координат (X, Y, Z) . Пусть в действительности аппарат совершает движение из точки $t \in \mathbb{R}^3$ по программной кривой, повернутой посредством преобразования поворота α пространства $\mathbb{R}^3$, т. е. движение определяется парой

$$(t + \alpha\Gamma, \alpha\mathcal{A}).$$

Преобразование α на интервале $[0, \vartheta]$ считается постоянным. Для определения своего местоположения (t, α) аппарат может снять фрагмент поля в точках программной кривой или в точках достаточно густой сетки на этой кривой. Пусть задан конус лучей $\Delta = \{l\}$, телесный, плоский или дискретный с вершиной в начале координат. Фрагмент, снятый в точке $t + \alpha(t(s))$ (см. (2.6)), обозначим через

$$\varphi(l, s) = \varphi(l, s, F) = \varphi + () () (l), \quad l \in \Delta, \quad s \in [0, \vartheta], \quad w = (t, \alpha). \quad (2.8)$$

Он является функцией трех переменных с областью определения $\Delta \times [0, \vartheta]$. Если на пространстве таких функций задана некоторая норма $\|\cdot\|_{\Delta \times [0, \vartheta]}$ и $\mathcal{W} = \{(t, \alpha)\}$ — компактная область возможного изменения параметров t, α , то для определения местоположения ЛА надо решать задачу

$$d(w, F) = d(w, F, \Gamma) = \min_{(l) \in \mathcal{W}} \|\varphi(l, s) - \varphi(l, s)\|_{\Delta \times [0, \vartheta]}, \quad (2.9)$$

где $w = (t, \alpha)$.

Отметим некоторые особенности приведенных моделей навигации. Первая модель рассчитана на движение на постоянной высоте над равнинной местностью с информативными оптическим, радио- или тепловым полями. Носитель фрагмента может быть задан произвольно в $\mathbb{R}^2$: круг, прямоугольник или дискретное множество (сетка), его форма постоянна, не зависит от координат ЛА. Во второй и третьей моделях основную роль играет поле высот. Во второй модели трудоемким является процесс построения носителя фрагмента: поиск точек на графике функции F_1 , засвечиваемых лучами из конуса $t + \Delta$, их проектирование на $\mathbb{R}^2$. При большом перепаде высот носитель Δ фрагмента может иметь сложную форму, кроме того, он зависит от координат точки t . Однако носитель является множеством из $\mathbb{R}^2$, и это облегчает процедуру сравнения фрагментов при решении задачи навигации. В третьей модели аппарату при движении позволяет совершать любые угловые колебания, в отличие от двух предыдущих моделей, а носитель фрагмента — конус Δ — не зависит от координат центра масс ЛА, процедура сравнения фрагментов достаточно простая, но задача поиска шести параметров x, y, z, a_1, a_2, a_3 , к которой сводится задача навигации, весьма трудоемкая. В четвертой модели реализуется возможность производить замеры геофизического поля на программной кривой.

Модель V. Данная модель отличается от модели IV наличием ошибок измерения поля F и ошибок измерения вектора скорости. В задачах навигации по ГФП принято рассматривать как ошибки измерения поля в процессе движения, так и ошибки, связанные с созданием и хранением эталонных карт геофизического поля. В данной общей постановке мы объединяем эти два типа ошибок в одну аддитивную добавку к «истинному» фрагменту поля.

Ошибки измерения вектора скорости задаются вектором Δv , который, наряду с неизвестными начальной точкой t и поворотом a , требуется найти в процессе привязки измерений к эталону ГФП.

Формально модель выглядит следующим образом.

Кроме фрагмента φ поля F , заданного формулой (2.8), который назовем «истинным», введем в рассмотрение измеренный фрагмент $\hat{\varphi}$ поля F (см. (2.8)):

$$\hat{\varphi}(l, s) = \varphi(l, s) + \delta\varphi(l, s).$$

Здесь вектор-функция $\delta\varphi(l, s)$ — ошибка измерения поля F в точке (l, s) . Мы не делаем пока никаких предположений относительно функции $\delta\varphi(l, s)$: они могут иметь как функциональный, так и вероятностный характер. Ниже это придется сделать для получения содержательных результатов при исследовании влияния ошибок измерения на решение конкретных задач навигации.

Множество допустимых траекторий описывается как

$$\Gamma(\Delta v) = \{t(s) + s\Delta v = (x(s) + s\Delta v, y(s) + s\Delta v, z(s) + s\Delta v) : 0 \leq s \leq \vartheta\}, \quad (2.10)$$

где $\Delta v = (\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z)$ — постоянный вектор ошибок измерения скорости. Фрагмент поля в данном случае определяется тройкой $(t, \alpha, \Delta v)$ (см. (2.8)):

$$\varphi_{\Delta}(l, s) = \varphi + ((\cdot) + \Delta)((\cdot))(l), \quad l \in \Delta, \quad s \in [0, \vartheta].$$

Для определения неизвестных навигационных параметров решается задача

$$d(w, \delta, F, \Gamma) = \min_{(\frac{\Delta}{\Delta}) \in \mathcal{W}} \|\varphi_{\Delta}(l, s) - \hat{\varphi}_{\Delta}(l, s)\|_{\Delta \times [0, \vartheta]}, \quad (2.11)$$

где $w = (t, \alpha, \Delta v)$ — неизвестный искомый вектор навигационных параметров, δ в списке аргументов левой части равенства означает зависимость задачи от ошибок измерения, $\Gamma = \Gamma(0)$ — заданная по результатам траекторных измерений форма траектории (получается из (2.10) при нулевом векторе Δv), $\mathcal{W} = \{(t, \alpha, \Delta v)\}$ — компактная область возможного изменения параметров $t, \alpha, \Delta v$. Здесь $\hat{\varphi}$ означает измеренный фрагмент поля F , который отличается от «истинного» фрагмента поля φ на величину ошибки $\delta\varphi(l, s)$.

Модель VI (навигация по структурированному полю). Допустим, что ГФП описывается скалярной функцией двух переменных, имеющей разрывы первого рода (скачки интенсивности) вдоль некоторых линий в области определения. Тогда в качестве эталонной карты геофизического поля можно взять контурный эталон (КЭ) — набор характерных особенностей (например, границ)

объектов поля, расположенных в зоне коррекции. Алгоритм привязки измерений датчика поля к КЭ должен включать в себя цифровую фильтрацию замеров интенсивности поля с целью выделения особенностей, поиск соответствующих особенностей на эталоне и вычисление положения трассы в зоне коррекции, доставляющее наилучшее совмещение измеренной и эталонной информации. Вычисление положения трассы основано на поиске минимума функционала невязки, который оценивает точность совмещения особенностей объектов эталона и особенностей, обнаруженных при движении. В идейном отношении класс алгоритмов навигации, для которых строится модель, относится к корреляционно-экстремальным алгоритмам ориентирования по линейчатым ориентирам [9].

Пусть геофизическое поле F представляет собой набор линий $\{L\}$ (информационных границ) на плоскости (X, Y) . Пусть ось визирования датчика направлена вертикально (вдоль оси Z) и повороты α и $a(s)$ отсутствуют, это условие определяет трассу замеров как проекцию траектории на плоскость (X, Y) , и пусть в процессе измерений фиксируются моменты времени s пересечения границ, причем только тех границ, которые пересекаются под ненулевым углом. Таким образом, фрагмент φ поля в данном случае представляет собой дискретный набор точек пересечения траектории с линиями поля и определяется вектором параметров $w = (t, \Delta v)$ следующим образом:

$$\varphi_{\Delta}(s) = p = \text{Pr}_2(t + t(s) + s \Delta v), \quad s \in [0, \vartheta], \quad k = 1, \dots, n.$$

Ошибки измерения δF состоят из ошибок δs измерения моментов s пересечения границ и ошибок δL положения линий L . В качестве критерия близости измеренной и эталонной информации можно выбрать некоторую метрику отклонения множества измеренных точек трассы замеров от набора линий $\{L\}$. Ниже для конкретной мозаики границ, состоящей из прямолинейных отрезков, будет дано более подробное описание модели навигации по структурированному полю.

2.2. Аппроксимация ГФП, обеспечивающая минимум ошибки навигации. Задача навигации должна решаться на бортовом компьютере, при этом необходимо оперативно вычислять фрагмент φ на Δ . Для экономии памяти бортовой ЭВМ и сокращения объема вычислений целесообразно вместо F хранить на борту аппроксимирующую функцию p из некоторого класса $P = \{p\}$ вектор-функций простой структуры, например сплайн-функцию заданного порядка, и вместо задачи $d(w, F)$ решать задачу

$$d(w, p) = \inf \|\varphi(\cdot, F) - \varphi(\cdot, p)\|. \quad (2.12)$$

Пусть $W(w, p) = (T(w, p), A(w, p))$ — одно из решений задачи (2.12), например наиболее удаленное от w в евклидовой норме решение, т. е.

$$|w - W(w, p)| = \sup\{|w - W| : W \in \arg d(w, p)\}.$$

В дальнейшем ради простоты будем считать, что такое решение определяется однозначно для любых $w \in W$. Обозначим через

$$\mathcal{D}(p) = \max\{|w - W(w, p)|^2 : w \in W\}$$

наибольшую из возможных ошибку навигации. Рассмотрим задачу (см., например, [5]) поиска аппроксимирующей функции p из линейного класса P , реализующей нижнюю грань

$$\inf\{\mathcal{D}(p) : p \in P\}. \quad (2.13)$$

При ее исследовании важную роль играет отображение

$$q \mapsto W(w, q) = \{W(w, q)\}_{i=1}^6 \quad (w \in W). \quad (2.14)$$

Поскольку норма $\|\cdot\|$ непрерывна, отображение

$$q \mapsto \arg d(w, p)$$

полунепрерывно сверху, а при условии единственности решения $W(w, p)$ отображение (2.14) непрерывно. Если оно дифференцируемо в «точке» $p \in P$, то его производная есть линейное отображение из P в $\mathbb{R}^6$ для моделей III, IV (в $\mathbb{R}^4$ для модели II и в $\mathbb{R}^3$ для модели I)

$$q \mapsto \gamma = \{\gamma(q)\}_{i=1}^6,$$

где

$$\gamma(q) = \gamma(w, p, q) = \left. \frac{dW(w, p + \lambda q)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{W(w, p + \lambda q) - W(w, p)}{\lambda}.$$

Для вычисления производных γ введем функцию

$$S = S(\lambda, W, \cdot) = S(\lambda, W, p, q, \cdot) = \varphi(\cdot, p + \lambda q) - \varphi(\cdot, F) \quad (W = (T, A), p, q, \in P)$$

при фиксированном $w = (t, a)$.

Если функции $p, q \in P$ и F дифференцируемы, то функция $S(\lambda, W, \cdot)$ кусочно-дифференцируема, точнее, она дифференцируема по W в точках непрерывности и множество ее точек разрыва имеет нулевую меру. Выпишем условие дифференцируемости функции $\varphi(\cdot, F)$ по $t, a, \cdot$ на области $\mathcal{W} \times \Delta$. Пусть $l \in \Delta$, θ — угол между l и осью $-Z$. Это условие имеет вид

$$\max \left\{ \frac{\partial F_1(u)}{\partial r} : u \in Q, r \in \mathbb{R}^2, |r| = 1 \right\} < \min \{ \operatorname{ctg} \theta : l \in \Delta, (t, a) \in \mathcal{W} \}. \quad (2.15)$$

Будем считать, что в дальнейшем оно выполняется, а также такое условие выполняется для первой компоненты функции $p + \lambda q$ при всех малых λ . Тогда

$$S(\lambda, W, \cdot)|_{(1-i+6)} = S(\lambda, W, \cdot)|_{(1-6)} + S'_{-i}(\lambda, W, \cdot) \delta W + o(\delta W). \quad (2.16)$$

Если функции $p, q \in P$ и норма $\|\cdot\|$ дважды дифференцируемы, тогда, обозначив

$$\begin{aligned} \omega(\lambda, W) &= \omega(\lambda, p, q, W) = \frac{\partial \|S(\lambda, W, \cdot)\|}{\partial W}, \\ \omega(W) &= \omega(\lambda, p, q, W) = \left. \frac{\partial \omega(\lambda, W)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, \\ \omega(W) &= \omega(p, W) = \frac{\partial \omega(0, W)}{\partial W}, \\ W(w, p + \lambda q) &= W(p + \lambda q), \quad W(w, p) = W, \end{aligned}$$

получим

$$\omega(\lambda, W(p + \lambda q)) = \omega(0, W) + \lambda[\omega(0, p, q, W) + \varepsilon] + \sum_{i=1}^6 \delta W [\omega(p, W) + \varepsilon] \quad (i = 1, \dots, 6), \quad (2.17)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\delta W \rightarrow 0$. Поскольку $W(w, p + \lambda q)$ и $W(w, p)$ доставляют минимум по W нормы $\|S(\lambda, W, \cdot)\|$ и $\|S(0, W, \cdot)\|$ соответственно в задаче (2.12), то частные производные этой нормы по W обращаются в нуль:

$$\omega(\lambda, W(w, p + \lambda q)) = 0, \quad \omega(0, W(w, p)) = 0.$$

Поэтому соотношение (2.17) принимает вид

$$\lambda[\omega(0, p, q, W(w, p)) + \varepsilon] + \sum_{i=1}^6 \delta W [\omega(p, W(w, p)) + \varepsilon] = 0 \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (2.18)$$

Обозначим

$$B(W(w, p)) = B(p, W(w, p)) = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{16} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{61} & \dots & \omega_{66} \end{vmatrix},$$

где $\omega = \omega(p, W(w, p))$, и пусть

$$B = B(p, q, W(w, p)) —$$

определитель, полученный из определителя B заменой i -го столбца столбцом, составленным из элементов ω ($i = 1, \dots, 6$). В силу непрерывности отображения $q \mapsto W(w, q)$ имеем

$$W(w, p + \lambda q) \rightarrow W(w, p) \quad (\lambda \rightarrow 0).$$

Решая систему (2.18) относительно δW и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. Если норма $\|\cdot\|$ дважды дифференцируема по Фреше и функции $p, q \in P$ дважды дифференцируемы, $B = B(W(w, p)) \neq 0$, а отображение $q \mapsto W(w, q)$ однозначно, тогда оно дифференцируемо и компоненты $\gamma = \gamma(w, p, q)$ этого отображения выражаются формулами

$$\gamma = -\frac{B}{B} \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (2.19)$$

Выразим элементы определителей B , B через опорный функционал. Напомним, что линейный функционал $f = f$ называется опорным (см., например, [13]) для нормы $\|\cdot\|$ в «точке» $S = S(\cdot)$, если

$$\|f\| = \|S\|, \quad f(S) = \|S\|^2.$$

Известно, что если норма $\|\cdot\|$ дифференцируема по Гато, то для функций $S(\cdot)$, $s(\cdot)$ выполняется равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\|S + \alpha s\| - \|S\|}{\alpha} = f(s),$$

а дифференцируемость нормы по Гато эквивалентна сильно-слабой непрерывности отображения $S \mapsto f$. Из (2.16) следует, что

$$\omega(\lambda, W) = \frac{\partial \|S(\lambda, W, \cdot)\|}{\partial W} = f(S'_i).$$

Если норма $\|\cdot\|$ дважды дифференцируема (по Фреше), то отображение $S \mapsto f$ дифференцируемо. Пусть f' — производная Фреше этого отображения. Для краткости будем обозначать

$$W + \delta W = (W_1, \dots, W + \delta W, \dots, W_6), \quad S(0, W, l) = S(W).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega &= \lim_{j \rightarrow 0} \frac{\omega(0, W + \delta W) - \omega(0, W)}{\delta W} = \\ &= \lim_{j \rightarrow 0} \frac{1}{\delta W} [f(S'_i(W + \delta W)) - f(S'_i(W))] = \\ &= \lim_{j \rightarrow 0} \left[\frac{(f(S'_i(W + \delta W)) - f(S'_i(W))) \|S(W + \delta W) - S(W)\|}{\|S(W + \delta W) - S(W)\| \delta W} + \right. \\ &\quad \left. + f(S'_i(W)) \left(\frac{S'_i(W + \delta W) - S'_i(W)}{\delta W} \right) \right] = \\ &= f'(S'_i(W)) \|S'_i(W)\| + f(S''_{ij}(W)). \end{aligned}$$

При вычислении ω будем использовать обозначение $S(\lambda, W, l) = S(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \omega &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\omega(\lambda, W) - \omega(0, W)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(S'_i(\lambda)) - f(S'_i(0))}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{(f(S'_i(\lambda)) - f(S'_i(0))) \|S(\lambda) - S(0)\|}{\|S(\lambda) - S(0)\| \lambda} + f(S'_i(0)) \left(\frac{S'_i(\lambda) - S'_i(0)}{\lambda} \right) \right] = \\ &= f'(S'_i(0)) \|S'_i(0)\| + f(S''_{ij}(0)). \end{aligned}$$

Итак, доказано следующее предложение.

Предложение 1. Пусть выполнены условия теоремы 1, f — опорный функционал для нормы $\|\cdot\|$ в «точке» $S(\lambda, W, \cdot)$, f' — производная Фреше отображения $S \mapsto f$, тогда

$$\begin{aligned} \omega &= f'(S'_i) \|S'_j\| + f(S''_{ij}), \\ \omega &= f'(S'_i) \|S'\| + f(S''_{ii}), \end{aligned}$$

где функция S и ее производные взяты в точке $(0, W, \cdot)$.

Необходимое условие на функцию $p \in P$, реализующую точную нижнюю грань (2.13), выражается через производную

$$\frac{\partial \mathcal{D}(p)}{\partial q} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\mathcal{D}(p + \lambda q) - \mathcal{D}(p)}{\lambda}$$

функционала $\mathcal{D}$ в «точке» $p \in P$ по любому «направлению» $q \in P$. В силу теоремы В. Ф. Демьянова (см. [8, с. 71]) о дифференцировании функции максимума для функционала $\mathcal{D}(p) = \max\{|w - W(w, p)|^2 : w \in \mathcal{W}\}$ имеет место формула

$$\frac{\partial \mathcal{D}(p)}{\partial q} = \max_{\in \arg \mathcal{D}(\cdot)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{i=1}^6 [w_i - W(w_i, p + \lambda q)]^2 = \max_{\in \arg \mathcal{D}(\cdot)} (-2) \sum_{i=1}^6 [w_i - W(w_i, p)] \gamma_i(p, q). \quad (2.20)$$

Используя (2.19), (2.20), по теореме Ферма получаем необходимое условие экстремальности функции $p \in P$ в задаче (2.13).

Теорема 2. Пусть норма $\|\cdot\|$ и функции из P дважды дифференцируемы. Если точная нижняя грань (2.13) достигается на функции $p \in P$ и $B = B(W(w, p)) \neq 0$, то для любой функции $q \in P$

$$(\text{sign } B) \max_{\in \arg \mathcal{D}(\cdot)} \sum_{i=1}^6 [w_i - W(w_i, p)] B \leq 0,$$

где $B = B(p, q, W(w, p))$.

3. АЛГОРИТМЫ СОВМЕЩЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В рамках принятого «экстремального» подхода построение алгоритма привязки измеренного фрагмента к эталону ГФП включает выбор способа задания эталонной карты поля, описание множества допустимых гипотез, т. е. снятых с эталона фрагментов, соответствующих допустимым параметрам из $\mathcal{W}$, и разработку собственно процедуры поиска наилучшей гипотезы.

В настоящее время весьма распространена схема процедуры поиска, содержащая следующие три основных этапа:

- предварительная обработка замеров — фильтрация ошибок измерений, преобразование измеренных фрагментов к виду, удобному для совмещения с эталоном;
- этап «грубого» поиска — это, как правило, переборный поиск по узлам сетки в множестве допустимых трасс (т. е. в области навигационных параметров $\mathcal{W}$);
- этап «тонкого» спуска с фильтрацией низкочастотных ошибок.

В рамках этой общей схемы проектировщику предоставляется достаточно много параметров, позволяющих получить необходимую точность и скорость минимизации для каждой конкретной задачи. Такими параметрами являются, в частности, выбор грубого и тонкого функционалов, выбор узлов сетки для перебора, выбор метода минимизации на «тонком» этапе — градиентный метод (с подбором соответствующего шага), аналитический метод (явное решение уравнений, если это позволяет тонкий функционал), выбор типа и коэффициентов фильтров и т. п.

Случай, когда измеренные фрагменты являются одномерными реализациями, достаточно глубоко изучен [2]. Особый интерес сегодня представляет случай двумерных фрагментов — *изображений*. Основные проблемы здесь — это создание быстродействующих алгоритмов предварительной обработки и построение инвариантных к геометрическим искажениям надежных методов поиска наилучшей гипотезы.

В данном разделе обсуждаются два конкретных случая задачи навигации по изображениям. Описывается метод привязки кадра измеренной информации к эталонному изображению сцены, основанный на выделении граничных элементов с экстремальными характеристиками на измеренном кадре. Этот метод был предложен В. Л. Гасиловым [6] для тепловизионной системы наведения. Во второй части раздела рассматривается задача навигации по изображениям точечных ориентиров.

3.1. Метод максимальных граничных элементов. Как отмечалось выше, основными компонентами системы коррекции навигационных ошибок по информации от кадровых датчиков являются эталонное изображение сцены, алгоритм обработки измеренного кадра информации и алгоритм привязки текущего фрагмента к эталону сцены. Рассмотрим каждый из этих компонентов.

Подготовка эталона. Эталон готовится с помощью трехмерной сцены, содержащей цель и окружающие ее объекты. Для расчетной точки визирования и при расчетном ракурсе формируется изображение сцены как совокупности видимых датчиком ребер объектов. Видимые ребра на изображении разграничивают либо различные объекты, либо отдельные грани одного объекта. Значимость ребер на эталонном изображении для задачи распознавания определяется типом используемого датчика. Особую роль играют ребра, которые хорошо обнаруживаются датчиком. При подготовке эталонного изображения необходимо в первую очередь обеспечить присутствие на нем основных значимых ребер.

Эталон получается из изображения путем дискретизации границ (ребер) по положению и по углу наклона границ на изображении. При квантовании по положению изображение сцены переводится в матрицу граничных и неграничных точек. Размер этой матрицы — от 128×128 до 256×256 элементов. При квантовании по углу наклона каждый из граничных элементов получает атрибут направленности по следующему правилу. В системе координат изображения диапазон 0° — 360° разбивается на 16 секторов по $22,5^\circ$ каждый. Пары противоположных секторов кодируются числами от 1 до 8. Таким образом, эталон сцены, используемый при решении задачи классификации, представляет собой матрицу из $M \times M$ элементов. Элемент матрицы равен 0, если он не является граничным, для граничных элементов его значение варьируется от 1 до 8 в зависимости от направления границы.

Граничные элементы эталона несут информацию лишь о потенциальной возможности перепада измеряемой датчиком характеристики и о направлении соответствующей границы при ее обнаружении. Величина самого перепада и даже знак этой величины в эталонной информации не требуются для работы алгоритма.

Обработка кадра измеренной информации. Текущее изображение, полученное при сканировании датчиком района цели, имеет размеры $m \times m$ элементов (обычно 64×64 или 128×128 пикселей). Обработка изображения в соответствии со следующим алгоритмом.

1. На измеренном фрагменте выделяются граничные элементы. Для этого используется специализированная процедура с маской 8×8 пикселей.
2. Для выделенных элементов определяются направления границы и подсчитывается величина перепада интенсивности сигнала по нормали к границе.
3. Измеренный фрагмент делится на неперекрывающиеся зоны (клетки) размерами от 16×16 до 32×32 элементов. Всего получается 16—64 зон.
4. Для каждой зоны находится максимальный граничный элемент с наибольшим по модулю перепадом интенсивности.
5. Максимальные граничные элементы упорядочиваются по убыванию величины перепада. Из этой последовательности отбираются первые 12—25 элементов. Именно эти элементы считаются наиболее значимыми и используются в дальнейшем в процессе привязки фрагмента к эталону сцены.

Привязка текущего кадра к эталонному изображению. На основании найденных характеристик кадра производится сопоставление текущего изображения с эталонным и определяется положение наблюдаемого фрагмента на эталоне сцены. Сопоставление осуществляется по упорядоченной последовательности выделенных граничных элементов. Поиск среди гипотез о положении измеренного фрагмента на эталонном изображении ведется до достижения определенного порогового числа срывов. Под срывом в данном случае подразумевается несовпадение граничных элементов текущего и эталонного фрагментов, превышающее назначенный допуск. При достижении порога по срывам соответствующая гипотеза отбрасывается. Гипотезы, преодолевшие пороговый барьер, упорядочиваются по выбранному количественному показателю — функционалу, оценивающему меру близости текущего изображения и эталонного фрагмента (гипотезы). В качестве решения принимается гипотеза, доставляющая глобальный минимум функционалу.

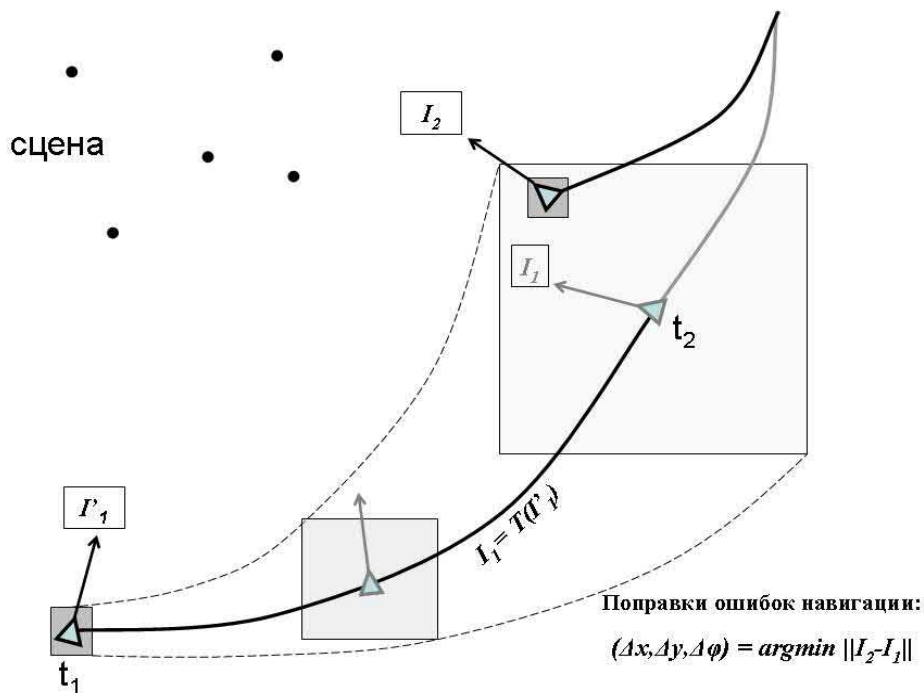


Рис. 1. Навигация движущегося объекта по точечным ориентирам. С помощью увеличивающихся квадратов здесь показано, как по мере движения накапливаются ошибки положения. В момент времени t_1 , когда ошибки минимальны, формируется эталонное изображение I'_1 сцены. Затем, в момент t_2 , когда требуется коррекция накопившихся ошибок, это изображение пересчитывается вдоль известной программной траектории к расчетному положению в этот момент. Так получается эталонное изображение I_1 , используемое затем для коррекции. Одновременно с этим из реализовавшегося в момент t_2 положения формируется текущее изображение I_2 . Сопоставление двух изображений I_1 и I_2 позволит найти неизвестные ошибки положения и азимута.

Проведенные численные эксперименты показали высокую точность, хорошую устойчивость и приемлемое быстродействие метода максимальных граничных элементов.

3.2. Совмещение точечных изображений. Пусть точечный датчик движется по плоскости и наблюдает точечные объекты (сцену), находящиеся в этой же плоскости (см. рис. 1). Состояние датчика характеризуется положением на плоскости и направлением оси обзора. Формируемое датчиком изображение сцены представляет собой набор точек, заданных координатами (α, r) : углом, отсчитываемым от оси обзора датчика и расстоянием от датчика до объекта; $\alpha \in [-\pi, \pi]$, причем положительный угол имеют объекты, наблюдаемые датчиком справа от оси обзора; $r \in [0, +\infty)$.

Пусть имеется два точечных изображения одной сцены, полученные датчиком из различных положений (для определенности назовем их I_1 и I_2); каждое из них задано набором точек — набором пар координат (для каждого изображения система координат своя). Пусть эти изображения заданы с погрешностями таким образом, что ошибка локализации каждой точки не превышает δ (то есть истинное положение точки находится в евклидовой δ -окрестности заданного положения). Если изображение I_1 было получено при известном положении и угловой ориентации движущегося объекта, то оно играет роль эталонного изображения, а по изображению I_2 требуется определить новое положение и ориентацию, в таком случае I_2 — текущее изображение.

В частности, сформулированная постановка возникает в задачах навигации по радиолокационным изображениям [1].

Задача навигации по точечным ориентирам состоит из двух последовательно решаемых задач.

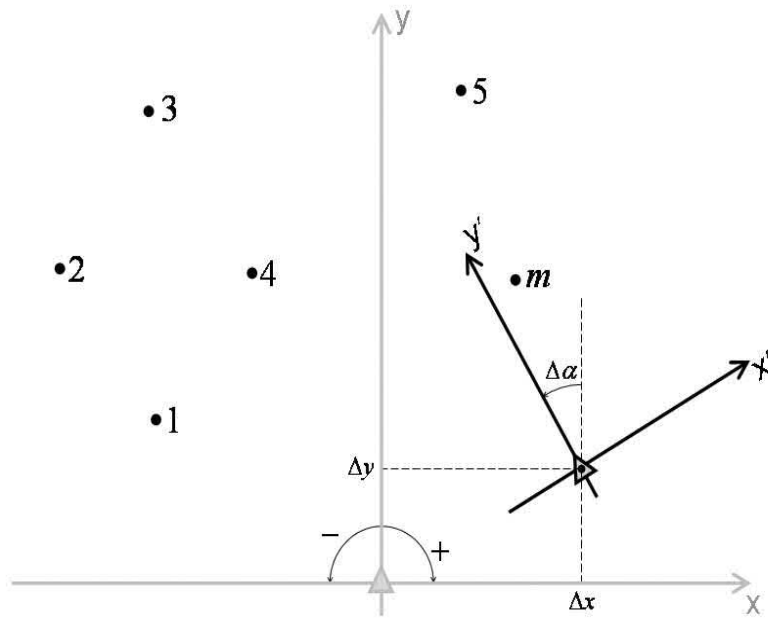


Рис. 2. Задача определения смещения датчика $(\Delta x, \Delta y)$ и поворот оси обзора $(\Delta \alpha)$ относительно исходного (эталонного) положения. Здесь серым цветом показана система координат эталонного изображения, черным цветом — система координат текущего изображения. Точками с цифрами условно показаны точечные ориентиры.

Задача 1. Поиск соответственных точек. Требуется найти такое положение изображения I_2 в системе координат изображения I_1 , при котором устанавливается максимальное число соответствий между точками этих двух изображений. Точка изображения I_2 считается соответственной для точки из I_1 при данном положении I_2 относительно I_1 , если расстояние между точкой из I_1 и точкой из I_2 , переведенной в систему координат I_1 , не больше δ .

Задача 2. Определение навигационных параметров по точечным ориентирам (см. рис. 2). Для заданного соответствия между точками изображений требуется определить смещение датчика $(\Delta x, \Delta y)$ и поворот оси обзора $(\Delta \alpha)$, повлекших переход первого изображения во второе. Δy — это смещение датчика вдоль начального положения оси обзора; Δx — это смещение датчика перпендикулярно начальному положению оси обзора (положительное смещение соответствует движению вправо). $\Delta \alpha$ — это угол отклонения конечного положения оси обзора датчика относительно оси обзора в начальном положении; он может принимать значения от $-\pi$ (поворот влево) до $+\pi$ (поворот вправо).

Алгоритм решения задачи 1 здесь не рассматривается. Заметим лишь, что такой алгоритм обычно заключается в переборе каким-либо образом полученных вариантов положения I_2 относительно I_1 , оценки их качества (путем построения соответствия между точками изображений) и выборе наилучшего в указанном смысле.

Рассмотрим решение задачи 2 (решение получено А. В. Костоусовым). Сначала выпишем прямые формулы преобразования координат точек изображения, показывающие, как отдельные точки получаемого датчиком изображения сцены реагируют на его перемещение и поворот:

$$\begin{cases} r' = \sqrt{(r \sin \alpha - \Delta x)^2 + (r \cos \alpha - \Delta y)^2}, \\ \alpha' = \arctg \left(\frac{r \sin \alpha - \Delta x}{r \cos \alpha - \Delta y} \right) - \Delta \alpha. \end{cases}$$

Однако для того чтобы решить поставленную задачу аналитически, вместо использования полярных координат α, r удобно перейти к декартовым координатам x, y по формулам

$$\begin{cases} x = r \sin \alpha, \\ y = r \cos \alpha. \end{cases} \quad (3.1)$$

Для новых координат прямые формулы имеют вид (см. рис. 2)

$$\begin{cases} x' = (x - \Delta x) \cos \Delta\alpha - (y - \Delta y) \sin \Delta\alpha, \\ y' = (x - \Delta x) \sin \Delta\alpha + (y - \Delta y) \cos \Delta\alpha. \end{cases} \quad (3.2)$$

Для оценки близости двух изображений используем функционал

$$\Phi = \sum_{i=1}^m \{(x' - x)^2 + (y' - y)^2\}, \quad (3.3)$$

где (x', y') — это координаты i -й точки одного изображения, (x, y) — координаты соответственной i -й точки другого изображения, а m — это количество соответственных точек.

Решение поставленной задачи заключается в поиске минимума функционала (3.3) по переменным Δx , Δy , $\Delta\alpha$, где в качестве координат точек первого изображения берутся преобразованные по формулам (3.2) координаты точек начального снимка, а в качестве точек второго — координаты точек конечного:

$$\Phi(\Delta x, \Delta y, \Delta\alpha) = \sum_{i=1}^m \{[(x^0 - \Delta x) \cos \Delta\alpha - (y^0 - \Delta y) \sin \Delta\alpha - x]^2 + [(x^0 - \Delta x) \sin \Delta\alpha + (y^0 - \Delta y) \cos \Delta\alpha - y]^2\} \rightarrow \min. \quad (3.4)$$

Здесь (x^0, y^0) соответствуют точкам начального изображения, а (x, y) — точкам конечного.

Дифференцируя функционал (3.4) по Δx , Δy и $\Delta\alpha$, приравнявая производные к 0 и решая полученную систему уравнений, находим

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \arctg \left(\frac{\overline{x_0 y} - \bar{x}_0 \bar{y} - \overline{y_0 x} + \bar{y}_0 \bar{x}}{\overline{x_0 x} - \bar{x}_0 \bar{x} + \overline{y_0 y} - \bar{y}_0 \bar{y}} \right), \\ \Delta x &= \bar{x}_0 - \bar{x} \cos \Delta\alpha - \bar{y} \sin \Delta\alpha, \\ \Delta y &= \bar{y}_0 + \bar{x} \sin \Delta\alpha - \bar{y} \cos \Delta\alpha, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^0, & \bar{x} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x, & \bar{y}_0 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y^0, & \bar{y} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y, \\ \overline{x_0 y} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^0 y, & \overline{y_0 x} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y^0 x, & \overline{x_0 x} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^0 x, & \overline{y_0 y} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y^0 y. \end{aligned}$$

Важно подчеркнуть, что формулы (3.5) позволяют построить беспойсковый, а значит высокоточный и скоростной, алгоритм оценки величин Δx , Δy и $\Delta\alpha$.

4. СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ИНФОРМАТИВНОСТИ ГФП

Фундаментальное значение для задачи навигации по ГФП имеет вопрос об информативности поля, или, иначе, оценка достижимой точности привязки измерений к эталону. В связи с этим будем различать *локальную* и *глобальную* информативности ГФП.

Если локальная информативность характеризует влияние ошибок исходных данных на ошибку привязки в *некоторой малой окрестности носителя измеренного фрагмента*, то глобальная информативность оценивает ошибку привязки *по всему району ориентирования*, сравнивая в том числе и далекие друг от друга фрагменты.

Исследованию информативности ГФП посвящено достаточно много работ, например, в [11] на основе теории нелинейной фильтрации рассматривается синтез алгоритмов и проводится анализ точности в задачах коррекции навигационных параметров. Там же приведена обширная библиография.

4.1. Модуль информативности поля и глобальные оценки ошибок навигации. Возможность решить задачу навигации определяется свойством информативности геофизического поля F , которое можно характеризовать посредством функции, называемой в дальнейшем модулем информативности. Пусть местоположение ЛА определяется набором параметров w , например $w = (w_1, w_2, \dots, w_6) = (x, y, z, a_1, a_2, a_3)$, $\mathcal{W} = \{w\}$ — компактная область их изменения и для любых $w, W \in \mathcal{W}$ определено расстояние $|w - W|$, например расстояние Евклида

$$|w - W|^2 = \sum_{i=1}^6 |w_i - W_i|^2,$$

и пусть $\varphi(\cdot, F)$, $\varphi(\cdot, F)$ — фрагменты поля F , соответствующие положениям w , W . Здесь точка обозначает аргумент: u в первой и второй моделях, l — в третьей, (l, s) — в четвертой и пятой. Модуль информативности поля вводится следующим образом:

$$J(\tau, F) = \sup_{w, W \in \mathcal{W}} \{|w - W| : \|\varphi(\cdot, F) - \varphi(\cdot, F)\| \leq \tau\}, \quad \tau \geq 0, \quad (4.1)$$

где $\|\cdot\|$ — одна из норм, используемых в (2.2), (2.5), (2.7), (2.9), (2.11).

Модуль информативности поля характеризует глобальную информативность ГФП в районе ориентирования, соответствующем области навигационных параметров $\mathcal{W}$. Действительно, при данной максимальной оценке τ влияния ошибок измерений на меру $\|\cdot\|$ различия фрагментов, которая вычисляется на разности истинного и максимально зашумленного фрагментов, величина $J(\tau, F)$ при заданном уровне ошибок измерений определяет максимально возможную ошибку привязки во всем районе ориентирования.

В дальнейшем многие факты будут формулироваться для всех моделей одновременно, поэтому под Δ будем понимать соответствующий носитель (область определения) фрагмента.

Поле F естественно назвать информативным (с точки зрения задачи навигации), если $\lim_{\tau \rightarrow 0} J(\tau, F) = 0$. Модуль информативности является неубывающей функцией. Он показывает, насколько далеки могут быть точки w , W , если величина $\|\varphi(\cdot, F) - \varphi(\cdot, F)\|_{\Delta}$ мала. В определенном смысле модуль $J(\tau, F)$ есть мера корректности задачи навигации: если при решении задачи

$$d(w, F) = \min_{W \in \mathcal{W}} \{\|\varphi(\cdot, F) - \varphi(\cdot, F)\| : W \in \mathcal{W}\} \quad (4.2)$$

найдена некоторая точка W , тогда ошибка навигации оценивается сверху как

$$|w - W| \leq J(\|\varphi(\cdot, F) - \varphi(\cdot, F)\|, F). \quad (4.3)$$

Приведем оценку ошибки навигации в том случае, когда вместо (4.2) решается задача привязки по фрагменту поля F и функции p , аппроксимирующей это поле:

$$d(w, p) = \min_{W \in \mathcal{W}} \|\varphi(\cdot, p) - \varphi(\cdot, F)\|. \quad (4.4)$$

Введем уклонение (см., например, [5]) двух функций G , H , заданных на Δ :

$$\beta(G, H) = \max_{W \in \mathcal{W}} \|\varphi(\cdot, G) - \varphi(\cdot, H)\|.$$

Нетрудно проверить, что β удовлетворяет всем аксиомам метрики.

Предложение 2. Если $W \in \arg d(w, p)$, то

$$|w - W| \leq J(2\beta(F, p), F). \quad (4.5)$$

Доказательство. Имеем

$$\|\varphi(\cdot, F) - \varphi(\cdot, F)\| \leq \|\varphi(\cdot, F) - \varphi(\cdot, p)\| + \|\varphi(\cdot, p) - \varphi(\cdot, F)\|.$$

Так как $W \in \arg d(w, p)$, то $\|\varphi(\cdot, F) - \varphi(\cdot, p)\| \leq \|\varphi(\cdot, F) - \varphi(\cdot, p)\|$, и с учетом предыдущего неравенства получаем

$$\|\varphi(\cdot, F) - \varphi(\cdot, F)\| \leq 2\beta(F, p).$$

Отсюда по определению (4.1) следует неравенство (4.5).

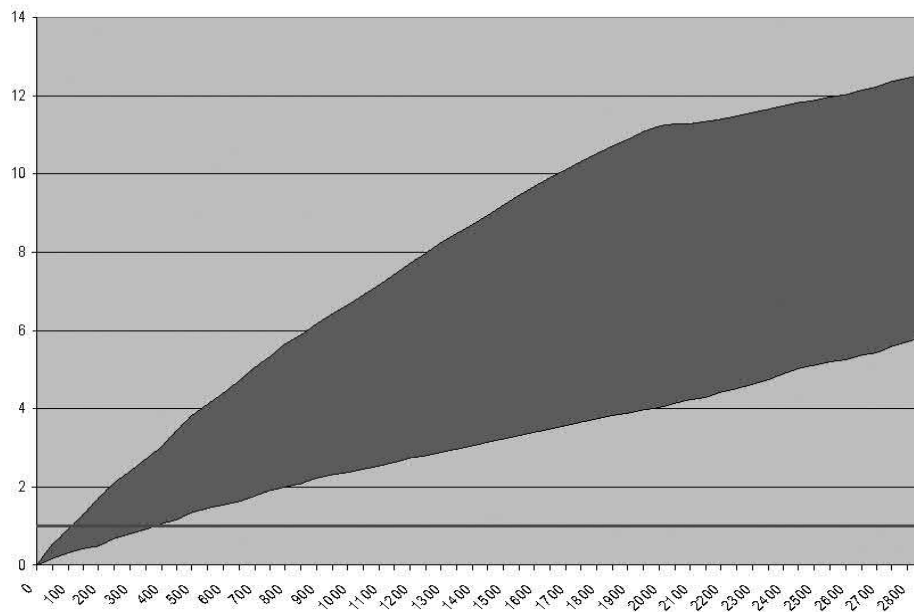


Рис. 3. Разброс значений меры различия фрагментов поля рельефа в зависимости от расстояния J между трассами замеров. Нижняя огибающая этого графика — функция гарантированной информативности $\tau(J)$.

Заметим, что модуль информативности поля в районе ориентирования можно заранее вычислить на ЭВМ с необходимой точностью. На практике это удобнее сделать, используя обратную к модулю информативности неубывающую функцию

$$\tau(J, F) = \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \{ \|\varphi(\cdot, F) - \varphi(\cdot, F)\|_{\Delta} : |w - W| \geq J \} \quad (J \geq 0). \quad (4.6)$$

Функцию $\tau(J, F)$ можно назвать *функцией гарантированной информативности* поля F .

На рис. 3 изображен график разброса значений квадратичной нормы $\|\cdot\|_{\Delta}$ двух фрагментов рельефа F в зависимости от расстояния J между векторами навигационных параметров. Нижняя огибающая этого графика есть функция гарантированной информативности $\tau(J, F)$.

В качестве примеров (см. [5]) дадим оценку сверху модулю информативности для многочленов и рациональных дробей в случае чебышевской нормы

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in D\}, \quad D = Q, \Delta.$$

Пример 1. Пусть

$$Q = [a, b] \subset \mathbb{R}^1, \quad \Delta = [0, \vartheta] \quad (0 < \vartheta < b - a), \quad F(x) = p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (a_i \neq 0),$$

тогда

$$J(\tau, p) \leq \frac{\tau}{|a_n| \cdot n E^{-1}},$$

где

$$E = \inf \{ \|x + \alpha_{-1} x^{-1} + \dots + \alpha_0\|_{\Delta} : \alpha_{-1}, \dots, \alpha_0 \in \mathbb{R}^1 \}.$$

Отметим, что по теореме П. Л. Чебышева (см., например, [5]) $E = \left(\frac{\delta}{2}\right) \frac{1}{2^{-1}}$. Сегмент Q может быть неограниченным.

Пример 2. Если $F(x) = F(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \neq \text{const}$, $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_i \neq 0$, $q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i > 0$ на $[a, b]$, $b = 1$, тогда

$$J(\tau, F) \leq \begin{cases} \frac{\|q\|^2 \tau}{|a| \|n-m\| E_{+,-1}} & (n \neq m), \\ \frac{\|q\|^2 \tau}{|a - a_{-b}| E_{+,-1}} & (n = m), \end{cases}$$

где $l = \max\{i: a_i \neq 0, i = 0, \dots, n-1\}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{[a,b]}$.

Пример 3. Рассмотрим случай многочленов двух переменных

$$F(x, y) = p(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq n} \alpha_{\alpha} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2},$$

определенных на квадрате $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $\Delta = [0, \vartheta] \times [0, \vartheta]$ ($0 < \vartheta < 2$). Для $T = (X, Y) \in \mathbb{R}^2$ введем обозначения

$$c_k(T) = (n-k)\alpha_{-k} X + (k+1)\alpha_{-k-1} Y \quad (k = 0, \dots, n-1),$$

$$E(p, T) = \min_{n-2} \left\| \sum_{i=0}^{n-2} c_i x^{i-1} y - p_{-2} \right\|, \\ E(p) = \min_{|T|=1} E(p, T).$$

Если многочлен p такой, что не существует T , $|T| = 1$, для которого $c_k = 0$ при всех $k = 0, \dots, n-1$, то $E(p) > 0$ и

$$J(\tau, p) \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{-1} \frac{\tau}{E(p)}.$$

Неравенства (4.3), (4.5) показывают, что для оценки ошибки навигации важно знать характер поведения модуля информативности в нуле, в частности величину его производной в нуле. Для моделей I–IV имеет место (см., например, [12]) следующее утверждение.

Теорема 3. Если $J(\tau, F) \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow 0$), то

$$\frac{dJ(0, F)}{d\tau} = \left\{ \min_{\varphi \in \mathcal{W}} \lim_{\tau \rightarrow 0} \min_{|\varphi - \varphi_0| = \tau} \frac{\|\varphi(\cdot, F) - \varphi_0(\cdot, F)\|_{\Delta}}{\varepsilon} \right\}^{-1}. \quad (4.7)$$

Свойство информативности поля F по отношению к преобразованию поворота характеризуется модулем

$$J(\tau, F) = \sup_{|\varphi - \varphi_0| = \tau} \{|\varphi - \varphi_0|: \|\varphi(\cdot, F) - \varphi_0(\cdot, F)\|_{\Delta} \leq \tau\}.$$

Приведем формулу для производной в нуле этого модуля в случае модели II. Предполагается, что задано отображение $t \mapsto a_t$, ставящее в соответствие каждой точке t свое преобразование поворота $\mathbb{R}^3$ вокруг вертикальной оси.

Теорема 4 ([12]). Пусть функция F непрерывно дифференцируема, преобразование $a = a_t$ непрерывно по t и $\lim_{\tau \rightarrow 0} J(\tau, F) = 0$, тогда

$$\frac{d}{d\tau} J(0, F) = \left[\inf_{|u|=1} \left\| \frac{\partial F(a(u) + u)}{\partial n} \right\|_{\Delta_t} \right]^{-1},$$

где n — нормаль к вектору $a(u)$, $|u|$ — евклидова длина вектора $u \in \mathbb{R}^2$.

4.2. Оценки локальной информативности ГФП.

4.2.1. Оценка локальной информативности непрерывного поля. В данном разделе для простейшего случая модели V излагается методика исследования информативности непрерывного скалярного геофизического поля. Эта методика была предложена В. Л. Гасиловым [7] для рельефометрических систем.

Упрощение задачи состоит в следующем. Пусть поле F является скалярным, конус Δ состоит из одного вертикального луча, преобразование поворота α является фиксированным и угловыми колебаниями ЛА можно пренебречь, т. е. $a(s) = E$ при $0 \leq s \leq \vartheta$. Кроме того, пусть движение происходит на постоянной высоте, тогда можно считать, что траектория ЛА — это двумерная кривая, лежащая в горизонтальной плоскости координат $\{X, Y\}$. Таким образом, множество допустимых трасс параметризуется четверкой $w = (x, y, \Delta v, \Delta v)$: координатами начальной точки трассы и ошибками по скорости. Эти четыре параметра и требуется найти.

Пусть измерения поля F производятся в точках траектории, соответствующих моментам $\{s\}$, $i = 0, \dots, N$, промежутка времени $[0, \vartheta]$. Этим точкам соответствует трасса замеров — набор точек $\{x, y\}$ (см. (2.10)):

$$x(w) = x + x(s) + s \Delta v, \quad y(w) = y + y(s) + s \Delta v,$$

где $(x(s), y(s))$ — полученные по показаниям ИНС приращения координат точек траектории.

Измеряемый фрагмент $\hat{\varphi}$ поля F в данном случае — это дискретный набор $N + 1$ значений

$$\hat{F}(w) = F(w) + \delta F, \quad i = 0, \dots, N,$$

где $F(w) = F(x(w), y(w))$ — значение функции F в точках трассы замеров, δF — ошибка i -го замера. Обозначим через δF вектор с компонентами δF_i , $i = 0, \dots, N$.

В качестве нормы $\|\cdot\|_{\Delta \times [0]}$ выберем сумму квадратов разностей измеренных и эталонных значений поля: $\Phi(\bar{w}, w, \delta F) = \sum_{i=0}^N (F(\bar{w}) - \hat{F}(w))^2$.

Задача навигации (2.11) теперь имеет вид

$$d(w, \delta F) = \min_{w \in \mathcal{W}} \Phi(\bar{w}, w, \delta F). \quad (4.8)$$

Здесь w — вектор «истинных» параметров, при которых произведены измерения ГФП. Пусть $\hat{w}$ — решение задачи (4.8) и $\delta w = \hat{w} - w$ — вектор ошибки привязки. Ошибка привязки возникает за счет ошибок измерений δF и зависит от информативных свойств поля F . Именно оценки этих ошибок позволяют количественно оценить локальную (в окрестности истинной трассы) информативность ГФП. Ниже будет получена система уравнений для вычисления ошибок δw и при вероятностных предположениях об ошибках δF будут выписаны оценки дисперсий ошибок привязки. Для уменьшения выкладок и получения явных выражений для дисперсий рассмотрим случай нулевых ошибок по скорости: $\Delta v = 0$, $\Delta v = 0$. Тогда требуется найти двумерный вектор $\hat{w} = (\hat{x}, \hat{y})$, доставляющий минимум в задаче (4.8), и оценить ошибки $\delta w = (\delta x, \delta y)$. Это будет сделано из необходимых условий экстремума в задаче (4.8):

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}(\hat{w}, w, \delta F) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}(\hat{w}, w, \delta F) = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Обозначим $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ частные производные поля F , вычисленные в точках истинной трассы замеров (при нулевых ошибках измерения). Введем в рассмотрение $(N + 1)$ -векторы F и F , составленные из F_x и F_y соответственно, и пусть, как обычно, (a, b) обозначает операцию скалярного произведения векторов a и b .

В предположении непрерывной дифференцируемости функции F и малости ошибок δx и δy для всех $i = 0, \dots, N$ справедливо приближенное равенство

$$\delta F = F(\hat{w}) - F(w) \approx F_x \delta x + F_y \delta y.$$

Учитывая эти равенства, путем линеаризации системы (4.9) получаем следующую линейную систему уравнений относительно ошибок δx и δy :

$$\begin{cases} (F, F) \delta x + (F, F) \delta y = (F, \delta F), \\ (F, F) \delta x + (F, F) \delta y = (F, \delta F). \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{cases} \delta x = \frac{(F, \delta F)(F, F) - (F, \delta F)(F, F)}{(F, F)(F, F) - (F, F)^2}, \\ \delta y = \frac{(F, \delta F)(F, F) - (F, \delta F)(F, F)}{(F, F)(F, F) - (F, F)^2} \end{cases} \quad (4.10)$$

и выражает явную зависимость ошибок привязки от ошибок измерения δF . Условие неравенства нулю знаменателя в этих формулах допускает простую геометрическую интерпретацию: на трассе должны найтись по крайней мере две точки замеров, в которых градиенты поля высот не коллинеарны.

Предположим, что все $N+1$ компонент вектора δF являются независимыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией σ^2 . Тогда из формул (4.10) получаем следующие выражения для дисперсий ошибок привязки:

$$\begin{cases} \sigma^2 = \sigma^2 \frac{(F, F)}{(F, F)(F, F) - (F, F)^2}, \\ \sigma^2 = \sigma^2 \frac{(F, F)}{(F, F)(F, F) - (F, F)^2}, \end{cases} \quad (4.11)$$

которые и определяют информативность геофизического поля F в окрестности некоторой трассы замеров. Для общей оценки локальной информативности поля в заданной области плоскости (X, Y) формулы (4.11) применяются к множеству трасс, покрывающих эту область.

Важной характеристикой формул (4.10) является их линейность по отношению к ошибкам исходных данных. Это позволяет рассматривать влияние на точность привязки суммы различных ошибок как суперпозицию влияний отдельных ошибок. Поэтому исследование точности коррекции навигационных параметров при сложном составе ошибок в измерениях можно свести к разложению ошибок на относительно простые слагаемые и к изучению влияния на точность каждой из составляющих в отдельности. В качестве таких составляющих могут выступать ошибки картографирования и ошибки измерения поля.

Если, например, после предварительной фильтрации общую ошибку измерений можно рассматривать как сумму независимых стационарных случайных процессов с заданными корреляционными функциями, то дисперсия суммарной ошибки привязки будет равна сумме дисперсий ошибок привязки, каждая из которых обусловлена отдельным случайным процессом. В свою очередь, определение дисперсии каждого слагаемого может быть разбито на два этапа. Сначала по так называемой *номограмме точности* вычисляется дисперсия ошибки привязки для данного периода корреляции и единичной дисперсии составной части ошибки измерения, а затем полученное значение умножается на дисперсию этой составной части.

Номограмма точности [7] определяет дисперсию ошибки привязки в зависимости от периода корреляции ошибки, описываемой заданным стационарным случайным процессом с нулевым средним и единичной дисперсией. Для конкретного района ориентирования, при выбранных параметрах модели навигации, для данного навигационного параметра и для данной составляющей ошибки измерения ГФП номограмма точности рассчитывается по формулам, содержащим коэффициенты линейной зависимости типа (4.10).

4.2.2. Оценка локальной информативности контурного эталона структурированного поля. В данном разделе методика оценки локальной информативности предыдущего раздела применяется к случаю структурированного навигационного поля [6].

Пусть линии ГФП $\{L\}$ заданы на плоскости (X, Y) прямолинейными отрезками с концами (x^0, y^0) , (x^1, y^1) , погрешности эталона ГФП определяются величинами

$$\delta L = \{\delta L\} = \{(\delta x^0, \delta y^0, \delta x^1, \delta y^1)\}$$

согласно формулам

$$\hat{x}^0 = x^0 + \delta x^0, \quad \hat{y}^0 = y^0 + \delta y^0$$

и

$$\hat{x}^1 = x^1 + \delta x^1, \quad \hat{y}^1 = y^1 + \delta y^1.$$

В процессе движения измеряются моменты времени s , в которые траектория движения пересекает границы. Пусть $\hat{s} = s + \delta s$, $k = 1, \dots, n$, — измеренные значения моментов s и δs — ошибка в определении s , n — количество обнаруженных (информативных) границ. Информативные границы пересекаются траекторией под ненулевым углом.

Всюду в обозначениях символ «крышка» означает, что соответствующие величины содержат возмущения (зависят от какой-либо компоненты вектора $\delta F = (\delta s, \delta L)$). Величины без «крышки» вычисляются при нулевых ошибках.

Для уменьшения выкладок и получения явных оценок рассмотрим случай нулевых ошибок по скорости: $\Delta v = 0$, $\Delta v = 0$. Общий случай рассмотрен в [6]. Допустимые трассы в данном случае задаются вектором $w = (x, y)$.

Выберем функционал Φ , оценивающий различие измеренных и эталонных границ, следующего вида:

$$\Phi(\bar{w}, w, \delta F) = \sum_{i=1}^n (\hat{x}(\bar{w}) - \hat{x}(w))^2.$$

Здесь $\hat{x}(\bar{w})$ — x -координата точки $M(\hat{x}(\bar{w}), \hat{y}(\bar{w})) = (\bar{x} + x(\hat{s}), \bar{y} + y(\hat{s}))$ на допустимой трассе, отвечающей измеренному моменту времени $\hat{s}$.

Величина $\hat{x}(\bar{w})$ — это x -координата точки пересечения k -й информативной границы поля с прямой, параллельной оси Ox и проходящей через точку M . Величину $\hat{x}(\bar{w})$ находим из условия пересечения прямой $Y = \hat{y}(\bar{w})$ с k -м отрезком границ:

$$\hat{x}(\bar{w}) = \hat{x}^0 - (\hat{y}(\bar{w}) - \hat{y}^0)\hat{\theta} = \frac{\hat{x}^0\hat{y}^1 - \hat{x}^1\hat{y}^0}{\hat{y}^1 - \hat{y}^0} - \hat{y}(\bar{w})\hat{\theta},$$

где

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{x}^0 - \hat{x}^1}{\hat{y}^1 - \hat{y}^0}.$$

Геометрически величина $\hat{\theta}$ равна тангенсу угла между нормалью к k -му отрезку границы и осью Ox . Поскольку в качестве информативных рассматриваются отрезки границ, которые не параллельны оси Ox , величины $\hat{\theta}$ определены корректно.

Пусть $\hat{w} = (\hat{x}, \hat{y})$ — решение задачи минимизации (4.8) и $\delta w = (\delta x, \delta y)$ — вектор погрешностей привязки вследствие ошибок измерения δF .

Полученная из условия экстремума функционала Φ в точке $\hat{w} = w + \delta w$ система уравнений для погрешностей привязки δw имеет вид

$$\begin{cases} n\delta x + \left(\sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i\right)\delta y = \sum_{i=1}^n \hat{d}_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i\right)\delta x + \left(\sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i^2\right)\delta y = \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i \hat{d}_i, \end{cases} \quad (4.12)$$

где $\hat{d}_i = \hat{x}(\bar{w}) - \hat{x}(w)$. Пусть величины δs малы, тогда можно считать, что

$$x(\hat{s}) = x(s) + \delta s V(s), \quad y(\hat{s}) = y(s) + \delta s V(s),$$

где $(V(s), V(s))$ — вектор скорости в момент s . Если малы и ошибки δL , то систему (4.12) можно линеаризовать по всем компонентам вектора δF . В результате получится система линейных относительно ошибок привязки уравнений с линейными по возмущениям правыми частями.

Решение δw этой системы будет линейно зависеть от вектора ошибок δF . По причине громоздкости здесь не выписываются выражения для этого решения. Приведем конечные оценки локальной информативности контурной мозаики границ (структурированного ГФП), выраженные через дисперсии ошибок привязки.

Рассмотрим прямолинейную, параллельную оси Ox трассу замеров, т. е. $x(s) = Vs$ и $y(s) = 0$, где V — скорость. При условии, что все $4n$ компонент вектора δL и n компонент вектора δs в совокупности являются независимыми случайными величинами с дисперсией σ^2 для компонент δL и дисперсией σ^2 для компонент δs , формулы для дисперсий ошибок привязки σ^2 и σ^2 имеют вид

$$\sigma^2 = \sigma^2 + \sigma^2, \quad \sigma^2 = \sigma^2 + \sigma^2.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{V^2 \sigma^2}{n} \left(1 + \frac{m^2}{\sigma^2} \right), \\ \sigma^2 &= \frac{V^2 \sigma^2}{nD}, \\ \sigma^2 &= \frac{\sigma^2}{n^4 \sigma^4} \sum_{i=1} \left[S^2 (1 + \theta^2) ((y - y^0)^2 + (y - y^1)^2) \left(\theta \sum_{i=1} \theta - \sum_{i=1} \theta^2 \right)^2 \right], \\ \sigma^2 &= \frac{\sigma^2}{n^4 \sigma^4} \sum_{i=1} \left[S^2 (1 + \theta^2) ((y - y^0)^2 + (y - y^1)^2) \left(n\theta - \sum_{i=1} \theta \right)^2 \right] \end{aligned}$$

и

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1} \theta, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1} (\theta - m)^2 -$$

среднее и дисперсия последовательности $\{\theta\}$, $S = \frac{1}{\frac{1}{k} - \frac{1}{n}}$.

Полученные формулы показывают, что локальная информативность контурной мозаики в окрестности заданной трассы тем выше, чем больше число информативных границ и больше разброс величины σ^2 .

Пусть, например, контурное поле состоит из $n = 2l$ линий, где l линий расположены под углом 45° к оси Ox и l линий имеют углы наклона -45° к оси Ox . При этом $|\theta| = 1$ и $m = 0$, $\sigma^2 = 1$. Пусть ошибки эталона отсутствуют ($\sigma^2 = 0$). Тогда из приведенных формул следует, что дисперсии ошибок δx и δy определяются выражениями $\sigma^2 = \sigma^2 = \frac{2}{n}$. Таким образом, σ^2 и σ^2 прямо пропорциональны дисперсии ошибки измерения границ на замерах и обратно пропорциональны числу пересеченных границ.

4.2.3. Оценка локальной информативности точечных изображений. Применим описанную выше схему оценки локальной информативности к полю точечных ориентиров. Для этого оценим влияние ошибок во входных данных на решение (3.5).

Пусть ошибки внесены как в эталонное, так и в текущее изображение:

$$\begin{aligned} x^0 &= x^0 + \varepsilon^0, & y^0 &= y^0 + \varepsilon^0, \\ x &= x + \varepsilon, & y &= y + \varepsilon. \end{aligned}$$

Решение, полученное по ошибочным данным, имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \arctg \left(\frac{\overline{x_0 y} - \bar{x_0} \bar{y} - \overline{y_0 x} + \bar{y_0} \bar{x}}{\overline{x_0 x} - \bar{x_0} \bar{x} + \overline{y_0 y} - \bar{y_0} \bar{y}} \right), \\ \Delta x &= \bar{x_0} - \bar{x} \cos \Delta\alpha - \bar{y} \sin \Delta\alpha, \\ \Delta y &= \bar{y_0} + \bar{x} \sin \Delta\alpha - \bar{y} \cos \Delta\alpha. \end{aligned}$$

Выпишем линейную часть разложения по степеням ε^0 , ε^0 , ε , ε разности между ошибочным и истинным решениями:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha - \Delta\alpha &= \frac{1}{m(u^2 + v^2)} \left[\sum_{=1} \{-v(y^0 - \bar{y}_0) - u(x^0 - \bar{x}_0)\}\varepsilon + \sum_{=1} \{v(x^0 - \bar{x}_0) - u(y^0 - \bar{y}_0)\}\varepsilon + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{=1} \{v(y - \bar{y}) - u(x - \bar{x})\}\varepsilon^0 + \sum_{=1} \{-v(x - \bar{x}) - u(y - \bar{y})\}\varepsilon^0 \right], \\ \Delta x - \Delta x &= \frac{1}{m} \sum_{=1} \varepsilon^0 - \frac{\cos \Delta\alpha}{m} \sum_{=1} \varepsilon - \frac{\sin \Delta\alpha}{m} \sum_{=1} \varepsilon - (\bar{x} \sin \Delta\alpha + \bar{y} \cos \Delta\alpha)(\Delta\alpha - \Delta\alpha), \\ \Delta y - \Delta y &= \frac{1}{m} \sum_{=1} \varepsilon^0 + \frac{\sin \Delta\alpha}{m} \sum_{=1} \varepsilon - \frac{\cos \Delta\alpha}{m} \sum_{=1} \varepsilon + (\bar{x} \cos \Delta\alpha + \bar{y} \sin \Delta\alpha)(\Delta\alpha - \Delta\alpha),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}u &= \bar{x}_0 \bar{y} - \bar{x}_0 \bar{y} - \bar{y}_0 \bar{x} + \bar{y}_0 \bar{x}, \\ v &= \bar{x}_0 \bar{x} - \bar{x}_0 \bar{x} + \bar{y}_0 \bar{y} - \bar{y}_0 \bar{y}.\end{aligned}$$

При условии малости ε^0 , ε^0 , ε и ε можно считать, что это и есть ошибка решения.

Если рассматривать все ε^0 , ε^0 , ε и ε как независимые и одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 , можно найти дисперсию ошибки решения:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta}^2 &= \frac{\sigma^2}{m(u^2 + v^2)} \sum_{=1} \frac{(x^0 - \bar{x}_0)^2 + (y^0 - \bar{y}_0)^2 + (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}{m}, \\ \sigma_{\Delta}^2 &= \frac{2\sigma^2}{m} + \sigma_{\Delta}^2 (\bar{x} \sin \Delta\alpha + \bar{y} \cos \Delta\alpha), \\ \sigma_{\Delta}^2 &= \frac{2\sigma^2}{m} + \sigma_{\Delta}^2 (\bar{x} \cos \Delta\alpha + \bar{y} \sin \Delta\alpha).\end{aligned}\tag{4.13}$$

Для нулевого решения ($\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, $\Delta\alpha = 0$) имеем $x = x^0$, $y = y^0$, $u = 0$. Поэтому (4.13) преобразуется к особенно простому виду

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{2\sigma^2}{mv_0}, \quad \sigma_{\Delta}^2 = \frac{2\sigma^2}{m} \left\{ 1 + \frac{\bar{y}_0}{v_0} \right\}, \quad \sigma_{\Delta}^2 = \frac{2\sigma^2}{m} \left\{ 1 + \frac{\bar{x}_0}{v_0} \right\},$$

где

$$v_0 = \frac{1}{m} \sum_{=1} (x^0 - \bar{x}_0)^2 + \frac{1}{m} \sum_{=1} (y^0 - \bar{y}_0)^2.$$

Полученные формулы позволяют оценить ошибки определения азимута и координат движущегося объекта по точечным ориентирам. Это означает, что с помощью этих формул можно оценивать информативность (локальную) точечных эталонов. Последние из приведенных формул говорят о том, что из координат x и y лучше восстанавливается координата y , отсчитываемая по оси антенны радиолокатора и гораздо хуже восстанавливается x , отсчитываемая в перпендикулярном направлении. Это происходит потому, что в ошибку определения δx входит большая величина $\bar{y}$, равная средней дальности до сцены. Из полученных оценок, в частности, следует, что информативность сцены тем выше, чем больше количество точек сцены m и больше величина v (сумма дисперсий величин x^0 и y^0 в случае нулевого решения).

5. ПОИСК НАИБОЛЕЕ ИНФОРМАТИВНОЙ ТРАЕКТОРИИ

5.1. Модуль информативности поля на траектории. Модели III, IV. Пусть

$$\Gamma = \{t(s) = (x(s), y(s), z(s)): 0 \leq s \leq 1\} -$$

траектория без самопересечений, заданная дифференцируемой вектор-функцией $t = t(s)$,

$$\mathcal{A} = \{a(s) = (a_1(s), a_2(s), a_3(s)): 0 \leq s \leq 1\} -$$

однопараметрическое семейство преобразований поворота пространства $\mathbb{R}^3$, заданное дифференцируемой вектор-функцией $a = a(s)$. Движение ЛА определяет пара

$$\mathbf{W} = (\Gamma, \mathcal{A}) = \{(t(s), a(s)): 0 \leq s \leq 1\},$$

т. е. при каждом $s \in [0, 1]$ локальная система координат аппарата имеет вид

$$t(s) + a(s)(XYZ).$$

Будем предполагать, что по траектории Γ однозначно определяется $\mathcal{A}$, поэтому преобразование $a(s)$ в дальнейшем обозначается через $a(s, \Gamma)$. Приведем примеры таких преобразований.

Пример 4. Для дважды дифференцируемой функции $t = t(s)$ преобразование $a = a(s, \Gamma)$ переводит исходную систему (XYZ) в систему координат, образованную касательным вектором, нормалью и бинормалью к Γ в точке $t(s)$ (называемую трехгранником Френе):

$$a_1 = a_1(s, \Gamma) = \frac{t'(s)}{|t'(s)|}, \quad a_2 = a_2(s, \Gamma) = \frac{t''(s)}{|t''(s)|}, \quad a_3 = a_3(s, \Gamma) = [a_1, a_2],$$

где $[,]$ обозначает векторное произведение. На прямолинейных участках траектории (где $|t''(s)| = 0$) преобразование a следует доопределить с соблюдением условия дифференцируемости $a(s)$.

Пример 5. Пусть для любых $s \in [0, 1]$ касательный к Γ вектор $a_1 = \frac{t'(s)}{|t'(s)|}$ не совпадает с единичным вектором e оси X . Преобразование $a(s, \Gamma)$ есть поворот пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг ортогональной векторам a_1, e оси, переводящее вектор e в вектор a_1 .

Введем понятие модуля информативности поля на траектории для моделей III и IV. В случае модели III при фиксированном $t \in \Gamma$ фрагмент поля будем обозначать одним из следующих способов:

$$\varphi(l) = \varphi_{(t)}(l) = \varphi_{(t, \Gamma)}(l), \quad l \in \Delta, \quad (5.1)$$

где s таково, что $t = t(s)$. Модулем информативности поля F на траектории Γ называется функция

$$J(\tau) = J(\tau, F, \Gamma) = \max\{|t - T|: \|\varphi(l) - \varphi(l)\|_{\Delta} \leq \tau, t, T \in \Gamma\}. \quad (5.2)$$

В случае модели IV фрагмент поля снимается на отрезке $[s, s + \vartheta]$ ($0 \leq s < s + \vartheta \leq 1$), т. е. при движении ЛА на участке траектории от $t = t(s)$ до $t(s + \vartheta)$, и обозначается следующим образом:

$$\varphi(l, s) = \varphi_{(t+s)}(l) = \varphi_{(t+s, \Gamma)}(l), \quad (l, s) \in \Delta \times [0, \vartheta]. \quad (5.3)$$

Модулем информативности F на траектории Γ назовем функцию

$$J(\tau) = J(\tau, F, \Gamma) = \max\{|t - T|: \|\varphi(l, s) - \varphi(l, s)\|_{\Delta \times [0, \vartheta]} \leq \tau, s, s \in [0, 1 - \vartheta]\}. \quad (5.4)$$

Поле F на траектории Γ является информативным, если $J(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +0$. Одной из характеристик информативности поля на Γ является величина производной модуля информативности в нуле

$$\Phi(\Gamma) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{J(\tau) - J(0)}{\tau}.$$

При вычислении $\Phi(\Gamma)$ фрагмент будем обозначать через $\varphi(\cdot)$, где точка означает переменную $l \in \Delta$ для модели III и переменную $(l, s) \in \Delta \times [0, \vartheta]$ в случае модели IV.

Обозначим через $t'(s), a'(s)$ векторы скорости движения точек $t(s), a(s)$ по кривым $\Gamma, \mathcal{A}$ соответственно:

$$t'(s) = \lim_{s' \rightarrow s} \frac{t(s) - t(s')}{s - s'}, \quad a'(s) = \lim_{s' \rightarrow s} \frac{a(s) - a(s')}{s - s'},$$

а через

$$\frac{\partial}{\partial t'} \varphi(\cdot), \quad \frac{\partial}{\partial a'} \varphi(\cdot) -$$

производные по направлениям t', a' функции $\varphi(\cdot)$ по переменным t и a соответственно.

Далее понадобится сформулированное выше условие (2.15) дифференцируемости функции φ в предположении дифференцируемости поля F :

$$\max \left\{ \frac{\partial F_1(u)}{\partial r} : u \in Q, r \in \mathbb{R}^2, |r| = 1 \right\} < \min \{ \operatorname{ctg} \theta(l) : l \in \Delta, a \in A \},$$

где $l \in \Delta$, θ — угол между лучом l и осью $-Z$ и максимум взят по всем направлениям $r \in \mathbb{R}^2$, $|r| = 1$. Для модели IV имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть функции $F(u)$, $t(s)$, $a(s)$ дифференцируемы, выполняется условие (2.15) и $\lim_{\tau \rightarrow +0} J(\tau) = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \Phi(\Gamma) = \max_{\Gamma} & \left\| \frac{|a'(s+s)|}{|t'(s)|} \frac{\partial}{\partial a'(s+s)} \varphi(t+s)(l) + \right. \\ & \left. + \frac{|t'(s+s)|}{|t'(s)|} \frac{\partial}{\partial t'(s+s)} \varphi(t+s)(l) \right\|_{\Delta \times [0,1]}^{-1} = \max_{\Gamma} \left\| \frac{1}{|t'(s)|} \frac{d}{ds} \varphi(t+s)(l) \right\|_{\Delta \times [0,1]}^{-1}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $t \in \Gamma$ и $s \in [0, 1 - \vartheta]$ связаны соотношением $t = t(s)$.

Доказательство. Для каждого достаточно малого $\tau > 0$ найдутся такие точки $t = t$, $T = T$ из Γ , что

$$J(\tau) = |t - T|, \quad \tau = \|\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot)\| = \min_{\Gamma} \{ \|\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot)\| : |t - T| = |t - T| \}.$$

Учитывая, что $J(\tau) = 0$ ($\tau \rightarrow +0$) и, значит, $|t - T| \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow +0$), получим

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{J(\tau) - J(0)}{\tau} &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{J(\tau)}{\tau} = \\ &= \lim_{|t - T| \rightarrow 0} \max_{\Gamma} \left\{ \frac{\|\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot)\|}{|t - T|} : |t - T| = |t - T| \right\}^{-1} = \max_{\Gamma} \left\| \lim_{\Gamma} \frac{\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot)}{|t - T|} \right\|^{-1}. \end{aligned}$$

При фиксированном $l \in \Delta$, $s \in [0, 1 - \vartheta]$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(l, s) - \varphi(l, s)}{|t - T|} &= \frac{\varphi(t+s)(l) - \varphi(t+s)(l)}{|t - T|} + \frac{\varphi(t+s)(l) - \varphi(t+s)(l)}{|t - T|} = \\ &= \frac{\varphi(t+s)(l) - \varphi(t+s)(l)}{|a(s+s) - a(s+s)|} \frac{|a(s+s) - a(s+s)|}{|(s+s) - (s+s)|} \frac{|s - s|}{|t - T|} + \\ &+ \frac{\varphi(t+s)(l) - \varphi(t+s)(l)}{|t(s+s) - t(s+s)|} \frac{|t(s+s) - t(s+s)|}{|s - s|} \frac{|s - s|}{|t(s) - t(s)|}. \end{aligned}$$

Если $T \rightarrow t$ ($t, T \in \Gamma$), то $s \rightarrow s$ и

$$|a(s+s) - a(s+s)| \rightarrow 0, \quad |t(s+s) - t(s+s)| \rightarrow 0.$$

Учитывая дифференцируемость функций F , $t(s)$, $a(s)$ и переходя к пределу при $T \rightarrow t$, убеждаемся в справедливости первого равенства. Второе равенство в (5.5) устанавливается с помощью соотношения

$$\frac{\varphi(l, s) - \varphi(l, s)}{t - T} = \frac{\varphi(t+s)(l) - \varphi(t+s)(l)}{s - s} \frac{s - s}{t(s) - t(s)}.$$

Теорема доказана.

Из приведенной теоремы для модели III следует теорема 6.

Теорема 6. В условиях предыдущей теоремы справедливо соотношение

$$\begin{aligned}\Phi(\Gamma) &= \max_{\Gamma} \left\| \left| \frac{a'(s)}{t'(s)} \right| \frac{\partial}{\partial a'(s)} \varphi_{(t)(t)}(l) + \frac{\partial}{\partial t'(s)} \varphi_{(t)(t)}(l) \right\|_{\Delta}^{-1} = \\ &= \max_{\Gamma} \left\| \frac{1}{|t'(s)|} \frac{d}{ds} \varphi_{(t)(t)}(l) \right\|_{\Delta}^{-1}. \quad (5.6)\end{aligned}$$

Замечание. Аналогичные рассуждения позволяют установить для модуля информативности $J(\tau) = J(\tau, F, \mathcal{A}) = \max\{|a - A| : \|\varphi_{(a+)(a+)}(l) - \varphi_{(A+)(A+)}(l)\|_{\Delta \times [0,1]} \leq \tau, a, A \in \mathcal{A}\}$, где s — число из $[0, 1 - \vartheta]$, для которого $a = a(s)$, равенство

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(\tau, F, \mathcal{A})}{\partial \tau} &= \max_{\mathcal{A}} \left\| \left| \frac{t'(s+s)}{a'(s)} \right| \frac{\partial}{\partial t'(s+s)} \varphi_{(a+)(a+)}(l) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|a'(s+s)|}{|a'(s)|} \frac{\partial}{\partial a'(s+s)} \varphi_{(a+)(a+)}(l) \right\|_{\Delta \times [0,1]}^{-1},\end{aligned}$$

а для модуля

$$J(\tau) = J(\tau, F, \mathbf{W}) = \max_{\mathbf{W}} \{|w - W| : \|\varphi_{(w+)(w+)}(l) - \varphi_{(W+)(W+)}(l)\| \leq \tau, w, W \in \mathbf{W}\}$$

равенства

$$\frac{\partial J(\tau)}{\partial \tau} = \max_{w \in [1-\vartheta, 1]} \left\| \frac{\partial}{\partial w'(s+s)} \varphi_{(w+)(w+)}(l) \right\|_{\Delta \times [0,1]}^{-1} = \max_{w \in [1-\vartheta, 1]} \left\| \frac{1}{|w'(s)|} \frac{d}{ds} \varphi_{(w+)(w+)}(l) \right\|_{\Delta \times [0,1]}^{-1},$$

где $w(s) = w$, w' — касательный вектор в точке w к кривой $\mathbf{W} \subset \mathbb{R}^6$.

5.2. Задача о наиболее информативной траектории. Пусть $\hat{\mathbb{W}} = \{(\Gamma, \mathcal{A})\}$ — совокупность пар, определяющих возможные траектории движения ЛА из t^0 к t^1 , где $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Gamma)$, $t^0, t^1, t^0 \neq t^1$, — фиксированные точки, расположенные над районом Q . Как отмечалось, одной из характеристик информативности геофизического поля на траектории является величина $\Phi(\Gamma)$ производной в нуле модуля информативности $J(\tau, F, \Gamma)$. Рассмотрим задачу поиска пары $\mathbb{W}^0 = (\Gamma^0, \mathcal{A}^0)$, наиболее информативной в следующем смысле. Пусть $\mathbb{W}^0 = \{w^0(s) = (w^0(s))_1^6 : 0 \leq s \leq 1\}$, $w^0(s)$ — дифференцируемые на $[0, 1]$ функции,

$$M \geq M(\mathbb{W}^0) = \max \left\{ \left| \frac{d}{ds} w^0(s) \right| : 0 \leq s \leq 1, i = 1, \dots, 6 \right\}$$

и задано число $\varepsilon \geq 0$. Обозначим через

$$\varepsilon(\mathbb{W}^0) = \varepsilon(\mathbb{W}^0) = \{\mathbb{W} \in \hat{\mathbb{W}} : M(\mathbb{W}) \leq M, |w(s) - w^0(s)| \leq \varepsilon, 0 \leq s \leq 1\}$$

ε -окрестность пары $\mathbb{W}^0$, состоящую из гладких траекторий. Нетрудно видеть, что множество $\varepsilon(\mathbb{W}^0)$ компактно. В качестве показателя информативности геофизического поля на $\varepsilon(\mathbb{W}^0)$ возьмем величину

$$\Phi(\mathbb{W}^0) = \max\{\Phi(\Gamma) : (\Gamma, \mathcal{A}) \in \varepsilon(\mathbb{W}^0)\}. \quad (5.7)$$

В этом разделе устанавливаются необходимые условия на пару $\mathbb{W}^0$, для которой

$$\Phi(\mathbb{W}^0) = \inf\{\Phi(\mathbb{W}) : \mathbb{W} \in \hat{\mathbb{W}}\}.$$

Далее будем предполагать, что отображение $\Gamma \mapsto \mathcal{A} = \{a(s, \Gamma) : 0 \leq s \leq 1\}$, где $\mathbf{W} = (\Gamma, \mathcal{A})$ — пара, определяющая движение ЛА, дифференцируемо (в «точке» $\Gamma \in \hat{\Gamma}$) в следующем смысле.

Свойство D. Для любой кривой

$$\tilde{\Gamma} = \{\tilde{t}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)) : 0 \leq s \leq 1\},$$

такой что $\tilde{t}(0) = \tilde{t}(1) = 0$, существует дифференцируемое по s преобразование поворота $\tilde{a}(s) = \tilde{a}(s, \Gamma, \tilde{\Gamma})$, для которого при $\lambda \rightarrow +0$ выполняется соотношение

$$a(s, \Gamma + \lambda \tilde{\Gamma})(l) = a(s, \Gamma)(l) + \lambda \tilde{a}(s)(l) + o(\lambda) \quad (l \in \Delta),$$

где $\Gamma + \lambda \tilde{\Gamma} = \{t(s) + \lambda \tilde{t}(s) : 0 \leq s \leq 1\}$.

Ввиду (2.15) при достаточно малых λ будет выполнено условие

$$\max \left\{ \frac{\partial F_1(u)}{\partial r} : u \in Q, r \in \mathbb{R}^2, |r| = 1 \right\} < \min \{ \text{ctg } \theta_{(\Gamma + \tilde{\Gamma})} : s \in [0, 1], l \in \Delta \}, \quad (5.8)$$

обеспечивающее дифференцируемость функции $\varphi_{(\Gamma + \tilde{\Gamma})}$.

Представим функцию $\varphi_{(\Gamma + \tilde{\Gamma})}$ в виде

$$\varphi_{(\Gamma + \tilde{\Gamma})}(l) = \varphi_{(\Gamma)}(l) + \lambda \tilde{\varphi}(l, s) + o(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow +0). \quad (5.9)$$

Для $s \in [0, 1]$, $l \in \Delta$ введем следующие обозначения: $t = t(s)$, $\tilde{t} = \tilde{t}(s)$, $\hat{t} = t + \tilde{t}$, $t = t + \lambda \tilde{t}$,

$$\rho(t, a, l) = \rho(t, [t + a(l)] \cap \text{graph } F_1),$$

$$L = a(s, \Gamma + \lambda \tilde{\Gamma})(l), \quad \tilde{L} = (a(s, \Gamma) + \lambda a(s, \tilde{\Gamma}))(l),$$

t — такая точка из множества $(t + L) \cap \text{graph } F_1$, что $|t - t| = \rho(t, a(s, \Gamma + \lambda \tilde{\Gamma}), l)$, $t = t^0$, h — линейный функционал на пространстве $\mathbb{R}^3$, для которого плоскость

$$H = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : h(\omega) = h(t)\}$$

является касательной к $\text{graph } F_1$ в точке t и $h(t - t) > 0$, $p = (t + \tilde{L}) \cap H$, $p = p^0$, $q = (t + \tilde{L}) \cap H$, $r = (t + L) \cap H$. Заметим, что лучи $\tilde{L}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) лежат в одной плоскости. В случае, когда $h(\tilde{t}) \neq 0$, отметим точку g , являющуюся пересечением прямой $\{t + \lambda \tilde{t} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ с плоскостью H , а при $h(\tilde{t}) = 0$ положим $g = t + \tilde{t}$. Введем углы

$$\zeta = \angle pt \quad t, \quad \xi = \angle t \quad tp, \quad \beta = \angle tt \quad g, \quad \alpha = (\text{sign } h(\tilde{t}))(\angle t \quad gt).$$

В случае $h(\tilde{t}) = 0$ положим $\alpha = 0$. Величина $|q - r|$ определяется разностью

$$(a(s, \Gamma + \lambda \tilde{\Gamma}) - a(s, \Gamma) - \lambda a(s, \tilde{\Gamma}))(l),$$

и ввиду условия D

$$|q - r| = o(\lambda). \quad (5.10)$$

Оценим величину $|p - q|$. Если $h(\tilde{t}) = 0$, то

$$|p - q| = \lambda |\tilde{t}|. \quad (5.11)$$

При $h(\tilde{t}) \neq 0$ обозначим $\alpha = \angle t \quad gp$, $\beta = \angle tp \quad g$. Тогда $\alpha \rightarrow \alpha$, $\beta \rightarrow \beta$ ($\lambda \rightarrow +0$) и

$$|p - q| = |t - t| \left| \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \right| = \lambda |\tilde{t}| \left(\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} + \varepsilon(\lambda) \right), \quad (5.12)$$

где $\varepsilon(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +0$. Лучи $\tilde{L}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) лежат в одной плоскости и угол между лучами L и $\tilde{L}$ равен $\lambda \xi$, поэтому

$$|t - p| = |t - t| \frac{\sin \lambda \xi}{\sin(\zeta + \lambda \xi)} = |t - t| \left[\lambda \frac{\xi}{\sin \zeta} + o(\lambda) \right] = \rho(t, a, l) \left[\lambda \frac{\xi}{\sin \zeta} + o(\lambda) \right]. \quad (5.13)$$

Исходя из (5.12), (5.13), введем вектор e , принадлежащий плоскости H :

$$e = |t - t| \frac{\xi}{\sin \zeta} \frac{p - t}{|p - t|} + |\tilde{t}| \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \frac{g - t}{|g - t|}, \quad (5.14)$$

для него ввиду (5.11)–(5.13) справедливо

$$|t + \lambda e - q| = o(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow +0).$$

С учетом (5.10) получаем

$$|t + \lambda e - r| = o(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow +0).$$

Поскольку функция F_1 дифференцируема, то $|t - r| = o(\lambda)$ и, значит,

$$|t + \lambda e - t| = o(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow +0), \quad (5.15)$$

где t — точка из $\text{graph } F_1$, на которой достигается расстояние $\rho(t, a(s, \Gamma + \lambda\tilde{\Gamma}), l)$. Обозначим через e ближайшую к t точку пересечения с $\text{graph } F_1$ луча, исходящего из $t = t + \lambda\tilde{t}$ и содержащего точку $t + \lambda e$. Определим функцию

$$B(\lambda) = B(\lambda, l) = \text{Br}(e) = \text{Br}(e, l). \quad (5.16)$$

Вернемся к представлению (5.9). Если функции F_1, F_2 непрерывно дифференцируемы, то ввиду (2.15) и (5.8) функция φ непрерывно дифференцируема, и с учетом (5.15) получим

$$\rho(t, a(s, \Gamma + \lambda\tilde{\Gamma}), l) = |t - \lambda e| + o(\lambda),$$

$$\text{Br}(t) = \text{Br}(e) + o(\lambda) = B(\lambda) + o(\lambda) = B(0) + \lambda B'(0) + o(\lambda) = \text{Br}(t) + \lambda B'(0) + o(\lambda).$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$|t - \lambda e| = |t - t| \left(1 + \lambda \frac{\cos \zeta}{\sin \zeta} \xi + o(\lambda) \right) + \lambda |\tilde{t}| \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + o(\lambda).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7. Если вектор-функция $F = (F_1, F_2)$ непрерывно дифференцируема и выполнено условие (2.15), то для вектор-функции $\varphi = (\rho, \text{Br})$ имеет место представление

$$\varphi(\Gamma + \tilde{\Gamma})(l) = \varphi(\Gamma)(l) + \lambda \tilde{\varphi}(l) + o(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow +0),$$

где $\tilde{\varphi} = (\tilde{\rho}, \tilde{B})$,

$$\tilde{\rho}(l) = \tilde{\rho}(s, \Gamma, \tilde{\Gamma}, l) = \rho(t, a(s, \Gamma), l) \xi \text{ctg } \zeta + |\tilde{t}(s)| \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

$$\xi = \xi(s), \quad \zeta = \zeta(s), \quad \alpha = \alpha(s), \quad \beta = \beta(s),$$

$$\tilde{B}(l) = \tilde{B}(s, \Gamma, \tilde{\Gamma}, l) = B'(0, l),$$

а функция B определена соотношением (5.16).

Ограничимся рассмотрением модели III, поскольку для модели IV рассуждение аналогичное.

Для формулировки необходимого условия экстремума в задаче (4.8) в случае модели III преобразуем выражение (см. (5.6))

$$\left[\frac{|a'(s)|}{|t'(s)|} \frac{\partial}{\partial a'} \varphi(l) - \frac{\partial}{\partial t'} \varphi(l) \right] \Bigg|_{\substack{= (\cdot) + \tilde{(\cdot)} \\ = (\Gamma + \tilde{\Gamma})}} \quad (5.17)$$

при фиксированных $s \in [0, 1]$, $l \in \Delta$ к виду

$$P(s, \Gamma, l) + \lambda G(s, \Gamma, \tilde{\Gamma}, l) + o(\lambda). \quad (5.18)$$

Подставим в (5.17) $(t + \lambda\tilde{t})' = t' + \lambda\tilde{t}'$ и выражение

$$a'(s, \Gamma + \lambda\tilde{\Gamma}) = a'(s, \Gamma) + \lambda \tilde{a}'(s) + o(\lambda),$$

вытекающее из свойства D. В результате получим представление для (5.17) в виде (5.18), где

$$\left. \begin{aligned} P &= P(s, \Gamma, l) = \left[\frac{|a'|}{|t'|} \frac{\partial}{\partial a'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right] \varphi(\Gamma)(l), \\ G &= G(s, \Gamma, \tilde{\Gamma}, l) = \frac{|a'|}{|t'|} \left(1 - \frac{|\tilde{t}'|}{|t'|} \right) \frac{\partial}{\partial a'} \varphi(\Gamma)(l) + \left(\frac{\partial}{\partial a'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right) \tilde{\varphi}(l). \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Формула (5.6) преобразуется к виду

$$\Phi(\Gamma) = \max_{\Gamma \in [0, 1]} \|P(s, \Gamma, l) + \lambda G(s, \Gamma, \tilde{\Gamma}, l) + o(\lambda)\|^{-1}.$$

Следовательно,

$$\Phi(\mathbb{W}^0) = \max_{(\Gamma, \mathcal{A}) \in (\mathbb{W}^0)} \max_{\Gamma \in [0, 1]} \|P + \lambda G + o(\lambda)\|^{-1}.$$

Имея в виду компактность множеств $\varepsilon(\mathbb{W}^0)$, $[0, 1]$, применим известную теорему В. Ф. Демьянова [8] о дифференцировании функции максимума, тогда получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\Phi(\mathbb{W}^0 + \lambda \tilde{\mathbb{W}}) - \Phi(\mathbb{W}^0)}{\lambda} = \max_{\mathbb{W} \in \arg \Phi_\varepsilon(\mathbb{W}^0)} \max_{\Gamma \in \arg \Phi(\Gamma)} \frac{d}{d\lambda} \|P + \lambda G + o(\lambda)\|^{-1}.$$

Итак, установлена следующая теорема.

Теорема 8. Пусть функции $F(u)$, $t(s)$, $a(s)$ непрерывно дифференцируемы и выполняется условие (2.15), тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\Phi(\mathbb{W}^0 + \lambda \tilde{\mathbb{W}}) - \Phi(\mathbb{W}^0)}{\lambda} = \max_{\mathbb{W} \in \arg \Phi_\varepsilon(\mathbb{W}^0)} \max_{\Gamma \in \arg \Phi(\Gamma)} \frac{f(G)}{\|P\|^2},$$

где $\tilde{\mathbb{W}} = (\tilde{\Gamma}, \tilde{A})$, $\tilde{t}(0) = \tilde{t}(1) = 0$, функции P , G определены в (5.19) и f — опорный линейный функционал в «точке» P для нормы $\|\cdot\|$.

Следствие. Если пара $\mathbb{W}^0$ доставляет минимум функционала Φ , т. е.

$$\Phi(\mathbb{W}^0) = \min\{\Phi(\mathbb{W}) : \mathbb{W} = (\Gamma, A) \in \hat{\mathbb{W}}\},$$

то для любой пары $\tilde{\mathbb{W}} = (\tilde{\Gamma}, \tilde{A})$, $\tilde{t}(0) = \tilde{t}(1) = 0$, выполняется неравенство

$$\max_{\mathbb{W} \in \arg \Phi_\varepsilon(\mathbb{W}^0)} \max_{\Gamma \in \arg \Phi(\Gamma)} f(G) \geq 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-07-90120, 03-01-00419, 02-01-00782).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Г. А., Потапов А. А. Активные системы ориентации по геофизическим полям // Зарубежная радиоэлектроника. — 1988. — № 9. — С. 62–85.
2. Белоглазов И. Н., Джанджгава Г. И., Чигин Г. П. Основы навигации по геофизическим полям. — М.: Наука, 1985.
3. Бердышев В. И. Наилучшая траектория в задаче навигации по геофизическому полю // ЖВМ и МФ. — 2002. — 42, № 8. — С. 1144–1150.
4. Бердышев В. И. Информативность траектории в задаче навигации по полю высот. — Принято к опубликованию в Докл. РАН.
5. Бердышев В. И., Петрак Л. В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. — Екатеринбург: УрО РАН, 1999.
6. Гасилов В. Л., Костоусов В. Б. Задача идентификации параметров движения объекта на основе обработки изображения внешнего информационного поля // Изв. РАН, сер. Техническая Кибернетика. — 1994. — № 3. — С. 78–86.
7. Гасилов В. Л., Красовский Н. Н., Осипов Ю. С. Задачи повышения точности навигации движущихся объектов // Тез. докл. Всесоюзной Школы по проблемам математического обеспечения и архитектуры бортовых вычислительных систем. — Ташкент, 1988.
8. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972.
9. Красовский А. А., Белоглазов И. Н., Чигин Г. П. Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем. — М.: Наука, 1979.
10. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985.
11. Степанов О. А. Методы оценки потенциальной точности в корреляционно-экстремальных навигационных системах. — СПб.: ГНЦ РФ—ЦНИИ «Электронприбор», 1993.
12. Berdyshev V. I. Navigation by means of the field of altitudes and its fragment // Proc. Steklov Math. Inst., Suppl. 1. — 2003. — P. S24–S36.
13. Diestel J. Geometry of Banach Spaces. — Berlin: Springer, 1975.

В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов
E-mail: vkost@imm.uran.ru

РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ В ИГРАХ МНОГИХ ЛИЦ С ВЫБОРОМ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ ПЛАТЫ

© 2005 г. С. А. БРЫКАЛОВ, О. Н. ГОЛОВИНА, А. В. КРЯЖИМСКИЙ

Аннотация. Рассматривается игра многих лиц, в которой каждый из игроков выбирает положительное число, имеющее смысл момента времени. Функции платы содержат несобственные интегралы с бесконечным верхним пределом. Получены необходимые условия для того, чтобы стратегия игрока являлась наилучшим ответом на стратегии других игроков, а также достаточные условия для существования наилучшего ответа. На основе этих результатов сформулированы необходимые условия для того, чтобы набор стратегий являлся равновесным по Нэшу. Приводится результат о редукции исходной игры к игре с конечным числом стратегий у каждого из игроков. Для игры, обладающей определенным свойством симметричности, дается полное описание множества точек равновесия по Нэшу. Строятся алгоритмы для нахождения наилучших ответов и равновесий по Нэшу в исходной игре. Алгоритмы имеют характер конечного перебора.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	42
2. Игра многих лиц с выбором моментов времени	43
3. Наилучшие ответы игроков	45
4. Игра с выбором моментов времени в редуцированной форме	47
5. Регулярная игра с выбором моментов времени	48
6. Алгоритмы решения игры	51
Список литературы	52

1. ВВЕДЕНИЕ

Представленная в данной работе постановка задачи и методы ее исследования подсказаны теорией позиционных дифференциальных игр [5, 6, 9, 12, 13] и теорией дифференциальных игр многих лиц [3, 4]. Рассматривается динамическая игра, в которой игроки выбирают моменты времени, определяющие значения их функций платы, содержащих интегралы. В некотором отношении модель представляет собой аналог известной задачи о выборе правила остановки случайного процесса [8, 10], а также задачи о выборе момента окончания в дифференциальной игре [1]. Исходная динамическая игра, по существу, сводится к статической игре с бесконечным множеством стратегий у каждого из игроков (см. [2, 7]). Для изучаемой игры локализуются значения стратегий наилучшего ответа, указываются условия, достаточные для существования этих стратегий, и обосновываются конечные алгоритмы, позволяющие находить стратегии наилучшего ответа, а также равновесные стратегии. Рассматриваемая постановка связана с некоторыми модельными задачами по планированию магистралей транспортировки энергоносителей [11].

Работа построена следующим образом. В разделе 2 дается описание изучаемой игры многих лиц и налагаются некоторые ограничения. В разделе 3 формулируются и доказываются основные результаты работы. Это теоремы, характеризующие стратегии наилучших ответов и равновесие по Нэшу. В разделе 4 используются результаты из раздела 3, чтобы показать конечную природу стратегий в исходной игре, а именно показывается, что в терминах Нэш-равновесия исходная игра, где каждый игрок имеет бесконечное множество стратегий, эквивалентна игре, в которой игроки имеют конечные множества стратегий. В разделе 5 рассматривается регулярная игра и для нее

доказывается существование равновесия по Нэшу. Полученные результаты позволяют полностью описать все точки равновесия для симметричной игры. В разделе 6 приводится алгоритм, построенный на основе результатов из раздела 3, позволяющий находить наилучшие ответы игроков, а также алгоритм для нахождения точек равновесия по Нэшу.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ, гранты 03-01-00228, 03-01-00737.

2. Игра многих лиц с выбором моментов времени

В этом разделе мы опишем некоторую игру многих лиц, в которой выбираются моменты времени. В игре участвуют n игроков, $n \geq 2$. Предположим, что игра начинается в момент времени $t = 0$. Игрок i выбирает момент времени $t > 0$.

Будем рассматривать функции $C(t)$ ($i = 1, \dots, n$), определенные на полуинтервале $[0, \infty)$ и принимающие на нем положительные значения, а также функции

$$a(t) = -C'(t). \quad (1)$$

Замечание 1. Обычно в моделях такого типа функции $C(t)$ являются убывающими (см. [11]). Здесь мы рассмотрим несколько более общий случай и не будем предполагать монотонность $C(t)$.

Условие 1. Все функции $C : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ($i = 1, \dots, n$) удовлетворяют следующим требованиям:

- (i) C непрерывны;
- (ii) C непрерывно дифференцируемы везде, кроме (быть может) конечного числа точек, в которых существуют и конечны обе односторонние производные функции C ;
- (iii) существует конечная правосторонняя производная функции C в нуле.

Заметим, что условие 1 заведомо выполняется, если все функции C непрерывно дифференцируемы.

Для каждого $i = 1, \dots, n$ и каждого множества $H \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ рассмотрим вещественную функцию $b_i(t)$ аргумента $t \geq 0$. Ниже (см. (4)–(6)) эти функции будут использоваться в определении выражений для платы. Эти выражения имеют вид интегральных функционалов. При подсчете выигрыша игрока i интегрирование будет производиться по переменной $t \in [t, \infty)$, причем для момента времени t в интеграл подставляется функция $b_i(t)$, если натуральные числа $j \in H$ и только они удовлетворяют неравенству $t \leq t$ и для числа i , которое не принадлежит H , t также не превосходит t . Можно трактовать H как множество всех оппонентов игрока i , для которых выбранные ими моменты времени уже остались в прошлом. В начальный момент времени следует рассматривать $b_i(t)$ как «виртуальную» функцию, так как еще не известно, какие моменты времени выберут игроки. Поэтому полагаем, что $b_i(t)$ заданы для всевозможных множеств H . В частности, число t заранее не известно, и поэтому считаем, что $b_i(t)$ определена для всех $t \geq 0$.

Таким образом, мы будем иметь дело с функциями $b_i : [0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$, определенными для каждого $i = 1, \dots, n$ и каждого множества $H \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$.

Замечание 2. Обычно значения $b_i(t)$ положительны [11]. Здесь мы предположим, что функции b_i могут менять знак.

Условие 2. Для каждого $i = 1, \dots, n$ и каждого множества $H \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ функция b_i удовлетворяет следующим требованиям:

- (i) функция b_i непрерывна везде, за исключением (может быть) конечного числа точек, в которых существуют и конечны оба односторонних предела;
- (ii) в точке $t = 0$ функции b_i непрерывны справа.

Очевидно, условие 2 заведомо выполняется, если функции $b_i(t)$ непрерывны по t .

В дополнение к условию 2 наложим на $b_i(t)$ следующее требование, в котором при произвольных фиксированных числах i, t постулируется антимонотонность $b_i(t)$ по аргументу H в смысле частичного порядка, заданного отношением включения подмножеств.

Условие 3. Для каждого $i = 1, \dots, n$ и любых G, H если $G \subset H \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$, причем $G \neq H$, то $b_{-1+1}(t) > b_{-1+1}(t)$ для всех $t \geq 0$.

Множество H , определяющее функцию b_{-1+1} , может быть пустым: $H = \emptyset$. Это соответствует случаю, когда неравенство $t \leq t$ может выполняться лишь для $j = i$. При этом $b_{\emptyset}(t)$ представляет собой «монопольную» подынтегральную функцию для игрока i . Предположим, что в начальный момент времени рассматриваемые функции связаны следующим образом.

Условие 4. Неравенство

$$a(0) > b_{\emptyset}(0) \quad (2)$$

выполняется для любого $i = 1, \dots, n$.

Ниже в формулировке условия 5 и некоторых результатов понадобится следующее обозначение. Для каждого $i = 1, \dots, n$ положим

$$A = \bigcup_{\subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}} \{t \geq 0: a(t) = b_{-1+1}(t)\}. \quad (3)$$

Геометрически A представляет собой набор всех точек t , в которых график функции a пересекает график b_{-1+1} для какого-либо множества $H \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$.

Условие 5. Для каждого $i = 1, \dots, n$ множество A конечно.

Отметим, что условие 5 описывает наиболее типичную ситуацию: случаи, когда график a пересекает график b_{-1+1} бесконечно много раз для некоторого H , по-видимому, следует считать исключительными.

Обозначим через D множество всех точек разрыва функций a и b_{-1+1} для всех $H \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. Как следует из условий 1 и 2, множества D ($i = 1, \dots, n$) конечны.

Для целого $i = 1, \dots, n$, неотрицательного t и положительных величин $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t$ обозначим через $G(t)$, или, более точно, через $G(t | t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t)$ множество номеров j всех оппонентов игрока i , для которых t не превосходит текущего момента времени t :

$$G(t) = G(t | t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t) = \{j \neq i: t \leq t_j\}. \quad (4)$$

В каждый момент времени $t \geq t$ подынтегральное выражение $b(t)$ в функции платы игроку i определяется множеством $G(t)$:

$$b(t) = b(t | t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t) = b_{i(G(t))}(t). \quad (5)$$

Соответствующий интеграл для игрока i имеет следующий вид:

$$B(t_1, \dots, t) = \int_i^{\infty} b(t | t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t) dt.$$

Естественным требованием здесь является конечность интегралов. Сформулируем его следующим эквивалентным образом.

Условие 6. Для каждого $i = 1, \dots, n$ выполняется неравенство

$$\left| \int_0^{\infty} b_{\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}}(t) dt \right| < \infty.$$

Эквивалентность условия 6 и конечности всех интегралов вида $B(t_1, \dots, t)$ следует из того, что для любого номера i и любых положительных чисел $t_1, \dots, t$ в интеграле $B(t_1, \dots, t)$ начиная с момента времени, равного наибольшему из чисел $t_1, \dots, t$, подынтегральная функция $b(t | t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t)$ совпадает с $b_{\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}}(t)$. Для того чтобы получить условие, эквивалентное более сильному требованию абсолютной сходимости интегралов $B(t_1, \dots, t)$, достаточно в неравенстве из условия 6 переместить знак модуля на подынтегральную функцию.

Плата $P(t_1, \dots, t)$ игроку i определяется как величина

$$P(t_1, \dots, t) = -C(t) + B(t_1, \dots, t) = -C(t) + \int_i^\infty b(t | t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t) dt. \quad (6)$$

Рассмотрим следующую игру n лиц с выбором моментов времени. Множество стратегий игрока i ($i = 1, \dots, n$) в этой игре есть множество всех положительных t . Если игроки выбрали стратегии $t_1, \dots, t$, то плата $P(t_1, \dots, t)$ каждому игроку i находится по формуле (6).

3. НАИЛУЧШИЕ ОТВЕТЫ ИГРОКОВ

Будем изучать описанную выше игру многих лиц с выбором моментов времени, предполагая, что выполняются все наложенные выше требования, включая условия 1—6. Вспомним два определения из теории игр применительно к рассматриваемой игре. Стратегия t игрока i называется наилучшим ответом этого игрока на стратегии $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t$ остальных игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, если

$$P(t_1, \dots, t_{-1}, t, t_{+1}, \dots, t) = \max_i P(t_1, \dots, t_{-1}, s, t_{+1}, \dots, t). \quad (7)$$

Наилучший ответ существует, если максимум в правой части (7) достигается в некоторой точке. Заметим, что точка t , в которой достигается максимум, может оказаться неединственной, поэтому игрок может иметь несколько наилучших ответов на заданный набор стратегий других игроков. Набор стратегий игроков $(t_1, \dots, t)$ называют равновесным по Нэшу, если для любого $i = 1, \dots, n$ стратегия t является наилучшим ответом игрока i на заданные стратегии $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t$ игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ (см. [7]). Равновесие по Нэшу соответствует ситуации, в которой никто из игроков не заинтересован менять свою стратегию при условии, что и остальные игроки придерживаются выбранных стратегий.

Ниже будем использовать формулу

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t_1, \dots, t) = a(t) - b(t | t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t), \quad (8)$$

которая следует из (6) и (1).

Следующая теорема, локализирующая значения наилучших ответов, является ключевым моментом нашего анализа.

Теорема 1. Пусть число t является наилучшим ответом игрока i на некоторые стратегии $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t$ остальных игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. Тогда $t \in A \cup D$.

Доказательство. Для фиксированных $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t$ функция

$$\varphi(t) = P(t_1, \dots, t_{-1}, t, t_{+1}, \dots, t)$$

аргумента $t \in [0, \infty)$ непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема вследствие условий 1, 2 и формул (4)—(6). На любом замкнутом отрезке, где функция непрерывно дифференцируема, она может достигать максимума лишь на концах отрезка и в точках, где производная функции обращается в нуль. Поэтому функция $\varphi(t)$ может достигать максимума на $[0, \infty)$ лишь в точках, где производная равна нулю или разрывна, а также в точке $t = 0$. Как следует из (8),

$$\varphi'(t) = a(t) - b(t | t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t). \quad (9)$$

Учитывая (5) и (4), получаем, что все точки, в которых функция $\varphi(t)$ достигает максимума, принадлежат объединению трех множеств A , D и $E = \{0, t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t\}$.

Покажем, что точки, максимизирующие функцию $\varphi(t)$, не могут принадлежать множеству $E \setminus (A \cup D)$. Действительно, как следует из (2), производная (9) положительна в точке $t = 0$, поэтому $\varphi(t)$ не достигает максимума в нуле. Зафиксируем некоторое $j \neq i$ и покажем, что $\varphi(t)$ не достигает максимума в точке $t = t_j$, если $t_j \notin A \cup D$. Возьмем некоторое $\delta > 0$, такое что

интервал $(t - \delta, t + \delta)$ не пересекается с A и D и интервалы $(t - \delta, t)$, $(t, t + \delta)$ не пересекают множество $\{t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t\}$. Воспользуемся (5), (4) и обозначим через G , H такие подмножества множества $\{1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n\}$, что

$$b(t | t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t) = \begin{cases} b_-(t), & \text{если } t \in (t - \delta, t), \\ b_+(t), & \text{если } t \in [t, t + \delta). \end{cases}$$

Очевидно, $G \subset H$, $j \notin G$, $j \in H$, $G \neq H$ и $i \notin H$. Как следует из условия 3,

$$b_-(t) > b_+(t) \quad (10)$$

для всех t . Функции $a(t)$, $b_-(t)$, $b_+(t)$ непрерывны при $t \in (t - \delta, t + \delta)$, поскольку этот интервал не содержит точек из D . Так как $(t - \delta, t)$ не пересекается с A , из (9) вытекает, что $\varphi'(t)$ не меняет знак на интервале $(t - \delta, t)$. Аналогично находим, что $\varphi'(t)$ не меняет знак на $(t, t + \delta)$. Если $\varphi'(t)$ отрицательна на $(t - \delta, t)$, то φ убывает на этом интервале и, очевидно, не может достигать максимума в точке t . Предположим теперь, что $\varphi'(t)$ положительна на $(t - \delta, t)$. Тогда в силу (9) имеем

$$a(t) - b_-(t) > 0 \quad (11)$$

для $t \in (t - \delta, t)$. Мы знаем, что $(t - \delta, t + \delta)$ не содержит точек множества A . Следовательно, (11) выполняется для всех $t \in (t - \delta, t + \delta)$. Тогда для $t \in [t, t + \delta)$ получаем

$$\varphi'(t) = a(t) - b_+(t) > a(t) - b_-(t) > 0;$$

здесь мы использовали (9)–(11). Поэтому функция $\varphi(t)$ растет на полуинтервале $[t, t + \delta)$. Снова видим, что функция $\varphi(t)$ не достигает максимума в точке t . Из вышесказанного можно сделать вывод, что все точки, максимизирующие функцию $\varphi(t)$, принадлежат множеству $A \cup D$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. В доказательстве теоремы 1 фактически не использовалось предположение о том, что множества A и D конечны (см. условия 1, 2 и 5). По сути дела, мы использовали лишь то, что эти множества замкнуты. Предположение о конечности множеств A и D будет существенным для алгоритмов, приведенных в разделе 6.

Следствие 1. Если набор $(t_1, \dots, t_n)$ является равновесным по Нэшу, то $t_i \in A \cup D$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Отметим, что теорема 1 и следствие 1 имеют вид необходимых условий и ничего не утверждают о существовании наилучших ответов и ситуаций равновесия по Нэшу. Приведем теперь результат, позволяющий устанавливать существование.

Теорема 2. Зафиксируем некоторое $i \in \{1, \dots, n\}$. Пусть существует такое $T > 0$, что

$$a(t) < b_{\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}}(t) \quad (12)$$

для всех $t > T$. Тогда для любого набора стратегий $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t_n$ игроков $1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n$ существует наилучший ответ $t_i \in A \cup D$ игрока i на эти стратегии.

Доказательство. Зафиксируем номер i и стратегии $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t_n$ игроков $1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n$, а величину t будем рассматривать как переменную. Из (8), (5) и (4) следует, что для любого достаточно большого t выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t_1, \dots, t_n) = a(t) - b_{\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}}(t).$$

Таким образом, из неравенства (12) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t_1, \dots, t_n) < 0$$

для всех достаточно больших t . Это показывает, что максимальное значение функции

$$\varphi(t) = P(t_1, \dots, t_{-1}, t, t_{+1}, \dots, t_n)$$

на $[0, \infty)$ совпадает с ее максимальным значением на $[0, T]$ для некоторого достаточно большого T . Непрерывная функция $\varphi(t)$ достигает максимума на этом замкнутом отрезке в некоторой точке $t \in [0, T]$. Из (2) следует, что $t > 0$. В соответствии с теоремой 1 получаем $t \in A \cup D$, что и завершает доказательство.

Из формулировки теоремы 2 видно, что на рассматриваемую игру иногда целесообразно налагать также следующее условие.

Условие 7. Для каждого $i = 1, \dots, n$ существует такое $T > 0$, что для всех $t > T$ выполняется неравенство (12).

4. ИГРА С ВЫБОРОМ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ В РЕДУЦИРОВАННОЙ ФОРМЕ

В исследуемой игре с выбором моментов времени каждый из игроков имеет бесконечно много стратегий (см. раздел 2). В этом разделе мы докажем, что исходная игра эквивалентна игре, в которой выбор стратегии каждым из игроков сокращен до конечного набора вариантов; эквивалентность понимается в смысле совпадения множеств точек равновесия по Нэшу.

Пусть выполняются все наложенные выше требования, включая условия 1–7. Определим *редуцированную игру* с выбором моментов времени как игру n лиц, в которой $S = A \cup D$ есть множество всех стратегий игрока i ($i = 1, \dots, n$) и плата $P(t_1, \dots, t)$ игроку i , соответствующая произвольному набору стратегий $(t_1, \dots, t) \in S_1 \times \dots \times S$, задается формулой (6). В редуцированной игре стратегия t игрока i называется его наилучшим ответом на стратегии $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t$ остальных игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, если

$$P(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t) = \max_{s \in S_i} P(t_1, \dots, t_{i-1}, s, t_{i+1}, \dots, t). \quad (13)$$

Набор стратегий $(t_1, \dots, t)$ называется равновесным по Нэшу в редуцированной игре, если для любого $i = 1, \dots, n$ число t является наилучшим ответом игрока i на стратегии $(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t)$ игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ в указанном смысле. В данном разделе игру, описанную в разделе 2, будем называть *исходной игрой*.

Теорема 3. Набор положительных чисел $(t_1, \dots, t)$ образует равновесную ситуацию в исходной игре тогда и только тогда, когда $(t_1, \dots, t)$ образует равновесную ситуацию в редуцированной игре.

Доказательство. Множество всех точек равновесия по Нэшу в исходной игре обозначим через N^1 , а в редуцированной игре — через N^2 . Требуется показать, что $N^1 = N^2$.

Обозначим через $F^1(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t)$ множество всех наилучших ответов игрока i на стратегии $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t$ игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ в исходной игре, а через $F^2(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t)$ множество всех наилучших ответов игрока i на стратегии $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t$ игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ в редуцированной игре. Как следует из теоремы 1,

$$F^1(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t) \subset S. \quad (14)$$

Докажем, что

$$N^1 \subset N^2. \quad (15)$$

По определению равновесия по Нэшу в исходной игре

$$N^1 = \{(t_1, \dots, t) : t \in F^1(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t), i = 1, \dots, n\}, \quad (16)$$

и по аналогичному определению для редуцированной игры

$$N^2 = \{(t_1, \dots, t) : t \in F^2(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t), i = 1, \dots, n\}. \quad (17)$$

Пусть $(t_1, \dots, t) \in N^1$. Из (16) следует, что $t \in F^1(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t)$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда с учетом (14) получаем $t \in S$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Поэтому $t \in F^2(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t)$ для всех $i = 1, \dots, n$. Следовательно, с учетом (17) имеем $(t_1, \dots, t) \in N^2$. Так как $(t_1, \dots, t)$ является произвольной точкой из множества N^1 , то можно заключить, что (15) выполняется.

Докажем обратное включение

$$N^2 \subset N^1. \quad (18)$$

Возьмем произвольный набор $(t_1, \dots, t) \in N^2$. Из (17) следует, что для каждого $i = 1, \dots, n$ выполняется $t \in F^2(t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t)$. Поэтому $t \in S$ для любого $i = 1, \dots, n$ и выполняется (13). По теореме 1 правые части в (13) и (7) совпадают. Следовательно, $t \in F^1(t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t)$ для всех $i = 1, \dots, n$. Из (16) вытекает, что $(t_1, \dots, t) \in N^1$. Таким образом, соотношение (18) выполняется. Из (15) и (18) следует, что $N^1 = N^2$. Теорема доказана.

5. РЕГУЛЯРНАЯ ИГРА С ВЫБОРОМ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ

Как известно из теории игр (см., например, [7]), игра многих лиц с конечным набором стратегий игроков может не иметь точек равновесия по Нэшу. Редуцированная игра n лиц с выбором моментов времени с конечным набором стратегий игроков, имеющая те же положения равновесия по Нэшу, что и исходная игра (см. теорему 3), обладает особой структурой. Это может быть использовано при исследовании вопроса о существовании ситуации равновесия по Нэшу в этой игре. В [11] было обосновано существование равновесия по Нэшу в соответствующей игре двух лиц и приведено полное описание множества точек равновесия по Нэшу в этой игре. В данном разделе будет сделан первый шаг в исследовании условий, достаточных для существования равновесия по Нэшу в игре n лиц рассматриваемого вида. Снова будем полагать, что условия 1–6 из раздела 2 выполняются.

Игра с выбором моментов времени будет называться *регулярной*, если для каждого $i = 1, \dots, n$ функция a непрерывна и существует такая перестановка $(i_1, \dots, i)$ набора $(1, \dots, n)$, что

- (i) для всех $k, j = 1, \dots, n$, таких что $j \neq k$, функция $b_{k \ j}$, где

$$H = \{i_1, \dots, i\} \setminus \{i\}, \quad (19)$$

непрерывна;

- (ii) для всех $k = 1, \dots, n$ существует единственное значение $s^* > 0$, такое что $a_k(s^*) = b_{k \ i_k}(s^*)$;
 (iii) $s^* \leq s_{+1}^*$ ($k = 1, \dots, n-1$);
 (iv) для всех $k, j = 1, \dots, n$, таких что $j < k$, выполняется $a_k(t) \geq b_{k \ j}(t)$ для каждого $t \in [s^*, s_{+1}^*]$, если $k > 1$, и для каждого $t \in [0, s_1^*]$, если $k = 1$;
 (v) для всех $k, j = 1, \dots, n$, таких что $j > k$, выполняется $a_k(t) \leq b_{k \ j}(t)$ для каждого $t \in [s_{-1}^*, s^*]$, если $j < n$, и для каждого $t \geq s^*$, если $j = n$.

Перестановка $(i_1, \dots, i)$ будет называться *регулярной перестановкой игроков* и набор $(s_1^*, \dots, s^*)$ будет называться *регулярной перестановкой стратегий*, соответствующей перестановке $(i_1, \dots, i)$.

Теорема 4. Рассмотрим регулярную игру, где $(i_1, \dots, i)$ — регулярная перестановка игроков и $(s_1^*, \dots, s^*)$ — перестановка стратегий, соответствующая перестановке $(i)_{=1}$. Тогда $(t_1^*, \dots, t^*)$, где $t_k^* = s^*$ ($k = 1, \dots, n$) является равновесным по Нэшу набором в этой регулярной игре.

Доказательство. Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ и

$$\varphi(t) = P_k(t_1^*, \dots, t_{k-1}^*, t, t_{k+1}^*, \dots, t^*).$$

Достаточно показать, что $t_k^* = s^*$ является точкой, максимизирующей функцию $\varphi(t)$ на полуинтервале $[0, \infty)$. Как следует из (8), (5) и (4),

$$\varphi'(t) = a_k(t) - b_k(t), \quad (20)$$

где

$$b_k(t) = b_{k \ i_k}(t), \quad G_k(t) = \{i : t_j^* \leq t, i \neq i\} = \{i : s^* \leq t, i \neq i\}.$$

Пусть множество H определяется формулой (19). Так как $s^* \leq s_{+1}^*$ для всех $j = 1, \dots, n-1$, то

$$G_k(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } t \in [0, s_1^*), \\ H^{-1}, & \text{если } t \in [s_{-1}^*, s^*) \ (j = 2, \dots, n), \\ H, & \text{если } t \geq s^*. \end{cases}$$

Следовательно,

$$b_k(t) = \begin{cases} b_{k\emptyset}(t), & \text{если } t \in [0, s_1^*), \\ b_{k \quad k}^{j-1}(t), & \text{если } t \in [s_{-1}^*, s^*) \quad (j = 2, \dots, n), \\ b_{k \quad k}^n(t), & \text{если } t \geq s^*. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $j = k$. Как следует из определения множества H , равенство $b_{k \quad k}(t) = b_{k \quad k}^{k-1}(t)$ выполняется для всех $t \in [0, \infty)$. Следовательно,

$$a_k(s^*) = b_{k \quad k}(s^*) = b_{k \quad k}^{k-1}(s^*). \quad (21)$$

Так как s^* однозначно определяется равенством (21) и выполняются условия 3 и 4, то $a_k(t) > b_{k \quad k}(t)$ для всех $t \in [0, s_1^*)$ ($k = 1$) и $a_k(t) > b_{k \quad k}^{k-1}(t)$ для всех $t \in [s_{-1}^*, s^*)$ ($k = 2, \dots, n$).

Рассмотрим теперь случай $j < k$. Если $k > 1$, то по определению регулярной игры (см. (iv)) для всех $j = 1, \dots, n$, таких что $j < k$, выполняется $a_k(t) \geq b_{k \quad k}^{j-1}(t)$ для всех $t \in [s_{-1}^*, s^*)$, если $j > 1$, и для всех $t \in [0, s^*)$, если $j = 1$. Следовательно, $a_k(t) \geq b_k(t)$ для всех $t \in [0, s^*)$, и (20) показывает, что функция $\varphi(t)$ возрастает на отрезке $[0, s^*)$. Аналогично можно доказать, что $\varphi(t)$ убывает на $[s^*, \infty)$. Следовательно, s^* является точкой, в которой функция $\varphi(t)$ достигает максимума на полуоси $[0, \infty)$. Теорема доказана.

Покажем, что симметричная игра, в которой все игроки идентичны, является регулярной, и на основе этого опишем множество всех точек равновесия по Нэшу в этой игре. Дадим точное определение этого понятия. Игра называется *симметричной*, если существуют непрерывные функции $a, b^1, \dots, b$, принимающие действительные значения, определенные на полуинтервале $[0, \infty)$, такие что

- (i) $a = a$ для всех $i = 1, \dots, n$;
- (ii) $b(t) > b^{+1}(t)$ ($t \geq 0$) для всех $j = 1, \dots, n-1$;
- (iii) для всех $i, j = 1, \dots, n$ и каждого $(j-1)$ -элементного множества $H \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ выполняется $b = b$;
- (iv) для всех $j = 1, \dots, n$ существует единственное $\tau > 0$, такое что $a(\tau) = b(\tau)$, более того, $a(t) > b(t)$ для всех $t \in [0, \tau)$ и $a(t) < b(t)$ для всех $t > \tau$.

Замечание 4. Из предположений (ii) и (iv) следует, что $\tau < \tau_{+1}$ ($j = 1, \dots, n-1$).

Теорема 5. Пусть игра с выбором моментов времени симметрична. Тогда

- 1) эта игра регулярна;
- 2) для каждой перестановки $(i_1, \dots, i_n)$ множества $\{1, \dots, n\}$ набор стратегий игроков $(t_1, \dots, t_n)$, где $t_k = \tau_{i_k}$ ($k = 1, \dots, n$), является равновесным по Нэшу;
- 3) все ситуации равновесия $(t_1, \dots, t_n)$ имеют структуру, описанную в пункте 2, т. е. $t_k = \tau_{i_k}$ ($k = 1, \dots, n$), где $(i_1, \dots, i_n)$ — перестановка набора $\{1, \dots, n\}$.

Доказательство. 1. Пусть a и $b^1, \dots, b$ — функции, описанные в определении симметричной игры. Обратимся к определению регулярной игры. Очевидно, что для каждого $i = 1, \dots, n$ функция $a = a$ непрерывна. Покажем, что $(1, \dots, n)$ является регулярной перестановкой игроков и

$$(s_1^*, \dots, s_n^*) = (\tau_1, \dots, \tau_n) \quad (22)$$

является регулярной перестановкой стратегий, соответствующей $(1, \dots, n)$. Непрерывность функций $b^1, \dots, b$ и предположение (iii) в определении симметричной игры влекут за собой выполнение предположения (i) из определения регулярной игры. Из предположений (iii), (iv) в определении симметричной игры и замечания 4 следует справедливость предположений (ii) и (iii) из определения регулярной игры. Докажем выполнение предположения (iv) из определения регулярной игры. Возьмем произвольные $k, j = 1, \dots, n$, такие что $j < k$. Рассмотрим произвольное $t \in [s^*, s_{+1}^*) = [\tau, \tau_{+1}]$, если $k > 1$, или произвольное $t \in [0, s_1^*) = [0, \tau_1]$, если $k = 1$. Необходимо показать, что

$$a(t) \geq b_j(t), \quad (23)$$

где (см. (19))

$$H = \{1, \dots, j\} \setminus \{k\} = \{1, \dots, j\}.$$

По предположениям (i) и (iii) в определении симметричной игры

$$a(t) = a(t), \quad b_j(t) = b^{+1}(t). \quad (24)$$

Так как $t \leq \tau_{+1}$, из предположения (iv) в определении симметричной игры следует, что $a(t) \geq b^{+1}(t)$. Учитывая (24), получаем (23). Таким образом, предположение (iv) из определения регулярной игры выполняется. Аналогично доказывается справедливость предположения (v) в определении регулярной игры. Следовательно, $(1, \dots, n)$ является регулярной перестановкой игроков и (22) является регулярной перестановкой стратегий, соответствующей $(1, \dots, n)$. Утверждение 1 доказано.

2. Перенумеруем игроков. Используя утверждение 1 из теоремы 5, находим, что произвольная перестановка $(i_1, \dots, i_n)$ множества $\{1, \dots, n\}$ является регулярной перестановкой игроков и набор стратегий игроков $(t_1, \dots, t_n)$, где $t_k = \tau_{i_k}$ ($k = 1, \dots, n$), является регулярной перестановкой стратегий, соответствующей $(i_1, \dots, i_n)$. По теореме 4 набор стратегий $(t_1, \dots, t_n)$ есть равновесие по Нэшу.

3. Пусть $(t_1, \dots, t_n)$ есть произвольная точка равновесия по Нэшу. Из следствия 1 вытекает, что

$$t_i \in A \cup D \quad (i = 1, \dots, n); \quad (25)$$

здесь D есть множество всех точек разрыва функций a и b , где $H \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$, и A задается с помощью (3). Так как a непрерывна и для каждого множества H функция b совпадает с одной из непрерывных функций $b^1, \dots, b^n$, то множество D пусто, причем $A = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$. Таким образом, (25) можно записать в виде

$$\{t_1, \dots, t_n\} \subset \{\tau_1, \dots, \tau_n\}. \quad (26)$$

Предположим $\{t_1, \dots, t_n\} = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$. Тогда $t_k = \tau_{i_k}$ ($k = 1, \dots, n$), где $(i_1, \dots, i_n)$ — перестановка набора $\{1, \dots, n\}$, и утверждение 3 доказано.

Теперь предположим, что $\{t_1, \dots, t_n\}$ является выборкой с повторениями множества $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$. Докажем, что такая ситуация невозможна, придя к противоречию, и этим завершим доказательство теоремы. Пусть $t_i = \tau$ для некоторых $i, k, m \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq k$. Обозначим

$$\varphi(t) = P(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n). \quad (27)$$

Так как $t_i = \tau$ максимизирует функцию $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, то

$$\varphi'(\tau) = 0. \quad (28)$$

Из (8), (5) и (4) следует, что

$$\varphi'(t) = a(t) - b(t) = a(t) - b(t), \quad (29)$$

где

$$b(t) = b_{i(\cdot)}(t), \quad G(t) = \{j \neq i: t \leq t_j\}. \quad (30)$$

По предположению (iii) из определения симметричной игры

$$b_{i(\cdot)}(t) = b^{(\cdot)+1}(t),$$

где $p(t)$ — количество элементов в множестве $G(t)$. Теперь (29) принимает вид

$$\varphi'(t) = a(t) - b^{(\cdot)+1}(t). \quad (31)$$

Положим $m = 1$. Так как $k \in G(\tau)$, то $p(\tau) \geq 1$. Тогда по предположениям (iii) и (ii) из определения симметричной игры следует

$$b^{(m)+1}(\tau_1) < b^1(\tau_1),$$

и тогда (31) запишется следующим образом:

$$\varphi'(\tau_1) = a(\tau_1) - b^{(m)+1}(\tau_1) > a(\tau_1) - b^1(\tau_1) = 0.$$

Последнее равенство вытекает из предположения (iv) определения симметричной игры. Полученное неравенство $\varphi'(\tau_1) > 0$ противоречит (28).

Теперь положим $m > 1$. Если $p(\tau) \geq m$, получаем противоречие, как при рассмотрении случая $m = 1$, где мы просто заменяем 1 на m . Рассмотрим случай $p(\tau) \leq m - 1$. Пусть сначала $p(\tau) < m - 1$. По предположениям (iii) и (ii) из определения симметричной игры имеем

$$b(\tau) = b_{i(m)}(\tau) = b^{(m)+1}(\tau) > b(\tau).$$

Из (31) следует, что

$$\varphi'(\tau) = a(\tau) - b^{(m)+1}(\tau) < a(\tau) - b(\tau) = 0$$

(см. предположение (iv) в определении симметричной игры). Полученное неравенство $\varphi'(\tau) < 0$ противоречит (28).

Наконец, пусть $p(\tau) = m - 1$. Из определения $G(t)$ (см. (30)) находим

$$G(t) = G(\tau - 1) \subset G(\tau) \setminus \{k\}$$

для всех $t \in (\tau - 1, \tau)$. Следовательно,

$$p(t) = p(\tau - 1) \leq p(\tau) - 1 = m - 2 \quad (t \in (\tau - 1, \tau)).$$

Тогда по предположению (ii) определения симметричной игры

$$b^{(m)+1}(t) \geq b^{-1}(t) \quad (t \in (\tau - 1, \tau)). \quad (32)$$

По предположению (iv) того же определения для всех $t \in (\tau - 1, \tau]$ выполняется неравенство $a(t) < b^{-1}(t)$, что вместе с (32) дает неравенство

$$a(t) < b^{(m)+1}(t) \quad (t \in (\tau - 1, \tau)).$$

Таким образом, из (31) получаем $\varphi'(t) < 0$ для всех $t \in (\tau - 1, \tau)$. Поэтому

$$\varphi(\tau - 1) = \varphi(\tau) - \int_{\tau-1}^{\tau} \varphi'(t) dt > \varphi(\tau).$$

Возвращаясь к определению функции $\varphi(t)$ (см. (27)), заключаем, что $t = \tau$ не является наилучшим ответом игрока i на стратегии $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t$ игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. Поэтому $(t_1, \dots, t)$ не является равновесием по Нэшу, что противоречит предположению. Утверждение 3 теоремы 5 доказано.

6. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ИГРЫ

Будем рассматривать игру многих лиц с выбором моментов времени, описанную в разделе 2. Предполагаем, что выполняются условия 1–7. Приведем алгоритм, позволяющий игроку найти все его наилучшие ответы на заданный набор стратегий других игроков, и алгоритм для проверки того, является ли данный набор стратегий равновесным по Нэшу. С помощью этих алгоритмов можно найти множество всех точек равновесия по Нэшу в рассматриваемой игре многих лиц. Представленные алгоритмы основаны на теоремах 1, 2 и следствии 1.

6.1. Алгоритм поиска наилучших ответов. Входные данные алгоритма:

- (i) целое i , где $1 \leq i \leq n$;
- (ii) функция C ;
- (iii) функции b для всех $H \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$;
- (iv) стратегии $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t$ игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$.

Выходом алгоритма является конечное множество S всех наилучших ответов игрока i на стратегии $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t$ остальных игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$.

Алгоритм действует следующим образом.

Шаг 1. Используем определение (1) для нахождения функции a .

Шаг 2. Используем определение (3) для нахождения конечного множества A .

Шаг 3. Находим конечное множество D всех точек разрыва функций a и b для всех $H \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$.

Шаг 4. Находим объединение $A \cup D$.

Шаг 5. С помощью (4)–(6) вычисляем значения $v(s) = P(t_1, \dots, t_{-1}, s, t_{+1}, \dots, t)$ для всех $s \in A \cup D$.

Шаг 6. Формируем множество S как совокупность всех точек, максимизирующих функцию $v(s)$ при s , пробегающем множество $A \cup D$.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что множество S , являющееся выходом приведенного выше алгоритма, действительно есть множество всех наилучших ответов игрока i на стратегии $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t$ остальных игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$.

Теперь рассмотрим следующий алгоритм, определяющий, является ли заданный набор стратегий игроков равновесным по Нэшу.

6.2. Алгоритм проверки равновесности по Нэшу. Входные данные алгоритма:

- (i) функции C и b для всех $i = 1, \dots, n$ и всех $H \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$;
- (ii) набор стратегий игроков $(t_1, \dots, t)$.

Выход алгоритма есть логическая переменная, принимающая значение ДА, если набор стратегий $(t_1, \dots, t)$ является равновесием по Нэшу, и значение НЕТ в противном случае.

Алгоритм работает следующим образом.

Шаг 1. Полагаем $i := 1$.

Шаг 2. Для игрока i и стратегий $t_1, \dots, t_{-1}, t_{+1}, \dots, t$ игроков $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ применяем алгоритм поиска наилучших ответов и находим множество S всех наилучших ответов игрока i на эти стратегии.

Шаг 3. Если $t \notin S$, работа алгоритма заканчивается с выходом НЕТ.

Шаг 4. Если $t \in S$ и $i < n$, полагаем $i := i + 1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 5. Если $t \in S$ и $i = n$, работа алгоритма заканчивается с выходом ДА.

Замечание 5. Согласно следствию 1 множество всех положений равновесия по Нэшу $(t_1, \dots, t)$ в изучаемой игре конечно и содержится в конечном множестве $N = (A_1 \cup D_1) \times \dots \times (A_n \cup D_n)$. Применяя построенный алгоритм для всех $(t_1, \dots, t) \in N$, можно найти все точки равновесия по Нэшу в рассматриваемой игре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брыкалов С. А. Выбор момента окончания в одной дифференциальной игре // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 1. — С. 105–108.
2. Воробьев Н. Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. — 160 с.
3. Жуковский В. И., Чикрий А. А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — Киев: Наукова думка, 1994.
4. Клейменов А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. — Екатеринбург: Наука, 1993. — 184 с.
5. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 520 с.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
7. Оуэн Г. Теория игр. — М.: Мир, 1971. — 232 с.
8. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. — М.: Наука, 1977. — 168 с.
9. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
10. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. — М.: Наука, 1976. — 272 с.
11. Klaassen G., Kryazhinskii A. V., Tarasyev A. M. Multiequilibrium game of timing and competition of gas pipeline projects // J. Optim. Theory Appl. — 2004. — 120, N 1. — P. 147–179.

12. *Krasovskii A. N., Krasovskii N. N.* Control under lack of information. — Boston: Birkhäuser, 1995. — 324 p.
13. *Krasovskii N. N., Subbotin A. I.* Game-theoretical control problems. — New York: Springer-Verlag, 1988. — 518 p.

С. А. Брыкалов, О. Н. Головина, А. В. Кряжимский
E-mail: brykalov@imm.uran.ru

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ НАВЬЕ—СТОКСА

© 2005 г. **А. И. КОРОТКИЙ**

Аннотация. Исследуются обратные задачи о восстановлении априори неизвестных параметров динамической системы, описываемой краевой задачей для системы уравнений Навье—Стокса. Восстановление осуществляется на основании той или иной допустимой информации о движении динамической системы (решении соответствующей краевой задачи). В частности, одной из рассматриваемых задач является обратная задача, состоящая в восстановлении априори неизвестной правой части системы уравнений Навье—Стокса. Правая часть характеризует плотность внешних массовых сил, действующих на систему. Эта задача, как и многие другие подобные задачи, является некорректной. Для ее решения предлагаются два метода: статический и динамический. Эти методы используют различную исходную информацию.

При решении задачи статическим методом исходной информацией для решения служат результаты приближенного измерения (в том или ином смысле) движения динамической системы на заданном промежутке времени. Здесь восстановление осуществляется апостериорно, по прошествии соответствующего промежутка времени. Для решения задачи этим методом привлекаются понятия и конструкции теории программного управления.

При решении задачи динамическим методом исходной информацией для решения служат результаты приближенных (в том или ином смысле) измерений текущих фазовых положений системы, которые поступают наблюдателю в динамике. Здесь восстановление осуществляется в динамике, по ходу процесса. Для решения задачи динамическим методом привлекаются понятия и конструкции метода динамической регуляризации, основанного на теории позиционного управления.

Рассматриваются также различные модификации и регуляризации предлагаемых методов решения задач, опирающиеся на ту или иную априорную информацию об искомом решении и условиях решения задачи.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	54
1. Статический метод восстановления правой части	58
2. Динамический метод восстановления правой части	66
3. Восстановление начального состояния	69
Список литературы	75

ВВЕДЕНИЕ

Исследуются обратные задачи о восстановлении априори неизвестных параметров динамической системы, описываемой краевой задачей для системы уравнений Навье—Стокса [12, 13, 15, 23]. Восстановление осуществляется на основании той или иной допустимой и доступной информации о движении динамической системы (решении соответствующей краевой задачи).

Сначала рассматривается обратная задача о восстановлении априори неизвестной правой части системы уравнений Навье—Стокса, характеризующей плотность внешних массовых сил, действующих на систему. Эта задача, как и многие другие подобные задачи, является некорректной. Для ее решения предлагаются два метода: статический и динамический. При решении задачи статическим методом исходной информацией для решения служат результаты приближенного измерения (в том или ином смысле) движения динамической системы на заданном промежутке времени. Здесь восстановление осуществляется апостериорно, по прошествии соответствующего промежутка времени. Для решения задачи этим методом привлекаются понятия и конструкции теории

программного управления [8, 20]. При решении задачи динамическим методом исходной информацией для решения служат результаты приближенных (в том или ином смысле) измерений текущих фазовых положений системы, которые поступают наблюдателю в динамике. Здесь восстановление осуществляется в динамике по ходу процесса. Для решения задачи динамическим методом привлекаются понятия и конструкции метода динамической регуляризации [18, 27], основанного на теории позиционного управления [9, 10].

Далее рассматривается ретроспективная обратная задача, состоящая в восстановлении априори неизвестного начального состояния динамической системы по ее известному финальному состоянию. Эта задача также является некорректной. Для ее решения привлекаются идеи так называемого стартового управления [8–10, 14, 16, 18, 20, 25, 27]. Реализация этих идей позволяет свести исходную некорректную задачу к серии прямых корректных задач, решаемых в прямом направлении времени при соответствующем задании начальных данных.

Рассматриваются также различные модификации и методы регуляризации [2, 3, 11, 24] обсуждаемых задач, опирающиеся на ту или иную априорную информацию об искомом решении и условиях решения задачи.

Опишем содержательные стороны постановок задач. Пусть имеется некоторая сплошная среда, состояние которой в каждый момент времени t из какого-либо заданного промежутка времени $[t_0, \vartheta]$, $-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty$, характеризуется векторной функцией $u(t, \cdot) = u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))$, определенной в ограниченной области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^2$. Динамика состояний среды описывается следующей краевой задачей для системы уравнений Навье—Стокса:

$$u + (u, \nabla)u = \nu \Delta u - \nabla p + f, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \quad (0.1)$$

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \quad (0.2)$$

$$u = 0, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \partial\Omega, \quad (0.3)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (0.4)$$

где ν — некоторая заданная положительная константа, характеризующая вязкость среды, p — некоторая функция, характеризующая давление в сплошной среде, f — некоторая функция, характеризующая плотность внешних массовых сил, действующих на среду, u_0 — начальное (в момент времени $t = t_0$) состояние среды. Краевая задача (0.1)–(0.4) описывает плоско-параллельное течение в области Ω вязкой несжимаемой жидкости, находящейся под воздействием внешних массовых сил плотности f и имевшей в начальный момент времени $t = t_0$ состояние $u_0 = u_0(x)$, $x \in \Omega$. Вектор $u = (u_1, u_2) = (u_1(t, x), u_2(t, x))$ характеризует скорость текущей жидкости в соответствующие моменты времени из промежутка $[t_0, \vartheta]$ в точках рассматриваемой области Ω .

Пусть движение сплошной среды наблюдается в течение какого-нибудь конечного отрезка времени $[t_0, \vartheta]$ и в соответствующие текущие моменты времени $t \in [t_0, \vartheta]$ приближенно измеряются ее состояния $u(t, x)$, $x \in \Omega$. Пусть результаты этих приближенных измерений $u(t, x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяют некоторому критерию точности измерений

$$\rho(u(t, \cdot), u(t, \cdot)) \leq \delta, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

где δ — числовой параметр, характеризующий точность измерений, $0 \leq \delta \leq \delta_0$; $\rho(\cdot, \cdot)$ — некоторый неотрицательный функционал, определенный на состояниях сплошной среды и их измерениях и характеризующий близость между ними.

Одна из рассматриваемых задач будет состоять в следующем. По результатам приближенных измерений $u(t, \cdot)$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$, наблюдаемого движения системы (сплошной среды) $u(t, \cdot)$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$, требуется приближенно восстановить реализацию той плотности внешних массовых сил f , которая порождает наблюдаемое движение системы. При этом результат f восстановления искомой плотности f должен быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений

$$\sigma(f, f) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

где σ — некоторый неотрицательный функционал, характеризующий точность восстановления плотности внешних массовых сил. Считается, что порождающие движение силы априори неизвестны, известны лишь их некоторые априорные оценки, известны также уравнения динамики процесса и начальное состояние системы.

Другой аспект сформулированной задачи связан с восстановлением априори неизвестной плотности сил f , действующих на систему, в условиях, когда измерения состояний системы и восстановление плотности сил должны осуществляться в динамике. Здесь задача состоит в том, чтобы по ходу процесса, по имеющимся в распоряжении наблюдателя результатам приближенных измерений $u(t, \cdot)$ в соответствующие дискретные моменты времени $t = t_i \in [t_0, \vartheta]$, $t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = \vartheta$, текущих состояний системы $u(t, \cdot)$, приближенно восстановить реализацию и динамику плотности $f = f(t, \cdot)$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$, той силы, которая порождает наблюдаемое движение системы. При этом восстановление должно быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений и чем чаще производятся замеры состояний системы, т. е. для результата динамического восстановления $f^\Delta = f^\Delta(t, \cdot)$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$, должно выполняться условие

$$\omega(f, f^\Delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow 0,$$

где ω — некоторый неотрицательный функционал, характеризующий точность восстановления плотности внешних массовых сил, $\Delta = \max\{t_{i+1} - t_i : i = 0, \dots, m-1\}$ — диаметр разбиения отрезка $[t_0, \vartheta]$ точками $t_i \in [t_0, \vartheta]$, $t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = \vartheta$. Величина диаметра разбиения Δ , как правило, выбирается в зависимости от величины погрешности измерений δ . Функционал ω может совпадать с функционалом σ . В этой постановке также считается, что порождающие движение силы априори неизвестны, известны лишь их некоторые априорные оценки, известны уравнения динамики процесса и начальное состояние системы. Основные особенности и принципы метода динамической реконструкции неизвестных величин изложены в [18, 27].

Еще одна задача, которая будет здесь рассмотрена, это так называемая ретроспективная обратная задача. Она состоит в следующем. Пусть некоторая функция $u = u(x)$, $x \in \Omega$, характеризует известное состояние среды в момент времени $t = \vartheta$. Требуется определить, учитывая динамику состояний среды (0.1)–(0.3), каково было состояние среды в момент времени $t = t_0$. С содержательной точки зрения ретроспективная обратная задача состоит в определении состояния среды в прошлом по ее состоянию в настоящем. С математической точки зрения задача состоит в нахождении решения краевой задачи (0.1)–(0.3), удовлетворяющего финальному условию

$$u(\vartheta, x) = u(x), \quad x \in \Omega, \quad (0.5)$$

и взятию от этого решения следа

$$u^0(x) = u(t_0, x), \quad x \in \Omega. \quad (0.6)$$

Хорошо известно, что сформулированные выше задачи, как и многие другие подобные задачи, являются некорректными [2, 3, 9–11, 14, 16, 18, 24, 25, 27] и требуют для своего решения привлечения методов регуляризации некорректных задач [2, 3, 11, 24].

Прежде чем перейти к строгим математическим формализациям задач, описанию методов их решения и формулировкам основных результатов, отметим некоторые свойства математической модели — краевой задачи (0.1)–(0.4).

Под решением краевой задачи (0.1)–(0.4) будем понимать ее слабое решение (см., например, [12, гл. 6], [23, гл. 3], [15, гл. 1]), которое определяется как элемент u , принадлежащий функциональным пространствам $W_{2,0}^{0,1}((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$, $L_4((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$, $C([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ и при любом $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} u(t, x) v(t, x) dx - \int_{\Omega} u_0(x) v(0, x) dx = \int_0^t \int_{\Omega} (u v_t - v u_t - u u_i v_i + f v) dx dt,$$

каков бы ни был при этом элемент $v \in W_{2,0}^{1,1}((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$, удовлетворяющий условию $\operatorname{div} v(t, \cdot) = 0$ для почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$.

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость определяются по Лебегу, производные понимаются в обобщенном смысле, определения используемых функциональных пространств имеются, например, в [12, 15, 23]. Отметим только, что гильбертово пространство $J(\Omega)$ представляет собой замыкание в норме пространства $L_2(\Omega)^2$ множества всех гладких соленоидальных финитных в Ω функций. Имеет место ортогональное разложение пространства $L_2(\Omega)^2$ в прямую сумму его подпространств $J(\Omega)$ и $G(\Omega)$:

$$L_2(\Omega)^2 = J(\Omega) \oplus G(\Omega), \quad G(\Omega) = \{\nabla g: g \in W_2^1(\Omega)\}. \quad (0.7)$$

Ортогональность подпространств $J(\Omega)$ и $G(\Omega)$ позволяет исключить из рассмотрения давление p в силу равенства

$$\int_{\Omega} (\nabla p, v) dx = 0, \quad p \in W_2^1(\Omega), \quad v \in W_{20}^1(\Omega), \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Без ограничения общности рассуждений можно считать, что функция f для почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ принадлежит $J(\Omega)$. В противном случае, воспользовавшись разложением (0.7), градиентную часть этой функции можно отнести к ∇p , а неградиентную часть оставить в правой части уравнения. Подпространство гильбертова пространства $L_2((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$, состоящее из всех его эквивалентных классов элементов, которые при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ принадлежат $J(\Omega)$, далее будем обозначать $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Однако теперь равенство $f = 0$ с содержательной точки зрения будет означать, что внешние массовые силы, действующие на жидкость, не равны нулю, а являются потенциальными.

Для любых функций $u_0 \in J(\Omega)$ и $f \in L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ краевая задача (0.1)–(0.4) имеет единственное слабое решение (см., например, [12, гл. 6, § 6], [23, гл. 3, § 3], [15, гл. 1, § 6]), которое при любом $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет энергетическому равенству

$$\|u(t, \cdot)\|^2 + 2\nu \int_0^t [\|u_1(\tau, \cdot)\|^2 + \|u_2(\tau, \cdot)\|^2] d\tau = \|u_0\|^2 + 2 \int_0^t \langle f(\tau, \cdot), u(\tau, \cdot) \rangle d\tau \quad (0.8)$$

и при любых $t_1 \in [t_0, \vartheta]$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta]$ удовлетворяет неравенствам

$$\|u(t_2, \cdot)\| \leq \|u(t_1, \cdot)\| + \int_{t_1}^{t_2} \|f(\tau, \cdot)\| d\tau, \quad (0.9)$$

$$\begin{aligned} \|u(t_2, \cdot)\|^2 + 2\nu \int_{t_1}^{t_2} [\|u_1(\tau, \cdot)\|^2 + \|u_2(\tau, \cdot)\|^2] d\tau &\leq \\ &\leq \|u(t_1, \cdot)\|^2 + 2\|u(t_1, \cdot)\| \int_{t_1}^{t_2} \|f(\tau, \cdot)\| d\tau + 2 \left(\int_{t_1}^{t_2} \|f(\tau, \cdot)\| d\tau \right)^2, \end{aligned} \quad (0.10)$$

где $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают соответственно норму и скалярное произведение в $L_2(\Omega)^2$.

Поскольку далее будет важна зависимость решения задачи (0.1)–(0.4) от исходных данных, то это решение иногда будем обозначать символом $u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f)$. Из указанных выше неравенств (0.8)–(0.10) и аналогичных неравенств, записанных для разности двух решений, отвечающих двум наборам исходных данных, следует, что краевая задача (0.1)–(0.4) поставлена корректно и ее решение непрерывно зависит от исходных данных в следующем смысле: если имеют место сильная сходимость $u_0^{(k)} \rightarrow u_0$ в $J(\Omega)$ и сильная сходимость $f^{(k)} \rightarrow f$ в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, то имеет место сильная сходимость

$$u^{(k)} = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0^{(k)}, f^{(k)}) \rightarrow u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f), \quad k \rightarrow \infty,$$

в каждом из пространств $W_{20}^{01}((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$, $L_4((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$, $C([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$.

1. СТАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Содержательный смысл задачи о восстановлении плотности внешних массовых сил (правой части f уравнения (0.1)) описан выше. Приступим к формализации задачи и ее решению. Начнем со статического метода решения задачи, когда результаты измерений текущих состояний системы известны апостериорно для всего промежутка $[t_0, \vartheta]$ времени наблюдения за процессом движения системы. Начальное состояние системы u_0 считается известным и фиксированным.

Предварительно отметим следующий факт, касающийся свойств краевой задачи (0.1)–(0.4). Из определения слабого решения этой краевой задачи и неравенств (0.8)–(0.10) несложно выводится следующее утверждение: если $f^{(k)} \rightarrow f$ слабо в пространстве $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, то имеет место сильная сходимость решений

$$u^{(k)} = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f^{(k)}) \rightarrow u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f), \quad k \rightarrow \infty,$$

в пространстве $C([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ и тем более в пространстве $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Это свойство означает полную непрерывность оператора A

$$A: D(A) \ni f \rightarrow A(f) \in R(A), \quad D(A) = L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega)), \\ R(A) = \{u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f) : f \in L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))\} \subset L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega)).$$

Поскольку каждому решению $u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f) \in R(A)$ отвечает только одна правая часть $f \in D(A)$, порождающая это решение, то для оператора A существует обратный оператор A^{-1} , определенный на области значений $R(A) = D(A^{-1})$ оператора A и принимающий значения на множестве $R(A^{-1}) = D(A)$. Из полной непрерывности оператора A следует, что обратный оператор A^{-1} не может быть непрерывным оператором. Отсюда следует, что рассматриваемая обратная задача не является корректно поставленной задачей в том смысле, что не обладает непрерывной зависимостью решений от своих исходных данных. С содержательной точки зрения это означает, что если $u^* \approx u$ и имеют смысл элементы $f^* = A^{-1}(u^*)$ и $f = A^{-1}(u)$, то элемент f^* не следует принимать в качестве приближения к точному решению f обратной задачи, отвечающему точным исходным данным u [3, 11, 24]. Погрешность при измерениях еще больше усугубляет ситуацию [3, 11, 24], в частности, она может привести к тому, что $A^{-1}(u^*)$ не будет существовать.

Пусть известно, что функция f стеснена ограничением $f \in F$, где F — некоторое множество функций из пространства $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Множество F может иметь конкретное описание в зависимости от априорной информации о задаче, которой может располагать решающий ее наблюдатель. Пока будем считать, что $F = L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Через U обозначим множество всех возможных слабых решений краевой задачи (0.1)–(0.4), отвечающих правым частям $f \in F$:

$$U = \{u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f) : f \in F\}.$$

Близость между состояниями системы и их измерениями будем оценивать с помощью функционала

$$\rho(u(t, \cdot), u(t, \cdot)) = \|u(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta.$$

Множество всех допустимых измерений для наблюдаемого движения $u \in U$ обозначим $V(u, \delta)$, оно состоит из всех функций $u \in L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, которые удовлетворяют неравенству $\rho(u(t, \cdot), u(t, \cdot)) \leq \delta$ для почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$:

$$V(u, \delta) = \{u \in L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega)) : \|u(t, \cdot) - u(t, \cdot)\| \leq \delta \text{ для п. в. } t \in [t_0, \vartheta]\}.$$

Задача состоит в построении алгоритма, который по любым допустимым измерениям текущих состояний наблюдаемого движения системы приближенно восстанавливает правую часть системы, которая порождает это наблюдаемое движение. Искомый алгоритм отождествим с семейством отображений (методов)

$$D = \{D : 0 \leq \delta \leq \delta_0\}, \quad D : L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega)) \rightarrow L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega)).$$

Функцию $f = D(u)$ назовем реализацией метода D на измерении $u \in V(u, \delta)$.

Исходную задачу теперь можно сформулировать так: требуется построить алгоритм $D = \{D : 0 \leq \delta \leq \delta_0\}$, который на любом наблюдаемом движении $u \in U$ обладает регуляризующим свойством

$$r(u) = \sup\{\sigma(f, D(u)) : u \in V(u, \delta)\} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

$$\sigma(f, D(u)) = \int_0 \|D(u)(t, \cdot) - f(t, \cdot)\|^2 dt,$$

где $f \in F$ есть та правая часть системы, которая порождает движение u .

Сведем рассматриваемую обратную задачу к задаче программного управления [8, 14, 16, 20, 25] следующим образом [1–3, 11, 17, 21, 24]. Введем в рассмотрение, кроме множества $F \subseteq L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, некоторый подходящий функционал I , определенный на F . Множество F будет представлять собой множество допустимых управлений, а функционал I — функционал качества управления. Ожидается, что управление или одно из управлений, минимизирующих функционал I на множестве F , доставит точное или приближенное решение обратной задаче. Таким образом, в случае достаточных на то оснований исходную обратную задачу можно сформулировать как задачу оптимального управления, состоящую в нахождении подходящего управления, минимизирующего функционал качества I на множестве допустимых управлений F :

$$I(w) \rightarrow \min: \quad w \in F. \quad (1.1)$$

Выберем в данном конкретном случае

$$I(w) = T(w; u) = \int_0 \|u(t, \cdot; t_0, u_0, w) - u(t, \cdot)\|^2 dt + \alpha \int_0 \|w(t, \cdot)\|^2 dt, \quad (1.2)$$

$$F = L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega)),$$

где $\alpha = \alpha(\delta)$ — положительный параметр (параметр регуляризации) задачи.

Для любых $\delta \in [0, \delta_0]$, $v \in L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ определим теперь значение метода D в точке v по правилу

$$D(v) = \eta \in F: \quad T^*(v) \leq T(\eta; v) \leq T^*(v) + \varepsilon, \quad T^*(v) = \min\{T(s; v) : s \in F\}, \quad (1.3)$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ — неотрицательный параметр регуляризации задачи.

Теорема 1.1. Пусть числовые параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$(\varepsilon(\delta) + \delta^2)\alpha(\delta)^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\delta) \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Тогда алгоритм D , состоящий из методов (1.3), решает задачу восстановления, т. е. для любого наблюдаемого движения $u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f) \in U$, порожденного функцией $f \in F$, при $\delta \rightarrow 0$ имеют место сходимость $r(u) \rightarrow 0$ и тем более сильная сходимость $f = D(u) \rightarrow f$ в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, каковы бы ни были при этом реализации измерений $u \in V(u, \delta)$.

Доказательство. Пусть выбраны и фиксированы зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, удовлетворяющие условию теоремы. Для доказательства теоремы достаточно показать, что каковы бы ни были элемент $u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f) \in U$, числовая последовательность $\{\delta\} \subset [0, \delta_0]$, $\delta \rightarrow 0$, и последовательность элементов $\{v\}$, $v \in V(u, \delta)$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, имеет место сходимость

$$\sigma(f, D_k(v)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Пусть выбраны и фиксированы элементы и последовательности, указанные выше. Покажем, что имеет место (1.4). Учитывая определение элементов $\eta = D_k(v) \in F$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, можем

записать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \alpha(\delta) \int_0^{\vartheta} \|\eta\|^2 dt &\leq T_{(k)}(\eta; v) \leq T_{(k)}^*(v) + \varepsilon(\delta) \leq T_{(k)}(f; v) + \varepsilon(\delta) = \\ &= \int_0^{\vartheta} \|u - v\|^2 dt + \alpha(\delta) \int_0^{\vartheta} \|f\|^2 dt + \varepsilon(\delta) \leq (\vartheta - t_0)\delta^2 + \alpha(\delta) \int_0^{\vartheta} \|f\|^2 dt + \varepsilon(\delta), \end{aligned}$$

из которой можно выделить неравенство

$$\int_0^{\vartheta} \|\eta\|^2 dt \leq (\vartheta - t_0)\delta^2 \alpha(\delta)^{-1} + \varepsilon(\delta) \alpha(\delta)^{-1} + \int_0^{\vartheta} \|f\|^2 dt.$$

Из этого неравенства в силу выбора параметров регуляризации следует ограниченность последовательности $\{\eta\}$ в гильбертовом пространстве $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Поэтому из последовательности $\{\eta\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $\eta^* \in L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что сама эта последовательность слабо сходится к элементу η^* :

$$\eta \rightharpoonup \eta^* \text{ слабо в } L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega)) \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Покажем теперь, что $\eta^* = f$. Справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \int_0^{\vartheta} \|u(t, \cdot; t_0, u_0, \eta^*) - u(t, \cdot; t_0, u_0, f)\|^2 dt &= \liminf_{\rightarrow \infty} \int_0^{\vartheta} \|u(t, \cdot; t_0, u_0, \eta) - v\|^2 dt \leq \\ &\leq \liminf_{\rightarrow \infty} T_{(k)}(\eta; v) \leq \limsup_{\rightarrow \infty} T_{(k)}(\eta; v) \leq \limsup_{\rightarrow \infty} \left[(\vartheta - t_0)\delta^2 + \varepsilon(\delta) + \alpha(\delta) \int_0^{\vartheta} \|f\|^2 dt \right] = 0, \end{aligned}$$

из которой следуют равенства

$$\int_0^{\vartheta} \|u(t, \cdot; t_0, u_0, \eta^*) - u(t, \cdot; t_0, u_0, f)\|^2 dt = 0, \quad \eta^* = f.$$

Покажем теперь, что имеет место сильная сходимость $\eta \rightarrow \eta^* = f$ в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Для этого достаточно показать, что

$$\int_0^{\vartheta} \|\eta\|^2 dt \rightarrow \int_0^{\vartheta} \|\eta^*\|^2 dt, \quad k \rightarrow \infty,$$

поскольку в гильбертовом пространстве слабая сходимость и сходимость норм влекут сильную сходимость. Из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \int_0^{\vartheta} \|f\|^2 dt &\leq \liminf_{\rightarrow \infty} \int_0^{\vartheta} \|\eta\|^2 dt \leq \limsup_{\rightarrow \infty} \int_0^{\vartheta} \|\eta\|^2 dt \leq \\ &\leq \lim_{\rightarrow \infty} \left[(\vartheta - t_0)\delta^2 \alpha(\delta)^{-1} + \varepsilon(\delta) \alpha(\delta)^{-1} + \int_0^{\vartheta} \|f\|^2 dt \right] \leq \int_0^{\vartheta} \|f\|^2 dt \end{aligned}$$

в силу выбора параметров регуляризации имеем

$$\int_0^{\vartheta} \|\eta\|^2 dt \rightarrow \int_0^{\vartheta} \|\eta^*\|^2 dt, \quad k \rightarrow \infty,$$

значит,

$$\eta \rightarrow \eta^* = f \text{ сильно в } L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega)), \quad k \rightarrow \infty,$$

что равносильно сходимости (1.4). Теорема доказана.

Для решения задачи управления (1.1)–(1.3) воспользуемся каким-нибудь из градиентных методов (см., например, [2, 4, 22]). Построение итерационной последовательности, соответствующей какому-либо из градиентных методов, фактически сведется к решению серии корректно поставленных задач, допускающих устойчивую численную реализацию. Вычислим сначала градиент функционала (1.2).

Зафиксируем произвольный элемент $w \in F$ и дадим ему произвольное приращение $h \in L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Пусть $u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, w)$ и $\tilde{u} = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, w + h)$, тогда разность $z = \tilde{u} - u$ является слабым решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} z + (z, \nabla)z &= \nu \Delta z - (u, \nabla)z - (z, \nabla)u + h, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} z &= 0, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ z &= 0, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \partial\Omega, \\ z(t_0, x) &= 0, & x \in \Omega. \end{aligned}$$

Приращение функционала можно представить в виде

$$I(w + h) - I(w) = 2 \int_0^\vartheta \langle u - u, z \rangle dt + \int_0^\vartheta \|z\|^2 dt + 2\alpha \int_0^\vartheta \langle w, h \rangle dt + \alpha \int_0^\vartheta \|h\|^2 dt.$$

Покажем, что

$$2 \int_0^\vartheta \langle u(t, \cdot) - u(t, \cdot), z(t, \cdot) \rangle dt = \int_0^\vartheta \langle \psi, h \rangle dt - \int_0^\vartheta \langle \psi, (z, \nabla)z \rangle dt,$$

где $\psi = \psi(\cdot, \cdot; w)$ — решение следующей линейной краевой задачи, которую далее будем называть сопряженной к краевой задаче (0.1)–(0.4):

$$\begin{aligned} \psi &= -\nu \Delta \psi - (u, \nabla)\psi + \psi \nabla u - 2(u - u), & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \psi &= 0, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ \psi &= 0, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \partial\Omega, \\ \psi(\vartheta, x) &= 0, & x \in \Omega. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\vartheta \langle u(t, \cdot) - u(t, \cdot), z(t, \cdot) \rangle dt &= \int_0^\vartheta \langle \nu \psi_i, z_i \rangle dt - \int_0^\vartheta \langle \psi + u \psi_i - \psi \nabla u, z \rangle dt = \\ &= - \int_0^\vartheta \langle (z, \nabla)z, \psi \rangle dt - \int_0^\vartheta \langle \nu z_i, \psi_i \rangle dt - \int_0^\vartheta \langle (u, \nabla)z, \psi \rangle dt - \\ &- \int_0^\vartheta \langle (z, \nabla)u, \psi \rangle dt + \int_0^\vartheta \langle h, \psi \rangle dt + \int_0^\vartheta \langle \nu \psi_i, z_i \rangle dt - \int_0^\vartheta \langle u \psi_i - \psi \nabla u, z \rangle dt = \\ &= \int_0^\vartheta \langle \psi, h \rangle dt - \int_0^\vartheta \langle \psi, (z, \nabla)z \rangle dt. \end{aligned}$$

Из неравенств (0.8)—(0.10) и аналогичных неравенств для функции z , являющейся решением краевой задачи, аналогичной краевой задаче (0.8)—(0.10), вытекают следующие оценки:

$$\int_0 \|z(t, \cdot)\|^2 dt \leq C_1 \int_0 \|h(t, \cdot)\|^2 dt, \quad \left| \int_0 \langle \psi, (z, \nabla)z \rangle dt \right| \leq C_2 \int_0 \|h(t, \cdot)\|^2 dt,$$

где $C_1 = C_1(w)$ и $C_2 = C_2(w)$ — некоторые константы, зависящие от $w \in F$,

$$C_1 = (\vartheta - t_0)C_*, \quad C_2 = \left(C_* \nu^{-1} (1 + C_* C^*) \int_0 \|\psi\|^2 dt \right)^{1/2},$$

$$C_* = 1 + C^* \exp(C^*), \quad C^* = \vartheta - t_0 + \nu^{-1} \int_0 (\|\nabla u_1\|^2 + \|\nabla u_2\|^2) dt.$$

Из этих оценок получаем, что

$$I(w+h) - I(w) = \int_0 \langle \psi + 2\alpha w, h \rangle dt + o(\|h\|_{L_2([0, \vartheta]; J(\Omega))}), \quad (1.5)$$

значит, функционал I дифференцируем по Фреше в каждой точке и

$$I'(w) = \psi + 2\alpha w \in L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega)),$$

причем

$$|o(\|h\|_{L_2([0, \vartheta]; J(\Omega))})| \leq C \int_0 \|h(t, \cdot)\|^2 dt, \quad C = \alpha + C_1 + C_2.$$

Отметим, что вычисление градиента $I'(w)$ сводится к последовательному выполнению следующих действий: решению прямой задачи и нахождению ее решения $u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, w)$; решению сопряженной задачи и нахождению ее решения $\psi = \psi(\cdot, \cdot; w)$; суммированию ψ и $2\alpha w$. Сумма $\psi + 2\alpha w$ дает искомым градиент $I'(w)$. Первое слагаемое ψ в сумме является градиентом первого слагаемого $T_0(w) = T_0(w; v)$ в функционале (1.2), а второе слагаемое $2\alpha w$ является градиентом второго слагаемого в функционале (1.2).

Сопряженная задача решается в обратном направлении времени, но тем не менее она является корректно поставленной задачей, поскольку в правой части уравнения оператор Лапласа стоит со знаком минус. Поскольку каждый из этапов вычисления градиента представляет собой в определенном смысле корректную задачу, то функционал I является непрерывно дифференцируемым на F . Более того, градиент функционала T_0 слабо-сильно непрерывен на F : если имеет место слабая сходимость $F \ni w^{(\cdot)} \rightarrow w \in F$ в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, то имеет место сильная сходимость $T'_0(w^{(\cdot)}) \rightarrow T'_0(w)$ в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Градиенты функционалов T_0 и I удовлетворяют на F локальному условию Липшица: для любого ограниченного множества $W \subset F$ существует такое число $L \geq 0$, что для любых элементов w_1 и w_2 из W выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \int_0 \|T'_0(w_1) - T'_0(w_2)\|^2 dt &\leq L \int_0 \|w_1 - w_2\|^2 dt, \\ \int_0 \|I'(w_1) - I'(w_2)\|^2 dt &\leq (L + 2\alpha) \int_0 \|w_1 - w_2\|^2 dt. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения, связанные с функционалом $T(w) = T(w; v)$:

$$T^* = T^*(v) = \min\{T(s; v) : s \in F\} -$$

минимальное значение функционала T на множестве F ;

$$F^* = \{w \in F: T(w) = T^*\} —$$

множество всех элементов, минимизирующих функционал T на множестве F ;

$$M(z) = \{w \in U: T(w) \leq T(z)\} —$$

множество уровня функционала T , соответствующее значению $T(z)$;

$$S^*(z) = \{w \in M(z): T'(w) = 0\} —$$

множество стационарных точек функционала T из множества уровня $M(z)$.

Отметим некоторые простейшие свойства функционала T . Этот функционал является растущим (если $\int_0^k \|w\|^2 dt \rightarrow \infty$, то $T(w) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$); любое его множество уровня ограничено и слабо компактно в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$; он слабо полунепрерывен снизу на F ; значение T^* неотрицательно и конечно; множество F^* непусто и слабо компактно в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$; любая минимизирующая последовательность этого функционала сходится сильно в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ к множеству F^* ; множество $S^*(z)$ непусто и компактно в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ при любом $z \in F$ [2, 4, 22].

Для функционала $T = T(w) = T(w; v)$ при фиксированных $v \in L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ и $\alpha > 0$ рассмотрим градиентный итерационный процесс

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} - \gamma T'(w^{(k)}), \quad w^{(0)} \in F, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{C^{(k)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

где $C^{(k)} = \alpha + C_1(w^{(k)}) + C_2(w^{(k)})$, величины $C_1 = C_1(\cdot)$ и $C_2 = C_2(\cdot)$ определены выше.

Теорема 1.2. *Каково бы ни было начальное приближение $w^{(0)} \in F$, последовательность значений функционала $\{T(w^{(k)})\}$, соответствующая последовательности аргументов $\{w^{(k)}\}$, определенных соотношениями (1.6), монотонно убывает и сходится к некоторому числу T^0 , $T^0 \geq T^* \geq 0$. Если выбор параметра γ подчинить дополнительному условию*

$$\frac{\delta_1}{C^{(k)}} < \gamma < \frac{\delta_2}{C^{(k)}}, \quad 0 < \delta_1 < \delta_2 < 1,$$

то дополнительно получим

$$\int_0^k \|T'(w^{(k)})\|^2 dt \rightarrow 0, \quad \int_0^k \|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|^2 dt \rightarrow 0,$$

причем последовательность $\{w^{(k)}\}$ будет сильно сходиться в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ к множеству $S^*(w^{(0)})$. Если, кроме того, для некоторой константы $d > 0$ на множестве $M(w^{(0)})$ выполняется неравенство

$$T(w) - T^* \leq d \left(\int_0^k \|T'(w)\|^2 dt \right)^{1/2}, \quad (1.7)$$

то последовательность $\{w^{(k)}\}$ является минимизирующей и сходится сильно в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ к множеству F^* . Справедлива также следующая оценка скорости сходимости функционала:

$$0 \leq T(w^{(k)}) - T^* \leq \frac{C^*}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad C^* = \text{const} \geq 0.$$

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что для любого $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ справедливо $T'(w^{(k)}) \neq 0$. В противном случае, если бы при некотором $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ оказалось $T'(w^{(k)}) = 0$, учитывая (1.6), получили бы стационарную последовательность $w^{(k)} = w^{(k+1)} = \dots = w_0$, и тогда утверждение теоремы стало бы очевидным.

Из (1.5) и (1.6) при $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ следуют неравенства

$$T(w^{(k+1)}) - T(w^{(k)}) \leq -\gamma \int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt + C^{(k)} \gamma^2 \int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt < 0,$$

из которых вытекает монотонное убывание последовательности $\{T(w^{(k)})\}$. Поскольку эта последовательность ограничена снизу числом $T^* \geq 0$, то она сходится к некоторому числу T^0 , $T^0 \geq T^* \geq 0$.

Пусть теперь выполняется дополнительное условие $\delta_1/C^{(k)} < \gamma < \delta_2/C^{(k)}$. Покажем, что $\int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Если это не так, то существуют некоторое число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{k_m\} \subseteq \{k\}$, такие что $\int_0 \|T'(w^{(k_m)})\|^2 dt \geq \varepsilon$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что это неравенство выполняется для самой последовательности. Тогда из неравенства

$$T(w^{(k)}) - T(w^{(k+1)}) \geq (\gamma - \gamma^2 C^{(k)}) \int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt \quad (1.8)$$

следует, что

$$(\gamma - \gamma^2 C^{(k)}) \int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

в силу того что последовательность $\{T(w^{(k)})\}$ является сходящейся и поэтому имеет место сходимость $T(w^{(k)}) - T(w^{(k+1)}) \rightarrow 0$. Учитывая неравенства

$$\int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt \geq \varepsilon, \quad \gamma - \gamma^2 C^{(k)} \geq \delta_1 \frac{1 - \delta_2}{C^{(k)}},$$

получаем $C^{(k)} \rightarrow \infty$ и $\gamma \rightarrow 0$. Суммируя неравенства (1.8), получаем сходящиеся ряды

$$\infty > T(w^{(0)}) - T^0 \geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt (\gamma - \gamma^2 C^{(k)}) \geq \varepsilon (1 - \delta_2) \sum_{k=0}^{\infty} \gamma \left(\int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Тогда из (1.6) вытекает неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0 \|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma \left(\int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty,$$

из которого следует фундаментальность и ограниченность последовательности $\{w^{(k)}\}$ в пространстве $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Из ее ограниченности вытекает ограниченность последовательности $\{C^{(k)}\}$, что противоречит свойству $C^{(k)} \rightarrow \infty$. Полученное противоречие показывает, что

$$\int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Теперь из неравенства

$$\left(\int_0 \|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|^2 dt \right)^{1/2} \leq \gamma \left(\int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_0 \|T'(w^{(k)})\|^2 dt \right)^{1/2}$$

и свойства (1.9) получаем

$$\int_0^{\cdot} \|w^{(\cdot+1)} - w^{(\cdot)}\|^2 dt \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Установим теперь сильную сходимость $w^{(\cdot)} \rightarrow S^*$ в пространстве $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Поскольку последовательность $\{w^{(\cdot)}\}$ является релаксационной для функционала T (т. е. последовательность $\{T(w^{(\cdot)})\}$ является монотонно убывающей), то она содержится в ограниченном множестве уровня $M(w^{(0)})$ и сама является ограниченной. Из ее ограниченности следует, что она имеет слабо сходящуюся в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ подпоследовательности, выберем любую из них. Можем считать, что подпоследовательность совпадает с самой последовательностью и сама последовательность слабо сходится к некоторому элементу $u_* \in L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$. Поскольку имеют место сильная сходимость $T'_0(w^{(\cdot)}) \rightarrow T'_0(u_*)$ в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ и слабая сходимость $w^{(\cdot)} \rightharpoonup u_*$ в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, то имеет место слабая сходимость в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$

$$T'(w^{(\cdot)}) = T'_0(w^{(\cdot)}) + 2\alpha w^{(\cdot)} \rightharpoonup T'(u_*) = T'_0(u_*) + 2\alpha u_*.$$

С другой стороны, как установлено в (1.9), имеет место сильная сходимость $T'(w^{(\cdot)}) \rightarrow 0$ в пространстве $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, значит, в силу единственности предела $T'(u_*) = 0$, и тогда $u_* \in S^*$. Кроме того, отсюда получаем сильную сходимость в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$

$$w^{(\cdot)} = \frac{T'(w^{(\cdot)}) - T'_0(w^{(\cdot)})}{2\alpha} \rightarrow u_* = \frac{T'(u_*) - T'_0(u_*)}{2\alpha}.$$

Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{w^{(\cdot)}\}$ сходится сильно в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ к некоторому элементу из множества S^* . Тогда сама последовательность сходится сильно в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ к множеству S^* .

Выведем оценку скорости сходимости функционала. Из ограниченности множества $M(w^{(0)})$ следует ограниченность набора чисел $\{C^{(\cdot)}\}$. Поэтому существует некоторое число $C > 1$, такое что $1 \leq C^{(\cdot)} \leq C$ для любого $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Тогда, в силу выбора параметра γ из дополнительного условия, получаем неравенства

$$T(w^{(\cdot)}) - T(w^{(\cdot+1)}) \geq (\gamma - \gamma^2 C^{(\cdot)}) \int_0^{\cdot} \|T'(w^{(\cdot)})\|^2 dt \geq \delta_1(1 - \delta_2) C^{-1} \int_0^{\cdot} \|T'(w^{(\cdot)})\|^2 dt.$$

Учитывая неравенство (1.7), из последнего неравенства имеем

$$T(w^{(\cdot)}) - T(w^{(\cdot+1)}) \geq \left(\frac{\delta_1(1 - \delta_2)}{Cd^2} \right) (T(w^{(\cdot)}) - T^*)^2.$$

Из этого неравенства и [2, лемма 2.6.4] следует искомая оценка скорости сходимости функционала. Теорема доказана.

Относительно неравенства (1.7) заметим, что оно выполняется, например, когда функционал T является выпуклым на каком-нибудь выпуклом множестве, содержащем в себе множество уровня $M(w^{(0)})$.

Рассмотрим теперь некоторые методы решения обратной задачи, которые учитывают ту или иную дополнительную информацию об искомом решении. Рассмотрим несколько вариантов.

Пусть дополнительная информация об искомом решении обратной задачи состоит в том, что априори известно о принадлежности искомой правой части f некоторому известному шару $B(r, f^*)$. Воспользуемся этой информацией при решении задачи следующим образом. Положим $F = B[r, f^*]$ и для нахождения f из решения задачи минимизации

$$T_0(w) \rightarrow \min: \quad w \in F = B[r, f^*] \quad (1.10)$$

применим метод проекции градиента [2, 4, 22].

Рассмотрим итерационный процесс метода проекции градиента

$$w^{(k+1)} = \text{Pr}(w^{(k)} - \gamma T'_0(w^{(k)})), \quad w^{(0)} \in F, \quad \sigma_1 \leq \gamma \leq \frac{2}{L + 2\sigma_2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.11)$$

где σ_1 и σ_2 — положительные числа, являющиеся параметрами метода, L — константа Липшица градиента T'_0 на шаре F , Pr — оператор проектирования на F :

$$\begin{aligned} \text{Pr}(w) &= w, & \text{если } w \in F; \\ \text{Pr}(w) &= f^* + r(w - f^*) \left(\int_0^1 \|w - u^*\|^2 dt \right)^{-1/2}, & \text{если } w \notin F. \end{aligned}$$

Теорема 1.3. *Каково бы ни было начальное приближение $w^{(0)} \in F$, последовательность $\{w^{(k)}\}$ метода (1.11) является релаксационной и сходящейся слабо в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ к множеству стационарных элементов*

$$S_0 = \left\{ w \in F: \int_0^1 \langle T'_0(w), v - w \rangle dt \geq 0 \quad \forall v \in F \right\}$$

задачи минимизации (1.10) и

$$\int_0^1 \langle T'_0(w^{(k)}), w^{(k+1)} - w^{(k)} \rangle dt \rightarrow 0, \quad \int_0^1 \|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|^2 dt \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Если при некотором $z_* \in F$ имеет место включение $w^{(0)} \in M_0(z_*) \subseteq F$, то дополнительно получаем следующие свойства:

$$\int_0^1 \|T'_0(w^{(k)})\|^2 dt \rightarrow 0, \quad T_0(w^{(k)}) \rightarrow T_0^* = 0, \quad w^{(k)} \rightarrow f \text{ слабо в } L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega)).$$

Если, кроме того, для некоторой константы $d > 0$ выполняется неравенство

$$T_0(w)^2 \leq d \int_0^1 \|T'_0(w)\|^2 dt, \quad w \in M_0(w^{(0)}),$$

то справедлива следующая оценка для скорости сходимости функционала:

$$0 \leq T_0(w^{(k)}) \leq C_0^* k^{-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad C_0^* = \text{const} \geq 0.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.1.

Если известно, что искомое решение обратной задачи f содержится в известном выпуклом компактном множестве $F \subset L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, то итерационный процесс (1.11) приводит к последовательности $\{w^{(k)}\}$, которая обладает всеми свойствами, указанными в теореме 1.3, а также сходится к множеству S_0 и элементу f сильно в $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$.

2. ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Содержательная сторона задачи о динамическом восстановлении плотности внешних массовых сил (правой части) f системы (0.1)–(0.4) описана выше. Приступим к ее формализации. Будем считать, что начальное состояние $u_0 \in J(\Omega)$ системы известно и фиксировано. Пусть известно также, что функция f стеснена ограничением $f \in F$, где F — множество всех функций из пространства $L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, которые при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ принимают значения из известного выпуклого ограниченного замкнутого множества $P \subset J(\Omega) \cap L_3(\Omega)^2$. Символом U обозначим множество всех возможных слабых решений рассматриваемой краевой задачи

$$U = \{u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f): f \in F\}.$$

Допустим, что наблюдение осуществляется за некоторым движением (решением) $u \in U$. Легко проверить, что наблюдаемое движение может порождаться только одним элементом $f \in F$, т. е. $u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f)$. Будем считать, что имеется потенциальная возможность в каждый момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$ измерить текущее состояние наблюдаемого движения $u(t, \cdot)$ и результат измерения $u(t) \in J(\Omega)$ будет удовлетворять условию

$$\rho(u(t, \cdot), u(t)) = \|u(t, \cdot) - u(t)\| \leq \delta, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad (2.1)$$

где δ — погрешность измерений, $0 \leq \delta \leq \delta_0$. Множество всех допустимых измерений для наблюдаемого движения обозначим $V(u, \delta)$, оно состоит из всех отображений $u : [t_0, \vartheta] \rightarrow J(\Omega)$, которые удовлетворяют условию (2.1).

Задача состоит в построении алгоритма, который в динамике (по ходу процесса) по любым допустимым измерениям текущих состояний наблюдаемого движения системы приближенно восстанавливает плотность внешних массовых сил, порождающих это наблюдаемое движение. Искомый алгоритм отождествим с семейством отображений $D = \{D : 0 \leq \delta \leq \delta_0\}$, где

$$D = \{D : t_0 \leq t \leq \vartheta\}, \quad D : J(\Omega) \times J(\Omega) \rightarrow P.$$

Функцию $f = f(\cdot; u) : [t_0, \vartheta] \rightarrow P$, определенную равенством

$$f(t) = D(u(t), z(t)), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta,$$

назовем реализацией алгоритма D на измерении $u \in V(u, \delta)$ и обозначим $D(u)$. Переменная z является здесь внутренней переменной алгоритма. Ее значение $z = z(t)$ в момент времени t однозначно формируется на основании сложившейся к этому моменту времени доступной информации $u(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, о движении системы. Правило формирования переменной $z = z(t)$ сформулируем ниже, когда речь пойдет о конкретном способе построения алгоритма.

Исходную задачу теперь можно сформулировать так: требуется построить алгоритм $D = \{D : 0 \leq \delta \leq \delta_0\}$, который на любом наблюдаемом движении $u \in U$ обладает регуляризующим свойством

$$r(u) = \sup \left\{ \omega(f, f) = \int_0^1 \|D(u)(t) - f(t, \cdot)\| dt : u \in V(u, \delta) \right\} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

где $f \in F$ есть плотность внешних массовых сил, которые порождают наблюдаемое движение системы u , $1 \leq q < \infty$.

Приступим к построению алгоритма, решающего поставленную задачу. Для построения искомого алгоритма воспользуемся методом динамической регуляризации с моделью [18, 27]. Для некоторых других обратных задач применение этого метода см., например, в [5–7, 19, 26, 28–42]. В построениях будет участвовать такой гипотетический объект, как модель исходной системы. С помощью этой модели будут формироваться значения вспомогательной внутренней переменной для соответствующего алгоритма. Эта гипотетическая модель вполне реально может быть реализована на компьютере.

Для любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $\delta \in [0, \delta_0]$, $w \in J(\Omega)$, $z \in J(\Omega)$ определим значение отображения D в точке (w, z) по правилу

$$D(w, z) = \eta \in P : H(\eta) \leq \min\{H(s) : s \in P\} + \varepsilon(\delta), \quad (2.3)$$

$$H(s) = 2\langle z - w, s \rangle + \alpha(\delta)\|s\|^2,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ и $\alpha = \alpha(\delta)$ — положительные параметры регуляризации.

Значение $z(t)$ внутренней переменной z для момента времени $t \in [t_0, \vartheta]$ определим как значение в этот момент времени слабого решения системы-модели

$$\begin{aligned} y + (y \nabla) y &= \nu \Delta y + f, & t_0 \leq \tau \leq t, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} y &= 0, & t_0 \leq \tau \leq t, \quad x \in \Omega, \\ y &= 0, & t_0 \leq \tau \leq t, \quad x \in \partial\Omega, \\ y(t_0, x) &= u(t_0, x), & x \in \Omega. \end{aligned}$$

Решение этой краевой задачи с практической вычислительной точки зрения удобно осуществлять в дискретной по времени схеме, подобно тому, как решение обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется по схеме Эйлера [10]. В связи с этим опишем функционирование алгоритма восстановления в динамике в дискретной по времени схеме.

Сначала задаются какие-либо зависимости $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ и $\alpha = \alpha(\delta)$ и какое-либо разбиение Σ отрезка $[t_0, \vartheta]$ на промежутки $[t_0, t_1), \dots, [t_{i-1}, t_i), \dots, [t_{m-1}, \vartheta]$ точками $t : t_0 < t_1 < \dots < t_m = \vartheta$. Диаметр Δ разбиения Σ будет выбираться в зависимости от величины точности измерений δ , $\Delta = \Delta(\delta)$.

Построение реализации алгоритма опишем индуктивно по шагам.

Шаг $i = 0$. В начальный момент времени t_0 наблюдателю поступает информация в виде измерения $u(t_0)$. Положив $w = u(t_0)$ и $z = u(t_0)$ наблюдатель по правилу (2.3) определяет элемент $D^0(w, z)$. Постоянная по времени функция

$$f^{(0)}(t, \cdot) = D^0(w, z), \quad t_0 \leq t < t_1,$$

принимается за приближение к искомой правой части f на промежутке времени $t_0 \leq t < t_1$. Затем для промежутка $[a, b] = [t_0, t_1]$ решается краевая задача

$$y + (y \nabla) y = \nu \Delta y + g, \quad a \leq t \leq b, \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} y = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad x \in \Omega, \quad (2.5)$$

$$y = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.6)$$

с правой частью $g = f^{(0)}$ и начальным условием $y(a, \cdot) = z$. После решения этой задачи запоминается состояние $y(b, \cdot)$ ее решения.

Шаг $i = 1$. В момент времени t_1 наблюдателю поступает информация в виде измерения $u(t_1)$. Положив $w = u(t_1)$ и $z = y(t_1, \cdot)$, он по правилу (2.3) определяет элемент $D^1(w, z)$. Постоянная по времени функция

$$f^{(1)}(t, \cdot) = D^1(w, z), \quad t_1 \leq t < t_2,$$

принимается за приближение к искомой плотности f на промежутке времени $t_1 \leq t < t_2$. Затем для промежутка $[a, b] = [t_1, t_2]$ решается краевая задача (2.4)–(2.6) с правой частью $g = f^{(1)}$ и начальным условием $y(a, \cdot) = z$ и запоминается состояние $y(b, \cdot)$ этого решения.

Следующие шаги для $i = 2, \dots, m-1$ выполняются аналогично. Таким образом последовательно по ходу процесса (в динамике) к конечному моменту времени $t = \vartheta$ будет получена кусочно-постоянная по времени реализация алгоритма

$$D(u) = f(t) = f^{(i)}(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (2.7)$$

Теорема 2.1. Пусть скалярные величины $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $\Delta = \Delta(\delta)$ выбраны в зависимости от точности измерений $\delta \in [0, \delta_0]$ таким образом, что выполняются согласования

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \frac{\Delta(\delta)^{1/3}}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Тогда алгоритм D , реализации которого определяются соотношением (2.7), является регуляризирующим и решает задачу восстановления правой части системы: для любого $u \in U$ выполняется соотношение (2.2).

Доказательство. Пусть выбраны и фиксированы разбиение Σ отрезка $[t_0, \vartheta]$ с разбиением $\Delta = \Delta(\delta)$, зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $\Delta = \Delta(\delta)$, удовлетворяющие согласованиям из условия теоремы. Для доказательства теоремы достаточно показать, что каковы бы ни были элемент $u \in U$, числовая последовательность $\{\delta\} \subset [0, \delta_0]$, $\delta \rightarrow 0$, и последовательность элементов $\{\tilde{u}\}$, $\tilde{u} \in V(u, \delta)$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, будет иметь место сходимость $D_k(\tilde{u}) \rightarrow f$ при $k \rightarrow \infty$ в пространстве $L([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, где f — тот единственный элемент, который порождает движение u . Действительно, в этом случае будет иметь место (2.2). Принимая во внимание правило формирования

реализации алгоритма $f = D_k(\tilde{u})$, можно получить следующую оценку для вспомогательного функционала:

$$\Lambda(t) \equiv \|u(t, \cdot) - y(t, \cdot)\|^2 + \alpha(\delta) \int_0^t [\|f(\tau, \cdot)\|^2 - \|f(\tau, \cdot)\|^2] d\tau \leq \eta, \\ t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad \eta = C[\delta + \varepsilon(\delta) + \Delta(\delta)^{1/3}],$$

где C — некоторая положительная константа, которая не зависит от k и определяется по априори известным данным о системе и задаче; y — движение системы-модели, порожденное начальным состоянием $\tilde{u}(t_0)$ и плотностью сил f (построение этого движения подробно по шагам описано выше). Из этой оценки имеем

$$\max\{\|u(t, \cdot) - y(t, \cdot)\|^2 : t \in [t_0, \vartheta]\} \leq \eta + 2\alpha(\delta)(\vartheta - t_0)P_0, \quad P_0 = \max\{\|w\|^2 : w \in P\}, \quad (2.8)$$

$$\int_0^t \|f(\tau, \cdot)\|^2 d\tau \leq \int_0^t \|f^*(\tau, \cdot)\|^2 d\tau + \eta \alpha(\delta)^{-1}. \quad (2.9)$$

Учитывая слабую компактность множества F в гильбертовом пространстве $E = L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$, не нарушая общности рассуждений, можем считать, что для некоторого элемента $f_* \in F$

$$f \rightharpoonup f_* \text{ слабо в } E. \quad (2.10)$$

Тогда при любом $t \in [t_0, \vartheta]$ имеем

$$y(t, \cdot) = y(t, \cdot; \tilde{u}(t_0), f) \rightarrow u(t, \cdot; t_0, u_0, f_*) \text{ сильно в } J(\Omega). \quad (2.11)$$

Из (2.8) и (2.11) получаем тогда равенства

$$u(t, \cdot) = u(t, \cdot; t_0, u_0, f) = u(t, \cdot; t_0, u_0, f_*), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta,$$

из которых следует, что

$$f_* = f.$$

Из свойств (2.9), (2.10) и равенства $f_* = f$ получаем цепочку неравенств

$$\|f\| \leq \liminf_{\rightarrow \infty} \|f\| \leq \limsup_{\rightarrow \infty} \|f\| \leq \|f\|,$$

из которой следует сходимость норм в гильбертовом пространстве E

$$\|f\| \rightarrow \|f\|.$$

Если учесть теперь слабую сходимость (2.10), то получим сходимость в E

$$f \rightarrow f \text{ сильно в } E.$$

В силу ограниченности множества F в пространстве $L_\infty([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ имеем также сильную сходимость $f \rightarrow f$ в пространстве $L([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ при любом $q \in [1, \infty)$. Теорема доказана.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Содержательный смысл задачи описан выше. Приступим теперь к ее формализации. Будем считать, что правая часть $f \in L_2([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ системы (0.1)—(0.3) известна и фиксирована. Отметим еще раз, что поставленная ретроспективная обратная задача (0.1)—(0.3), (0.5) некорректна: она разрешима не для всякого финального состояния u ; даже в том случае, когда задача окажется разрешимой, она может быть неустойчивой относительно малых возмущений наблюдаемого финального состояния u . Более того, операция взятия следа (0.6) накладывает некоторые дополнительные условия на краевую задачу (0.1)—(0.3), (0.5). Эти условия должны обеспечивать корректность операции взятия следа. Из разрешимости в том или ином смысле краевой задачи (0.1)—(0.3), (0.5), вообще говоря, еще не следует, что след (0.6) будет существовать и принадлежать соответствующему функциональному пространству.

Под решением краевой задачи (0.1)—(0.3), (0.5), которую далее кратко будем называть обратной краевой задачей, будем понимать ее слабое решение, определяемое как элемент u , принадлежащий

функциональным пространствам $W_{20}^{01}((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$, $L_4((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$, $C([t_0, \vartheta]; J(\Omega))$ и при любом $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} u(x) v(\vartheta, x) dx - \int_{\Omega} u(t, x) v(t, x) dx = \int_{\Omega} \int_{t_0}^t (uv - \nu u_i v_i - u u_i v + f v) dx dt,$$

каков бы ни был при этом элемент $v \in W_{20}^{01}((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$, удовлетворяющий условию $\operatorname{div} v(t, \cdot) = 0$ для почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$.

Из определения слабого решения прямой краевой задачи, т. е. задачи (0.1)–(0.4), и неравенств (0.8)–(0.10) несложно выводится следующее утверждение: если имеет место слабая сходимость $u_0^{(\cdot)} \rightarrow u_0$ в $J(\Omega)$, то при $k \rightarrow \infty$ имеют место сильная сходимость $u^{(\cdot)} = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0^{(\cdot)}, f) \rightarrow u = u(\cdot, \cdot; t_0, u_0, f)$ в $L_4((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$, слабая сходимость $u^{(\cdot)} \rightarrow u$ в $W_{20}^{01}((t_0, \vartheta) \times \Omega)^2$, слабая сходимость $u^{(\cdot)}(t, \cdot) \rightarrow u(t, \cdot)$ в $J(\Omega)$ равномерно по $t \in [t_0, \vartheta]$, сильная сходимость $u^{(\cdot)}(t, \cdot) \rightarrow u(t, \cdot)$ в $J(\Omega)$ при любом фиксированном $t \in (t_0, \vartheta]$. Последнее из указанных свойств означает полную непрерывность оператора B ,

$$B: J(\Omega) = D(B) \ni u_0 \rightarrow Bu_0 = u(\vartheta, \cdot; t_0, u_0, f) \in R(B) \subset J(\Omega), \\ R(B) = \{u(\vartheta, \cdot; t_0, w, f) : w \in J(\Omega)\}.$$

Поскольку обратная краевая задача может иметь не более одного решения, то для оператора B существует обратный оператор B^{-1} , определенный на области значений $R(B) = D(B^{-1})$ оператора B с областью значений $R(B^{-1}) = D(B)$. Из полной непрерывности оператора B следует, что обратный оператор B^{-1} не может быть непрерывным оператором. Поэтому обратная краевая задача разрешима в указанном выше слабом смысле только для финальных состояний $u \in R(B)$ и не является корректно поставленной задачей, поскольку не обладает непрерывной зависимостью решений от финальных данных. С содержательной точки зрения это означает, что если $u^* \approx u$ и $u^* = u(\vartheta, \cdot; t_0, u_0^*, f)$, $u = u(\vartheta, \cdot; t_0, u_0, f)$, то элемент u_0^* не следует принимать в качестве приближения к точному решению u_0 ретроспективной обратной задачи, отвечающему точным данным u [3, 11, 24].

Из описанных свойств решений прямой и обратной краевых задач следует, что пространство $J(\Omega)$ естественно принять в качестве пространства состояний среды (фазового пространства динамической системы (0.1)–(0.3)). В этом пространстве и будет рассматриваться эволюция во времени состояний среды. При этом для любого $u \in R(B)$ решение обратной краевой задачи будет иметь след $u^0 \in J(\Omega)$. Отметим также, что множество $R(B)$, для элементов которого разрешима обратная задача, имеет довольно сложное строение и не поддается сколько-нибудь простому непосредственному функциональному описанию. По крайней мере легко проверить, что множество $R(B)$ не является линейным многообразием и состоит из функций более гладких, чем функции из пространства $J(\Omega)$. Далее всюду будем считать, что при рассмотрении обратных задач имеет место включение $u \in R(B)$.

Приступим теперь к решению ретроспективной обратной задачи. Сведем ее к задаче стартового управления следующим образом. Введем в рассмотрение некоторое подходящее множество U возможных состояний среды в начальный момент времени t_0 (не исключается случай, когда это множество совпадает со всем пространством $J(\Omega)$ возможных состояний среды) и некоторый подходящий функционал I , определенный на множестве U . Множество U будет представлять собой множество допустимых стартовых управлений, а функционал I — функционал качества управления. Ожидается, что управление или одно из управлений, минимизирующих функционал I на множестве U , доставит решение рассматриваемой задачи, т. е. $u(\vartheta, \cdot; t_0, u_0, f) = u$ для какого-нибудь управления $u_0 \in \operatorname{argmin}\{I(w) : w \in U\}$. Таким образом, в случае достаточных на то оснований исходную ретроспективную обратную задачу можно сформулировать как задачу стартового управления, состоящую в нахождении подходящего управления, которое минимизирует функционал качества I на множестве допустимых управлений U

$$I(w) \rightarrow \min : w \in U. \quad (3.1)$$

Выберем в данном конкретном случае

$$I(w) = \|u(\vartheta, \cdot; t_0, w, f) - u\|^2, \quad U = J(\Omega).$$

Легко заметить, что минимальное нулевое значение функционала I на U достигается на единственном элементе $u_0 = B^{-1}u$:

$$I_0^* = \min\{I(w) : w \in U\} = 0, \quad U_0^* = \operatorname{argmin}\{I(w) : w \in U\} = \{u_0\}.$$

Для решения задачи управления (3.1) воспользуемся каким-нибудь из градиентных методов (см., например, [1, 2, 4, 17, 21, 22]). Построение итерационной последовательности, соответствующей какому-либо из градиентных методов, как будет показано ниже, фактически сведется к решению серии прямых задач, которые являются корректно поставленными задачами и допускают устойчивую численную реализацию.

Сравнительно просто установить, например подобно тому, как это было сделано в первом разделе для другой задачи, что функционал I сильно дифференцируем в каждой точке $w \in U$ и

$$I'(w) = \psi(t_0, \cdot) = \psi(t_0, \cdot; w) \in J(\Omega),$$

где $\psi = \psi(\cdot, \cdot) = \psi(\cdot, \cdot; w)$ — решение следующей линейной краевой задачи, которую далее будем называть просто сопряженной задачей:

$$\begin{aligned} \psi &= -\nu \Delta \psi - u \psi_i + \psi \nabla u, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \psi &= 0, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ \psi &= 0, & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \partial\Omega, \\ \psi(\vartheta, x) &= 2(u(\vartheta, x) - u(x)), & x \in \Omega. \end{aligned}$$

Справедливы также соотношения

$$I(w+h) - I(w) = \langle \psi(t_0, \cdot), h \rangle + o(\|h\|), \quad o(\|h\|) \leq C\|h\|^2, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2, \quad C_1 = C_1(w) = \exp \left(2\nu^{-1} \int_0^{\vartheta} (\|\nabla u_1\|^2 + \|\nabla u_2\|^2) dt \right), \\ C_2 &= C_2(w) = \left(2 \operatorname{mes}(\Omega) \nu^{-1} C_1 (1 + \ln C_1) \int_0^{\vartheta} \|\psi\|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отметим, что вычисление градиента $I'(w)$ сводится к последовательному выполнению следующих действий: решению прямой задачи и нахождению ее решения $u = u(\cdot, \cdot; t_0, w, f)$; решению сопряженной задачи и нахождению ее решения $\psi = \psi(\cdot, \cdot) = \psi(\cdot, \cdot; w)$; взятию следа $\psi(t_0, \cdot)$, который и является искомым градиентом. Сопряженная задача решается в обратном направлении времени, но тем не менее она является корректно поставленной задачей, поскольку в правой части уравнения оператор Лапласа стоит со знаком минус. Рассматривая сопряженную задачу, можно установить, что градиент удовлетворяет на U локальному условию Липшица: для любого ограниченного множества $W \subset U$ существует такое число $L \geq 0$, что для любых элементов w_1 и w_2 из W выполняется неравенство

$$\|I'(w_1) - I'(w_2)\| \leq L\|w_1 - w_2\|.$$

Рассмотрим градиентный итерационный процесс

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} - \gamma I'(u_0^{(k)}), \quad u_0^{(0)} \in U, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{C(\cdot)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

где $C(\cdot) = C(u_0^{(k)})$, выражение для $C = C(\cdot)$ определено выше.

Теорема 3.1. *Каково бы ни было начальное приближение $u_0^{(0)} \in U$, последовательность значений функционала качества $\{I(u_0^{(k)})\}$, где последовательность аргументов $\{u_0^{(k)}\}$ определена соотношениями (3.3), монотонно убывает и сходится к некоторому числу $I_0 \geq I_0^* = 0$. Если выбор параметра γ подчинить дополнительному условию $\delta_1/C(\cdot) < \gamma < \delta_2/C(\cdot)$,*

$0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$, то дополнительно получим $\|I'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$ и $\|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Если при некотором $v \in U$ множество уровня $M(v) = \{w \in U : I(w) \leq I(v)\}$ оказалось ограниченным и $u_0^{(0)} \in M(v)$, то при выборе параметра γ из того же самого дополнительного условия получим также, что последовательность $\{u_0^{(k)}\}$ является минимизирующей, $I(u_0^{(k)}) \rightarrow I_0^*$, и имеет место слабая сходимость $u_0^{(k)} \rightarrow u_0$ в $J(\Omega)$. Если при ограниченном множестве $M(v)$ имеет место включение $u_0^{(0)} \in M(v)$ и для некоторой константы $d > 0$ на множестве $M(v)$ выполняется неравенство $I(w) \leq d\|I'(w)\|$, то справедлива следующая оценка скорости сходимости для функционала:

$$0 \leq I(u_0^{(k)}) \leq C_0 k^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad C_0 = \text{const} \geq 0.$$

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $I'(u_0^{(k)})$ не обращается в нуль ни при каком $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. В противном случае, если бы при некотором $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ производная $I'(u_0^{(k)})$ обратилась в нуль, то, учитывая (3.3), мы получили бы равенства $u_0^{(k)} = u_0^{(k+1)} = \dots = u_0$, и тогда утверждение теоремы стало бы очевидным.

Из (3.2) следуют неравенства

$$I(u_0^{(k+1)}) - I(u_0^{(k)}) \leq -\gamma \|I'(u_0^{(k)})\|^2 + C^{(k)} \gamma^2 \|I'(u_0^{(k)})\|^2 < 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

из которых вытекает монотонное убывание последовательности $\{I(u_0^{(k)})\}$. Поскольку она еще ограничена снизу, она сходится к некоторому числу $I_0 \geq I_0^* = 0$.

Пусть теперь выполняется дополнительное условие $\delta_1/C^{(k)} < \gamma < \delta_2/C^{(k)}$. Покажем, что $\|I'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Если это не так, то существуют некоторое число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{k_m\} \subseteq \{k\}$, такие что $\|I'(u_0^{(k_m)})\| \geq \varepsilon$. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что это неравенство выполняется для самой последовательности. Тогда из неравенства

$$I(u_0^{(k)}) - I(u_0^{(k+1)}) \geq \|I'(u_0^{(k)})\|^2 (\gamma - \gamma^2 C^{(k)}) \quad (3.4)$$

следует, что $\|I'(u_0^{(k)})\|^2 (\gamma - \gamma^2 C^{(k)}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, в силу того что последовательность $\{I(u_0^{(k)})\}$ является сходящейся и $I(u_0^{(k)}) - I(u_0^{(k+1)}) \rightarrow 0$. Учитывая неравенства $\|I'(u_0^{(k)})\| \geq \varepsilon$ и $(\gamma - \gamma^2 C^{(k)}) \geq \delta_1(1 - \delta_2)/C^{(k)}$, получаем $C^{(k)} \rightarrow \infty$ и $\gamma \rightarrow 0$. Суммируя неравенства (3.4), получаем сходящиеся ряды

$$\infty > I(u_0^{(0)}) - I_0 \geq \sum_{k=0}^{\infty} \|I'(u_0^{(k)})\|^2 (\gamma - \gamma^2 C^{(k)}) \geq \varepsilon(1 - \delta_2) \sum_{k=0}^{\infty} \gamma \|I'(u_0^{(k)})\|.$$

Тогда из (3.3) получаем неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma \|I'(u_0^{(k)})\| < \infty,$$

из которого вытекает фундаментальность и ограниченность последовательности $\{u_0^{(k)}\}$ в пространстве $J(\Omega)$. Из ее ограниченности вытекает ограниченность последовательности $\{C^{(k)}\}$, что противоречит свойству $C^{(k)} \rightarrow \infty$. Полученное противоречие показывает, что $\|I'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Теперь из неравенства

$$\|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \leq \gamma \|I'(u_0^{(k)})\| \leq \|J'(u_0^{(k)})\|$$

и свойства $\|I'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$ получаем $\|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Пусть теперь при некотором $v \in U$ множество уровня $M(v)$ ограничено и $u_0^{(0)} \in M(v)$. Тогда $\{u_0^{(k)}\} \subset M(v)$ и последовательность $\{u_0^{(k)}\}$ ограничена в пространстве $J(\Omega)$. Ограниченное множество из $J(\Omega)$ слабо секвенциально предкомпактно, поэтому последовательность $\{u_0^{(k)}\}$ имеет слабо сходящиеся в $J(\Omega)$ подпоследовательности, пусть $\{u_0^{(k_m)}\}$ — любая из таких слабо сходящихся подпоследовательностей. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что слабо

сходится сама последовательность и элемент $u_* \in J(\Omega)$ является ее слабым пределом. В силу слабой непрерывности функционала и его градиента получаем $I(u_0^{(k)}) \rightarrow I(u_*)$ и $I'(u_0^{(k)}) \rightarrow I'(u_*)$ в $J(\Omega)$. Учитывая сходимость $\|I'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$, имеем $I'(u_*) = 0$, $u_* = u_0$, $I(u_*) = I_0^* = I_0$. Получили, что любая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{u_0^{(k)}\}$ сходится к одному и тому же элементу u_0 . Значит, сама последовательность $\{u_0^{(k)}\}$ слабо сходится к элементу u_0 .

Выведем оценку скорости сходимости функционала. Из ограниченности множества $M(v)$ следует ограниченность набора чисел $\{C^{(k)}\}$. Поэтому существует некоторое число $C > 1$, такое что $1 \leq C^{(k)} \leq C$ для любого $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Тогда, в силу выбора параметра γ из дополнительного условия, получаем неравенства

$$I(u_0^{(k)}) - I(u_0^{(k+1)}) \geq \|I'(u_0^{(k)})\|^2 (\gamma - \gamma^2 C^{(k)}) \geq \|I'(u_0^{(k)})\|^2 \delta_1 \frac{1 - \delta_2}{C}.$$

Учитывая неравенство $I(w) \leq d\|I'(w)\|$, из последнего неравенства имеем

$$I(u_0^{(k)}) - I(u_0^{(k+1)}) \geq \left(\frac{\delta_1(1 - \delta_2)}{Cd^2} \right) I(u_0^{(k)})^2.$$

Отсюда и из [2, лемма 2.6.4] следует искомая оценка скорости сходимости функционала. Теорема доказана.

Исследуем возможности решения ретроспективной обратной задачи при регуляризации исходного функционала качества [3, 11, 24]. Регуляризованный функционал возьмем в виде $T(w) = I(w) + \alpha\|w\|^2$ и рассмотрим задачу оптимального управления

$$T(w) \rightarrow \min: \quad w \in U. \quad (3.5)$$

Пусть параметр α пока фиксирован. Регуляризованный функционал является растущим, любое его множество уровня ограничено, он слабо полунепрерывен снизу на U , множество $U^* = \operatorname{argmin}\{T(w): w \in U\}$ минимизирующих элементов задачи (3.5) не пусто, любая минимизирующая последовательность задачи (3.5) сходится сильно в $J(\Omega)$ к множеству U^* . Функционал T сильно дифференцируем и локально липшицев на U , причем

$$T'(w) = I'(w) + 2\alpha w.$$

Из рассмотрения минимумов функционалов I и T на U для любого элемента $w \in U^*$ вытекает, что имеют место следующие свойства:

$$\begin{aligned} I(u_0) = 0 \leq I(w), \quad 0 \leq T^* = T(u_0) \leq T(w), \quad \alpha\|w\|^2 + I(w) \leq \alpha\|u_0\|^2, \\ I(w) \leq \alpha\|u_0\|^2, \quad \|w\|^2 \leq \|u_0\|^2, \quad \alpha\|u_0\|^2 = T(u_0), \quad I(w) \rightarrow 0 \quad (\alpha \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Рассмотрим градиентный итерационный процесс

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} - \gamma T'(u_0^{(k)}), \quad u_0^{(0)} \in U, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{C^{(k)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

где $C^{(k)} = \alpha + C^{(k)}$, величина $C^{(k)}$ определена выше.

Теорема 3.2. *Каково бы ни было начальное приближение $u_0^{(0)} \in U$, последовательность значений функционала качества $\{T(u_0^{(k)})\}$, где последовательность аргументов $\{u_0^{(k)}\}$ определена соотношениями (3.6), монотонно убывает и сходится к некоторому числу $T^0 \geq T^* \geq 0$. Если выбор параметра γ подчинить дополнительному условию $\delta_1/C^{(k)} < \gamma < \delta_2/C^{(k)}$, $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$, то дополнительно получим $\|T'(u_0^{(k)})\| \rightarrow 0$ и $\|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \rightarrow 0$, причем последовательность $\{u_0^{(k)}\}$ будет сильно сходиться в $J(\Omega)$ к множеству $S^* = \{w \in M(u_0^{(0)}): T'(w) = 0\}$ стационарных точек функционала T из множества уровня $M(u_0^{(0)}) = \{w \in U: T(w) \leq T(u_0^{(0)})\}$. Если, кроме того, для некоторой константы $d > 0$ на множестве $M(u_0^{(0)})$ выполняется неравенство $T(w) - T^* \leq d\|T'(w)\|$, то последовательность $\{u_0^{(k)}\}$ является*

минимизирующей, $T(u_0^{(k)}) \rightarrow T^*$, и имеет место сильная сходимость $u_0^{(k)} \rightarrow U^*$ в $J(\Omega)$ к множеству U^* . Справедлива также следующая оценка скорости сходимости функционала:

$$0 \leq T(u_0^{(k)}) - T^* \leq C k^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad C = \text{const} \geq 0.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательствам подобных утверждений в теореме 3.1 или теореме 1.2.

Теорема 3.2 показывает, что задача (3.5) по сравнению с задачей (3.1) обладает лучшими свойствами в отношении сходимости градиентного метода. Кроме того, задача (3.5) обладает более высоким запасом практической устойчивости. Воспользуемся этими фактами, чтобы построить сильно сходящиеся приближения к решению задачи (3.1). Рассмотрим последовательность $\{u_0^{(k)}\}$ из ε -оптимальных управлений задачи (3.5) при каком-нибудь фиксированном $\alpha = \alpha > 0$ (элемент $u_0^{(k)}$ находится каким-нибудь известным методом, например одним из градиентных методов):

$$T^* \leq T(u_0^{(k)}) \leq T^* + \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const} \geq 0, \quad \alpha = \alpha > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 3.3. Пусть числовые последовательности $\{\varepsilon\}$ и $\{\alpha\}$ удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$\varepsilon \alpha^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$I(u_0^{(k)}) \rightarrow I_0^*, \quad u_0^{(k)} \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в} \quad J(\Omega) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.1.

Рассмотрим теперь некоторые методы решения ретроспективной обратной задачи, которые учитывают ту или иную дополнительную информацию об искомом решении. Рассмотрим здесь несколько различных вариантов.

Пусть дополнительная информация об искомом решении обратной задачи состоит в том, что априори известно о принадлежности искомого начального состояния u_0 некоторому известному шару $B(r, u^*)$. Воспользуемся этой информацией при нахождении решения задачи следующим образом. Положим $U = B[r, u^*]$ и для нахождения u_0 воспользуемся методом проекции градиента [1, 2, 4, 17, 21, 22].

Рассмотрим итерационный процесс метода проекции градиента

$$u_0^{(k+1)} = \text{Pr}(u_0^{(k)} - \gamma I'(u_0^{(k)})), \quad u_0^{(0)} \in U, \quad \sigma_1 \leq \gamma \leq \frac{2}{L + 2\sigma_2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

где σ_1 и σ_2 — положительные числа, являющиеся параметрами метода, L — константа Липшица градиента I' на шаре U , Pr — оператор проектирования на U :

$$\text{Pr}(w) = w, \quad \text{если} \quad w \in U;$$

$$\text{Pr}(w) = u^* + r \frac{w - u^*}{\|w - u^*\|}, \quad \text{если} \quad w \notin U.$$

Теорема 3.4. Каково бы ни было начальное приближение $u_0^{(0)} \in U$, последовательность $\{u_0^{(k)}\}$ метода (3.7) является релаксационной и сходящейся слабо в $J(\Omega)$ к множеству стационарных элементов задачи минимизации $S_0 = \{u \in U: \langle I'(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U\}$, а также $\langle I'(u_0^{(k)}), u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)} \rangle \rightarrow 0$ и $\|u_0^{(k+1)} - u_0^{(k)}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Если при некотором $v_* \in J(\Omega)$ имеет место включение $u_0^{(0)} \in M_0(v_*) \subseteq U$, то дополнительно получим сильную сходимость $I'(u_0^{(k)}) \rightarrow 0$ в $J(\Omega)$, слабую сходимость $u_0^{(k)} \rightarrow u_0$ в $J(\Omega)$ и сходимость $I(u_0^{(k)}) \rightarrow I_0^* = 0$ при $k \rightarrow \infty$. Если, кроме того, для некоторой константы $d > 0$ на $M_0(u_0^{(0)})$ выполняется неравенство $I(w) \leq d\|I'(w)\|$, то справедлива следующая оценка скорости сходимости для функционала:

$$0 \leq I(u_0^{(k)}) \leq C^0 k^{-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad C^0 = \text{const} \geq 0.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теорем 3.1 и 3.2.

Если известно, что искомое решение задачи u_0 лежит в известном выпуклом компактном множестве $U \subset J(\Omega)$, то итерационный процесс (3.7) приводит к последовательности элементов $\{u_0^{(k)}\}$, которая обладает всеми свойствами, указанными в теореме 3.4, а также имеет место сильная сходимость $u_0^{(k)} \rightarrow S_0$ и $u_0^{(k)} \rightarrow u_0$ в $J(\Omega)$.

Обратимся теперь к дополнительной информации иного свойства. Пусть известно, что при некотором $t_* < t_0$ имеет место включение

$$u_0 \in U = \{ u(t_0, \cdot; t_*, v, f) : v \in V \}, \quad (3.8)$$

т. е. состояние u_0 является финальным для решения $u = u(\cdot, \cdot; t_*, v, f)$ задачи

$$\begin{aligned} u + (u \nabla) u &= \nu \Delta u - \nabla p + f_*, & t_* \leq t \leq t_0, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0, & t_* \leq t \leq t_0, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, & t_* \leq t \leq t_0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

с какой-нибудь функцией $f_* \in L_2([t_*, t_0]; J(\Omega))$ и некоторым начальным для момента времени t_* состоянием $v \in V \subseteq J(\Omega)$. Из свойств решений прямой краевой задачи вытекает, что множество U предкомпактно в $J(\Omega)$.

Воспользуемся этой дополнительной информацией следующим образом. Рассмотрим вспомогательную ретроспективную обратную задачу на промежутке $t_* \leq t \leq \vartheta$. Эту задачу сформулируем снова как задачу стартового управления

$$\tilde{I}(v) = \|y(\vartheta, \cdot; t_*, v, f) - u\|^2 \rightarrow \min: \quad v \in V, \quad (3.9)$$

где $y = y(\cdot, \cdot; t_*, v, f)$ — решение следующей прямой краевой задачи:

$$\begin{aligned} y + (y \nabla) y &= \nu \Delta y - \nabla p + f^*, & t_* \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} y &= 0, & t_* \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \Omega, \\ y &= 0, & t_* \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \partial\Omega, \\ y(t_*, x) &= v(x), & x \in \Omega, \end{aligned}$$

здесь $f^*(t, \cdot) = f_*(t, \cdot)$ при $t_* \leq t < t_0$ и $f^*(t, \cdot) = f(t, \cdot)$ при $t_0 \leq t \leq \vartheta$.

Допустим, что каким-то способом найдена сходящаяся слабо в $J(\Omega)$ минимизирующая последовательность $\{v^{(k)}\}$ задачи (3.9), т. е. $\tilde{I}(v^{(k)}) \rightarrow 0$, $v^{(k)} \rightharpoonup v_*$ слабо в $J(\Omega)$, $y(\vartheta, \cdot; t_*, v_*, f) = u$. Тогда, учитывая предкомпактность множества U в $J(\Omega)$, имеем сильную сходимость $u_0^{(k)} = y(t_0, \cdot; t_*, v^{(k)}, f) \rightarrow u_0 = y(t_0, \cdot; t_*, v_*, f)$ в $J(\Omega)$ и $I(u_0^{(k)}) \rightarrow I(u_0) = 0$. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 3.5. Пусть об исходной ретроспективной обратной задаче известна априорная информация (3.8), и пусть $\{v^{(k)}\}$ есть слабо сходящаяся в $J(\Omega)$ к некоторому элементу $v_* \in J(\Omega)$ минимизирующая последовательность элементов вспомогательной задачи (3.9). Тогда последовательность $\{u_0^{(k)}\}$, где $u_0^{(k)} = y(t_0, \cdot; t_*, v^{(k)}, f)$, сильно в $J(\Omega)$ сходится к решению $u_0 = u^0$ исходной ретроспективной обратной задачи (0.1)–(0.3), (0.5), (0.6).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00354) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 286 с.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 824 с.
3. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. — 206 с.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с.

5. Исмаил-заде А. Т., Короткий А. И., Наймарк Б. М., Цепелев И. А. Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов // ЖВМ и МФ. — 2001. — 41, № 9. — С. 1399—1415.
6. Исмаил-заде А. Т., Короткий А. И., Наймарк Б. М., Цепелев И. А. Трехмерное моделирование обратной ретроспективной задачи тепловой конвекции // ЖВМ и МФ. — 2003. — 43, № 4. — С. 614—626.
7. Ким А. В., Короткий А. И., Осипов Ю. С. Обратные задачи динамики параболических систем // Прикл. математика и механика. — 1990. — 54, вып. 5. — С. 754—759.
8. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
9. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 520 с.
10. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
11. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: СО АН СССР, 1962. — 92 с.
12. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Физматгиз, 1961. — 204 с.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 736 с.
14. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. — М.: Мир, 1970. — 336 с.
15. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
16. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 418 с.
17. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989. — 608 с.
18. Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. — 237 с.
19. Осипов Ю. С., Короткий А. И. Динамическое моделирование параметров в гиперболических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1991. — № 2. — С. 154—164.
20. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
21. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984. — 264 с.
22. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. — М.: Мир, 1973. — 244 с.
23. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
24. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
25. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 351 с.
26. Osipov Yu. S., Korotkii A. I. On dynamical restoration of parameters of elliptic systems // Ill-Posed Problems in Natural Sciences / Ed. A. N. Tikhonov. — Moscow: VSP/TVP, 1992. — P. 108—117.
27. Osipov Yu. S., Kryazhinskii A. V. Inverse Problems of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. — London: Gordon and Breach, 1995. — 586 p.
28. Короткий А. И. Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1995. — № 11. — С. 101—124.
29. Короткий А. И. О восстановлении местоположения и интенсивности источников возмущений // Труды ИММ УрО РАН. — 1996. — 4. — С. 219—227.
30. Короткий А. И. Восстановление множества управлений по измерениям состояний эволюционной системы // Прикл. математика и механика. — 1997. — 61, вып. 3. — С. 440—446.
31. Короткий А. И. Восстановление управлений в условиях неполной информации о динамике системы // Прикл. математика и механика. — 1998. — 62, вып. 4. — С. 566—575.
32. Короткий А. И. Восстановление управлений и параметров динамических систем при неполной информации // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1998. — № 11. — С. 47—55.
33. Короткий А. И. О динамической реконструкции управлений и параметров в условиях неполной информации о системе // Дифференц. уравн. — 1999. — 35, № 11. — С. 1482—1486.
34. Короткий А. И. Динамическое восстановление управлений в условиях неопределенности // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 1. — С. 21—24.
35. Короткий А. И., Цепелев И. А. Верхняя и нижняя оценки точности в задаче динамического определения параметров // Труды ИММ УрО РАН. — 1996. — 4. — С. 228—238.
36. Короткий А. И., Цепелев И. А. Трехмерное моделирование прямых и обратных задач Рэлея—Бенара и Рэлея—Тейлора // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. — 2002. — Вып. 3. — С. 22—33.
37. Короткий А. И., Цепелев И. А. Трехмерное моделирование обратной задачи неустойчивости Рэлея—Бенара // Изв. УрГУ. Сер. математика и механика. — 2003. — № 26. — С. 87—96.

38. *Ismail-Zadeh A. T., Korotkii A. I., Tsepelev I. A.* Numerical approach to solving problems of slow viscous flow backwards in time // Proc. of the International Conference «Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics» (Cambridge, 17–20 June 2003, USA) / Ed. K. J. Bathe. — Amsterdam: Elsevier Science, 2003. — P. 938–941.
39. *Ismail-Zadeh A., Schubert G., Tsepelev I., Korotkii A.* Inverse problem of thermal convection: numerical approach and application to mantle plume restoration // Physics of the Earth and Planetary Interiors. — 2004. — 145. — P. 99–114.
40. *Ismail-Zadeh A., Tsepelev I., Talbot C., Korotkii A.* Three-dimensional forward and backward modelling of diapirism: numerical approach and its applicability to the evolution of salt structures in the Pricaspian basin // Tectonophysics. — 2004.
41. *Korotkii A. I., Tsepelev I. A.* On an inverse dynamic problem for Goursat–Darboux system // J. Math. Systems Estim. Control. — 1998. — 8, N 2. — P. 181–184.
42. *Korotkii A. I., Tsepelev I. A.* Solution of a retrospective inverse problem for one nonlinear evolutionary model // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. Supplement 2. — 2003. — P. 80–94. — Translated from Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. — 2003. — 9, N 2. Translated and published by MAIK «Nauka/Interperiodica» Publishing (Russia), 2003.

А. И. Короткий

E-mail: korotkii@imm.uran.ru

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДОВ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2005 г. **В. И. МАКСИМОВ**

Аннотация. Для некоторых классов систем, описываемых дифференциально-функциональными уравнениями, дается обзор алгоритмов динамического восстановления входов. Предлагаемые алгоритмы, являющиеся устойчивыми к информационным помехам и погрешностям вычислений, основаны на методе функций Ляпунова, а также подходящих модификациях известного в теории гарантированного управления методе экстремального прицеливания Н. Н. Красовского.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Постановка задачи	78
2. Схема решения	80
3. Линейные системы	81
4. Нелинейные системы	86
5. Результаты компьютерного моделирования	89
Список литературы	94

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается задача устойчивого восстановления неизвестного входа динамической системы по результатам неточных наблюдений за ее траекторией. Содержание рассматриваемой задачи таково. Имеется динамическая система, описываемая векторным нелинейным дифференциальным уравнением с запаздыванием. Траектория системы зависит от меняющегося во времени входного воздействия (входа), трактуемого в дальнейшем как управление. Заранее как вход, так и траектория не заданы. Однако известно множество, ограничивающее допустимую реализацию входа. В процессе функционирования системы измеряются все ее фазовые состояния или их «часть». Эти измерения, вообще говоря, неточны. Требуется сконструировать алгоритм приближенного восстановления ненаблюдаемой «части» координат (если таковая имеется), а также входа, обладающий свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности означает, что текущие значения приближения соответствующих координат и входа вырабатываются в реальном времени, свойство устойчивости — что приближения сколь угодно точны при достаточной точности наблюдения.

Задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем [9, 12, 25, 26] и, в более общем контексте, вкладывается в проблематику теории некорректных задач [4–6, 13, 18, 23, 24]. В апостериорной постановке — при отсутствии требования динамичности алгоритма восстановления — подобные задачи систематически исследовались, например в цитированных выше работах. Требование динамичности — особенность рассматриваемой постановки. Представляемые в настоящей работе алгоритмы опираются на конструкции теории устойчивого динамического обращения [1, 10, 11, 14–16, 19–22, 33, 36, 37], основанные на соединении методов теории некорректных задач [4–6, 24] и теории позиционного управления [7, 8]. Суть описанной в [10, 11, 14–16, 19–22, 33, 36, 37] методики состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления некоторой искусственной динамической системой, моделью; такой алгоритм, выходом которого служит, в частности, реализация управления в модели, по своему определению является динамическим. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени «аппроксимирует» неизвестный вход.

Статья построена следующим образом. Во введении дается содержательная постановка рассматриваемой задачи динамической реконструкции. В разделе 2 излагается метод ее решения, основанный на идеологии управления по принципу обратной связи с моделью. Затем в разделах 3 и 4 указывается несколько алгоритмов реконструкции неизвестных характеристик (управлений, координат) в системах, описываемых векторными дифференциально-функциональными уравнениями. При этом в разделе 3 рассматриваются линейные системы, а в разделе 4 — нелинейные. В последнем, пятом разделе приводятся некоторые результаты вычислительных экспериментов.

В работе приняты следующие обозначения:

$\mathbb{R}$	— n -мерное пространство с евклидовой нормой $ \cdot $ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$;
$\mathbb{N}$	— множество натуральных чисел;
$L_2(T; \mathbb{R})$	— гильбертово пространство всех суммируемых с квадратом нормы функций, отображающих множество T в пространство $\mathbb{R}$ (с нормой $ \cdot _{2(\cdot; \mathbb{R}^n)}$);
$C(T; \mathbb{R})$	— банахово пространство всех непрерывных функций, отображающих множество T в пространство $\mathbb{R}$ и снабженное $\sup$ -нормой $ \cdot _{(\cdot; \mathbb{R}^n)}$;
$C_1([-\tau, 0]; \mathbb{R})$	— пространство непрерывно дифференцируемых на $[-\tau, 0]$ n -мерных вектор-функций со стандартной нормой;
C'	— транспонированная матрица;
C^{-1}	— обратная матрица;
I	— единичная матрица размерности $n \times n$;
$ a $	— модуль числа a ;
$\ker C$	— ядро матрицы C ;
$\text{rank } C$	— ранг матрицы C .

Обсуждаемая задача может быть сформулирована следующим образом. Имеется динамическая система Σ , функционирующая на промежутке времени $T = [t_0, \vartheta]$, $\vartheta < +\infty$. (Ниже полагается $t_0 = 0$). Ее траектория $x(t) = x(t; x_0, u(\cdot)) \in \mathbb{R}$, $t \in T$, зависит от начального состояния x_0 и изменяющегося во времени неизвестного входного воздействия

$$u(\cdot) \in P(\cdot) \subset L_2(T; \mathbb{R}).$$

Здесь $P(\cdot)$ — некоторое заданное множество, называемое в дальнейшем множеством «допустимых управлений». На промежутке T взято равномерное разбиение $\Delta = \{\tau\}_{=0}$ с шагом δ , $\tau_{+1} = \tau + \delta$, $\tau = \vartheta$. В моменты τ измеряется выход системы

$$y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}$$

(C — матрица размерности $r \times q$). Выход измеряется с ошибкой. Результаты неточных измерений — векторы $\xi \in \mathbb{R}$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi - y(\tau)| \leq h, \quad k \in [0 : n - 1], \quad (1)$$

где $h \in (0, 1)$ — величина информационной погрешности. Требуется построить алгоритм, позволяющий «синхронно с развитием процесса» по результатам неточных измерений вычислять некоторую пару («управление—траектория») $\{\tilde{u}(\cdot), x(\cdot)\}$, близкую (в смысле, уточняемом в дальнейшем) к множеству всех пар $\{u(\cdot), x(\cdot)\}$, совместимых с выходом $y(\cdot)$. Такова содержательная постановка задачи реконструкции. В том случае, когда

$$C = I,$$

т. е. измеряются все компоненты фазового вектора, описанная выше задача трансформируется в задачу построения алгоритма приближенного вычисления только управления $\tilde{u}(\cdot)$, являющегося приближением некоторого управления $u_*(\cdot)$ из множества допустимых управлений, порождающих траекторию $x(\cdot)$.

2. СХЕМА РЕШЕНИЯ

Опишем кратко схему решения рассматриваемой задачи, следуя подходу, который развивается в [1, 10, 11, 14–16, 19–22, 33, 37]. В соответствии с этим подходом задача приближенного вычисления пары $\{\tilde{u}(\cdot), x(\cdot)\}$ (задача реконструкции) заменяется новой задачей, а именно задачей управления по принципу обратной связи вспомогательной системой M , называемой моделью. В дальнейшем фазовую траекторию модели мы обозначаем $Y(\cdot) = \{Y_1(\cdot), Y_2(\cdot)\}$, а управление в модели — $U(\cdot) = \{u(\cdot), v(\cdot)\}$. Последнее определяется некоторым законом обратной связи $\mathcal{U}(\cdot; \xi(\cdot), Y(\cdot))$. Процесс управления моделью организуется таким образом, чтобы при подходящем согласовании ряда параметров решением задачи являлся какой-либо набор элементов из пятерки $\{\xi(\cdot), u(\cdot), v(\cdot), Y_1(\cdot), Y_2(\cdot)\}$, например пара $\{u(\cdot), Y_1(\cdot)\}$: $\tilde{u}(\cdot) = u(\cdot)$, $x(\cdot) = Y_1(\cdot)$. В последнем случае величины $v(\cdot)$ (управление) и $Y_2(\cdot)$ (часть фазовых координат модели) являются вспомогательными характеристиками. Если измеряются все координаты системы, как правило, $\tilde{u}(\cdot) = U(\cdot) \equiv u(\cdot)$, $Y(\cdot) = Y_1(\cdot)$. При этом управление $U(\cdot)$ «приближает» некоторое управление $u_*(\cdot)$ из множества всех управлений, порождающих выход $y(\cdot) = x(\cdot)$.

Таким образом, согласно методике [1, 10, 11, 14–16, 19–22, 33, 37] сначала вводится вспомогательная динамическая система M , которая функционирует на временном интервале T и является управляемой системой, имеющей неизвестный (подлежащий формированию) вход (управление) $U(\cdot)$ и выход (фазовую траекторию) $Y(\cdot)$. Затем указывается алгоритм решения, т. е. организуется процесс синхронного управления системами Σ и M (на промежутке T). Последний разбивается на конечное число $(n - 1)$ шагов. Во время реализации k -го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta = [\tau, \tau + 1)$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент времени τ , в соответствии с выбранным правилом $\mathcal{U}$ вычисляется функция

$$U(t) = \mathcal{U}(\tau, \xi_0, \dots, \xi, Y(\tau_0), \dots, Y(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + 1).$$

Затем (вплоть до момента $\tau + 1$) на вход модели подается управление

$$U = U(t), \quad \tau \leq t < \tau + 1.$$

Результатом работы алгоритма на k -м шаге является пара «управление—фазовая траектория модели»

$$\{U(t), Y(t)\}, \quad t \in [\tau, \tau + 1).$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи сводится к «правильному» выбору модели M и закона управления ею $\mathcal{U}$.

Итак, решение задачи реконструкции, по существу, равносильно решению следующих двух задач:

- а) задачи подходящего выбора вспомогательной системы (модели M) и
- б) задачи выбора закона формирования управления в модели $\mathcal{U}$.

Заметим, что при решении задач а) и б) важную роль играет ряд факторов. Например, априорная информация о структуре системы Σ (вид уравнения, свойства его решения и т. д.), свойства множества допустимых управлений $P(\cdot)$, структура выхода y (т. е. свойства матрицы C) и т. д.

В [10] был предложен один из путей реализации указанной схемы. Система Σ описывалась обыкновенным векторным нелинейным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad t \in [0, \vartheta], \\ x(0) &= x_0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2)$$

с управлением $u(\cdot) \in P(\cdot) = \{u(\cdot): u(t) \in P \text{ при п.в. } t \in [0, \vartheta]\}$. Здесь $P \subset \mathbb{R}$ — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. Предполагалось, что в моменты времени τ измеряются все координаты системы (таким образом, $Y \equiv X$). В качестве модели была взята система, описываемая линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{Y}(t) = f_1(\tau, \xi) + f_2(\tau, \xi)U(t), \quad t \in \delta = [\tau, \tau + 1), \quad Y(0) = \xi_0.$$

Управление $U(t)$ в модели вычислялось по принципу обратной связи:

$$U(t) = \arg \min \{2(Y(\tau) - \xi, f_2(\tau, \xi)v) + \alpha|v|^2 : v \in P\}, \quad t \in \delta. \quad (3)$$

Основной результат работы [1] состоял в обосновании того факта, что при подходящем согласовании параметра регуляризации α , информационной погрешности h и шага временной сетки $\delta = \max(\tau - \tau_{-1})$ имеет место сходимость (в метрике пространства $L_2([0, \vartheta]; \mathbb{R})$) управлений $U(\cdot)$ к некоторому управлению $u_0(\cdot)$ ($u_0(\cdot) \in P(\cdot)$), порождающему $x(\cdot)$. Здесь $x(\cdot)$ — измеряемое с ошибкой решение уравнения (2). Результаты [10] были модифицированы для систем с запаздыванием в [36].

В основе метода, развитого в [10], лежит идея стабилизации подходящих функционалов типа Ляпунова путем экстремального сдвига. Таким образом, метод комбинирует принцип стабилизации с принципом экстремального сдвига Н. Н. Красовского в схеме управления с моделью. Суть этого метода состоит в следующем. Вводится сглаживающий функционал $\Lambda(\cdot)$ рассматриваемой обратной задачи, значения которого представляются в виде супремума значений функционала $\lambda(t, \cdot)$, зависящего от времени $t \in T$. Функционал $\lambda(t, \cdot)$ трактуется как своеобразный функционал Ляпунова для модели. Закон управления U по типу экстремального сдвига обеспечивает «слабое возрастание» $\lambda(t, \cdot)$ во времени. В результате выход алгоритма — временная реализация управления в модели — подпадает, как правило, под условие регуляризации для сглаживающего функционала $\Lambda(\cdot)$. Следует отметить, что принцип экстремального сдвига применяется зачастую в регуляризованном виде. Регуляризация осуществляется обычно снова по методу сглаживающего функционала, но уже не на глобальном уровне — реализованных управляемых процессов, а на локальном — текущих состояний модели и текущих историй сигналов. Так, описанное выше правило (3) выбора управления $U(t)$ в модели при определенных свойствах функции f_2 обеспечивает «малое» возрастание функционала Ляпунова

$$\lambda_1(t, U(\cdot), Y(\cdot)) = \lambda_1(t, Y(\cdot)) + \alpha \int_0^t |U(\tau)|^2 d\tau - \alpha \int_0^t |u_*(\tau)|^2 d\tau,$$

где

$$\lambda_1(t, Y(\cdot)) = |Y(t) - x(t)|^2.$$

Если же управление $U(t)$, $t \in \delta$, выбирать по принципу экстремального сдвига [7, 8]:

$$U(t) = \arg \min \{2(Y(\tau) - \xi, f_2(\tau, \xi)v) : v \in P\}, \quad t \in \delta,$$

то при малых h и δ будет «малое» возрастание функционала $\lambda_1(t, Y(t))$ на промежутке времени T .

Цель данной работы состоит в систематизации некоторых результатов, полученных в последние 5—10 лет и развивающих принцип стабилизации функционалов типа Ляпунова путем экстремального сдвига. При этом мы не будем рассматривать объекты, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнениями в частных производных. Мы коснемся только дифференциально-функциональных систем, сосредоточив основное внимание на анализе влияния априорной информации на выбор того или иного алгоритма. Значительное внимание уделим задачам реконструкции негладких и «неограниченных» управлений, остановимся на случаях измерения как всех, так и части координат, приведем оценки скоростей сходимости и т. д. Заметим также, что мы не будем указывать вид функционалов Ляпунова, отвечающих тому или иному алгоритму, и анализировать соответствующие экстремальные конструкции. Эти вопросы детально обсуждаются в публикациях, ссылки на которые приводятся в формулировках теорем.

3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Lx(s) + Bu(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \quad (4)$$

с начальным состоянием

$$x(s) = x_0(s) \in C_1([-\nu, 0]; \mathbb{R}). \quad (5)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, L — отображение вида

$$Lx(s) = \sum_{\theta=0} A x(t+\theta) + \int_{-\infty}^0 A(\theta)x(t+\theta) d\theta \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

$-\nu = \theta_0 < \dots < \theta_l = 0$, $A(s) (s = 0, \dots, l)$ — постоянные матрицы размерности $q \times q$, $s \rightarrow A(s)$ — матрица размерности $q \times q$ с элементами, принадлежащими пространству $L_2(-\nu, 0; \mathbb{R})$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. $P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}) : u(t) \in P \text{ при п. в. } t \in T\}$.

Здесь и всюду ниже $P \subset \mathbb{R}$ — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество.

Сначала остановимся на случае измерения всех координат. Тогда $C = I$ и неравенства (1) имеют вид

$$|\xi - x(\tau)| \leq h. \quad (7)$$

Введем последовательности чисел $\{\alpha\} \in \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$, $\{h\} \in \mathbb{R}^+$, $\{N\} \subset \mathbb{N}$ со свойствами

$$h \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0, N \rightarrow +\infty, h\alpha^{-1} \rightarrow 0, \alpha^{-1}N^{-1/2} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Фиксируем на промежутке T семейство разбиений $\Delta = \{\tau\}_{i=0}^n$, $\tau_i = \tau_{i-1} + \delta$, $\delta = \nu/N$. Таким образом, $\tau_n = \tau = k\nu/N$. В качестве модели M возьмем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{Y}^n(t) = A^n Y^n(t) + C^n U^n(t), \quad t \in T,$$

с начальными условиями

$$Y^n(0) = \frac{N}{\nu} \int_{-\nu}^{-(1-\frac{1}{N})\nu} x_0(\tau) d\tau, \quad i \in [1 : N], \quad \delta = \frac{\nu}{N},$$

$$Y_0^n(0) = x_0(0)$$

и фазовыми траекториями $Y^n(t) = \{Y_0^n(t), Y_1^n(t), \dots, Y_n^n(t)\} \in \mathbb{R}^{(n+1)}$. Примем следующее правило выбора управления в модели. Будем полагать

$$U^n(t) = \arg \min \{2(q, Bv) + \alpha |v|^2 : v \in P\}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \quad (9)$$

Здесь вектор q составлен из первых q координат вектора

$$S = \{\exp(A^n(T_1 - \tau))' R^n \exp(A^n(T_1 - \tau))\} [Y^n(\tau) - \xi],$$

$$T_1 > 5\nu + \vartheta, \quad \xi = (\xi, \xi_{-1}, \dots, \xi_{-n}) \in \mathbb{R}^{(n+1)},$$

а матрицы A^n , C^n , R^n определены согласно [27, р. 223]. Через $u_*(\cdot)$ обозначим минимальный по $L_2(T; \mathbb{R})$ -норме элемент из $P(\cdot)$, порождающий выход $x(\cdot)$.

Теорема 1 ([31]). Пусть выполнено условие (8). Тогда последовательность функций $\{U^n(\cdot)\}$, определенных согласно (9), сходится к $u_*(\cdot)$ в метрике пространства $L_2(T; \mathbb{R})$ при $n \rightarrow \infty$.

Обратимся теперь к случаю измерения «части координат», т. е. положим $C \neq I$. Пусть система Σ описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \nu) + u(t), \quad t \in T,$$

$$x(s) = x_0(s) \in C_1([-\nu, 0]; \mathbb{R}).$$

Полагаем, что выполнено условие 1 и $q = N$. В качестве модели M возьмем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{Y}^n(t) = v(t), \quad t \in T.$$

Пусть управление в модели определяется по следующему правилу:

$$\begin{aligned} U^n(t) &= v(t) - \begin{cases} A_0 Y^n(t), & \text{если } t < \nu, \\ A_0 Y^n(t) + A_1 Y^n(t - \nu), & \text{если } t > \nu, \end{cases} \\ v(t) &= -\frac{2}{\alpha} C^* C [Y^n(t) - x(t)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Предположим, что матрица C такова, что $\ker C' = \{0\}$. Возьмем последовательности чисел $\{h_n\}, \{\alpha_n\} \in \mathbb{R}^+$, обладающие свойствами

$$h_n \rightarrow 0, \quad \alpha_n \rightarrow 0, \quad h_n \alpha_n^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Теорема 2 ([34]). Пусть выполнены условия (11). Последовательность функций $\{U^n(\cdot)\}$, определенная по правилу (10), сходится к $u(\cdot)$ в пространстве $L_2(T; \mathbb{R})$ при $n \rightarrow \infty$.

Здесь и всюду ниже $u(\cdot)$ означает истинное управление, порождающее $x(\cdot)$.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{x}_1(t) = L_1 x_1(s) + C_1 x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = L_2 x_2(s) + E x_1(t) + u(t) B x_1(t), \end{cases} & t \in T, \\ L_j y(s) = \sum_{i=0}^j A^{(j)}_{ij} y(t - \tau^{(j)}_i) + \int_{t_j}^0 A^{(j)}_*(s) y(t + s) ds, & j = 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

с начальным условием

$$\begin{aligned} x_1(s) &= x_1^1(s), \quad s \in [-\tau_1^{(1)}, 0], \\ x_2(s) &= x_2^1(s), \quad s \in [-\tau_2^{(2)}, 0], \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} x_1(t) &\in \mathbb{R}, \quad x_2(t) \in \mathbb{R} \quad (q = r + \pi, N = 1); \quad u(t) \in \mathbb{R}; \\ x_1^1(s) &\in C([-\tau_1^{(1)}, 0]; \mathbb{R}); \quad x_2^1(s) \in C([-\tau_2^{(2)}, 0]; \mathbb{R}); \quad 0 = \tau_0^{(j)} < \tau_1^{(j)} < \dots < \tau_j^{(j)}; \\ x_1(s) &: s \rightarrow x_1(t + s), \quad s \in [-\tau_1^{(1)}, 0]; \\ x_2(s) &: s \rightarrow x_2(t + s), \quad s \in [-\tau_2^{(2)}, 0]; \end{aligned}$$

$A^{(j)}$, B , E и C_1 — стационарные матрицы размерностей $r \times r$ (при $j = 1$), $\pi \times \pi$ (при $j = 2$), $\pi \times r$, $\pi \times r$ и $r \times \pi$ соответственно; элементы $s \rightarrow A^{(j)}_*(s)$, $s \in [-\tau_j^{(j)}, 0]$, $j = 1, 2$, являются интегрируемыми с квадратом функциями.

Пусть $P = [\alpha, \beta]$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Считаем, что фиксировано семейство разбиений интервала T

$$\Delta = \{\tau_k\}_{k=0}^N, \quad \tau_k = \tau_{k-1} + \delta_k, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_N = \vartheta. \quad (13)$$

Пусть в каждый момент времени $\tau_k = \tau$ наблюдаются первые компоненты фазового вектора x , т. е. координаты $x_1(\tau)$. Результаты измерения — векторы $\xi \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенствам

$$|x_1(\tau) - \xi| \leq h.$$

Таким образом, матрица C имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Наша цель — восстановить истинный вход $u(\cdot) = u(\cdot; x_1(\cdot))$, порождающий выход $x_1(\cdot)$, а также неизвестную координату $x_2(t)$.

В данном случае модель M описывается системой с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{Y}_1^n(t) = L_1 Y_1^n(s) + C_1 v^n(t), \\ \dot{Y}_2^n(t) = L_2 Y_2^n(s) + E\xi + u^n(t)B\xi, \end{cases} \quad t \in [\tau, \tau + 1],$$

$$Y^n(s) = x^1(s) \text{ при } s \in [-\tau_j^{(i)}, 0], \quad j = 1, 2,$$

с управлением $U^n(t) = \{u^n(t), v^n(t)\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Пусть закон управления моделью имеет вид

$$\begin{aligned} v^n(t) &= \arg \min \{L_1(\alpha, v, s^0) : v \in S(d_1)\}, \\ u^n(t) &= \arg \min \{L_2(\beta, v, s) : v \in P\}, \end{aligned} \quad t \in [\tau, \tau + 1], \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} L_1(\alpha, v, s^0) &= \alpha |v|^2 + 2(s^0, C_1 v), \quad L_2(\beta, v, s^*) = \beta |v|^2 + 2(s, B\xi) v, \\ s^0 &= (Y_1^n(\tau) - \xi) \exp(-2\omega_1 \tau + 1), \quad s = (Y_2^n(\tau) - v^n(\tau)) \exp(-2\omega_2 \tau + 1), \\ d_1 &= \sup \{|x_2(t; x_0, u(\cdot))| : u(\cdot) \in P(\cdot), t \in T\}, \quad S(d_1) = \{v \in \mathbb{R} : |v| \leq d_1\}, \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1+l}{2} + |A_0^{(i)}| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j |A^{(i)}|^2 + \frac{1}{2} \int_{-\tau_j^{(i)}}^0 |A_*^{(i)}(\tau)|^2 d\tau.$$

Пусть также выполнены следующие условия согласования параметров алгоритма:

$$\alpha \rightarrow 0+, \quad \beta \rightarrow 0+, \quad \{(h + n^{-1/2} + \alpha)^{1/2} + (h + n^{-1/2})\alpha^{-1}\}\beta^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Например, $h = n^{-1/2}$, $\alpha = h^{1/2}$, $\beta = h$, $\mu = \text{const} \in (0, 1/4)$. Пусть $s(\cdot)$ — единственное (на T) решение матричного функционально-дифференциального уравнения

$$\frac{ds(t)}{dt} = A_0^{(i)} s(t) + \sum_{i=1}^j A^{(i)} s(t + \tau) + \int_{-\tau_j^{(i)}}^0 A_*^{(i)}(s) s(t + s) ds \text{ при п. в. } t \in T$$

с начальным состоянием $s(t) = I$, $t \leq 0$; $V(T; \mathbb{R})$ означает пространство функций $t \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ с ограниченной вариацией.

Теорема 3 ([29]). Пусть управление $u^n(\cdot)$ определяется по правилу (14). Пусть $\pi \leq r$ и выполнены следующие условия:

- 1) $\inf_{t \in T} |s_1^{-1}(t)x| \geq d_1|x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$ ($d_1 > 0$);
- 2) существует число $d_2 > 0$ и минор порядка π матрицы $s_1(t)C_1$, такой что $(\pi \times \pi)$ -мерная матрица $\overline{s_1(t)C_1}$, соответствующая этому минору, удовлетворяет неравенству $\inf_{t \in T} |\overline{s_1(t)C_1}v| \geq d_2|v|$ для всех $v \in \mathbb{R}$;
- 3) всякое решение $x_2(\cdot)$ системы (12) обладает свойством $\overline{(s_1(\vartheta - t)C_1)^{-1}x_2(t)} \in V(T; \mathbb{R})$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$v^n(\cdot) \rightarrow x_2(\cdot) \text{ в } L_2(T; \mathbb{R}), \quad u^n(\cdot) \rightarrow u(\cdot; x_1(\cdot)) \text{ в } L_2(T; \mathbb{R}).$$

Пусть также выполнены условия

- 4) $\inf_{t \in T} |s_2^{-1}(t)x| \geq d^{(1)}|x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$ ($d^{(1)} > 0$);
- 5) существует координата вектора $s_2(\vartheta - t)Bx_1(t)$ (обозначим ее $\{s_2(\vartheta - t)Bx_1(t)\}_*$), такая что

$$\inf_{t \in T} |\{s_2(\vartheta - t)Bx_1(t)\}_*| > 0.$$

Если $\{s_2(\vartheta - t)Bx_1(t)\}_*^{-1}u(t, x_1(\cdot)) \in V(T; \mathbb{R})$, то справедлива следующая оценка скорости сходимости алгоритма:

$$|u^n(\cdot) - u(\cdot; x_1(\cdot))|_{2(T; \mathbb{R})} \leq c\{\mu + \mu\beta^{-1}\}.$$

Здесь $\mu = (h + n^{-1} + \alpha)^{1/2} + ((h + n^{-1/2})\alpha^{-1})^{1/2}$. В описанном выше случае $\tilde{u}^n(\cdot) = u^n(\cdot)$, $x^n(\cdot) = \{\xi(\cdot), v^n(\cdot)\}$, где $\xi(t) = \xi$ при $t \in [\tau, \tau_{+1})$, $k \in [0 : n - 1]$.

Пусть система Σ описывается уравнением (4). В качестве модели M возьмем управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1^n(t) &= u^n(t), \quad \dot{Y}_2^n(t) = LY_1^n(s) + Bv^n(t) + f(t), \quad t \in [\tau_1, \vartheta], \quad \tau_1 = \tau_1, \\ \dot{Y}_1^n(t) &= 0, \quad \dot{Y}_2^n(t) = 0, \quad t \in [0, \tau_1], \end{aligned} \quad (15)$$

с начальными условиями

$$Y_{10}^n(s) = x_0(s), \quad Y_2^n(0) = x_0(0), \quad (16)$$

фазовым состоянием $Y^n(t) = \{Y_1^n(t), Y_2^n(t)\} \in \mathbb{R}^2$, $t \in T$, и управлением $U^n(t) = \{u^n(t), v^n(t)\} \in \mathbb{R}^+$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 2.

- 1) $\text{rank } G = q + r$;
- 2) $\text{vrai sup}\{|\dot{x}(t)| : t \in T\} \leq K = \text{const} \in (0, +\infty)$;
- 3) функция $f(\cdot)$ дифференцируема, и ее производная является элементом пространства $L_2(T; \mathbb{R})$.

Здесь

$$G = \begin{pmatrix} C' & I \\ 0 & -B' \end{pmatrix} -$$

$(q + N) \times (q + N)$ -мерная матрица, $x(\cdot)$ — неизвестное движение системы (4), порождающее выход $y(\cdot)$.

Закон формирования управления в модели $\mathcal{U}^n$ отождествим с правилом, ставящим в соответствие каждому элементу $q^{(\cdot)}(\cdot) = \{\tau, \xi, \xi_{-1}, Y_1^n(s), Y_2^n(\tau)\}$, функцию

$$U^n(t) = \mathcal{U}^n(q^{(\cdot)}(\cdot)) = \{u^n, v^n\}, \quad k \geq 1,$$

где

$$\begin{aligned} \{u^n, v^n\} &= \begin{cases} 0, & \text{если } c \geq 0 \text{ или } |s_1| + |s_2| = 0, \\ c \sigma / |\sigma|_+^{-2}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \sigma &= \{C's_1 + s_2, -B's_2\} \in \mathbb{R}^+, \quad \tau = \tau, \\ c &= (s_1, (\xi - \xi_{-1})\delta^{-1}) + (s_2, LY_1^n(s) + f(\tau)), \\ s_1 &= CY_1^n(\tau) - \xi_{-1} \in \mathbb{R}, \quad s_2 = Y_1^n(\tau) - Y_2^n(\tau) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (17)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} U(y(\cdot)) &= \{u(\cdot) \in P(\cdot) : Cx(t; x_0, u(\cdot)) = y(t) \quad \forall t \in T\}, \\ X(y(\cdot)) &= \{x(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}) : \exists u(\cdot) \in U(y(\cdot)), x(\cdot) = x(\cdot; x_0, u(\cdot))\}. \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4 ([2]). Пусть $h \rightarrow 0+$ при $n \rightarrow \infty$, $v^n(t) = 0$ при $t \in [0, \tau_1]$ и выполнено условие 2. Тогда

- а) $u^n(\cdot) \rightarrow U(y(\cdot))$ слабо в $L_2(T; \mathbb{R})$;
- б) $Y_1^n(\cdot) \rightarrow X(y(\cdot))$ в $C(T; \mathbb{R})$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, в данном случае $\tilde{u}^n(\cdot) = u^n(\cdot)$, $x^n(\cdot) = Y_1^n(\cdot)$. В теореме 4 сходимость а) означает, что множество $\{u^n(\cdot)\}$ имеет хотя бы одну сходящуюся подпоследовательность $\{u^{n_k}(\cdot)\}$, причем все точки $u(\cdot)$, являющиеся слабыми пределами каких-либо подпоследовательностей, принадлежат $U(y(\cdot))$. Под сходимостью б) понимаем, что всякая последовательность решений $Y_1^n(\cdot)$ системы (15), отвечающая последовательности управлений с описанным выше свойством, сходится к решению $x(\cdot) \in X(y(\cdot))$ уравнения (4).

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

В настоящем разделе мы остановимся на случае, когда система Σ описывается нелинейным по фазовым переменным уравнением. При этом рассмотрим случаи измерения как всех, так и части координат. Сначала рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), x(t - \nu)) + Bu(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \\ x(s) &= x_0(s) \in C_1([-\nu, 0]; \mathbb{R}^n),\end{aligned}\quad (18)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; f — нелинейная векторная функция (удовлетворяющая условию Липшица по совокупности переменных), действующая из декартова произведения пространств $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$; B — матрица размерности $q \times N$. Рассмотрим сначала случай измерения всех координат, т. е. положим $r = q$, $C = I$. Фиксируем разбиение Δ вида (13).

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 3. $P(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^q)$, $u_*(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^N)$.

Через $u_*(\cdot)$, как и выше, обозначим единственное управление (из множества $P(\cdot)$) минимальной $L_2(T; \mathbb{R}^q)$ -нормы, которое порождает то же решение $x(\cdot)$ системы, что и управление $u(\cdot)$. В этом случае модель M описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{Y}^n(t) &= f(\xi, \xi - \eta_k) + BU^n(t), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \quad \tau_k = \tau_k, \\ Y^n(0) &= x_0(0).\end{aligned}\quad (19)$$

Здесь τ_k означает момент «наблюдения», принадлежащий полуинтервалу $[\tau_k - \nu, \tau_k - \nu + \delta)$. (Ясно, что такой момент единствен.) Для простоты будем полагать, что начальное состояние системы $x_0(s)$ известно. В таком случае при $k - r < 0$ мы полагаем $\xi - \eta_k = x_0((k - r)\delta)$. Управление в модели определим по правилу

$$\begin{aligned}U^n(t) &= v, \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \\ v &= \arg \min_{|v| \leq n} \{2(Y^n(\tau_k) - \xi, Bv) + \alpha |v|^2\}.\end{aligned}\quad (20)$$

Рассмотрим последовательности чисел $\{h\}$, $\{d\}$ и $\{\alpha\}$ со следующими свойствами:

$$d \rightarrow +\infty, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad \frac{hd}{\alpha} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad \frac{1}{d^2(n\alpha)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Теорема 5 ([35]). Пусть выполнено условие (21). Тогда последовательность функций $\{U^n(\cdot)\}$, определенных по формулам (20), сходится к $u_*(\cdot)$ в метрике пространства $L_2(T; \mathbb{R}^q)$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть наряду с условием 3 выполнено следующее условие.

Условие 4. Матрица BB' является положительно определенной.

В этом случае полагаем, что модель M описывается тем же уравнением (19). Пусть фиксированы последовательности положительных чисел $\{h\}$ и $\{\alpha\}$ со следующими свойствами:

$$h \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad h\alpha^{-1} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n\alpha^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Управление в модели определим по формуле

$$U^n(t) = \frac{1}{\alpha} B' [\xi - Y^n(\tau_k)], \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}). \quad (23)$$

Теорема 6 ([3]). Пусть выполнены условия (22). Тогда последовательность функций $\{U^n(\cdot)\}$, определенных по формулам (23), сходится к $u_*(\cdot)$ в метрике пространства $L_2(T; \mathbb{R}^q)$ при $n \rightarrow \infty$.

Предположим теперь, что вместо условия 3 выполнено следующее условие.

Условие 5. $P(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^q)$, $u_*(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$.

В этом случае модель M описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{Y}^n(t) = f(\xi, \xi - \kappa) + BU^n(t) + \nu^n(t) \text{ при п. в. } t \in [\tau, \tau + 1)$$

с начальным состоянием $Y^n(0) = \xi_0$. Пусть последовательности чисел $\{h\} \in \mathbb{R}^+$ и $\{\alpha\} \in \mathbb{R}^+$ обладают свойствами

$$h \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad h\alpha^{-1} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n\alpha} \rightarrow 0, \quad hn \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Введем семейства управлений в модели

$$U^n(t) = \frac{1}{\alpha} B'[\xi - Y^n(\tau)], \quad (25)$$

$$\nu^n(t) = \frac{c}{\alpha} [\xi - Y^n(\tau)], \quad t \in [\tau, \tau + 1),$$

где $c = \text{const} > 0$.

Теорема 7 ([38]). Пусть выполнены условия (24). Тогда последовательность функций $\{U^n(\cdot)\}$ вида (25) сходится к $u_*(\cdot)$ в метрике пространства $L_2(T; \mathbb{R})$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть система Σ описывается векторным уравнением

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(s), x_2(s)) + f_2(t, x_1(s), x_2(s))u(t), \quad (26)$$

$$\dot{x}_2(t) = \psi_1(t, x_1(s), x_2(s)) + \psi_2(t, x_2(s))x_1(t) \quad (27)$$

с начальным условием

$$\begin{aligned} x_{10}(s) &= x_{10}(s) \in C([- \tau^1, 0]; \mathbb{R}^1), \\ x_{20}(s) &= x_{20}(s) \in C([- \tau^2, 0]; \mathbb{R}^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь x_1 и x_2 — соответственно n_1 - и n_2 -мерные векторы, характеризующие состояние системы; $u(t)$ — N -мерный вектор управления; $x(s)$ и $y(s)$ означают функции $x(s) = x(t+s)$, $s \in [-\tau^1, 0]$, $y(s) = y(t+s)$, $s \in [-\tau^2, 0]$. В дальнейшем для простоты считаем $\tau^1 = \tau^2 = \tau$ и полагаем начальное состояние (28) липшицевым. Подчеркнем, что $x_{10}(s)$, $x_{20}(s)$ — фиксированные функции. Ниже для определенности полагаем, что элементы вектор-функции $f_1(\cdot)$, а также матричной функции $f_2(\cdot)$ имеют вид

$$\begin{aligned} g(t, x_1(s), x_2(s)) &= g(t, x_1(t), x_1(t - \tau_1^1), \dots, x_1(t - \tau^1), x_2(t), x_2(t - \tau_1^2), \dots, x_2(t - \tau^2)), \\ 0 < \tau_1^1 < \tau_2^1 < \dots < \tau^1 < +\infty, \quad 0 < \tau_1^2 < \tau_2^2 < \dots < \tau^2 < +\infty, \\ g(\cdot) &= f_1(\cdot), \quad i \in [1 : n_1], \\ g(\cdot) &= f_2(\cdot), \quad i \in [1 : n_1], \quad j \in [1 : N], \end{aligned}$$

и удовлетворяют стандартным условиям роста

$$|g(t, x_{10}, x_{11}, \dots, x_1, x_{20}, x_{21}, \dots, x_2)| \leq c \left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} |x_1|_i + \sum_{i=0}^{\infty} |x_2|_i \right),$$

а также липшицевости

$$\begin{aligned} |g(t_1, x_{10}^{(1)}, x_{11}^{(1)}, \dots, x_1^{(1)}, x_{20}^{(1)}, x_{21}^{(1)}, \dots, x_2^{(1)}) - g(t_2, x_{10}^{(2)}, x_{11}^{(2)}, \dots, x_1^{(2)}, x_{20}^{(2)}, x_{21}^{(2)}, \dots, x_2^{(2)})| \leq \\ \leq c_1 \left(|t_2 - t_1| + \sum_{i=0}^{\infty} |x_1^{(1)} - x_1^{(2)}|_i + \sum_{i=0}^{\infty} |x_2^{(1)} - x_2^{(2)}|_i \right). \end{aligned}$$

Аналогичными свойствами обладают и элементы матричной функции $\psi_2(\cdot)$ и вектор-функции $\psi_1(\cdot)$:

$$\begin{aligned} g_2(\cdot) &= \psi_2(\cdot), \quad i \in [1 : n_2], \quad j \in [1 : n_1], \\ g_2(t, x_2(s)) &= g_2(t, x_2(t), x_2(t - \tau_1^1), \dots, x_2(t - \tau_1^1)), \\ g_1(\cdot) &= \psi_1(\cdot), \quad i \in [1 : n_2], \\ g_1(t, x_1(s), x_2(s)) &= g_1(t, x_1(t - \tau_1^1), \dots, x_1(t - \tau_1^1), x_2(t), x_2(t - \tau_1^2), \dots, x_2(t - \tau_2^2)). \end{aligned}$$

Будем полагать, что матрица C имеет следующую структуру:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы рассматриваем случай измерения координаты x_2 . Следовательно, $r = n_2$, $y(t) = x_2(t)$ и неравенства (1) принимают вид

$$|\xi - x_2(\tau)|_2 \leq h, \quad k \in [0 : n - 1].$$

В качестве модели возьмем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1^n(t) &= \psi_1(\tau, u_k^n(s), \xi_k(s)) + \psi_2(\tau, \xi_k(s))u^n + 2(\xi - Y_1^n(\tau)), \\ \dot{Y}_2^n(t) &= f_1(\tau, u_k^n(s), \xi_k(s)) + f_2(\tau, u_k^n(s), \xi_k(s))v^n, \\ t &\in [\tau, \tau + 1], \quad k \in [0 : n - 1], \quad \tau = \tau, \end{aligned} \quad (29)$$

с начальным условием

$$Y_1^n(s) = x_2(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad Y_2^n(s) = x_1(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad Y_2^n(0) = \xi_0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} Y^n &= \{Y_1^n, Y_2^n\}, \quad Y_1^n \in \mathbb{R}^2, \quad Y_2^n \in \mathbb{R}^1, \quad u^n \in \mathbb{R}^1, \quad v^n \in \mathbb{R}, \\ u_k^n(s) &= u^n(\tau + s), \quad \xi_k(s) = \xi(\tau + s) \quad \text{при } s \in [-\tau, 0], \\ u^n(t) &= x_1(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad u^n(t) = u^n, \quad \xi(t) = \xi \quad \text{при } t \in [\tau, \tau + 1], \quad k \in [0 : n - 1]. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta^{(\cdot)} &= [\mu, \mu + 1], \quad \mu = \tau_1^1 j, \quad j_* = \sup\{j : \mu < \vartheta\}, \\ g(h) &= h^{(1-3)^j(1-2)^{j-1}}, \quad j \in [1 : j_*], \quad q^{(\cdot)}(\cdot) = \{\tau, Y^n(\tau), \xi_k(s), u_k^n(s)\}. \end{aligned}$$

Семейство отображений $\mathcal{U}^n(q^{(\cdot)}(\cdot))$ зададим соотношениями

$$\mathcal{U}^n(t) = \mathcal{U}^n(q^{(\cdot)}(\cdot)) = \{u^n, v^n\}, \quad k \geq 1,$$

где

$$v^n = v^n(\tau, Y_1^n(\tau), \xi_k(s)) = \arg \min\{2(l, \psi_2(\tau, \xi_k(s))v)_2 + \alpha(h)|v|_1^2 : v \in S(d)\}, \quad (30)$$

$$u^n = u^n(\tau, Y_2^n(\tau), \xi_k(s), u_k^n(s)) = \arg \min\{2(l^{(1)}, f_2(\tau, u_k^n(s), \xi_k(s))u)_1 + \beta(h)|u|^2 : u \in P\}, \quad (31)$$

$$l = Y_1^n(\tau) - \xi, \quad l^{(1)} = Y_2^n(\tau) - u^n,$$

$$d = \sup\{|x_1(\cdot; x_0, u(\cdot))|_{(\cdot; \mathbb{R}^{n_1})} : x(\cdot) = \{x_1(\cdot), x_2(\cdot)\} \in X\}.$$

Здесь X означает пучок всех решений системы (26)–(28), отвечающих всевозможным входным воздействиям $u(\cdot)$ из множества $P(\cdot)$, $S(d) \subset \mathbb{R}^1$ — шар радиуса d с центром в нуле, $\alpha(h) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $j \in [1 : j_*]$, и $\beta(h) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ — некоторые функции, играющие роль регуляризаторов. Мы положим

$$\alpha_0(h) = h^{2-3}, \quad \alpha(h) = g^{2-3}(h), \quad j \in [1 : j_*].$$

Введем следующее условие.

Условие 6. Пусть $n_1 \leq n_2$ и существует такое число $c_* > 0$, что при каждом $t \in T$ у матрицы $\psi_2(t, x_2(s))$ найдется минор n_1 -го порядка, такой что $(n_1 \times n_1)$ -матрица $\bar{\psi}_2(t) = \bar{\psi}_2(t, x_2(s))$, соответствующая этому минору, при всех $x \in \mathbb{R}^1$, отличных от нуля, удовлетворяет условию

$$|\bar{\psi}_2(t)x|_1 \geq c_* |x|_1.$$

Пусть, как и выше, $U(x_2(\cdot))$ означает совокупность всех управлений $u(\cdot) \in P(\cdot)$, совместимых с выходом $x_2(\cdot)$. Нетрудно проверить, что это множество выпукло, ограничено и замкнуто в пространстве $L_2(T; \mathbb{R})$. Поэтому существует единственный элемент

$$u_*(\cdot; x_2(\cdot)) = \arg \min \{ |u(\cdot)|_{2(\cdot; \mathbb{R}^N)} : u(\cdot) \in U(x_2(\cdot)) \}.$$

Теорема 8 ([30]). Пусть $\delta \leq h$, $\beta(h) \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, $g_*^{1/2}(h)/\beta(h) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда имеет место сходимост

$$v^n(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot; x_2(\cdot)) \text{ в } L_2(T; \mathbb{R}) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Кроме того, справедливы неравенства

$$|u^n(\cdot) - x_1(\cdot)|_{2(\Delta^{(j-1)}; \mathbb{R}^{n_1})}^2 \leq c_{-1} g(h), \quad j \in [1 : j_*].$$

В данном случае $\tilde{u}^n(\cdot) = u^n(\cdot)$, $x^n(\cdot) = \{v^n(\cdot), \xi(\cdot)\}$.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Этот раздел содержит результаты модельных расчетов, иллюстрирующих алгоритмы, указанные в предыдущих разделах.

Пример 1. Рассматривается система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + a \sin(x_2(t-1)) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= b \cos(x_1(t-1)) + x_2(t) + u_2(t), \end{aligned} \quad t \in [0, 2]$$

с начальным состоянием $x_1(s) = 1 + s$, $x_2(s) = -2 \cos s$, $s \in [-1, 0]$. Управления в системе имеют вид $u_1 = t^2$, $u_2(t) = 5 \sin 2t + 1$. В моменты τ вычисляются величины

$$\xi_1 = x_1(\tau) + h \cos(M\tau), \quad \xi_2 = x_2(\tau) + h \sin(M_1\tau).$$

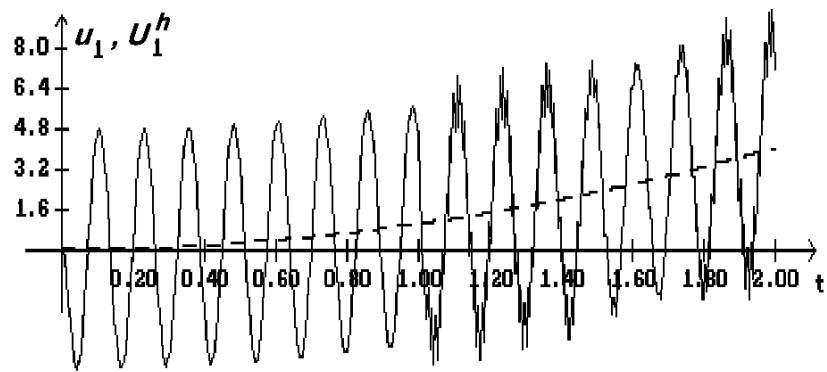
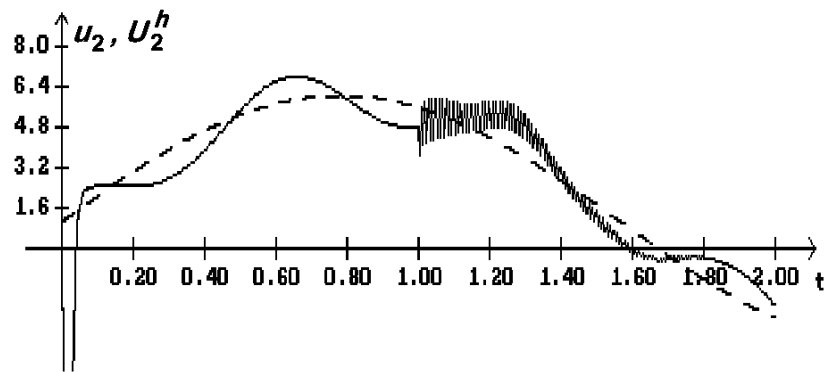
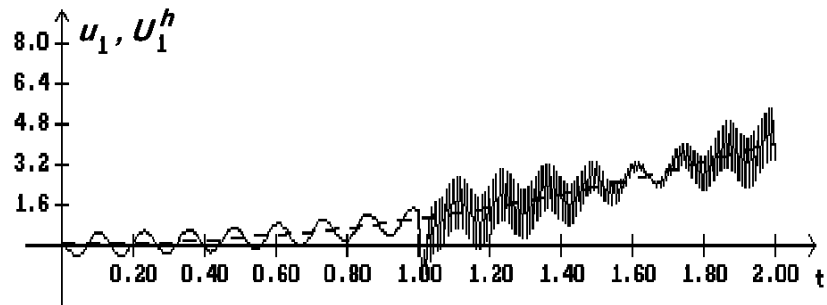
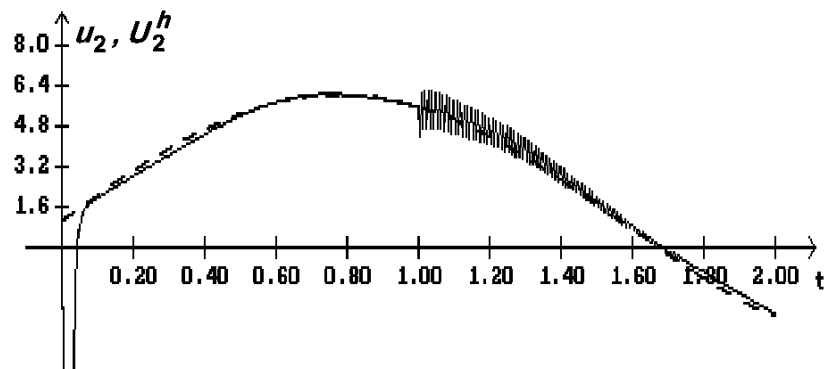
В качестве модели берется система вида (18), т. е.

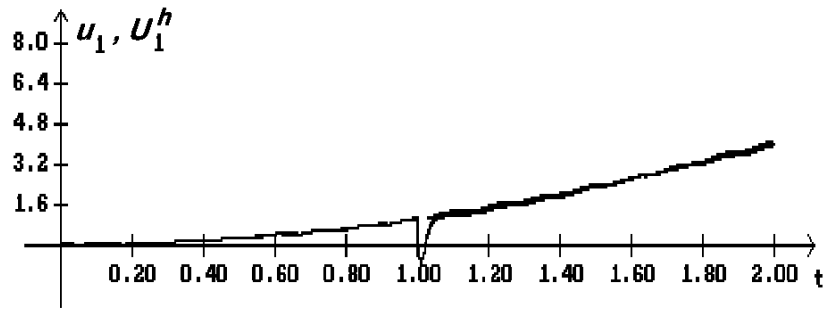
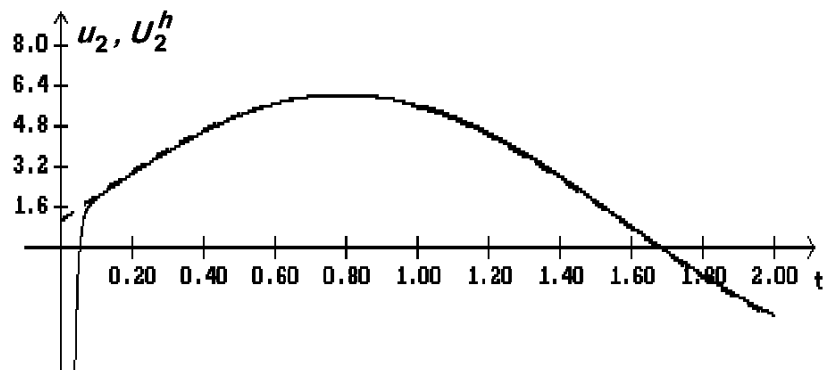
$$\begin{aligned} \dot{Y}_1^n(t) &= \xi_1 + a \sin \xi_2 + u_1(t), \\ \dot{Y}_2^n(t) &= b \cos \xi_1 + \xi_2 + u_2(t), \end{aligned} \quad t \in [\tau, \tau+1),$$

с начальным состоянием $Y_1(0) = 1 + h$, $Y_2(0) = 2 - h$. Управления в модели в моменты τ вычислялись по формулам (23):

$$U_1 = -\frac{Y_1^n(\tau) - \xi_1}{\alpha}, \quad U_2 = -\frac{Y_2(\tau) - \xi_2}{\alpha}.$$

На рис. 1.1–1.6 представлены результаты моделирования при следующих значениях параметров: $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 0,01$, $M = 50$, $M_1 = 10$. Рисунки 1.1, 1.2 соответствуют случаю $h = 0,1$, $\delta = 0,005$, рис. 1.3, 1.4 — случаю $h = 0,01$, $\delta = 0,005$, а рис. 1.5, 1.6 — случаю $h = 0,001$, $\delta = 0,0005$. Пунктирная линия отвечает реальному управлению, а сплошная — результату численного эксперимента. Как видно из рис. 1.5, 1.6, модельное управление практически совпадает с реальным.

Рис. 1.1. $h = 0,1$, $\delta = 0,005$ Рис. 1.2. $h = 0,1$, $\delta = 0,005$ Рис. 1.3. $h = 0,01$, $\delta = 0,005$ Рис. 1.4. $h = 0,01$, $\delta = 0,005$

Рис. 1.5. $h = 0,001$, $\delta = 0,0005$ Рис. 1.6. $h = 0,001$, $\delta = 0,0005$

Пример 2. Рассматривается система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + x_1(t-1) + u_1(t) + f_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t-1) + x_2(t-1) + f_2(t), \quad t \in T = [0, 2], \\ f(t) &= \begin{pmatrix} t - 3 - (t-1)^2 - K \sin t \\ -(t-1)^2 - 2 - (t-1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

с начальным состоянием $x_1(s) = 1 + s^2$, $x_2(s) = 2 + s$, $s \in [-\tau, 0]$. Реальное управление задается в виде $u_1 = K \sin t$. В моменты τ вычисляются величины

$$\xi = x_1(\tau) + h \cos(M\tau).$$

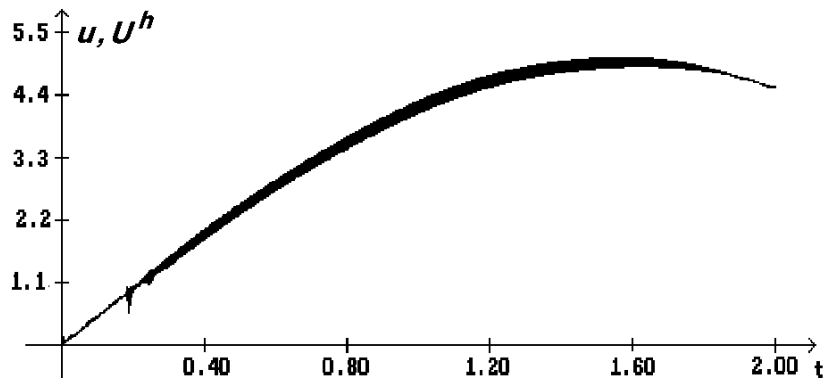
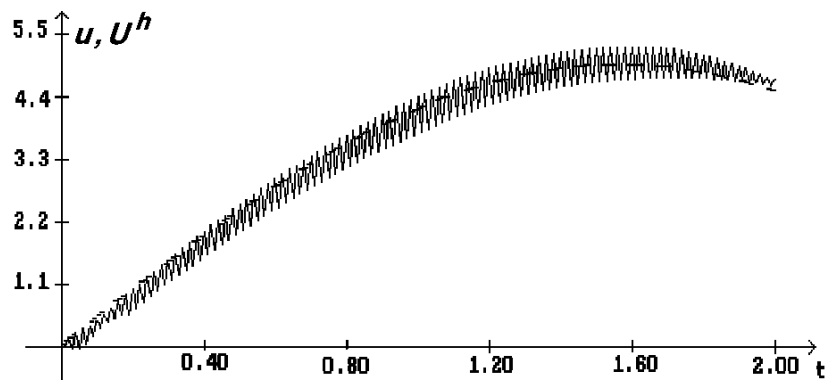
В качестве модели берется система вида (14), т. е.

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1^n(t) &= u^n(t), \\ \dot{Y}_2^n(t) &= LY_1^n(s) + Bv^n(t) + f(t), \quad Lz(s) = A_0z(t) + A_1z(t-\tau), \end{aligned}$$

с начальным состоянием $Y_1^n(s) = \{1 + s, 2 + s\}$, $s \in [-1, 0]$, $Y_2^n(0) = \{1, 2\}$. Здесь $B = (1, 0)$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Управление в модели в моменты τ вычисляется по формулам (17) при следующих значениях параметров: $K = 5$, $M = 10$, $C = (1, 0)$. На рис. 2.1, 2.2 изображена эволюция функций $u(t)$ и $U(t)$. Пунктирная линия отвечает реальному управлению, а сплошная — результату численного эксперимента. Рисунок 2.1 соответствует случаю $h = 0,001$, $\delta = 0,001$; рис. 2.2 — случаю $h = 0,001$, $\delta = 0,01$.

Рис. 2.1. $h = 0,001$, $\delta = 0,001$ Рис. 2.2. $h = 0,001$, $\delta = 0,01$

Пример 3. На временном интервале $T = [0, 2]$ рассматривается система [28]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -r^{-1}x_1(t) + kr^{-1}x_2(t-1), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -\omega^2x_2(t) - 2q\omega x_3(t) + \omega^2u(t).\end{aligned}$$

Предполагается, что $r = -0,9$, $k = 0,01$, $\omega = 1,1$, $q = 0,1$, $x_1(t) = 1$ при $t \in [-1, 0]$, $x_2(t) = a/b \sin bt$, $x_3(t) = a \cos bt$, $u(t) = -a(\omega^2b)^{-1} \sin bt + ab^{-1} \sin bt + 2q\omega^{-1} \cos bt$. В моменты τ измеряются величины

$$\xi = x_2(\tau) + h \sin M\tau.$$

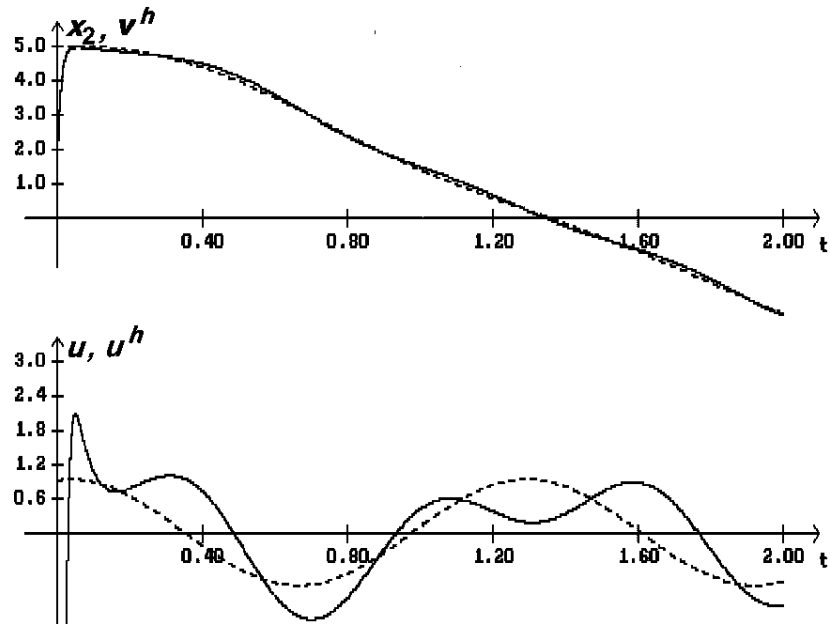
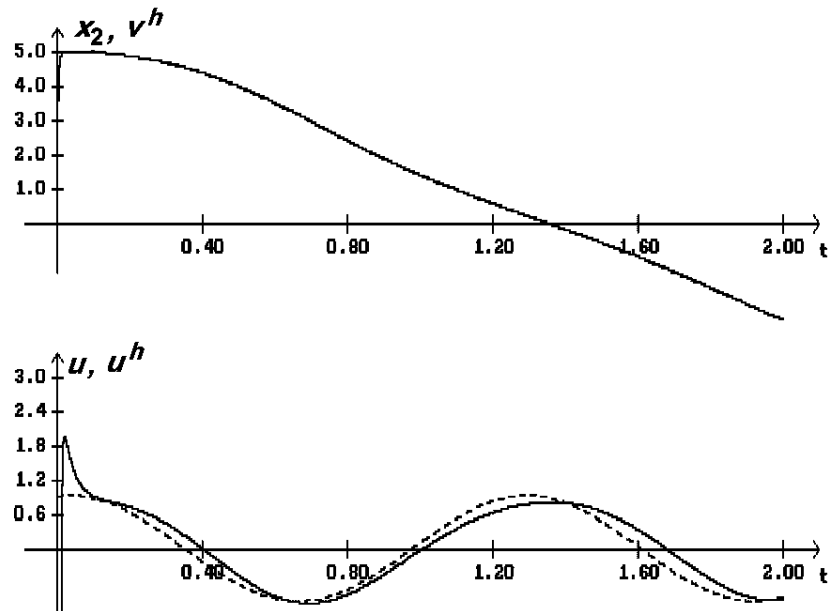
В качестве модели берется следующая система:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{21}^n(t) &= -r^{-1}Y_{21}^n(t) + kr^{-1}Y_1^n(t-1), \\ \dot{Y}_1^n(t) &= v^n(t), \\ \dot{Y}_{22}^n(t) &= -\omega^2\xi(t) - 2q\omega Y_{21}^n(t) + \omega^2u(t)\end{aligned}$$

с начальными условиями $Y_{21}^n(0) = x_1(0)$, $Y_{22}^n(0) = x_3(0)$, $Y_1^n(s) = x_1(s)$ при $s \in [-1, 0]$. Управления v и u в моменты τ вычисляются из условия (14), т. е.

$$\begin{aligned}v &= \arg \min \{2\bar{s}v + \alpha v^2 : |v| \leq K\}, \quad u = \arg \min \{s v + \beta v^2 : |v| \leq L\}, \\ s &= (Y_{22}^n(\tau) - v) \exp(-2\omega_2\tau_{+1}), \quad \bar{s} = (Y_1^n(\tau) - \xi) \exp(-2\omega_1\tau_{+1}), \\ \omega_1 &= 1 + r^{-1} + 0,5(kr^{-1})^2, \quad \omega_2 = 0,5 + 2q\omega.\end{aligned}$$

Рисунки 3.1, 3.2 соответствуют случаю, когда $\delta = k_1 h^2$, $\alpha = k_2 h^{1/2}$, $\beta = k_3 h$, $k_1 = 1$, $k_2 = 0,1$, $k_3 = 0,08$, $\nu = 0,22$, $M = 10$, $a = 5$, $b = 5$, $K = 5$, $L = 5$. На рисунках сплошная линия соответствует реальной траектории $x_2(t)$ и управлению $u(t)$, а пунктирная — модельным управлениям $v(t)$ и $u^h(t)$.

Рис. 3.1. $h = 10^{-2}$ Рис. 3.2. $h = 10^{-3}$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 04-01-00059) и Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН № 19 «Управление механическими системами».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Близорукова М. С. Задачи реконструкции входов в системах с последствием. — Дисс... канд. физ.-мат. наук. — Институт математики и механики УрО РАН, 2001.
2. Близорукова М. С., Максимов В. И. О реконструкции пары «управление—траектория» в системе с последствием // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 4. — С. 37—48.
3. Близорукова М. С., Максимов В. И., Пандолфи Л. Динамическая реконструкция входа в нелинейной системе с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 2. — С. 3—13.
4. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
5. Васин В. В., Агеев А. Л. Некорректные задачи с априорной информацией. — Екатеринбург: Наука, 1993.
6. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.
7. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985.
8. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1984.
9. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. — М.: Наука, 1988.
10. Кряжмский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. — 1983. — № 2. — С. 29—41.
11. Кряжмский А. В., Осипов Ю. С. Обратные задачи динамики и управляемые модели // Механика и научно-технический прогресс. — 1987. — 1. — С. 196—211.
12. Куржанский А. Б., Сивергина И. Ф. Метод динамического программирования в обратных задачах оценивания для распределенных систем // Докл. РАН. — 1998. — 1, № 2. — С. 31—36.
13. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — Новосибирск: Наука, 1980.
14. Максимов В. И. Позиционное моделирование некоторых параметров дифференциально-функциональных систем // Некоторые методы позиционного и программного управления. — Свердловск: УрО РАН, 1987. — С. 84—106.
15. Максимов В. И. Позиционное моделирование управлений и начальных функций для систем Вольтерра // Дифференц. уравн. — 1987. — 23, № 4. — С. 618—629.
16. Максимов В. И. Об устойчивом решении обратных задач для нелинейных распределенных систем. I // Дифференц. уравн. — 1990. — 26, № 12. — С. 2059—2067; II // 1991. — 27, № 4. — С. 597—603.
17. Максимов В. И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. — Екатеринбург: УрО РАН, 2000.
18. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987.
19. Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
20. Осипов Ю. С., Кряжмский А. В. О динамическом решении операторных уравнений // ДАН СССР. — 1983. — 269, № 3. — С. 552—556.
21. Осипов Ю. С., Кряжмский А. В., Максимов В. И. Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. — Препринт Института математики и механики УрО АН СССР. — 1991. — 104 с.
22. Осипов Ю. С., Кряжмский А. В., Максимов В. И. Обратные задачи динамики для параболических систем // Дифференц. уравн. — 2000. — 36, № 5. — С. 579—597.
23. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984.
24. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1978.
25. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. — М.: Наука, 1988.
26. Baras J. S., Kurzhanskii A. B. Nonlinear filtering: the set-membership (bounding) and H_∞ approaches // Proc. IFAC NOLCOS Conf. — Tahoe, CA: Plenum Press, 1995.
27. Ito K., Kappel F. A uniformly differentiable approximation scheme for delay systems using splines // Appl. Math. Optim. — 1991. — 23, No. 3. — P. 217—262.
28. Kappel F. Semigroups and delay equations // Semigroups, Theory and Applications. Vol. 11. — Essex: Longman Scientific and Technical, 1986.
29. Kappel F., Maksimov V. I. Robust dynamic input reconstruction for delay systems // Internat. J. Appl. Math. and Comp. Sci. — 2000. — 10, No. 2. — P. 283—307.
30. Kappel F., Maksimov V. I. Problems of dynamical identification of differential-functional control systems // Nonlin. Anal. Theory Methods Appl. — 2001. — 47. — P. 3905—3917.

31. *Kappel F., Maksimov V. I., Skuratov E. N.* On dynamical reconstruction of control in a system with time delay: Finite-dimensional models // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* — 2001. — 9, No. 3. — P. 269—282.
32. *Kryazhinskii A. V., Osipov Yu. S.* On positional calculation of normal controls in dynamical systems // *Problems Control Inform. Theory.* — 1984. — 13, No. 6. — P. 425—436.
33. *Maksimov V. I.* On the reconstruction of a control through results of observations // *Proc. 3rd European Control Conf. Rome.* — 1995. — P. 3766—3771.
34. *Maksimov V. I., Pandolfi L.* Dynamical identification of inputs for linear retarded systems and partial observations // *Proc. IFAC Workshop «Linear Time-Delay Systems».* Ancona, Italy, 11—13 September 2000.
35. *Maksimov V. I., Pandolfi L.* Dynamical reconstruction of unknown inputs in nonlinear differential equations // *Appl. Math. Lett.* — 2001. — 14. — P. 725—730.
36. *Osipov Yu. S.* On reconstruction of a parameter of dynamical system // *Proc. Int. Symp. «Functional-Differential Equations».* Kyoto, Japan. — 1990. — P. 309—317.
37. *Osipov Yu. S., Kryazhinskii A. V.* *Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions.* — London: Gordon and Breach, 1995.
38. *Pandolfi L., Maksimov V. I.* On a dynamical identification of controls in nonlinear time-lag systems // *IMA J. Math. Control Inform.* — 2002. — 19. — P. 173—184.

В. И. МАКСИМОВ

E-mail: maksimov@imm.uran.ru

РЕЛАКСАЦИЯ В НЕВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

© 2005 г. А. А. ТОЛСТОНОГОВ

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается задача минимизации интегрального функционала с невыпуклой по управлению подынтегральной функцией на решениях управляемой системы со смешанным невыпуклым ограничением на управление, описываемой нелинейным эволюционным уравнением. Эволюционный оператор, входящий в систему, является субдифференциалом зависящей от времени собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции.

Наряду с исходной задачей рассматривается релаксационная задача с овыпукленным ограничением на управление и с овыпукленной по управлению подынтегральной функцией.

При достаточно общих предположениях доказано, что релаксационная задача имеет оптимальное решение и для любого оптимального решения существует минимизирующая последовательность исходной задачи, сходящаяся по траекториям и функционалу к оптимальному решению. Подробно рассмотрен пример управляемого вариационного неравенства параболического типа с препятствием.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи	96
2. Основные обозначения, определения и предположения	97
3. Вспомогательные результаты	100
4. Априорные оценки	103
5. Аналог теоремы Боголюбова	105
6. Основной результат	110
7. Пример	112
Список литературы	118

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $T = [0, 1]$ — отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ — расширенная числовая прямая и H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Функция $\varphi: H \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ называется собственной, если ее эффективная область

$$\text{dom } \varphi = \{x \in H; \varphi(x) < +\infty\}$$

не пуста.

Субдифференциалом $\partial\varphi(x)$ в точке $x \in H$ собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции называется множество

$$\partial\varphi(x) = \{v \in H; \langle v, y - x \rangle \leq \varphi(y) - \varphi(x) \quad \forall y \in H\}.$$

Пусть Y — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, моделирующее пространство управлений. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} -\dot{x}(t) &\in \partial\varphi^t(x(t)) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0 \in \text{dom } \varphi^0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

со смешанным ограничением на управление

$$u(t) \in U(t, x(t)). \tag{1.2}$$

Здесь φ^t для каждого $t \in T$ — собственная выпуклая полунепрерывная снизу функция, $A: T \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$, где $\mathcal{L}(Y, H)$ — пространство непрерывных линейных операторов из Y в H , $F: T \times H \rightarrow H$ нелинейное отображение, $U: T \times H \rightarrow Y$ многозначное отображение с замкнутыми, не обязательно выпуклыми значениями. Пусть $g: T \times H \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — числовая функция. Рассмотрим задачу

$$\int_T g(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf \quad (P)$$

на решениях управляемой системы (1.1) с ограничением (1.2).

Положим

$$g_U(t, x, u) = \begin{cases} g(t, x, u), & u \in U(t, x), \\ +\infty, & u \notin U(t, x). \end{cases} \quad (1.3)$$

Обозначим через $g_U^{**}(t, x, u)$ биполярную [10] функции $u \rightarrow g_U(t, x, u)$. Наряду с задачей (P) рассмотрим релаксационную задачу

$$\int_T g_U^{**}(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf \quad (RP)$$

на решениях управляемой системы (1.1) с ограничением

$$u(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t)), \quad (1.4)$$

где $\overline{\text{co}} U(t, x(t))$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $U(t, x(t))$.

Целью работы является установление взаимосвязей между решениями задач (P) и (RP). При достаточно общих предположениях мы доказываем, что для любого решения $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ управляемой системы (1.1) с ограничением (1.4) существует последовательность $(x_n(\cdot), u_n(\cdot))$, $n \geq 1$, решений системы (1.1) с ограничением (1.2), такая что

$$x_n(\cdot) \rightarrow x_*(\cdot) \quad \text{в } C(T, H), \quad (1.5)$$

$$\int_T g(t, x_n(t), u_n(t)) dt \rightarrow \int_T g_U^{**}(t, x_*(t), u_*(t)) dt. \quad (1.6)$$

Используя этот результат, мы получаем, что задача (RP) имеет решение и для любого решения $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ задачи (RP) существует минимизирующая последовательность $(x_n(\cdot), u_n(\cdot))$, $n \geq 1$, задачи (P), для которой справедливы соотношения (1.5), (1.6). Обычно это свойство называют релаксацией [10]. Соотношения (1.5), (1.6) являются аналогом классической теоремы Н. Н. Боголюбова [2, 14] в вариационном исчислении при наличии ограничений, в качестве которых выступают множества решений управляемых систем (1.1), (1.2) и (1.1), (1.4).

Подробно рассмотрен пример управляемого вариационного неравенства параболического типа с препятствием. Работа примыкает к исследованиям [2, 4, 7, 9, 10, 14] и дополняет их.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Пусть $T = [0, 1]$ — отрезок числовой прямой с мерой Лебега μ и с σ -алгеброй Σ μ -измеримых множеств, H — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Для сепарабельного банахова пространства X с нормой $\|\cdot\|_X$ мы используем следующие обозначения: 2^X — совокупность всех непустых подмножеств из X , $\text{с}X$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств из X , $\text{сб}X$ — совокупность всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X .

На пространстве $\text{сб}X$ определим метрику Хаусдорфа

$$D_X(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_X, \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \|x - y\|_X \right\}.$$

Для множества $A \subset X$ символ $\text{co} A$ означает выпуклую оболочку A и $\overline{\text{co}} A$ — замкнутую выпуклую оболочку A . Символ ω - X означает, что пространство X наделено слабой $\sigma(X, X^*)$ топологией, где X^* — пространство, топологически сопряженное к X . Такое же обозначение мы используем и

для подмножеств из X . Во всех остальных случаях мы считаем, что пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Через $C(T, X)$ мы обозначаем пространство всех непрерывных функций из T в X с топологией равномерной сходимости на T .

Отображение $F: X \rightarrow 2^X$ называется полунепрерывным снизу по Вьеторису в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $U \subset X$, $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, существует такая окрестность $V(x_0)$ точки x_0 , что $F(x) \cap U \neq \emptyset$ для любого $x \in V(x_0)$.

Известно, что отображение $F: X \rightarrow 2^X$ полунепрерывно снизу по Вьеторису тогда и только тогда, когда полунепрерывно снизу отображение $\bar{F}: X \rightarrow cX$, где $\bar{F}(x)$ означает замыкание множества $F(x)$.

Следуя [17], отображение $F: T \rightarrow 2^X$ назовем измеримым (слабо измеримым), если множество $F^{-1}(U) = \{t \in T; F(t) \cap U \neq \emptyset\}$ принадлежит Σ для любого замкнутого (открытого) множества $U \subset X$. Если $F: T \times X \rightarrow 2^X$, то $\Sigma \otimes \mathcal{B}_X$ -измеримость (слабая $\Sigma \otimes \mathcal{B}_X$ -измеримость) означает, что $F^{-1}(U) = \{(t, x) \in T \times X; F(t, x) \cap U \neq \emptyset\}$ принадлежит $\Sigma \otimes \mathcal{B}_X$ для любого замкнутого (открытого) множества $U \subset X$, где $\Sigma \otimes \mathcal{B}_X$ — σ -алгебра подмножеств из $T \times X$, порожденная множествами $E \times V$, $E \in \Sigma$, $V \in \mathcal{B}_X$, и $\mathcal{B}_X$ — σ -алгебра борелевских множеств из X . Известно [17], что измеримость ($\Sigma \otimes \mathcal{B}_X$ -измеримость) влечет слабую измеримость (слабую $\Sigma \otimes \mathcal{B}_X$ -измеримость). Для отображений $F: T \rightarrow cX$ понятия измеримости и слабой измеримости совпадают.

Под $\mathcal{M}(X)$ мы понимаем совокупность всех измеримых функций из T в X . Множество $A \subset \mathcal{M}(X)$ называется разложимым, если для любых $u, v \in A$ и любого $E \in \Sigma$ элемент $u\chi(E) + v\chi(T \setminus E)$ принадлежит A , где $\chi(E)$ — характеристическая функция множества E .

На пространстве $L^p(T, Y)$, $1 \leq p < \infty$, наряду со стандартной нормой мы рассмотрим слабую норму

$$\|f\|_\omega = \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\| \int_t^{t'} f(t) dt \right\|, \quad f \in L^p(T, Y). \quad (2.1)$$

Пространство $L^p(T, Y)$ с нормой (2.1) мы будем обозначать через $L_\omega^p(T, Y)$. Известно [7], что если последовательность $f_n \in L^2(T, Y)$, $n \geq 1$, ограничена в $L^2(T, Y)$ и сходится к f в $L_\omega^2(T, Y)$, то она сходится к f в ω - $L^2(T, Y)$.

Множество всех функций $\varphi: H \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, которые являются собственными, выпуклыми и полунепрерывными снизу, мы будем обозначать через $\Gamma_0(H)$. Известно [15], что субдифференциал $\partial\varphi(x)$ функции $\varphi \in \Gamma_0(H)$ является максимально монотонным оператором,

$$\text{dom } \partial\varphi = \{x \in H; \partial\varphi(x) \neq \emptyset\} \subset \text{dom } \varphi$$

и

$$\overline{\text{dom}(\partial\varphi)} = \overline{\text{dom } \varphi},$$

где черта означает замыкание в H .

Напомним, что многозначный оператор A из H в H называется монотонным, если для любых $x, y \in \text{dom } A$ и любых $u \in Ax$, $v \in Ay$ имеет место неравенство $\langle x - y, u - v \rangle \geq 0$.

Монотонный многозначный оператор A называется максимально монотонным, если не существует другого монотонного многозначного оператора, график которого содержит график A как собственное подмножество.

Функция $\omega: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется интегрально ограниченной на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^+$, если для любого $m > 0$ существует такая функция $l_m \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, что $\omega(t, r) \leq l_m(t)$ почти всюду на T для любого $0 \leq r \leq m$.

Функция $\omega: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется функцией Камке, если

- 1) $\omega(t, r)$ является функцией Каратеодори, интегрально ограниченной на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^+$;
- 2) $\omega(t, 0) = 0$ почти всюду;

3) единственной непрерывной функцией $r: T \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющей интегральному неравенству

$$r(t) \leq \int_0^t \omega(s, r(s)) ds, \quad t \in T,$$

является функция $r(t)$, тождественно равная нулю.

Типичным примером функции Камке является функция $\omega(t, r) = k(t)r$, где $k \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$. Другие примеры функций Камке можно найти в [5].

Под решением управляемой системы (1.1) с ограничением (1.2) понимается такая пара $(x(\cdot), u(\cdot))$, что $x: T \rightarrow H$ — абсолютно непрерывная функция, $x(0) = x_0$, $x(t) \in \text{dom } \partial\varphi^t$ почти всюду, $\dot{x}(\cdot) \in L^2(T, H)$, $u(\cdot) \in L^2(T, Y)$ и почти всюду на T имеет место включение (1.1), (1.2).

Аналогично определяется решение управляемой системы (1.1) с ограничением (1.4).

В дальнейшем управляемую систему (1.1) с ограничением (1.2) будем называть управляемой системой (1.1), (1.2). То же самое относится и к управляемой системе (1.1) с ограничением (1.4).

Если $(x(\cdot), u(\cdot))$ — решение системы (1.1), (1.2), то $x(\cdot)$ называется траекторией, а $u(\cdot)$ — управлением.

Множества всех решений управляемых систем (1.1), (1.2) и (1.1), (1.4) мы будем обозначать $\mathcal{R}_U(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\text{co}U}(x_0)$ соответственно.

Множества всех траекторий систем (1.1), (1.2) и (1.1), (1.4) обозначаются как $\mathcal{Tr}_U(x(0))$ и $\mathcal{Tr}_{\text{co}U}(x_0)$.

Всюду в дальнейшем сокращение п. в. означает почти всюду. Введем следующие предположения.

H(φ). Функции $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, обладают следующими свойствами:

- 1) для каждого $r \geq 0$ существуют такие абсолютно непрерывные функции $a_r, b_r: T \rightarrow \mathbb{R}$, что $\dot{a}(\cdot) \in L^2(T, \mathbb{R})$ и для любых $s, t \in T$, $s \leq t$, и любого $x \in \text{dom } \varphi^s$ с $\|x\| \leq r$ найдется элемент $y \in \text{dom } \varphi^t$, удовлетворяющий неравенствам

$$\|x - y\| \leq |a_r(t) - a_r(s)| (|\varphi^s(x)|^{1/2} + 1), \quad (2.2)$$

$$\varphi^t(y) - \varphi^s(x) \leq |b_r(t) - b_r(s)| (|\varphi^s(x)| + 1); \quad (2.3)$$

- 2) для каждого $t \in T$ и $r > 0$ множество $\{x \in H; \|x\| \leq r, |\varphi^t(x)| \leq r\}$ относительно компактно в H .

H(A). При почти каждом $t \in T$ A является отображением из $T \times H$ в $\mathcal{L}(Y, H)$, таким что

- 1) отображение $t \rightarrow A(t, x)u$ измеримо для любых $(x, u) \in H \times Y$;
- 2) отображение $x \rightarrow A^*(t, x)h$ непрерывно п. в. для любых $h \in H$, где $A^*(t, x)$ — оператор, сопряженный к $A(t, x)$;
- 3) справедливо

$$\|A(t, x)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq c + d\|x\| \quad \text{п. в.}, \quad c, d > 0. \quad (2.4)$$

H(F). $F: T \times H \rightarrow H$ — такое отображение типа Каратеодори, что

$$\|F(t, x)\| \leq c_1(t) + d_1(t)\|x\| \quad \text{п. в.}, \quad c_1(\cdot), d_1(\cdot) \in L^2(T, \mathbb{R}^+). \quad (2.5)$$

H(U). $U: T \times H \rightarrow \text{cb } Y$ — такое отображение, что

- 1) отображение $t \rightarrow U(t, x)$ измеримо;
- 2) отображение $x \rightarrow U(t, x)$ непрерывно п. в. в метрике Хаусдорфа на пространстве $\text{cb } Y$;
- 3) справедливо

$$\|U(t, x)\|_Y = \sup\{\|u\|_Y; u \in U(t, x)\} \leq c_3 \quad \text{п. в.}, \quad x \in H, \quad c_3 > 0. \quad (2.6)$$

H(g). $g: T \times H \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — такая функция, что

- 1) функция $t \rightarrow g(t, x, u)$ измерима;
- 2) при почти всех $t \in T$ для любого компакта $D \subset H$ функция $(x, u) \rightarrow g(t, x, u)$ равномерно непрерывна на множестве $D \times B_Y(c_3)$, где $B_Y(c_3) = \{y \in Y; \|y\|_Y \leq c_3\}$;
- 3) при почти всех $t \in T$ для любого ограниченного множества $Q \subset H$ имеет место неравенство

$$|g(t, x, u)| \leq m_Q(t), \quad x \in Q, \quad u \in U(t, x), \quad m_Q(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+). \quad (2.7)$$

$H(\mathbb{R})$. Для любого $M > 0$ существует функция Камке $\omega_M: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и интегрально ограниченная на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^+$ типа Каратеодори функция $\omega_M^*: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\omega_M^*(t, 0) = 0$ почти всюду, такие что для любых $x, y \in H$, $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$, $u \in U(t, x)$ найдется элемент $v \in U(t, y)$, удовлетворяющий почти всюду неравенствам

$$\langle x - y, A(t, x)u + F(t, x) - A(t, y)v - F(t, y) \rangle + \omega_M(t, \|x - y\|) \|x - y\| \geq 0, \quad (2.8)$$

$$|g(t, x, u) - g(t, y, v)| \leq \omega_M^*(t, \|x - y\|). \quad (2.9)$$

Всюду в дальнейшем, не оговаривая особо, мы предполагаем, что гипотезы $H(\varphi)$, $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$, $H(g)$ имеют место.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы приведем ряд вспомогательных утверждений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Из гипотезы $H(A)$ следует, что для каждого $h \in H$ функция $\langle h, A(t, x)u \rangle = \langle A^*(t, x)h, u \rangle$ измерима по t и непрерывна по (x, u) почти всюду. Следовательно, для любых $x \in C(T, H)$, $u \in L^2(T, Y)$ функция $t \rightarrow A(t, x(t))u(t)$ скалярно измерима. Тогда из сепарабельности пространства H вытекает, что функция $t \rightarrow A(t, x(t))u(t)$ измерима. Поэтому в соответствии с гипотезами $H(A)$, $H(F)$ для любых $x \in C(T, H)$, $u \in L^2(T, Y)$ функция $t \rightarrow A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t))$ является элементом пространства $L^2(T, H)$. Следовательно, мы можем рассмотреть оператор $A: C(T, H) \times L^2(T, Y) \rightarrow L^2(T, H)$, определенный по правилу

$$\mathcal{A}(x, u)(t) = A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)). \quad (3.1)$$

Лемма 3.1. *Оператор $(x, u) \rightarrow \mathcal{A}(x, u)$ является секвенциально непрерывным из $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$ в $\omega\text{-}L^2(T, H)$.*

Доказательство леммы с достаточно очевидными видоизменениями повторяет доказательство аналогичной леммы 2.1 из [7].

Рассмотрим пространство $\tilde{Y} = Y \times \mathbb{R}$. Элементы пространства $\tilde{Y}$ мы будем обозначать $\tilde{u} = (u, \lambda)$, $u \in Y$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Пространство $\tilde{Y}$ наделим нормой $\|\tilde{u}\|_{\tilde{Y}} = \max(\|u\|_Y, |\lambda|)$. В соответствии с (2.1) норма на пространстве $L_\omega^1(T, \tilde{Y})$ будет иметь вид

$$\|\tilde{u}\|_\omega = \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\{ \max \left(\left\| \int_t^{t'} u(s) ds \right\|_Y, \left| \int_t^{t'} \lambda(s) ds \right| \right) \right\}. \quad (3.2)$$

Пусть $G: T \times H \rightarrow \tilde{Y}$ — многозначное отображение, определенное по правилу

$$G(t, x) = \{(u, \lambda) \in \tilde{Y}; u \in U(t, x), \lambda = g(t, x, u)\}. \quad (3.3)$$

Лемма 3.2. *G является таким отображением из $T \times H$ в $\text{cb } \tilde{Y}$, что*

- 1) *отображение $t \rightarrow G(t, x)$ измеримо;*
- 2) *отображение $x \rightarrow G(t, x)$ п. в. непрерывно в метрике Хаусдорфа на пространстве $\text{cb } \tilde{Y}$.*

Доказательство. Ограниченность и замкнутость множества $G(t, x)$ следуют из неравенств (2.6), (2.7) и гипотез $H(U)$ 2) и $H(g)$ 2). Доказательство измеримости отображения $x \rightarrow G(t, x)$ повторяет доказательство аналогичного утверждения в [7, лемма 3.1].

Докажем теперь непрерывность отображения $x \rightarrow G(t, x)$ в метрике Хаусдорфа. Для этого достаточно показать, что сужение отображения $x \rightarrow G(t, x)$ на любое компактное множество $D \subset H$ непрерывно. Но непрерывность при почти каждом t отображения $x \rightarrow G(t, x)$ на компакте D непосредственно вытекает из гипотез $H(U)$ 2), $H(g)$ 2), определения нормы на пространстве $\tilde{Y}$ и метрики Хаусдорфа $D_{\tilde{Y}}(\cdot, \cdot)$. Лемма доказана. $\square$

Для функции $f: T \times H \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ обозначим через $\text{dom } f(t, x)$ эффективное множество и через $\text{epi } f(t, x)$ надграфик функции $u \rightarrow f(t, x, u)$, т. е.

$$\begin{aligned}\text{dom } f(t, x) &= \{u \in Y; f(t, x, u) < +\infty\}, \\ \text{epi } f(t, x) &= \{(u, \lambda) \in Y \times \mathbb{R}; f(t, x, u) \leq \lambda\}.\end{aligned}$$

Следующая лемма дает нам свойства функции $g_U^{**}(t, x, u)$.

Лемма 3.3. Для почти каждого $t \in T$ справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned}1) \text{ dom } g_U^{**}(t, x) &= \overline{\text{co}} U(t, x); \\ 2) \text{ для любого } u \in \overline{\text{co}} U(t, x)\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$g_U^{**}(t, x, u) = \min\{\lambda \in \mathbb{R}; (u, \lambda) \in \overline{\text{co}} G(t, x)\}\tag{3.5}$$

и, следовательно,

$$(u, g_U^{**}(t, x, u)) \in \overline{\text{co}} G(t, x), \quad u \in \overline{\text{co}} U(t, x), \quad x \in H;\tag{3.6}$$

$$3) \text{ для любого } \varepsilon > 0 \text{ существует замкнутое множество } T_\varepsilon \subset T, \mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon, \text{ такое что}$$

функция $(t, x, u) \rightarrow g_U^{**}(t, x, u)$ полунепрерывна снизу на $T_\varepsilon \times H \times Y$.

Доказательство. Пусть $x \in H$ и t произвольны. Тогда из (2.1) и (1.3) следует, что при некотором $m \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$m \leq g_U(t, x, u), \quad u \in Y.$$

Из этого неравенства и [10] вытекает, что

$$m \leq g_U^{**}(t, x, u) \leq g_U(t, x, u), \quad u \in Y,\tag{3.7}$$

функция $u \rightarrow g_U^{**}(t, x, u)$ является выпуклой, полунепрерывной снизу и

$$\text{epi } g_U^{**}(t, x) = \overline{\text{co}} \text{epi } g_U(t, x).\tag{3.8}$$

Теперь равенства (3.4) и (3.5) доказываются с использованием соотношения (3.8) по аналогии с доказательством подобных равенств в [7]. Что же касается включения (3.6), то оно является следствием равенства (3.5).

Перейдем к доказательству утверждения 3). Согласно лемме 3.2 отображение $t \rightarrow \overline{\text{co}} G(t, x)$ измеримо, а отображение $x \rightarrow \overline{\text{co}} G(t, x)$ п. в. непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon/2$, — такое замкнутое множество, что отображение $x \rightarrow G(t, x)$ непрерывно при каждом $t \in T_\varepsilon$. Обозначим через $d_{\tilde{Y}}(y, \overline{\text{co}} G(t, x))$ расстояние от точки $y \in \tilde{Y}$ до множества $\overline{\text{co}} G(t, x)$. Тогда для каждого $y \in \tilde{Y}$ функция $t \rightarrow d_{\tilde{Y}}(y, \overline{\text{co}} G(t, x))$ измерима на T_ε , а функция $x \rightarrow d_{\tilde{Y}}(y, \overline{\text{co}} G(t, x))$ непрерывна на H для каждого $t \in T_\varepsilon$. Воспользовавшись [17, теоремы 6.1, 3.3], мы получаем, что отображение $(t, x) \rightarrow \overline{\text{co}} G(t, x)$ слабо $\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ -измеримо на $T_\varepsilon \times H$. Тогда [6, теорема 2.1] следует, что существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T_\varepsilon \setminus T) \leq \varepsilon/2$, такое что сужение отображения $\overline{\text{co}} G(t, x)$ на $T_\varepsilon \times H$ имеет замкнутый график в $T_\varepsilon \times H \times \tilde{Y}$.

Покажем теперь, что функция $(t, x, u) \rightarrow g_U^{**}(t, x, u)$ полунепрерывна снизу на $T_\varepsilon \times H \times Y$. Для этого достаточно показать, что для любых $(t_0, x_0, u_0) \in T_\varepsilon \times H \times Y$ и любой последовательности $(t_n, x_n, u_n) \in T_\varepsilon \times H \times Y$, $n \geq 1$, сходящейся к (t_0, x_0, u_0) , справедливо неравенство

$$g_U^{**}(t_0, x_0, u_0) \leq \lambda, \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} g_U^{**}(t_n, x_n, u_n).\tag{3.9}$$

Если $\lambda = +\infty$, то неравенство (3.9) выполняется автоматически и функция g_U^{**} полунепрерывна снизу в точке (t_0, x_0, u_0) по определению.

Пусть $\lambda < +\infty$. Переходя к подпоследовательности, если необходимо, не нарушая общности, мы можем считать, что $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} g_U^{**}(t_n, x_n, u_n)$ и $g_U^{**}(t_n, x_n, u_n) < +\infty$, $n \geq 1$. Тогда согласно (3.4), (3.6) $(u_n, g_U^{**}(t_n, x_n, u_n)) \in \overline{\text{co}} G(t_n, x_n)$, $n \geq 1$. Так как отображение $(t, x) \rightarrow \overline{\text{co}} G(t, x)$ на множестве $T_\varepsilon \times H$ имеет замкнутый график, то $(u_0, \lambda) \in \overline{\text{co}} G(t_0, x_0)$. Из этого включения и (3.5) следует, что имеет место неравенство (3.9). Поэтому функция $(t, x, u) \rightarrow g_U^{**}(t, x, u)$ полунепрерывна снизу на $T_\varepsilon \times H \times Y$. Так как $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, то лемма доказана. $\square$

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты [18, 19].

Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$. Для каждого $\lambda > 0$ регуляризацией Моро—Иосиды функции $\varphi \in \Gamma_0(H)$ называется функция

$$\varphi_\lambda(x) = \inf \left\{ \varphi(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2; y \in H \right\}.$$

Поскольку $\partial\varphi$ является максимально монотонным оператором, то для любого $\lambda \in (0, 1]$ будет определен однозначный оператор $J_\lambda = (I + \lambda\partial\varphi)^{-1}$, где I — тождественный оператор на H . Положим

$$(\partial\varphi)_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

Известно [15], что функция $\varphi_\lambda(x)$, $\lambda \in (0, 1]$, является конечной, непрерывной и выпуклой на H с $\text{dom } \partial\varphi_\lambda = H$. Более того, функция φ_λ является дифференцируемой по Фреше и ее производная по Фреше равна субдифференциалу $\partial\varphi_\lambda$, функция $\partial\varphi_\lambda$ является липшицевой с константой Липшица $1/\lambda$, $\partial\varphi_\lambda = (\partial\varphi)_\lambda$ и для любых $\lambda \in (0, 1]$ имеет место неравенство

$$\varphi_\lambda(x) \leq \varphi(x), \quad x \in H. \quad (3.10)$$

Лемма 3.4 ([18, 19]). Пусть $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, и выполняется гипотеза Н(φ) 1). Тогда:

1) существует такая константа $K_1 > 0$, что

$$\varphi_\lambda^t(u) \geq -K_1(\|u\| + 1), \quad t \in T, \quad \lambda \in (0, 1], \quad u \in H, \quad (3.11)$$

$$\|J_\lambda^t u\| = \|(I + \lambda\partial\varphi)^{-1}u\| \leq \|u\| + K_1, \quad t \in T, \quad \lambda \in (0, 1], \quad u \in H; \quad (3.12)$$

2) для любой функции $u \in L^1(T, H)$ функция $t \rightarrow \varphi^t(u(t))$ измерима;

3) для любой функции $u \in L^1(T, H)$ функция $t \rightarrow \varphi_\lambda^t(u(t))$, $\lambda \in (0, 1]$, измерима.

Лемма 3.5 ([18]). Пусть выполняется гипотеза Н(φ) 1), $\lambda \in [0, 1]$ и $u: T \rightarrow H$ — абсолютно непрерывная функция. Тогда функция $t \rightarrow \varphi_\lambda^t(u(t))$ почти всюду дифференцируема, ее производная интегрируема на T и имеют место неравенства

$$\varphi_\lambda^t(u(t)) - \varphi_\lambda^s(u(s)) \leq \int_s^t \frac{d}{d\tau} \varphi_\lambda^\tau(u(\tau)) d\tau, \quad s, t \in T, \quad s \leq t, \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t(u(t)) - \langle \partial\varphi_\lambda^t(u(t)), \dot{u}(t) \rangle \leq |\dot{a}_r(t)| \|\partial\varphi_\lambda^t(u(t))\| (|\varphi_\lambda^t(u(t))|^{1/2} + 1) + |\dot{b}_r(t)| (|\varphi_\lambda^t(u(t))| + 1) \quad \text{п. в.}, \quad (3.14)$$

где

$$r \geq \sup\{\|J_\lambda^t(u(t))\|; t \in T, 0 < \lambda \leq 1\} \quad (3.15)$$

и $a_r(\cdot), b_r(\cdot)$ — функции из неравенств (2.2), (2.3).

Рассмотрим включение

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + f(t), \quad x(0) = x_0 \in \text{dom } \varphi^0, \quad f(\cdot) \in L^2(T, H), \quad (3.16)$$

и уравнение

$$-\dot{x}_\lambda(t) = \partial\varphi_\lambda^t(x_\lambda(t)) + f(t), \quad x_\lambda(0) = x_0 \in \text{dom } \varphi^0, \quad f(\cdot) \in L^2(T, H). \quad (3.17)$$

Решением включения (3.16) называется абсолютно непрерывная функция $x: T \rightarrow H$, такая что $x(0) = x_0$, $x(t) \in \text{dom } \partial\varphi^t$ п. в. и п. в. имеет место включение (3.16).

Решением уравнения (3.17) называется абсолютно непрерывная функция $x_\lambda: T \rightarrow H$, такая что $x_\lambda(0) = x_0$ и п. в. выполняется равенство (3.17).

Воспользовавшись результатами работы [19], мы получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. Для любых $x(0) = x_0 \in \text{dom } \varphi^0$, $\lambda \in (0, 1]$, $f(\cdot) \in L^2(T, H)$ включение (3.16) и уравнение (3.17) имеют единственные решения $x: T \rightarrow H$, $x_\lambda: T \rightarrow H$, $x(0) = x_\lambda(0) = x_0$, такие

что $\dot{x}(\cdot), \dot{x}_\lambda(\cdot) \in L^2(T, H)$ и существует константа $N > 0$, зависящая только от x_0 и $f(\cdot)$, при которой имеют место неравенства

$$\|x(\cdot)\|_{C(T, H)} \leq N, \quad \|x_\lambda(\cdot)\|_{C(T, H)} \leq N, \quad \lambda \in (0, 1], \quad (3.18)$$

$$\|\dot{x}(\cdot)\|_{L^2(T, H)} \leq N, \quad \|\dot{x}_\lambda(\cdot)\|_{L^2(T, H)} \leq N, \quad \lambda \in (0, 1], \quad (3.19)$$

$$|\varphi^t(x(t))| \leq N, \quad |\varphi_\lambda^t(x_\lambda(t))| \leq N, \quad t \in T, \quad \lambda \in (0, 1]. \quad (3.20)$$

При $\lambda \downarrow 0$

$$x_\lambda(\cdot) \rightarrow x(\cdot) \text{ в } C(T, H), \quad (3.21)$$

$$\dot{x}_\lambda(\cdot) \rightarrow \dot{x}(\cdot) \text{ в } L^2(T, H), \quad (3.22)$$

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \varphi_\lambda^t(x_\lambda(t)) \geq \varphi^t(x(t)), \quad t \in T. \quad (3.23)$$

4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — решение управляемой системы (1.1), (1.4). Положим

$$f_*(t) = A(t, x_*(t))u_*(t) + F(t, x_*(t)). \quad (4.1)$$

Тогда из леммы 3.1 и неравенств (2.4)–(2.6) следует, что $f_*(\cdot) \in L^2(T, H)$ и

$$\|f_*(t)\| \leq m(t) + n(t)\|x_*(t)\|, \quad (4.2)$$

$m(\cdot), n(\cdot) \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$, $m(t) = cc_3 + c_1(t)$, $n(t) = c_3d + d_1(t)$.

Из определения решения управляемой системы (1.1), (1.4) и теоремы 3.1 следует, что $x_*(t)$ является единственным решением включения (3.16) с функцией $f(t) = f_*(t)$, определенной равенством (4.1).

Пусть $y(t)$, $y(0) = x_0$, — решение включения (3.16) с $f(t) \equiv 0$. Воспользовавшись монотонностью оператора $\partial\varphi^t$, неравенством (4.2) и хорошо известными рассуждениями, мы получим

$$\|x_*(t) - y(t)\| \leq \int_0^t (m(\tau) + n(\tau)\|x_*(\tau)\|) d\tau, \quad t \in T.$$

Из этого неравенства непосредственно вытекает, что

$$\|x_*(t)\| \leq M_1 + \int_0^t (m(\tau) + n(\tau)\|x_*(\tau)\|) d\tau, \quad t \in T, \quad (4.3)$$

где $M_1 = \|y(\cdot)\|_{C(T, H)}$. Из (4.3) и леммы Беллмана—Гронуолла следует, что существует такая константа $M > 0$, что для любой траектории $x(\cdot)$ системы (1.1), (1.4) имеет место неравенство

$$\|x(t)\| \leq M, \quad t \in T. \quad (4.4)$$

Положим

$$S = \{f(\cdot) \in L^2(T, H); \|f(t)\| \leq m(t) + n(t)M \text{ п. в.}\}. \quad (4.5)$$

Тогда S является выпуклым компактным подмножеством пространства ω - $L^2(T, H)$. Обозначим через $\mathcal{R}_S(\lambda)$, $\lambda \in (0, 1]$, множество всех решений уравнения (3.17) с $f(\cdot) \in S$. Пусть $x_\lambda(f) \in \mathcal{R}_S(\lambda)$. Тогда, воспользовавшись (4.5), по аналогии с (4.4) мы получим

$$\|x_\lambda(f)(t)\| \leq M_2, \quad t \in T, \quad \lambda \in (0, 1], \quad f(\cdot) \in S, \quad (4.6)$$

для некоторой константы $M_2 > 0$.

Из утверждения 3) леммы 3.4, неравенств (3.13), (3.14), (3.19), (3.20) и равенства (3.17) следует, что для фиксированного $\lambda \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} & \varphi_\lambda^t(x_\lambda(f)(t)) + \int_0^t \langle \dot{x}_\lambda(f)(s), \dot{x}_\lambda(f)(s) + f(s) \rangle ds \leq \\ & \leq \varphi_\lambda^0(x_0) + \int_0^t |\dot{a}_r(s)| \|\dot{x}_\lambda(f)(s) + f(s)\| (|\varphi_\lambda^s(x_\lambda(f)(s))|^{1/2} + 1) ds + \\ & + \int_0^t |\dot{b}_r(s)| (|\varphi_\lambda^s(x_\lambda(f)(s))| + 1) ds \end{aligned} \quad (4.7)$$

с

$$r \geq \sup\{\|J_\mu^t(x_\lambda(f)(t))\|; t \in T, 0 < \mu \leq 1\}. \quad (4.8)$$

Воспользовавшись (3.12), (4.6), (4.7), (4.8), мы получим, что для любого $x_\lambda(f) \in \mathcal{R}_s(\lambda)$, $\lambda \in (0, 1]$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \varphi_\lambda^t(x_\lambda(f)) + \frac{1}{2} \|\dot{x}_\lambda(f)(s)\|^2 ds \leq \\ & \leq \varphi_\lambda^0(x_0) + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \int_0^t (|\dot{a}_{r_*}(s)|^2 + |\dot{b}_{r_*}(s)|) (|\varphi_\lambda^s(x_\lambda(f)(s))| + 1) ds, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $r_* = M_2 + K_1$.

Пусть $\mathcal{R}_S = \left\{ \bigcup \mathcal{R}_S(\lambda); \lambda \in (0, 1] \right\}$.

Лемма 4.1. Множество $\mathcal{R}_S$ является равностепенно непрерывным подмножеством пространства $C(T, H)$.

Доказательство. Из неравенств (3.10), (3.11), (4.6) следует, что для любого $x_\lambda(f) \in \mathcal{R}_S$ имеет место неравенство

$$|\varphi_\lambda^t(x_\lambda(f)(t))| \leq \varphi_\lambda^t(x_\lambda(f)(t)) + 2K_1(\|x_\lambda(f)(t)\| + 1) \leq \varphi^t(x_\lambda(f)(t)) + 2K_1(M_2 + 1). \quad (4.10)$$

Тогда согласно (4.9), (4.10)

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda^t(x_\lambda(f)(t))| + \frac{1}{2} \int_0^t \|\dot{x}_\lambda(f)(s)\|^2 ds & \leq |\varphi^0(x_0)| + 2K_1(M_2 + 1) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \int_0^t (|\dot{a}_{r_*}(s)|^2 + |\dot{b}_{r_*}(s)|) (|\varphi_\lambda^s(x_\lambda(f)(s))| + 1) ds, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$t \in T, x_\lambda(f) \in \mathcal{R}_S$.

Поскольку $f(\cdot) \in S$, то из этого неравенства, (4.5) и неравенства Беллмана—Гронуолла вытекает, что

$$|\varphi_\lambda^t(x_\lambda(f)(t))| \leq C, \quad t \in T, \quad x_\lambda(f) \in \mathcal{R}_S, \quad (4.12)$$

при некотором $C > 0$. Из последнего неравенства, (4.5) и (4.11) следует, что существует такая константа $K > 0$, что

$$\int_T \|\dot{x}_\lambda(f)(t)\|^2 dt \leq K^2, \quad x_\lambda(f) \in \mathcal{R}_S. \quad (4.13)$$

Тогда в соответствии с (4.13) и неравенством Гельдера мы получаем

$$\|x_\lambda(f)(t) - x_\lambda(f)(s)\| \leq |t - s|^{1/2} K, \quad x_\lambda(f) \in \mathcal{R}_S.$$

Следовательно, множество $\mathcal{R}_S$ равностепенно непрерывно. Лемма доказана. $\square$

Обозначим через $Tr(S)$ множество всех решений $x(f)$ включения (3.16) с $f \in S$. Пусть $\mathcal{L}(f)$ — оператор, который каждому $f \in S$ ставит в соответствие единственное решение включения (3.16), т. е.

$$x(f) = \mathcal{L}(f).$$

Теорема 4.1. Пусть выполняется гипотеза $H(\varphi)$. Тогда множество $Tr(S)$ является компактным подмножеством пространства $C(T, H)$, а оператор $\mathcal{L}(f)$ является непрерывным из ω - S в $C(T, H)$.

Доказательство. Из (3.21) следует, что $Tr(S) \subset \bar{\mathcal{R}}_S$, где черта вверху означает замыкание в $C(T, H)$. Поэтому согласно лемме 4.1 множество $Tr(S)$ является равномерно непрерывным. Из (4.6), (4.12), (3.10), (3.11) и (3.21), (3.23) следует, что для любого $x(f) \in Tr(S)$ имеют место неравенства

$$|\varphi^t(x(f)(t))| \leq M_3 > 0, \quad t \in T, \quad (4.14)$$

$$\|x(f)(t)\| \leq M_2, \quad t \in T. \quad (4.15)$$

Воспользовавшись (4.14), (4.15) и гипотезой $H(\varphi)$ 2), мы получаем, что для каждого $t \in T$ множество $\{x(f)(t); x(f) \in Tr(S)\}$ относительно компактно в H . Поэтому множество $Tr(S)$ является относительно компактным в $C(T, H)$.

Докажем непрерывность оператора $f \rightarrow \mathcal{L}(f)$ из ω - S в $C(T, H)$. Так как множество ω - S является метризуемым компактом в ω - $L^2(T, H)$, то нам достаточно доказать секвенциальную непрерывность отображения $f \rightarrow \mathcal{L}(f)$. Пусть последовательность $f_n \in S, n \geq 1$, сходится к f_* в топологии пространства ω - $L^2(T, H)$ и $x_*(f_*)$ — решение включения (3.16) с $f = f_*$. Воспользовавшись монотонностью оператора $\partial\varphi^t$, мы получим

$$\langle x(f_n)(t) - x_*(f_*)(t), \dot{x}(f_n)(t) - \dot{x}_*(f_*)(t) \rangle \leq \langle x(f_n)(t) - x_*(f_*)(t), f_*(t) - f_n(t) \rangle, \quad t \in T. \quad (4.16)$$

Поскольку последовательность $x(f_n), n \geq 1$, относительно компактна в $C(T, H)$, то существует подпоследовательность $x(f_{n_k}), k \geq 1$, сходящаяся в $C(T, H)$ к некоторому элементу $z \in C(T, H)$. Проинтегрировав неравенство (4.16), мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x(f_{n_k})(t) - x_*(f_*)(t)\|^2 &\leq \\ &\leq \int_0^t \langle x(f_{n_k})(\tau) - z(\tau), f_*(\tau) - f_{n_k}(\tau) \rangle + \int_0^t \langle z(\tau), f_*(\tau) - f_{n_k}(\tau) \rangle d\tau, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Поскольку $x(f_{n_k}) \rightarrow z, k \geq 1$, в $L^2(T, H)$, а $f_{n_k}(\cdot) \rightarrow f_*(\cdot)$ в ω - $L^2(T, H)$, то из (4.17) вытекает, что

$$x(f_{n_k})(t) \rightarrow x_*(f_*)(t) \quad \text{в } H, \quad t \in T. \quad (4.18)$$

Из (4.18) непосредственно вытекает, что последовательность $x(f_{n_k}), k \geq 1$, сходится к $x_*(f_*)$ в $C(T, H)$. Если мы предположим, что сама последовательность $x(f_n), n \geq 1$, не сходится к $x_*(f_*)$, то найдется такая подпоследовательность $x(f_{n_k}), k \geq 1$, что любая подпоследовательность последовательности $x(f_{n_k}), k \geq 1$, не сходится к $x_*(f_*)$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, для последовательности $x(f_{n_k}), k \geq 1$, мы придем к противоречию. Следовательно, последовательность $x(f_n), n \geq 1$, сходится к $x_*(f_*)$ в $C(T, H)$. Поэтому оператор $f \rightarrow \mathcal{L}(f)$ является непрерывным из ω - S в $C(T, H)$. Так как множество S является выпуклым компактом в ω - $L^2(T, H)$, то множество $Tr(S)$ является компактом в $C(T, H)$. Теорема доказана. $\square$

5. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БОГОЛЮБОВА

В этом разделе мы рассмотрим вопросы существования решений управляемых систем (1.1), (1.2), (1.1), (1.4) и докажем аналог теоремы Н. Н. Боголюбова. Если $\{x_*(\cdot), u_*(\cdot)\} \in \mathcal{R}_{\text{co}U}(x_0)$, то, как отмечалось в предыдущем разделе, $x_*(\cdot)$ является единственным решением включения (3.16) с $f(\cdot) = f_*(\cdot)$, определенным равенством (4.1). Поэтому в соответствии с (4.2), (4.4), (4.5)

$$Tr_U(x_0) \subset Tr_{\text{co}U}(x_0) \subset Tr(S). \quad (5.1)$$

Пусть

$$B_M = \{x \in H; \|x\| \leq M\}, \quad (5.2)$$

где $M > 0$ — константа из неравенства (4.4). Обозначим через $p_r: H \rightarrow B_M$ оператор проектирования на множество B_M , который каждой точке $x \in H$ ставит в соответствие единственную точку $p_r x \in B$, такую что $\|p_r x - x\| = \min\{\|y - x\|, y \in B_M\}$. Хорошо известно, что

$$\|p_r x - p_r y\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in H. \quad (5.3)$$

Рассмотрим управляемую систему

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + \tilde{A}(t, x(t))u(t) + \tilde{F}(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \in \text{dom } \varphi^0 \quad (5.4)$$

с ограничением на управление

$$u(t) \in \tilde{U}(t, x(t)), \quad (5.5)$$

$$u(t) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, x(t)), \quad (5.6)$$

где

$$\tilde{A}(t, x) = A(t, p_r x), \quad \tilde{F}(t, x) = F(t, p_r x), \quad \tilde{U}(t, x) = U(t, p_r x). \quad (5.7)$$

Воспользовавшись (5.3), мы получим, что гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$ имеют место и для отображений $\tilde{A}(t, x)$, $\tilde{F}(t, x)$, $\tilde{U}(t, x)$ с сохранением неравенств (2.4)–(2.6). Поэтому, используя хорошо известные рассуждения [7, 8], мы получим, что любое решение управляемой системы (5.4), (5.6) является решением управляемой системы (1.1), (1.4). Справедливо и обратное утверждение. То же самое относится и к решениям управляемых систем (1.1), (1.2) и (5.4), (5.5). Поэтому в дальнейшем вместо управляемых систем (1.1), (1.2) и (1.1), (1.4) мы будем рассматривать управляемые системы (5.4), (5.5) и (5.4), (5.6), а множества решений и траекторий этих систем обозначать теми же символами.

Теорема 5.1. *Множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ не пусто, а множество $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0)$ является компактным подмножеством пространства $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что из неравенств (2.4), (2.5), (2.6) и (5.2), (5.3), (5.7) следует, что для любой непрерывной функции $x_*: T \rightarrow H$ и любой измеримой функции $u_*(t) \in \tilde{U}(t, x_*(t))$ функция

$$f_*(t) = \tilde{A}(t, x_*(t))u_*(t) + \tilde{F}(t, x_*(t))$$

будет удовлетворять неравенству

$$\|f_*(t)\| \leq m(t) + n(t)M \quad \text{п. в.} \quad (5.8)$$

Из гипотез $H(U)$ 1), 2) следует, что для каждой непрерывной функции $x: T \rightarrow H$ отображение $t \rightarrow \tilde{U}(t, x(t))$ является измеримым с замкнутыми значениями. Поэтому оно имеет измеримые селекторы [17]. Рассмотрим многозначное отображение $S_{\tilde{U}}$, определенное по правилу

$$S_{\tilde{U}}(x) = \{f(\cdot) \in \mathcal{M}(Y); f(t) \in \tilde{U}(t, x(t)) \text{ п. в.}\}, \quad x \in \text{Tr}(S). \quad (5.9)$$

Используя хорошо известные рассуждения [16, 21], можно показать, что $S_{\tilde{U}}$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису отображением из $\text{Tr}(S)$ в $L^2(T, Y)$ с замкнутыми разложимыми значениями. Поэтому существует [16, 21] непрерывное отображение $v: \text{Tr}(S) \rightarrow L^2(T, Y)$, такое что

$$v(x) \in S_{\tilde{U}}(x), \quad x \in \text{Tr}(S). \quad (5.10)$$

Пусть $\tilde{\mathcal{A}}: C(T, H) \times L^2(T, Y) \rightarrow L^2(T, H)$ — оператор, определенный по правилу

$$\tilde{\mathcal{A}}(x, u)(t) = \tilde{A}(t, x(t))u(t) + \tilde{F}(t, x(t)). \quad (5.11)$$

Для этого оператора будет справедливо утверждение леммы 3.1.

Рассмотрим отображение $v(\mathcal{L}(f))$ из S в $L^2(T, Y)$, где $\mathcal{L}(f)$ — оператор, который каждому $f(\cdot) \in L^2(T, H)$ ставит в соответствие единственное решение включения (3.16). Тогда в соответствии с леммой 3.1 и теоремой 4.1 оператор $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{L}(f), v(\mathcal{L}(f)))$ будет непрерывным из $\omega\text{-}S$

в ω - $L^2(T, H)$. Из (5.9), (5.10) следует, что для любого $f(\cdot) \in S$ и $x = Tr(f) \in Tr(S)$ будет иметь место включение

$$v(\mathcal{L}(f))(t) \in \tilde{U}(t, x(t)) \quad \text{п. в.} \quad (5.12)$$

Поэтому согласно (5.11) функция $f_*(t) = \tilde{A}(\mathcal{L}(f), v(\mathcal{L}(f)))(t)$, $t \in T$, будет удовлетворять неравенству (5.8). Из этого неравенства следует, что $\tilde{A}(\mathcal{L}(f), v(\mathcal{L}(f))) \in S$, $f \in S$. Следовательно, оператор $f \rightarrow \tilde{A}(\mathcal{L}(f), v(\mathcal{L}(f)))$ является непрерывным из выпуклого метризуемого компактного множества ω - S в себя. Согласно теореме Шаудера этот оператор имеет неподвижную точку $f_* \in S$, т. е.

$$f_* = \tilde{A}(\mathcal{L}(f_*), v(\mathcal{L}(f_*))). \quad (5.13)$$

Положим $x_* = \mathcal{L}(f_*)$, $u_* = v(\mathcal{L}(f_*)) = v(x_*)$. Тогда из (5.11), (5.12), (5.13) и определения оператора $\mathcal{L}(f)$ следует, что

$$\begin{aligned} -\dot{x}_*(t) &\in \partial\varphi^t(x_*(t)) + f_*(t) \quad \text{п. в.}, \\ u_*(t) &\in \tilde{U}(t, x_*(t)) \quad \text{п. в.}, \\ f_*(t) &= \tilde{A}(t, x_*(t))u_*(t) + \tilde{F}(t, x_*(t)) \quad \text{п. в.} \end{aligned}$$

Из этих соотношений вытекает, что пара (x_*, u_*) является решением управляемой системы (1.1), (1.2). Тем самым множества $\mathcal{R}_U(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0)$ не пусты. Относительная компактность множества $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0)$ в пространстве $C(T, H) \times \omega$ - $L^2(T, Y)$ следует из включения (5.1), теоремы 4.1 и неравенства (2.6). Замкнутость множества $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0)$ в пространстве $C(T, H) \times \omega$ - $L^2(T, Y)$ доказывается с помощью хорошо известных рассуждений [7, 8]. Теорема доказана. $\square$

Лемма 5.1. Пусть выполняется гипотеза $H(A)$. Тогда для любой непрерывной функции $x: T \rightarrow H$ и любой функции $u(\cdot) \in L^2(T, Y)$ функция

$$f(t, z, v) = \langle x(t) - z, A(t, x(t))u(t) - A(t, z)v \rangle,$$

определенная на пространстве $T \times H \times Y$, обладает следующими свойствами:

- 1) функция $t \rightarrow f(t, z, v)$ измерима;
- 2) функция $(z, v) \rightarrow f(t, z, v)$ непрерывна п. в.

Доказательство леммы мы опускаем ввиду ее очевидности.

Теорема 5.2. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$, $H(g)$, $H(\mathbb{R})$. Тогда для любого элемента $(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0)$ существует последовательность $(z_n(\cdot), v_n(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0)$, $n \geq 1$, такая что

$$z_n(\cdot) \rightarrow x_*(\cdot) \quad \text{в } C(T, H), \quad (5.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left| \int_{t'}^t (g_U^{**}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) - g(\tau, z_n(\tau), v_n(\tau))) d\tau \right| = 0. \quad (5.15)$$

Доказательство. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0)$. Согласно лемме 3.3 функция $t \rightarrow g_U^{**}(t, x_*(t), u_*(t))$ измерима и

$$(u_*(t), g_U^{**}(t, x_*(t), u_*(t))) \in \overline{\text{co}}G(t, x_*(t)) \quad \text{п. в.} \quad (5.16)$$

Из неравенств (2.6), (2.7), леммы 3.2 и (3.3) следует, что отображение $t \rightarrow \overline{\text{co}}G(t, x_*(t))$ измеримо и существует функция $l(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, такая что

$$\|\overline{\text{co}}G(t, x_*(t))\|_{\tilde{Y}} \leq l(t) \quad \text{п. в.} \quad (5.17)$$

Пусть $n \geq 1$ фиксировано. Тогда из (5.16), (5.17), (3.2), (3.3) и [22, теорема 2.2] вытекает, что существует измеримый селектор $u_n(t)$ отображения $t \rightarrow U(t, x_*(t))$, такой что

$$\sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left\| \int_{t'}^t (u_*(\tau) - u_n(\tau)) d\tau \right\| \leq \frac{1}{n}, \quad (5.18)$$

$$\sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left| \int_{t'}^t (g_U^{**}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) - g(\tau, x_*(\tau), u_n(\tau))) d\tau \right| \leq \frac{1}{n}. \quad (5.19)$$

Так как $\|x_*(t)\| \leq M$, $u_n(t) \in U(t, x_*(t))$, $t \in T$, то из гипотезы $H(\mathbb{R})$ следует, что для любого $z \in H$, $\|z\| \leq M$, найдется элемент $v \in U(t, z)$, удовлетворяющий почти всюду неравенствам

$$p(t, z, v) = \langle x_*(t) - z, A(t, x_*(t))u_n(t) + F(t, x_*(t)) - A(t, z)v - F(t, z) \rangle + \omega_M(t, \|x_*(t) - z\|) \|x_*(t) - z\| \geq 0, \quad (5.20)$$

$$p_*(t, z, v) = |g(t, x_*(t), u_n(t)) - g(t, z, v)| - \omega_M^*(t, \|x_*(t) - z\|) \leq 0. \quad (5.21)$$

Из леммы 5.1 и гипотез $H(F)$, $H(g)$ следует, что функции $t \rightarrow p(t, z, v)$, $t \rightarrow p_*(t, z, v)$ измеримы, а функции $(z, v) \rightarrow p(t, z, v)$, $(z, v) \rightarrow p_*(t, z, v)$ непрерывны п. в. Воспользовавшись [17, теоремы 6.1, 3.3] и [6, теорема 2.4], мы получаем, что существует последовательность $T_k \subset T_{k+1} \subset T$, $k \geq 1$, замкнутых множеств, $\mu\left(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right) = 0$, такая что отображение $(t, z) \rightarrow U(t, z)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times B_M$, функции $(t, z, v) \rightarrow p(t, z, v)$, $(t, z, v) \rightarrow p_*(t, z, v)$ непрерывны на $T_k \times B_M \times Y$, $k \geq 1$, и неравенства (5.20), (5.21) выполняются при всех $t \in T_k$, $k \geq 1$. Рассмотрим многозначное отображение $V_n: T \times B_M \rightarrow Y$

$$V_n(t, z) = \left\{ v \in Y; p(t, z, v) + \frac{1}{n} > 0, p_*(t, z, v) - \frac{1}{n} < 0 \right\}. \quad (5.22)$$

Ясно, что для каждого $k \geq 1$ график отображения $V_n(t, z)$ будет открытым подмножеством пространства $T_k \times B_M \times Y$, $k \geq 1$.

Положим

$$U_n(t, z) = U(t, z) \cap V_n(t, z), \quad t \in T, \quad z \in B_M. \quad (5.23)$$

Из (5.20)–(5.22) следует, что при каждом $t \in T_k$, $k \geq 1$, $z \in B_M$ множество $U_n(t, z)$ не пусто. Поскольку отображение $(t, z) \rightarrow U(t, z)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times B_M$ и график отображения $(t, z) \rightarrow V_n(t, z)$ является открытым подмножеством пространства $T_k \times B_M \times Y$, то отображение $(t, z) \rightarrow U_n(t, z)$ будет полунепрерывно снизу по Вьеторису на $T_k \times B_M$, $k \geq 1$. Тогда отображение $(t, z) \rightarrow \bar{U}_n(t, z)$, где черта означает замыкание в Y , также будет полунепрерывным снизу по Вьеторису на $T_k \times B_M$, $k \geq 1$. Ясно, что

$$\bar{U}_n(t, z) \subset U(t, z) \text{ п. в., } z \in B_M, \quad (5.24)$$

и согласно (5.23)

$$p(t, z, v) + \frac{1}{n} \geq 0, \quad p_*(t, z, v) - \frac{1}{n} \leq 0 \text{ п. в., } z \in B_M, \quad v \in \bar{U}_n(t, z). \quad (5.25)$$

Пусть $\overline{Tr}_U(x_0)$ — замыкание в $C(T, H)$ множества $Tr_U(x_0)$. Тогда согласно теореме 5.1 и (5.2) $\overline{Tr}_U(x_0)$ является компактом в $C(T, H)$ и для любого $x(\cdot) \in \overline{Tr}_U(x_0)$ будет иметь место включение $x(t) \in B_M$, $t \in T$. Из свойств отображения $\bar{U}_n(t, z)$, установленных выше, следует, что для любой непрерывной функции $z: T \rightarrow B_M$ отображение $t \rightarrow \bar{U}_n(t, z(t))$ измеримо, а отображение $z \rightarrow \bar{U}_n(t, z)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису п. в. Поэтому на $\overline{Tr}_U(x_0)$ мы можем определить многозначное отображение $S_n(x)$,

$$S_n(x) = \{f(\cdot) \in \mathcal{M}(Y); f(t) \in \bar{U}_n(t, x(t)) \text{ п. в.}\}, \quad (5.26)$$

с замкнутыми разложимыми значениями. Из (5.1), (5.24), (5.7), (5.9) следует, что

$$S_n(x) \subset S_{\bar{U}}(x), \quad x \in \overline{Tr}_U(x_0). \quad (5.27)$$

Как и при доказательстве теоремы 5.1 получаем, что существует непрерывное отображение $w_n: \overline{Tr}_U(x_0) \rightarrow L^2(T, Y)$, такое что

$$w_n(x) \in S_n(x), \quad x \in \overline{Tr}_U(x_0). \quad (5.28)$$

Как было установлено при доказательстве теоремы 5.1, отображение $x \rightarrow S_{\tilde{U}}(x)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису из $Tr(S)$ в $L^2(T, Y)$ с замкнутыми разложимыми значениями. Так как $\overline{Tr}_U(x_0)$ является замкнутым подмножеством в $Tr(S)$, то из (5.28) следует, что существует непрерывное отображение $\tilde{w}_n: Tr(S) \rightarrow L^2(T, Y)$, такое что

$$\tilde{w}_n(x) = w_n(x), \quad x \in \overline{Tr}_U(x_0), \quad (5.29)$$

$$\tilde{w}_n(x) \in S_{\tilde{U}}(x), \quad x \in Tr(S) \setminus \overline{Tr}_U(x_0). \quad (5.30)$$

Рассмотрим оператор $f \rightarrow \tilde{A}(\mathcal{L}(f), \tilde{w}_n(\mathcal{L}(f)))$ из S в $L^2(T, Y)$. Как и при доказательстве теоремы 5.1, мы получим, что существует такая точка $f_n \in S$, что

$$f_n = \mathcal{A}(\mathcal{L}(f_n), \tilde{w}_n(\mathcal{L}(f_n))).$$

Положим $z_n = \mathcal{L}(f_n)$, $v_n = \tilde{w}_n(\mathcal{L}(f_n)) = \tilde{w}_n(z_n)$. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 5.1, мы приходим к включению $(z_n(\cdot), v_n(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0)$. Поскольку $z_n(\cdot) \in Tr_U(x_0)$, то из (5.28), (5.29) следует, что $v_n = w_n(z_n) \in S_n(z_n)$. Поэтому из (5.26), (5.25), (5.20), (5.21) следует, что

$$\begin{aligned} & \langle x_*(t) - z_n(t), A(t, x_*(t), u_n(t) + F(t, x_*(t)) - A(t, z_n(t))v_n(t) - F(t, z_n(t))) \rangle + \\ & + \omega_M(t, \|x_*(t) - z_n(t)\|) \|x_*(t) - z_n(t)\| + \frac{1}{n} \geq 0 \quad \text{п. в.}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$|g(t, x_*(t), u_n(t)) - g(t, z_n(t), v_n(t))| - \omega_M^*(t, \|x_*(t) - z_n(t)\|) - \frac{1}{n} \leq 0 \quad \text{п. в.} \quad (5.32)$$

Из определения решения управляемой системы (1.1), (1.2), монотонности оператора $\partial\varphi^t$ и неравенства (5.31) непосредственно вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x_*(t) - z_n(t)\|^2 & \leq \int_0^t \langle x_*(\tau) - z_n(\tau), A(\tau, x_*(\tau))u_n(\tau) - A(\tau, x_*(\tau))u_*(\tau) \rangle + \\ & + \int_0^t \omega_M(\tau, \|x_*(\tau) - z_n(\tau)\|) \|x_*(\tau) - z_n(\tau)\| d\tau + \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Из (5.18) и ограниченности последовательности $u_n(\cdot)$, $n \geq 1$, в $L^2(T, Y)$ следует, что

$$u_n(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \quad \text{в } \omega\text{-}L^2(T, Y). \quad (5.34)$$

Тогда согласно (5.34) и лемме 3.1

$$A(t, x_*(t), u_n(t)) \rightarrow A(t, x_*(t))u_*(t) \quad \text{в } \omega\text{-}L^2(T, H). \quad (5.35)$$

Поскольку множество $\{x_*(\cdot) - z_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$ относительно компактно в $L^2(T, H)$, то из (5.35) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \langle x_*(\tau) - z_n(\tau), A(\tau, x_*(\tau))u_n(\tau) - A(\tau, x_*(\tau))u_*(\tau) \rangle d\tau = 0, \quad (5.36)$$

$t \in T$. Так как последовательность $z_n(\cdot)$, $n \geq 1$, относительно компактна в $C(T, H)$, то, не нарушая общности, мы можем считать, что $z_n(\cdot) \rightarrow y(\cdot)$ в $C(T, H)$. Перейдем к пределу в (5.33) при $n \rightarrow \infty$. Тогда из свойств функции $\omega_M(t, r)$ и (5.36) вытекает, что

$$\frac{1}{2} \|x_*(t) - y(t)\|^2 \leq \int_0^t \omega_M(\tau, \|x_*(\tau) - y(\tau)\|) \|x_*(\tau) - y(\tau)\| d\tau, \quad t \in T.$$

Из этого неравенства и [15, лемма А.5] следует, что

$$\|x_*(t) - y(t)\| \leq \int_0^t \omega_M(\tau, \|x_*(\tau) - y(\tau)\|) d\tau, \quad t \in T.$$

Поэтому $x_*(t) = y(t)$, $t \in T$. Тем самым соотношение (5.14) доказано.

Из (5.14), (5.21), (5.25) и свойств функции $\omega_M^*(t, r)$ вытекает, что

$$|g(t, z_n(t), v_n(t)) - g(t, x_*(t), u_n(t))| \rightarrow 0 \quad \text{п. в.} \quad (5.37)$$

Воспользовавшись (2.7), (5.37), (5.19) и теоремой Лебега об ограниченной сходимости, мы приходим к соотношению (5.15). Теорема доказана. $\square$

Предположим, что для любого $M > 0$ существуют функция $l_M(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ и константа $c_M > 0$, такие что для любых $x, y \in H$, $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$, $u \in U(t, x)$ выполняются неравенства

$$\|A(t, x)u - A(t, y)u\| \leq l_M(t)\|x - y\| \quad \text{п. в.}, \quad (5.38)$$

$$\langle x - y, F(t, x) - F(t, y) \rangle + l_M(t)\|x - y\|^2 \geq 0 \quad \text{п. в.}, \quad (5.39)$$

$$D_Y(U(t, x), U(t, y)) \leq l_M(t)\|x - y\| \quad \text{п. в.}, \quad (5.40)$$

$$|g(t, x, u) - g(t, y, v)| \leq l_M(t)\|x - y\| + c_M\|u - v\|_Y \quad \text{п. в.}, \quad (5.41)$$

$$\|u\|_Y \leq c_3, \quad \|v\|_Y \leq c_3.$$

Следствие 5.1. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$ 1), 3), $H(g)$ 1), 3) и неравенства (5.38)–(5.41). Тогда справедливы утверждения теорем 5.1, 5.2.

Доказательство. Покажем, что выполняются все гипотезы, при которых справедлива теорема 5.2. Из неравенств (5.40), (5.41) следует, что имеют место гипотезы $H(U)$ 2), $H(g)$ 2). Поэтому все гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$, $H(g)$ имеют место. Нам осталось показать, что выполняются неравенства (2.8), (2.9). Пусть $M > 0$ и $x, y \in H$, $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$, и $u \in U(t, x)$. Тогда из неравенства (5.40) следует, что существует такой элемент $v \in U(t, y)$, что

$$\|u - v\|_Y \leq (l_M(t) + 1)\|x - y\|.$$

Из этого неравенства и (2.4), (2.6), (5.38), (5.39), (5.41) непосредственно вытекает, что неравенства (2.8), (2.9) выполняются с функциями $\omega_M(t, r) = k_M(t)r$ и $\omega_M^*(t, z) = k_M^*(t)r$, где

$$k_M(t) = l_M(t)(2 + c + dM) + (c + dM),$$

$$k_M^*(t) = l_M(t)(1 + c_M) + c_M.$$

Теперь следствие вытекает из теорем 5.1, 5.2. $\square$

6. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В этом разделе мы используем теоремы 5.1, 5.2 для установления взаимосвязей между решениями проблем (RP) и (P).

Теорема 6.1. Пусть выполняются гипотезы $H(A)$, $H(F)$, $H(U)$, $H(g)$, $H(\mathbb{R})$. Тогда проблема (RP) имеет решение и для любого решения $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ проблемы (RP) существует минимизирующая последовательность $(z_n(\cdot), v_n(\cdot))$, $n \geq 1$, проблемы (P), такая что справедливы соотношения (5.14), (5.15). Обратно, если $(z_n(\cdot), v_n(\cdot))$ — минимизирующая последовательность задачи (P), то существуют подпоследовательность $(z_{n_k}(\cdot), v_{n_k}(\cdot))$, $k \geq 1$, последовательности $(z_n(\cdot), v_n(\cdot))$ и решение $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ задачи (RP), такие что для подпоследовательности $(z_{n_k}(\cdot), v_{n_k}(\cdot))$, $k \geq 1$, имеют место соотношения (5.14), (5.15).

Доказательство. Согласно гипотезе $H(g)$ 3) для множества B_M (см. (5.2)) существует такая функция $m_B(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, что

$$-m_B(t) \leq g(t, x, u) \quad \text{п. в.}, \quad x \in B_M, \quad u \in U(t, x).$$

Из этого неравенства и свойств биполяр [10] непосредственно вытекает, что

$$-m_B(t) \leq g_U^{**}(t, x, u) \leq g_U(t, x, u), \quad x \in B_M, \quad u \in Y. \quad (6.1)$$

Рассмотрим функцию $q: T \times H \times U \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, определенную следующим образом:

$$q(t, x, u) = \begin{cases} g_U^{**}(t, x, u), & x \in B_M, \quad u \in Y, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.2)$$

Так как множество B_M замкнуто, то функция $q(t, x, u)$ обладает свойствами функции $g_U^{**}(t, x, u)$, установленными в утверждении 3) леммы 3.3. Согласно этому утверждению существует возрастающая по включению последовательность замкнутых множеств $T_k \subset T$, $k \geq 1$, $\mu\left(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right) = 0$, такая что функция $(t, x, u) \rightarrow q(t, x, u)$ полунепрерывна снизу на $T_k \times H \times Y$, $k \geq 1$. Поскольку множество $\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ является борелевским, то функция $(t, x, u) \rightarrow q(t, x, u)$ является борелевской на $\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k \times H \times Y$. Изменяя значение функции $q(t, x, u)$ на борелевском множестве $\left(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right) \times H \times Y$, например полагая $q(t, x, u) = 0$, $t \in T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$, $x \in B_M$, $u \in Y$, не нарушая общности, мы можем считать, что функция $q(t, x, u)$ является борелевской и, следовательно, $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{H \times Y}$ -измеримой. Кроме того, в соответствии с (6.1), (6.2) для почти каждого t функция $(x, u) \rightarrow q(t, x, u)$ полунепрерывна снизу, выпукла по переменной u и

$$-m_B(t) \leq q(t, x, u), \quad x \in H, \quad u \in Y.$$

Другими словами, функция $q(t, x, u)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 2.1 в [11]. Согласно этой теореме функция

$$(x(\cdot), u(\cdot)) \rightarrow \int_T q(t, x(t), u(t)) dt$$

является секвенциально полунепрерывной снизу на $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$. Поскольку в соответствии с (4.4) для любого $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\text{co}U}^-(x_0)$ имеет место включение $x(t) \in B_M$, $t \in T$, то из (6.2) следует

$$\int_T g_U^{**}(t, x(t), u(t)) dt = \int_T q(t, x(t), u(t)) dt, \quad (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\text{co}U}^-(x_0). \quad (6.3)$$

Согласно теореме 5.1 множество $\mathcal{R}_{\text{co}U}^-(x_0)$ является компактом в $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$. Поэтому из (6.3) вытекает, что проблема (RP) имеет решение. Теперь соотношения (5.14), (5.15) следуют из теоремы 5.2.

Пусть $(z_n, v_n) \in \mathcal{R}_U(x_0)$, $n \geq 1$, — минимизирующая последовательность проблемы (P). Согласно теореме 5.1, не нарушая общности, мы можем считать, что последовательность (z_n, v_n) , $n \geq 1$, сходится к $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_{\text{co}U}^-(x_0)$ в топологии пространства $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$ и

$$\min(RP) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T g(t, z_n(t), v_n(t)) dt. \quad (6.4)$$

Из (6.1) и свойств функции $g_U^{**}(t, x, u)$ следует, что

$$\int_T g_U^{**}(t, x_*(t), u_*(t)) dt \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_T g_U^{**}(t, z_n(t), v_n(t)) dt \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T g(t, z_n(t), v_n(t)) dt. \quad (6.5)$$

Воспользовавшись (6.4), (6.5), мы получаем, что

$$\min(RP) = \int_T g_U^{**}(t, x_*(t), u_*(t)) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T g(t, z_n(t), v_n(t)) dt. \quad (6.6)$$

Следовательно, $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_{\text{co}U}(x_0)$ является решением проблемы (RP). Из неравенства (2.7) следует, что существует подпоследовательность $g(t, z_{n_k}(t), v_{n_k}(t))$, $k \geq 1$, последовательности $g(t, z_n(t), v_n(t))$, $n \geq 1$, сходящаяся к некоторой функции $w(t)$ в топологии пространства $\omega\text{-}L^1(T, \mathbb{R})$. Поскольку $(v_{n_k}(t), g(t, z_{n_k}(t), v_{n_k}(t))) \in G(t, z_{n_k}(t))$ п. в., то из леммы 3.2 следует, что

$$(u_*(t), w(t)) \in \overline{\text{co}} G(t, x_*(t)). \quad (6.7)$$

Воспользовавшись (6.6) и леммой 3.3, мы получаем

$$g_U^{**}(t, x_*(t), u_*(t)) \leq w(t) \text{ п. в.} \quad (6.8)$$

Из этого неравенства следует, что

$$\int_0^t g_U^{**}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) d\tau \leq \int_0^t w(\tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau, z_{n_k}(\tau), v_{n_k}(\tau)) d\tau, \quad t \in T. \quad (6.9)$$

Из (6.8), (6.9), (6.6) мы получаем, что

$$g_U^{**}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) = w(t) \text{ п. в.}$$

Следовательно, последовательность $g(t, z_{n_k}(t), v_{n_k}(t))$, $k \geq 1$, сходится к $g_U^{**}(t, x_*(t), u_*(t))$ в $\omega\text{-}L^1(T, \mathbb{R})$. Отсюда и из неравенства (2.7) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left| \int_{t'}^t (g_U^{**}(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) - g(\tau, z_{n_k}(\tau), v_{n_k}(\tau))) d\tau \right| = 0.$$

Поэтому для подпоследовательности (z_{n_k}, v_{n_k}) , $k \geq 1$, имеют место соотношения (5.14), (5.15). Теорема доказана. $\square$

Следствие 6.1. Пусть выполняются все предположения следствия 5.1. Тогда справедливы утверждения теоремы 6.1.

Следствие вытекает из следствия 5.1 и теоремы 6.1.

7. ПРИМЕР

Пусть $T = [0, 1]$ и $Z \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с регулярной границей $\Gamma = \partial Z$ [1]. Рассмотрим соболевские пространства $V = H_0^1(Z)$ и $W^{1,2}(T, V)$ [12]. Топологически сопряженным к пространству V будет пространство $V^* = H^{-1}(Z)$. Каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между V и V^* , будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$.

Пусть $H = L^2(Z)$. Из теорем вложения для соболевских пространств хорошо известно, что вложения $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V$ непрерывны, плотны и компактны. Как обычно [1], мы считаем, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ и скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в H согласованы, т. е. сужение $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ на $V \times H$ совпадает с $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Пусть $H_0^{1,\infty}(Z)$ — совокупность всех липшицевых функций из Z в $\mathbb{R}$ с носителями в Z . Используя регулярность границы Γ и рассуждения, приведенные в [3], можно показать, что $H_0^{1,\infty}(Z)$ является плотным подмножеством пространства V . Пусть $E \subset Z$ и $u \in V$. Следуя [3, 20], мы будем говорить, что $u \geq 0$ на E в пространстве V , если существует такая последовательность $u_m \in H_0^{1,\infty}(Z)$, $m \geq 1$, что $u_m(z) \geq 0$, $z \in E$, $m \geq 1$, и последовательность u_m , $m \geq 1$, сходится к u в пространстве V .

Следующая лемма является полным аналогом предложения 5.2 в [3, глава II, § 5] и доказывается с помощью рассуждений, использованных в [3, 20].

Лемма 7.1. Пусть $E \subset Z$ и $u \in V$. Тогда:

- 1) если $u \geq 0$ на E в пространстве V , то $u(z) \geq 0$ п. в. на E ;
- 2) если $u(z) \geq 0$ п. в. на Z , то $u \geq 0$ на Z в пространстве V .

Пусть $r \in W^{1,2}(T, V)$ и $\{Q(t)\}_{t \in T}$ — неубывающее по t семейство непустых компактных подмножеств. Для каждого $t \in T$ определим множество

$$K(t) = \{x \in V; x - r(t) \geq 0 \text{ на } Q(t) \text{ в пространстве } V\}. \quad (7.1)$$

Множество $K(t)$, определяемое равенством (7.1), обычно называют препятствием [3].

Рассмотрим семейство функций $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ из H в $\bar{\mathbb{R}}$, определенных по формуле

$$\varphi^t(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|x\|_V^2, & \text{если } x \in K(t), \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (7.2)$$

Лемма 7.2. Для каждого $t \in T$ множество $K(t)$ является непустым выпуклым замкнутым подмножеством пространства V , $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, и φ^t удовлетворяет гипотезе $H(\varphi)$.

Доказательство. Непустота, выпуклость и замкнутость множества $K(t)$, $t \in T$, в V непосредственно вытекает из леммы 7.1. В частности, $r(t) \in K(t)$, $t \in T$.

Включение $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, следует из [12, пример 3, с. 204], замкнутости, выпуклости множеств $K(t)$ и непрерывности и компактности вложения $V \hookrightarrow H$.

Справедливость гипотезы $H(\varphi)$ 1) для семейства $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, доказана в [19, утверждение 3.2.2]. Гипотеза $H(\varphi)$ 2) непосредственно вытекает из (7.2) и компактности вложения $V \hookrightarrow H$. Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим функции $a: T \times Z \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f: T \times Z \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g}: T \times Z \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и многозначное отображение $\tilde{U}: T \times Z \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Введем следующие предположения.

$H(a)$. $a: T \times Z \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является такой функцией, что:

- 1) функция $(t, z) \rightarrow a(t, z, x)$ измерима;
- 2) $|a(t, z, x) - a(t, z, y)| \leq l(t)|x - y|$ п. в. в $T \times Z$, $l \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$;
- 3) $|a(t, z, x)| \leq c$ п. в. в $T \times Z$, $c > 0$.

$H(f)$. $f: T \times Z \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является такой функцией, что:

- 1) функция $(t, z) \rightarrow f(t, z, x)$ измерима;
- 2) функция $x \rightarrow f(t, z, x)$ непрерывна п. в. в $T \times Z$;
- 3) $|f(t, z, x)| \leq c_1(t) + d_1(t)|x|$ п. в. в $T \times Z$, $c_1, d_1 \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$; (7.3)
- 4) $(x - y)(f(t, z, x) - f(t, z, y)) \geq 0$ п. в. в $T \times Z$. (7.4)

$H(\tilde{g})$. $\tilde{g}: T \times Z \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является такой функцией, что

- 1) функция $(t, z) \rightarrow \tilde{g}(t, z, x, u)$ измерима;
- 2) $|\tilde{g}(t, z, x, u) - \tilde{g}(t, z, y, v)| \leq l(t)|x - y| + c_2|u - v|$ п. в. в $T \times Z$, $c_2 > 0$;
- 3) $|\tilde{g}(t, z, x, u)| \leq c_3(t) + d_2(t)(|x| + |u|)$ п. в. в $T \times Z$, $c_3, d_2 \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$.

$H(\tilde{U})$. $\tilde{U}: T \times Z \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является многозначным отображением с замкнутыми значениями, таким что:

- 1) отображение $(t, z) \rightarrow \tilde{U}(t, z, x)$ измеримо;
- 2) $D_{\mathbb{R}}(\tilde{U}(t, z, x), \tilde{U}(t, z, y)) \leq l(t)|x - y|$ п. в. в $T \times Z$;
- 3) $\|\tilde{U}(t, z, x)\|_{\mathbb{R}} \leq c_4$ п. в. в $T \times Z$, $c_4 > 0$.

В дальнейшем мы используем следующие обозначения: $D_k = \frac{\partial}{\partial z_k}$, $D = (D_k)_{k=1}^N = \text{grad}$,

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^N}$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$. Как обычно, функцию x из $T \hookrightarrow V \hookrightarrow H$ мы отождествляем с функцией из $T \times Z$ в $\mathbb{R}$, полагая $x(t)(z) = x(t, z)$, $(t, z) \in T \times Z$, а пространство $L^2(T \times Z)$ отождествляем с пространством $L^2(T, L^2(Z))$.

Рассмотрим управляемое вариационное неравенство

$$\begin{aligned} & \int_Z (x'(t)(z) + a(t, z, x(t, z))u(t, z) + f(t, z, x(t, z))) (x(t, z) - y(z)) dz + \\ & + \int_Z \langle Dx(t, z), Dx(t, z) - Dy(z) \rangle_{\mathbb{R}^N} dz \leq 0 \quad \forall y \in K(t) \text{ п. в. в } T, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$x(0) = x_0$, с препятствием

$$x(t) \in K(t), \quad t \in T, \quad (7.6)$$

и с ограничением на управление

$$u(t, z) \in \tilde{U}(t, z, x(t, z)) \text{ п. в. в } T \times Z. \quad (7.7)$$

Наряду с ограничением (7.7) рассмотрим ограничение

$$u(t, z) \in \text{co} U(t, z, x(t, z)) \text{ п. в. в } T \times Z. \quad (7.8)$$

Под решением вариационного неравенства (7.5) с препятствием (7.6) и ограничением (7.7) понимается пара $(x(\cdot), u(\cdot))$, $x: T \rightarrow V \hookrightarrow H$, $x(0) = x_0$, $x: T \rightarrow H$ — абсолютно непрерывная функция с $x'(\cdot) \in L^2(T, H)$, $u(\cdot) \in L^2(T \times Z)$, удовлетворяющая неравенству (7.5) и включениям (7.6), (7.7). Аналогично определяется решение вариационного неравенства (7.5) с препятствием (7.6) и ограничением (7.8).

Если $(x(\cdot), u(\cdot))$ — решение вариационного неравенства, то $x(\cdot)$ называется траекторией, а $u(\cdot)$ — управлением. Множества всех решений вариационного неравенства (7.5) с препятствием (7.6) и ограничениями (7.7), (7.8) будем обозначать через $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\text{co}\tilde{U}}(x_0)$, а множества траекторий — через $\mathcal{T}r_{\tilde{U}}(x_0)$ и $\mathcal{T}r_{\text{co}\tilde{U}}(x_0)$ соответственно.

Пусть $Y = L^2(Z)$ и выполняется гипотеза $H(\tilde{U})$. Тогда, повторяя рассуждения, приведенные в [7, § 6], мы можем определить многозначное отображение $U: T \times H \rightarrow \text{cb} Y$, полагая

$$U(t, x) = \{u \in Y; u(z) \in \tilde{U}(t, z, x(z)) \text{ п. в. в } Z\}, \quad x \in H, \quad (7.9)$$

которое удовлетворяет гипотезам $H(U)$ 1), 3), неравенству, аналогичному неравенству (5.40), и имеет место равенство

$$\overline{\text{co}} U(t, x) = \{u \in Y; u(z) \in \text{co} \tilde{U}(t, z, x(z)) \text{ п. в. в } Z\}. \quad (7.10)$$

Аналогично, если выполняется гипотеза $H(a)$, то при почти каждом $t \in T$ будет определен оператор A из $T \times H$ в $\mathcal{L}(Y, H)$

$$(A(t, x)u)(z) = a(t, z, x(z))u(z), \quad x \in H, \quad u \in Y, \quad (7.11)$$

который удовлетворяет гипотезе $H(A)$ и неравенству, аналогичному неравенству (5.38).

Если выполняется гипотеза $H(f)$, то для любого $x \in H$ функция

$$F(t, x)(z) = f(t, z, x(z)) \quad (7.12)$$

будет измеримой на $T \times Z$.

Воспользовавшись (7.3), (7.11) и теоремой Фубини, мы получаем, что для каждого $x \in H$ функция $t \rightarrow F(t, x)$ является элементом пространства $L^2(T, H)$ и удовлетворяет неравенству, аналогичному неравенству (2.5).

Покажем, что при почти каждом $t \in T$ функция $x \rightarrow F(t, x)$ является непрерывной. Пусть последовательность $x_n \in H$, $n \geq 1$, сходится к x в H . Тогда существует подпоследовательность x_{n_k} , $k \geq 1$, последовательности x_n , $n \geq 1$, сходящаяся к x почти всюду. Поэтому в соответствии с гипотезой $H(f)$ 2)

$$f(t, z, x_{n_k}(z)) \rightarrow f(t, z, x(z)) \text{ п. в. в } T \times Z. \quad (7.13)$$

Пусть μ_N — мера Лебега в $\mathbb{R}^N$. Из (7.3), (7.13) и теоремы Фубини следует, что для почти каждого $t_* \in T$

$$f(t_*, z, x_{n_k}(z)) \rightarrow f(t_*, z, x(z)) \text{ п. в. в } Z \quad (7.14)$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\int_E |f(t_*, z, x_{n_k}(z))|^2 dz \leq \varepsilon, \quad k \geq 1, \quad (7.15)$$

для любого измеримого множества $E \subset Z$ с $\mu_N(E) \leq \delta$.

Воспользовавшись (7.14), (7.15) и [21, утверждение 2.4], мы получим, что последовательность $F(t_*, x_{n_k})$, $k \geq 1$, сходится к $F(t_*, x)$ в H . Используя приведенные выше рассуждения, методом от противного (см., например, конец доказательства теоремы 4.1) можно показать, что и сама

последовательность $F(t_*, x_n)$, $n \geq 1$, сходится к $F(t_*, x)$ в H . Из неравенства (7.4) непосредственно вытекает, что

$$\langle x - y, F(t, x) - F(t, y) \rangle \geq 0 \quad \text{п. в.,} \quad x, y \in H.$$

Таким образом, мы показали, что для отображения $F(t, x)$, определяемого равенством (7.12), справедливы гипотеза $H(F)$ и неравенство, аналогичное неравенству (5.39).

Пусть выполняется гипотеза $H(\tilde{g})$. Тогда для любого $x \in H$ и $u \in Y$ функция $(t, z) \rightarrow \tilde{g}(t, z, x(z), u(z))$ является элементом пространства $L^2(T \times Z)$. Поэтому мы можем определить функцию $g: T \times H \times Y \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t, x, u) = \int_Z \tilde{g}(t, z, x(z), u(z)) dz. \quad (7.16)$$

Используя гипотезу $H(\tilde{g})$ и достаточно стандартные рассуждения [7], мы получаем, что для функции (7.16) выполняются гипотезы $H(g)$ 1), 3) и неравенство, аналогичное неравенству (5.41).

Пусть

$$\tilde{g}_{\tilde{U}}(t, z, x, u) = \begin{cases} \tilde{g}(t, z, x, u), & u \in \tilde{U}(t, z, x, u), \\ +\infty & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и $\tilde{g}_{\tilde{U}}^{**}(t, z, x, u)$ — биполярная функция $u \rightarrow \tilde{g}_{\tilde{U}}(t, z, x, u)$. По аналогии с (1.3) для функции (7.16) и отображения (7.9) мы можем определить функции $g_U(t, x, u)$ и $g_U^{**}(t, x, u)$. Воспользовавшись рассуждениями, использованными в [7], мы получим

$$g_U^{**}(t, x, u) = \int_Z \tilde{g}_{\tilde{U}}^{**}(t, z, x(z), u(z)) dz, \quad x \in H, \quad u \in Y. \quad (7.17)$$

На пространстве $C(T, H) \times L^2(T \times Z)$ рассмотрим функционалы

$$I(x, u) = \int_T \int_Z \tilde{g}(t, z, x(t, z), u(t, z)) dz dt, \quad (7.18)$$

$$I^{**}(x, u) = \int_T \int_Z \tilde{g}_{\tilde{U}}^{**}(t, z, x(t, z), u(t, z)) dz dt. \quad (7.19)$$

Теорема 7.1. Пусть выполняются гипотезы $H(a)$, $H(f)$, $H(\tilde{g})$, $H(\tilde{U})$. Тогда множество $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$ не пусто, а множество $\mathcal{R}_{\text{co} \tilde{U}}(x_0)$ является компактным подмножеством пространства $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T \times Z)$. Для любого элемента $(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\text{co} \tilde{U}}(x_0)$ существует последовательность $(x_n(\cdot), u_n(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$, $n \geq 1$, такая что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \left(\int_Z |x_*(t, z) - x_n(t, z)|^2 dz \right)^{1/2} = 0, \quad (7.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left| \int_{t'}^t \int_Z (\tilde{g}_U^{**}(t, z, x_*(t, z), u_*(t, z)) - \tilde{g}(t, z, x_n(t, z), u_n(t, z))) dz dt \right| = 0. \quad (7.21)$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное включение (1.1) с ограничением (1.2), где функции φ^t определены равенством (7.2), а отображения $U(t, x)$, $A(t, x)$, $F(t, x)$ определены соотношениями (7.9), (7.11), (7.12). Тогда из леммы 7.2 и установленных выше свойств этих отображений следует, что выполняются все предположения, при которых справедливы утверждения следствия 5.1. Покажем, что если $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0)$, то $(x(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$, где $\tilde{u}(t, z) = u(t)(z)$.

Пусть $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0)$ и

$$v(t) = A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)). \quad (7.22)$$

Тогда $v \in L^2(T, H)$ и, как отмечалось ранее, x является единственным решением включения (3.16) с $f(t) = v(t)$. Тогда из неравенства (3.20) и (7.2) следует, что

$$x(t) \in \text{dom } \varphi^t = K(t), \quad t \in T. \quad (7.23)$$

Поскольку для почти всех $t \in T$ имеет место включение (1.2), то из (7.9) и теоремы Фубини следует, что $\tilde{u}(\cdot) \in L^2(T \times Z)$ и

$$\tilde{u}(t, z) = u(t)(z) \in \tilde{U}(t, z, x(t, z)) \text{ п. в. в } T \times Z. \quad (7.24)$$

Покажем, что выполняется неравенство (7.5).

Рассмотрим функцию $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(y) = \frac{1}{2} \|y\|_V^2 = \frac{1}{2} \int_Z \langle Dy(z), Dy(z) \rangle_{\mathbb{R}^N} dz, \quad y \in V. \quad (7.25)$$

Известно [12], что функция $\Phi(y)$ дифференцируема по Гато, ее производная по Гато совпадает с субдифференциалом функции $\Phi(y)$ и

$$\langle \partial\Phi(y), v \rangle_V = \int_Z \langle Dy(z), Dv(z) \rangle_{\mathbb{R}^N} dz, \quad x, y \in V. \quad (7.26)$$

Пусть $t_* \in T$ — такая точка, что

$$-x'(t_*) - v(t_*) \in \partial\varphi^{t_*}(x(t_*)). \quad (7.27)$$

Возьмем произвольное $y \in K(t_*)$. Так как $K(t_*)$ является выпуклым множеством, то из (7.23) следует, что

$$x(t_*) + \lambda(y - x(t_*)) \in K(t_*), \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (7.28)$$

Из (7.27), (7.28), (7.2), (7.25) и определения субдифференциала функции φ^{t_*} следует, что

$$\begin{aligned} \langle -x'(t_*) - v(t_*), x(t_*) + \lambda(y - x(t_*)) - x(t_*) \rangle &\leq \\ &\leq \varphi^{t_*}(x(t_*) + \lambda(y - x(t_*))) - \varphi^{t_*}(x(t_*)) = \Phi(x_*(t_*) + \lambda(y - x(t_*))) - \Phi(x(t_*)). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства непосредственно вытекает, что

$$\begin{aligned} \langle -x'(t_*) - v(t_*), y - x(t_*) \rangle &\leq \\ &\leq \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\Phi(x_*(t_*) + \lambda(y - x(t_*))) - \Phi(x(t_*))}{\lambda} = \int_Z \langle Dx(t_*)(z), Dy(z) - Dx(t_*)(z) \rangle_{\mathbb{R}^N} dz. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Воспользовавшись (7.11), (7.12), (7.16), (7.29), мы приходим к неравенству (7.5). Теперь из (7.23), (7.24) следует, что если $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{R}_U(x_0)$, то $(x(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$.

Пусть теперь $(x(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$. Так как $\tilde{u}(\cdot) \in L^2(T \times Z)$, то функция $u(t)$, $u(t)(z) = \tilde{u}(t, z)$, является элементом пространства $L^2(T, Y)$. Теперь из (7.7), (7.9) и теоремы Фубини следует, что при почти всех $t \in T$ имеет место включение (1.2).

Положим

$$\tilde{v}(t, z) = a(t, z, x(t, z))\tilde{u}(t, z) + f(t, z, x(t, z)).$$

Тогда из гипотез $H(a)$, $H(f)$ следует, что функция $\tilde{v}(t, z)$ является элементом пространства $L^2(T \times Z)$. Поэтому функция $v(t)$, $v(t)(z) = \tilde{v}(t, z)$, является элементом пространства $L^2(T, Y)$ и удовлетворяет равенству (7.22). Теперь неравенство (7.5) при почти каждом $t_* \in T$ можно переписать в виде

$$\langle -x'(t_*) - v(t_*), y - x(t_*) \rangle \leq \int_Z \langle Dx(t_*)(z), Dy(z) - Dx(t_*)(z) \rangle_{\mathbb{R}^N} dz,$$

$y \in K(t_*)$. Из последнего неравенства, (7.25), (7.26) вытекает

$$\langle -x'(t_*) - v(t_*), y - x(t_*) \rangle \leq \Phi(y) - \Phi(x(t_*)) = \varphi^{t_*}(y) - \varphi^{t_*}(x(t_*)), \quad y \in K(t_*). \quad (7.30)$$

Поскольку $-x'(t_*) - v_*(t_*) \in H$, то из (7.30), (7.2) следует, что неравенство (7.30) выполняется для всех $y \in H$. Поэтому $-x'(t_*) - v(t_*) \in \partial\varphi^{t_*}(x(t_*))$. Из этого включения и (7.22) следует,

что пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ является решением включения (1.1) с ограничением (1.2). Используя равенство (7.10), по аналогии можно показать, что если $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\text{co } U}(x_0)$, то $(x(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{U}}(x_0)$, $\tilde{u}(t, z) = u(t)(z)$, $(t, z) \in T \times Z$, и наоборот. Из (7.16), (7.19) следует, что

$$I(x, u) = \int_T g(t, x(t), u(t)) dt, \quad (7.31)$$

$$I^{**}(x, u) = \int_T g_U^{**}(t, x(t), u(t)) dt. \quad (7.32)$$

Очевидно, что множество $\tilde{W} \subset L^2(T \times Z)$ является компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}L^2(T \times Z)$ тогда и только тогда, когда множество

$$W = \{u \in L^2(T, Y); u(t)(z) = u(t, z) \in \tilde{W}\}$$

является компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}L^2(T, Y)$. Поскольку функция $g(t, x, u)$ и отображения $U(t, x)$, $A(t, x)$, $F(t, x)$, определяемые равенствами (7.16), (7.9), (7.11), (7.12), обладают всеми свойствами, при которых справедливы утверждения следствия 5.1, то соотношения (7.20), (7.21) вытекают из (7.18), (7.19), (7.31), (7.32) и следствия 5.1. Теорема доказана. $\square$

Для вариационного неравенства (7.5) с препятствием (7.6) и ограничением (7.7), воспользовавшись следствием 6.1, можно сформулировать аналог теоремы 6.1. Формулировку этой теоремы мы не приводим ввиду ее очевидности.

Замечание 7.1. В качестве функции $f(t, z, x)$, удовлетворяющей гипотезе $H(f)$, можно, например, взять функцию $f(t, z, x) = x/\sqrt{|x|}$.

По аналогии с [18], [13, с. 46] покажем, что формально решение вариационного неравенства (7.5) с препятствием (7.6) и ограничением (7.7) является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \Delta x + a(t, z, x(t, z))u(t, z) + f(t, z, u(t, z)) \geq 0 \quad \text{в } Z, \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \Delta x + a(t, z, x(t, z))u(t, z) + f(t, z, u(t, z)) = 0 \quad \text{в } Z \setminus Q(t), \quad (7.34)$$

$$x(t) \in K(t), \quad t \in T, \quad x|_{T \times \Gamma} = 0, \quad x(0, z) = x_0(z), \quad u(t, z) \in \tilde{U}(t, z, x(t, z)).$$

В самом деле, пусть $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$. Тогда для $x, v \in V = H_0^1(\Omega)$

$$\langle \Delta x, v \rangle_V = - \int_Z \langle Dx(z), Dv(z) \rangle_{\mathbb{R}^N} dz.$$

Поэтому неравенство (7.5) можно переписать в виде

$$\langle x'(t) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)) - \Delta x(t), x(t) - y \rangle_V \leq 0, \quad (7.35)$$

$y \in K(t)$. Воспользовавшись (7.1) и леммой 7.1, мы получаем, что $y = x(t) + v \in K(t)$ для любого $v \in C_0^\infty(Z)$, $v(z) \geq 0$, $z \in Z$. Поэтому согласно (7.35)

$$\langle x'(t) + A(t, x(t))u(t) + F(t, x(t)) - \Delta x(t), v \rangle_V \geq 0. \quad (7.36)$$

Теперь с точки зрения теории распределений неравенство (7.33) следует из (7.36).

Пусть $v \in C_0^\infty(Z \setminus Q(t))$. Продолжим эту функцию на множество Z , полагая $v(z) = 0$, $z \in Q(t)$. Продолженную таким образом функцию v будем обозначать символом $\tilde{v}$. Легко показать, что $\tilde{v} \in C_0^\infty(Z)$ и $y = x(t) + \tilde{v} \in K(t)$. Поэтому неравенство (7.36) будет иметь место и для функций $v = \tilde{v}$. Так как на множестве $Z \setminus Q(t)$ функция $\tilde{v}(z)$ может принимать значения разных знаков, то равенство (7.34) следует из неравенства (7.36).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
2. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
3. Киндерлерер Д., Стампакия Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М.: Мир, 1983.
4. Суслов С. И. Теорема Боголюбова с ограничением в виде дифференциального включения // Сиб. мат. журн. — 1994. — 35, № 4. — С. 902—914.
5. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986.
6. Толстоногов А. А. К теореме Скорца—Драгоны для многозначных отображений с переменной областью определения // Мат. заметки. — 1990. — 48, № 5. — С. 109—119.
7. Толстоногов А. А. Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка // Мат. сб. — 1999. — 190, № 11. — С. 135—160.
8. Толстоногов А. А. Аппроксимация множеств достижимости эволюционного включения субдифференциального типа // Сиб. мат. журн. — 2003. — 44, № 4. — С. 883—904.
9. Толстоногов А. А. Теорема Боголюбова при ограничениях, порожденных эволюционной управляемой системой второго порядка // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — 67, № 5. — С. 177—206.
10. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979.
11. Balder E. J. Necessary and sufficient condition for L_1 -strong-weak lower semicontinuity of integral functionals // Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl. — 1987. — 11, N 12. — P. 1399—1404.
12. Barbu V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. — The Netherlands, Leyden: Noordhoff International Publishing, 1976.
13. Barbu V. Optimal control of variational inequalities. — Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing, 1984.
14. Bogolyubov N. N. Sur quelques method nonvelles dans le calculas des variations // Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 4. — 1930. — 7. — P. 249—271.
15. Brezis H. Operateurs maximaux monotones. — Amsterdam: North-Holland, 1973.
16. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Stud. Math. — 1983. — 76, N 2. — P. 163—174.
17. Himmelberg C. J. Measurable relations // Fundam. Math. — 1975. — 87. — P. 173—203.
18. Kenmochi N. On the quasi-linear heat equation with time-dependent obstacles // Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl. — 1981. — 5, N 1. — P. 71—80.
19. Kenmochi N. Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications // Bull. Fac. Ed. Chiba Univ. — 1981. — 30. — P. 1—87.
20. Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 1963. — 17. — P. 43—77.
21. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. L_p -continuous extreme selectors of multifunction with decomposable values: existence theorems // Set-Valued Anal. — 1996. — 4. — P. 173—203.
22. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. L_p -continuous extreme selectors of multifunction with decomposable values: relaxation theorems // Set-Valued Anal. — 1996. — 4. — P. 237—269.

А. А. Толстоногов

Институт динамики систем и теории управления, Сибирское отделение РАН

E-mail: aatol@icc.ru

НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКЦИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, СВЯЗАННЫЕ С КОМПАКТИФИКАЦИЕЙ СТОУНА—ЧЕХА

© 2005 г. **А. Г. ЧЕНЦОВ**

Аннотация. В работе рассматриваются представления множеств притяжения в топологических пространствах и их связь с расширениями задач о достижимости в условиях последовательно ослабляемых ограничений. Исследуется структура приближенных (а по сути дела, асимптотических) решений и обобщенных элементов, устанавливается возможность их фактического отождествления для одной (связанной с компактификацией Стоуна—Чеха и расширением Волмэна) версии расширения исходной задачи.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	119
2. Общие сведения	121
3. Фильтры и базы фильтров	122
4. Множества притяжения и приближенные решения	124
5. Ультрафильтры и конструирование приближенных решений	129
6. Обобщенные элементы и приближенные решения	133
7. Компактификация Стоуна—Чеха и структура обобщенной задачи о достижимости	136
8. Представление множеств притяжения в терминах обобщенных задач о достижимости в топологическом пространстве	142
9. Добавление	146
Список литературы	149

1. ВВЕДЕНИЕ

Укажем основные сокращения, используемые в статье: МП (множество притяжения), ОЭ (обобщенный элемент), п/м (подмножество), ПР (приближенное решение), ТП (топологическое пространство), у/ф (ультрафильтр).

В дальнейшем рассматриваются некоторые методы исследования задачи, имеющей следующий содержательный смысл. Даны непустое множество E (пространство решений), ТП $(\mathbf{H}, \theta)$ (пространство оценок) и оператор

$$\mathbf{h}: E \rightarrow \mathbf{H}, \quad (1.1)$$

именуемый далее целевым. Нас интересуют возможности, связанные с реализацией точек $z \in \mathbf{H}$ на значениях $\mathbf{h}$ при наличии тех или иных ограничений на выбор аргумента, т. е. решения $x \in E$. В простейшем случае можно говорить о множестве E_0 , $E_0 \subset E$, как о п/м E , «составленном» из допустимых решений. Тогда образ $\mathbf{h}^1(E_0) = \{\mathbf{h}(e) : e \in E_0\}$ множества E_0 дает наглядное представление о возможностях такого рода. Можно было бы, однако, рассматривать в качестве достижимых или реализуемых также точки замыкания $\overline{\mathbf{h}^1(E_0)}$ множества-образа $\mathbf{h}^1(E_0)$ в смысле $(\mathbf{H}, \theta)$. Разумеется, достижимость точек

$$z \in \overline{\mathbf{h}^1(E_0)} \setminus \mathbf{h}^1(E_0) \quad (1.2)$$

имеет уже другой характер; точку (1.2) можно, по сути дела, интерпретировать как асимптотику «обычных» оценок. Возникает, однако, естественный вопрос: если уж реализация z (1.2) допускается приближенной, то следует ли добиваться точного соблюдения условия $e \in E_0$ на этапе

аппроксимативной реализации точки z . Постановка, где соблюдение этого условия также допускается приближенным, имеет практический интерес; она естественна с точки зрения инженерной реализации при построении технических систем, функционирующих в условиях ограничений. В связи с упомянутой постановкой отметим, в частности, исследования [5–7, 20].

Следует, правда, отметить, что множество E зачастую не топологизировано, а само множество E_0 очень часто материализуется посредством тех или иных косвенных требований на выбор $e \in E$. Эти требования в естественных случаях допускают разного рода ослабленные варианты, вполне допустимые в практических задачах. Можно, например, рассматривать случай, когда

$$E_0 = \{e \in E \mid s(e) \in Y\},$$

где Y есть некоторое п/м фиксированного множества X , а s — отображение из E в X . Если при этом множество X оснащено топологией, то естественно рассматривать ослабленные условия вида $s(e) \in \tilde{Y}$, где $\tilde{Y}$ — окрестность Y . В этом случае E_0 «заменяется» множеством-прообразом $s^{-1}(\tilde{Y})$. Варьируя окрестность $\tilde{Y}$ множества Y , мы приходим уже к семейству множеств вида $s^{-1}(\tilde{Y})$. Это семейство $\mathcal{E}$ можно рассматривать как некоторое ограничение асимптотического характера. Множества $\tilde{Y}$ сжимаются (к Y) и, в типичных для практики случаях, реализуют в пересечении множество Y (например, данное свойство имеет место в случае, когда Y — замкнутое множество в метризуемом пространстве). Пересечение же всевозможных множеств $\mathbf{h}^1(s^{-1}(\tilde{Y}))$ может уже существенно отличаться от $\mathbf{h}^1(E_0)$ (см. примеры в [16, 21, 22]). Упомянутое пересечение совпадает с пересечением всех множеств $\mathbf{h}^1(U)$, $U \in \mathcal{E}$, и, при минимальных соглашениях об используемом запасе окрестностей Y , является также обобщенным МП. Здесь термин «обобщенное МП» имеет следующий смысл: при построении данного МП допускается применение несеквенциальных ПР, отождествляемых, например, с направленностями в E (подобные замечания имеются в [6, 7]), а не только с последовательностями.

Мы ставим своей целью систематическое исследование таких МП и ПР, реализующих точки МП, т. е. элементы притяжения в $\mathbf{H}$. Такое исследование включает обычно этап, называемый расширением задачи. На этом этапе конструируется некоторая обобщенная «стандартная» задача. В [5, гл. III] в этой связи указано три характерных типа решений, связываемых (по сути дела) с вышеупомянутой задачей (в ее «экстремальной» версии): точные, приближенные и обобщенные. В нашем случае точные решения можно отождествить с элементами E_0 . ПР имеют смысл направленностей (e_α) в множестве E , для которых при всяком выборе $U \in \mathcal{E}$ имеет место $e_\alpha \in U$ с некоторого момента. Обобщенные решения связываются (хотя и не всегда: см. [16, 21, 22] и др.) с «компактификацией» E , здесь имеется в виду погружение E в компакт в виде всюду плотного множества. В настоящей работе для весьма общей постановки реализуется отождествление приближенных и обобщенных решений (для одной из версий класса обобщенных решений) на основе использования подходящего варианта компактификации Стоуна—Чеха [9, 19, 26]. Для этого мы развиваем конструкцию, связанную с построением пределов по у/ф (см. [18, заключение главы 1]). Упомянутые у/ф будем использовать как «материал» при построении варианта $\beta[E]$ [19, § 3.6]. Данный достаточно традиционный подход мы связываем, однако, с несколько иной (по сравнению с «обычной» для компактификации Стоуна—Чеха схемой продолжения непрерывных отображений) конструкцией, ориентированной на построение множества всех ПР в рассматриваемой задаче асимптотического анализа. По этой причине традиционные (см. [19, § 3.6] и др.) процедуры стоун-чеховского расширения далее практически не используются. Итак, наша цель связана с встраиванием подходящей версии стоун-чеховской компактификации в исследуемую задачу как в виде «блока» ПР, так и в виде естественной схемы расширения этой задачи. Это расширение будем именовать прямым, поскольку в его рамках приближенные и обобщенные решения можно не различать.

В связи с существенностью применения несеквенциальных ПР можно отметить, в частности, задачи импульсного управления линейными системами с разрывными правыми частями (управляемых дифференциальных уравнений). В этих задачах нередко возникает эффект, имеющий смысл произведения разрывной функции на обобщенную. В [16, 21, 22] и в ряде других работ в этой связи использовались конструкции расширений в классе конечно-аддитивных мер, реализующие

обобщенные задачи управления, подобные в идейном отношении построениям из [5, гл. III, IV]. Применяемые в [16, 21, 22] расширения могут рассматриваться как не прямые: в них ПР и ОЭ существенно различны. Несеквенциальные версии ПР весьма существенны в этих построениях, для представления этих ПР вполне могут использоваться конструкции настоящей работы.

В связи с построениями обобщенных задач импульсного управления отметим подход Н. Н. Красовского, предложенный в [10] и послуживший основой для многих последующих работ в этом направлении. Конструкции с применением ОЭ широко использовались Н. Н. Красовским и его учениками и в других задачах управления, в частности в задачах теории дифференциальных игр. Так, например, при определении свойства стабильности множеств, предложенного Н. Н. Красовским и сыгравшего важную роль в установлении замечательной теоремы об альтернативе (Н. Н. Красовский и А. И. Субботин), в качестве реакций на управления игрока-противника использовалось обобщенное управление (скользящий режим) (см. [11–13]). Автор настоящей статьи в течение долгого времени имел неоценимую возможность обсуждать с Н. Н. Красовским полученные результаты и направления дальнейших работ, выступать на его семинаре. Автор выражает глубокую благодарность Н. Н. Красовскому за поддержку, добрые советы и постоянное внимание к своим исследованиям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00415, 04-01-96093) и Министерства образования России (Е02-1.0-232).

2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В дальнейшем мы используем обозначение $\triangleq$, когда говорим о равенстве по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Для всякого объекта z через $\{z\}$ обозначаем синглетон (одноэлементное множество), содержащий z .

Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м X , $\text{Fin}(X)$ есть по определению семейство всех непустых конечных п/м X . Через B^A обозначаем множество всех отображений из множества A в множество B (см. [14, § II.6]). Мы используем стандартные обозначения и понятия, связанные с функциями: сужения, образы и прообразы множеств, а также семейств множеств. Если A и B — множества, а $f \in B^A$, то при $C \in \mathcal{P}(A)$ рассматриваем сужение

$$(f|C) \in B^C: (f|C)(x) \triangleq f(x) \quad \forall x \in C$$

функции f на множество C и образ [14, § II.7]

$$f^1(C) \triangleq \{f(x): x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$$

множества C при действии f и полагаем $f^{-1}(D) \triangleq \{x \in A \mid f(x) \in D\} \quad \forall D \in \mathcal{P}(B)$. Образы и прообразы семейств определяем, как обычно, в виде семейств соответствующих образов и прообразов множеств. Итак, если A и B — множества, а $f \in B^A$, то

$$f^1[\mathcal{A}] \triangleq \{f^1(U): U \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B)) \quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)), \quad (2.1)$$

$$f^{-1}[\mathcal{B}] \triangleq \{f^{-1}(V): V \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \quad \forall \mathcal{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B)). \quad (2.2)$$

Еще одно важное в дальнейшем понятие — след семейства на заданное множество: если $\mathcal{X}$ — семейство, а Y — множество, то

$$\mathcal{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y: X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y)).$$

Нам потребуется целый ряд понятий общей топологии. Если (X, τ) есть ТП и $M \in \mathcal{P}(X)$, то полагаем $\mathbb{N}_\tau^0[M] \triangleq \{G \in \tau \mid M \subset G\}$ (семейство всех открытых окрестностей множества M), а также

$$\mathbb{N}_\tau[M] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists G \in \mathbb{N}_\tau^0[M]: G \subset H\}$$

(семейство всех окрестностей M). Окрестности точек рассматриваем как частный случай окрестностей множеств: если (X, τ) — ТП и $x \in X$, то

$$N_\tau^0(x) \triangleq \mathbb{N}_\tau^0[\{x\}], \quad N_\tau(x) \triangleq \mathbb{N}_\tau[\{x\}].$$

Для произвольных ТП (X, τ) и множества $A \in \mathcal{P}(X)$ через $\text{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание [9, 19] множества A в (X, τ) . Семейство $\tau|_A$ есть топология A , индуцированная [9, гл. 1] из (X, τ) и превращающая A в подпространство

$$(A, \tau|_A) \quad (2.3)$$

исходного ТП (X, τ) . Переход от (X, τ) к ТП (2.3) — естественная (и не всегда специально оговариваемая) операция общей топологии. Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) — два ТП, то

$$C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in Y^X \mid f^{-1}[\tau_2] \subset \tau_1\}$$

есть множество всех отображений из Y^X , непрерывных [19] в смысле двух вышеупомянутых ТП. Для всякого ТП (X, τ) через $(\tau\text{-comp})[X]$ обозначаем семейство всех компактных (в (X, τ)) п/м X и полагаем

$$(\tau\text{-comp})^0[X] \triangleq \{S \in \mathcal{P}(X) \mid \exists K \in (\tau\text{-comp})[X]: S \subset K\}. \quad (2.4)$$

Если (X, τ) — хаусдорфово ТП, то имеем равенство

$$(\tau\text{-comp})^0[X] = \{S \in \mathcal{P}(X) \mid \text{cl}(S, \tau) \in (\tau\text{-comp})[X]\} \quad (2.5)$$

(семейство всех предкомпактных, в смысле ТП (X, τ) , п/м множества X). Как обычно [19, § 3.1], компактом называем компактное хаусдорфово ТП.

3. ФИЛЬТРЫ И БАЗЫ ФИЛЬТРОВ

В данном разделе приведены сведения о фильтрах и, в частности, об у/ф. Читатель, знакомый с этими понятиями, может ограничиться в этой части лишь краткой сводкой обозначений. Упомянутые построения рассматриваются, в частности, в [4, 19, 26].

Если S — множество, то через $\beta[S]$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$, таких что

$$\forall B_1 \in \mathcal{B} \forall B_2 \in \mathcal{B} \exists B_3 \in \mathcal{B}: B_3 \subset B_1 \cap B_2. \quad (3.1)$$

Свойство (3.1) имеет смысл полумультимпликативности. В частности, определим базу фильтра как семейство $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$ со свойством (3.1). Тогда

$$\beta_0[S] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S)) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B} \forall B_2 \in \mathcal{B} \exists B_3 \in \mathcal{B}: B_3 \subset B_1 \cap B_2\} \quad (3.2)$$

есть множество всех баз фильтров в множестве S ,

$$\beta_0[S] \subset \beta[S].$$

Сами фильтры являются разновидностью упомянутых баз: если X — множество, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[X] \triangleq \{ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \forall A \in \mathcal{F} \forall B \in \mathcal{F}) \& \\ \& (\{H \in \mathcal{P}(X) \mid F \subset H\} \subset \mathcal{F} \forall F \in \mathcal{F}) \} \subset \beta_0[X] \end{aligned} \quad (3.3)$$

(в левой части (3.3) введено множество всех фильтров в X , вложение в (3.3) легко проверяется с учетом (3.2)). Посредством баз конструируются фильтры: если X — множество и $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$, то [4, гл. I]

$$(X\text{-fi})[\mathcal{B}] \triangleq \{L \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B \in \mathcal{B}: B \subset L\} \in \mathfrak{F}[X] \quad (3.4)$$

(фильтр в X , порожденный базой $\mathcal{B}$), при этом $\mathcal{B} \subset (X\text{-fi})[\mathcal{B}]$ (см. (3.2), (3.4)). В качестве $\mathcal{B}$ можно в силу (3.3) использовать фильтр в множестве X . В этом случае операция (3.4) реализует тот же самый фильтр:

$$(X\text{-fi})[\mathcal{F}] = \mathcal{F} \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]. \quad (3.5)$$

Свойство (3.5) позволяет применять операции, выполняемые над базами фильтров, к самим фильтрам, что приводит зачастую к более простым конструкциям.

Как обычно (см. [4, 9, 19, 26]), у/ф определяем как максимальные фильтры. Если X — множество, то

$$\mathfrak{F}_u[X] \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X] \mid \forall \mathcal{G} \in \mathfrak{F}[X] ((\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \implies (\mathcal{F} = \mathcal{G}))\} \quad (3.6)$$

есть множество всех у/ф в множестве X ,

$$\forall \mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[X] \exists \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}_u[X]: \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2. \quad (3.7)$$

В дальнейшем фильтры и у/ф будут использоваться в качестве ПР, соблюдающих некоторые «асимптотические» ограничения. Последние мы задаем в виде семейства множеств. В этой связи введем требуемые п/м множеств (3.3) и (3.6), рассматривая (в основной части) точки этих множеств как допустимые ПР: если X — множество и $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, то через $\mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}]$ (через $\mathfrak{F}_u^0[X|\mathcal{X}]$) обозначаем множество всех фильтров $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$ (всех у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[X]$), таких что $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}$;

$$\mathfrak{F}_u^0[X|\mathcal{X}] \subset \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}], \quad (3.8)$$

и в силу (3.7) имеет место свойство

$$\forall \mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}] \exists \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}_u^0[X|\mathcal{X}]: \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2. \quad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) следует очевидное свойство достаточности у/ф в конструкциях, связанных с соблюдением ограничений, определяемых семействами множеств. Это свойство будет использовано при построении ПР на основе фильтров.

Хорошо известно [4, гл. I] также следующее свойство: если X и Y — множества, $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ и $f \in Y^X$, то

$$f^1[\mathcal{B}] = \{f^1(B): B \in \mathcal{B}\} \in \beta_0[Y]. \quad (3.10)$$

При этом образ базы у/ф есть база у/ф, т. е.

$$((X\text{-fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}_u[X]) \implies ((Y\text{-fi})[f^1[\mathcal{B}]] \in \mathfrak{F}_u[Y]). \quad (3.11)$$

В связи с (3.10) полезно учесть (3.3): образ фильтра является базой фильтра (если f — сюръективное отображение, то образ фильтра — фильтр, см. [4, § I.6]). Из (3.11) имеем, в частности, известное свойство [4, гл. I]: образ у/ф есть база у/ф.

Фильтры широко используются в топологии. В частности, в их терминах определяется сходимость в ТП. Если (X, τ) — ТП и $x \in X$, то $N_\tau^0(x) \in \beta_0[X]$, а

$$N_\tau(x) = (X\text{-fi})[N_\tau^0(x)] \in \mathfrak{F}_0[X|N_\tau^0(x)]$$

есть фильтр всех окрестностей точки x . Если к тому же $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$, то по определению

$$(\mathcal{B} \xrightarrow{\tau} x) \iff (N_\tau(x) \subset (X\text{-fi})[\mathcal{B}]) \quad (3.12)$$

(см. [4, гл. I]). Учитывая (3.3), (3.12), можно говорить о сходимости фильтров. Согласно (3.5) и (3.12) имеем следующее свойство: если (X, τ) — ТП, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$ и $x \in X$, то

$$(\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} x) \iff (N_\tau(x) \subset \mathcal{F}). \quad (3.13)$$

Из (3.10), (3.12) получаем также очевидные следствия, касающиеся сходимости образа базы фильтра и, в частности, образа фильтра (см. (3.3)). Отметим в этой связи простое свойство: если X — непустое множество, (Y, τ) — ТП, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$, $f \in Y^X$ и $y \in Y$, то

$$(f^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} y) \iff (f^{-1}[N_\tau(y)] \subset \mathcal{F}). \quad (3.14)$$

Напомним также некоторые свойства, связанные с у/ф в компактных ТП (более подробные сведения см. в [4, гл. I]). Именно, если (X, τ) есть ТП и $K \in (\tau\text{-comp})[X]$, то

$$\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[K] \exists y \in K: \mathcal{F} \xrightarrow{\tau} y. \quad (3.15)$$

Для наших дальнейших рассуждений полезно также понятие множества точек прикосновения базы фильтра в ТП, мы следуем здесь построениям [4, гл. I].

Если (X, τ) — ТП и $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$, то $(\tau\text{-CL})[\mathcal{B}]$ есть по определению пересечение всех множеств $\text{cl}(B, \tau)$, $B \in \mathcal{B}$. Мы ввели множество всех точек прикосновения базы (фильтра) $\mathcal{B}$. Полезно отметить, что при упомянутых соглашениях в отношении (X, τ) и $\mathcal{B}$

$$(\tau\text{-CL})[\mathcal{B}] = (\tau\text{-CL})[(X\text{-fi})[\mathcal{B}]]. \quad (3.16)$$

Разумеется, в (3.16) мы учли (3.3). Отметим, что в последнем определении возможна следующая детализация, учитывающая (3.10): для всяких непустого множества X , ТП (Y, τ) , $f \in Y^X$ и $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$

$$(\tau\text{-CL})[f^1[\mathcal{B}]] = \{y \in Y \mid B \cap f^{-1}(H) \neq \emptyset \forall B \in \mathcal{B} \forall H \in N_\tau(y)\}. \quad (3.17)$$

Представление, подобное (3.17), будет в дальнейшем использоваться при построении МП. Это построение можно исчерпывающим образом реализовать с использованием в качестве ПР фильтров и, в частности, у/ф. Естественная логика данного построения в большей степени связана с обобщением СПР, т. е. ПР, определяемых в виде последовательностей. В этой связи будем использовать также направленности и сходимость по Мору—Смиту.

Направленностью в множестве X называем любой триплет $(D, \preceq, f)$, где $(D, \preceq)$ — непустое направленное множество [9, гл. 2] и $f \in X^D$. Частным случаем такой направленности является последовательность в X . При этом натуральный ряд $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ оснащаем обычным порядком $\leq$, получая непустое направленное множество $(\mathcal{N}, \leq)$. Если X — множество и $\mathbf{f} \in X^{\mathcal{N}}$ (т. е. $\mathbf{f}$ есть последовательность в X), то $(\mathcal{N}, \leq, \mathbf{f})$ есть направленность в X , отождествляемая с последовательностью $\mathbf{f}$.

Если $(D, \preceq, f)$ — направленность в множестве X , то

$$(X\text{-ass})[D; \preceq; f] \triangleq \{S \in \mathcal{P}(X) \mid \exists d_1 \in D \forall d_2 \in D ((d_1 \preceq d_2) \implies (f(d_2) \in S))\} \in \mathfrak{F}[X] \quad (3.18)$$

есть фильтр в X , ассоциированный с направленностью $(D, \preceq, f)$. При использовании в (3.18) последовательности мы получаем [4, гл. I, § 6] так называемый элементарный фильтр, ассоциированный с данной последовательностью. В терминах фильтра (3.18) определяется сходимость по Мору—Смиту [9, гл. 2]: если (X, τ) — ТП, $(D, \preceq, f)$ — направленность в X и $x \in X$, то по определению

$$((D, \preceq, f) \xrightarrow{\tau} x) \iff ((X\text{-ass})[D; \preceq; f] \xrightarrow{\tau} x). \quad (3.19)$$

Из (3.19) видно, что именно (3.12), (3.13) определяют основной (для наших конструкций) тип сходимости. Тем не менее сходимость по Мору—Смиту (сходимость направленностей) мы также будем использовать, поскольку в ее терминах удастся проще реализовать аналогии с секвенциальным подходом при построении МП. В этой связи введем следующее соглашение о более традиционном обозначении: если (X, τ) — ТП, $(x_i)_{i \in \mathcal{N}} \in X^{\mathcal{N}}$ (здесь использована индексная форма записи, см. [5]) и $x \in X$, то выражение

$$(x_i)_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\tau} x \quad (3.20)$$

применяем вместо выражения

$$(\mathcal{N}, \leq, (x_i)_{i \in \mathcal{N}}) \xrightarrow{\tau} x.$$

Разумеется, (3.20) обозначает факт «обычной» (секвенциальной) сходимости в ТП (см. [9, гл. 2]). Полезно отметить следующее свойство: если X — непустое множество и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$, то существует направленность $(D, \preceq, f)$ в X , для которой

$$\mathcal{F} = (X\text{-ass})[D; \preceq; f]. \quad (3.21)$$

Конкретное построение $(D, \preceq, f)$ со свойством (3.21) приведено, например, в [19, § 1.6].

Отметим в заключение раздела ряд свойств более частного характера. Если X — множество и $A \in \mathcal{P}(X)$, то (см. (3.3))

$$\mathfrak{F}_u[A] \subset \mathfrak{F}[A] \subset \beta_0[A] \subset \beta_0[X]. \quad (3.22)$$

Мы используем (3.22) при работе с подпространствами ТП.

4. МНОЖЕСТВА ПРИТЯЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Как и в разделе 1, фиксируем непустое множество E , ТП $(\mathbf{H}, \theta)$ и целевой оператор $\mathbf{h}$ (1.1). Свои построения мы начинаем с простейшей секвенциальной конструкции, полагая, что $\overrightarrow{m, \infty} \triangleq \{i \in \mathcal{N} \mid m \leq i\} \forall m \in \mathcal{N}$. Пусть

$$(\text{Seq})[\mathcal{E}] \triangleq \{(e_i)_{i \in \mathcal{N}} \in E^{\mathcal{N}} \mid \forall U \in \mathcal{E} \exists n \in \mathcal{N}: e_k \in U \forall k \in \overrightarrow{n, \infty}\} \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (4.1)$$

Последовательности — элементы множеств вида (4.1) именуем секвенциальными ПР или, более кратко, СПР. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то полагаем, что

$$(\mathbf{SAS})[\mathcal{E}] \triangleq \{z \in \mathbf{H} \mid \exists (e_i)_{i \in \mathcal{N}} \in (\text{Seq})[\mathcal{E}]: (\mathbf{h}(e_i))_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\theta} z\}. \quad (4.2)$$

Множество (4.2) именуем секвенциальным МП (множество (4.2) — «обычное» МП, реализуемое с использованием СПР; в идейном отношении (4.2) подобно экстремуму в классе СПР, рассматриваемому в [5, гл. III, IV]).

Разумеется, ограничение в (4.1), (4.2) класса ПР только СПР не выглядит в общем случае обоснованным. Опуская пока рассмотрение несеквенциального аналога (4.1), для (4.2) естественно ввести обобщенную версию (см. раздел 1): если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то через $(\mathbf{AS})[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех точек $z \in \mathbf{H}$, для каждой из которых существует такая направленность $(D, \preceq, f)$ в множестве E , что

$$(\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[D; \preceq; f]) \ \& \ ((D, \preceq, \mathbf{h} \circ f) \xrightarrow{\theta} z). \quad (4.3)$$

Определяемое в терминах (4.3) множество $(\mathbf{AS})[\mathcal{E}]$ получено как развитие базовой идеи, заложенной в процедуре построения $(\mathbf{SAS})[\mathcal{E}]$: мы допускаем здесь (в (4.3)) более изощренные варианты реализации элементов притяжения в пространстве оценок $\mathbf{H}$. Свойства (4.3) допускают с учетом (3.14), (3.18), (3.19) и (3.21) весьма очевидный перевод на язык фильтров и у/ф, для этого полезно учесть такое свойство (следующее из (3.14)): если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $z \in \mathbf{H}$, то

$$\mathfrak{F}_0[E \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta(z)]] = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}] \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\}. \quad (4.4)$$

Как следствие мы получаем требуемое представление МП в терминах сходимости фильтров:

$$\begin{aligned} (\mathbf{AS})[\mathcal{E}] &= \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}]: \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\} = \\ &= \{z \in \mathbf{H} \mid \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta(z)]] \neq \emptyset\} \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Возвращаясь к (4.2), сформулируем очевидное утверждение.

Предложение 4.1. $(\mathbf{SAS})[\mathcal{E}] \subset (\mathbf{AS})[\mathcal{E}] \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$.

Доказательство. Фиксируем непустое семейство $\mathcal{E}$ п/м E . Пусть $z \in (\mathbf{SAS})[\mathcal{E}]$, а $(e_i)_{i \in \mathcal{N}} \in (\text{Seq})[\mathcal{E}]$ обладает свойством

$$(\mathbf{h}(e_i))_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\theta} z. \quad (4.6)$$

Пусть для краткости $\mathbf{e} \triangleq (e_i)_{i \in \mathcal{N}}$. Тогда $(\mathcal{N}, \leq, \mathbf{e})$ — направленность в E , для которой (см. (3.18), (4.1))

$$\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[\mathcal{N}; \leq; \mathbf{e}]. \quad (4.7)$$

Учитывая теперь определение сходимости (3.20), (4.3), (4.6) и (4.7), мы получаем сходимость направленности $(\mathcal{N}, \leq, \mathbf{h} \circ \mathbf{e})$ к z в $(\mathbf{H}, \theta)$ и как следствие свойство $z \in (\mathbf{AS})[\mathcal{E}]$. $\square$

Полезно отметить некоторые свойства множеств, определяемых посредством (4.3). Мы для краткости называем эти множества МП, хотя более точным был бы термин «обобщенное МП».

Предложение 4.2. Если $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то справедливо равенство

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \bigcap_{U \in \mathcal{E}} \text{cl}(\mathbf{h}^1(U), \theta). \quad (4.8)$$

Замечание 4.1. Представление (4.8) используется давно (см., например, [21, § 2.5]), его весьма очевидное доказательство, однако, обычно не рассматривалось подробно. Сейчас имеет смысл это сделать в свете логической схемы данной работы, связанной с исследованием МП и ПР.

Доказательство. Для краткости обозначим множество в правой части (4.8) через Ω . Пусть $z \in (\mathbf{AS})[\mathcal{E}]$, а $(D, \preceq, f)$ есть направленность в множестве E , удовлетворяющая условиям (4.3). Фиксируем $U_* \in \mathcal{E}$. Тогда (см. (4.3)) $U_* \in (E\text{-ass})[D; \preceq; f]$, что означает, что $f(d) \in U_*$ с некоторого момента (см. [9, гл. 2]). Но тогда (см. [19, § 1.6]) второе утверждение в (4.3) означает, что $z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(U_*), \theta)$, поскольку $(\mathbf{h} \circ f)(d) \in \mathbf{h}^1(U_*)$ с некоторого момента. Поскольку выбор U_* был произвольным, вложение $(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] \subset \Omega$ установлено.

Пусть $\omega \in \Omega$ (в этой части рассуждения мы фактически следуем [21, § 2.6]). Тогда

$$\mathbf{h}^1(U) \cap S \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{E} \quad \forall S \in N_\theta(\omega).$$

Это означает, в свою очередь, что $U \cap \mathbf{h}^{-1}(S) \neq \emptyset$ при $U \in \mathcal{E}$ и $S \in N_\theta(\omega)$. Рассмотрим непустое множество $\mathcal{E} \times N_\theta(\omega)$, элементами которого являются упорядоченные пары множеств. В этой связи условимся о соглашении: если $z \in \mathcal{E} \times N_\theta(\omega)$, то через $\text{pr}_1(z)$ и $\text{pr}_2(z)$ обозначаем компоненты упорядоченной пары z :

$$\text{pr}_1(z) \in \mathcal{E}, \quad \text{pr}_2(z) \in N_\theta(\omega), \quad z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z)).$$

Тогда корректно определяется отображение

$$z \mapsto \text{pr}_1(z) \cap \mathbf{h}^{-1}(\text{pr}_2(z)): \mathcal{E} \times N_\theta(\omega) \rightarrow \mathcal{P}'(E). \quad (4.9)$$

В (4.9) имеем непустозначное многозначное отображение. С использованием аксиомы выбора (в форме Рассела, см. в этой связи аксиому мультипликативности [14, § IV.5]) выберем произвольный селектор многозначного отображения (4.9): пусть

$$\rho: \mathcal{E} \times N_\theta(\omega) \rightarrow E$$

обладает свойством

$$\rho(z) \in \text{pr}_1(z) \cap \mathbf{h}^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathcal{E} \times N_\theta(\omega).$$

Направление $\sqsubseteq$ в множестве $\mathcal{E} \times N_\theta(\omega)$ введем на основе направленного произведения множеств (см. [9, гл. 2]). Именно, пусть для $u \in \mathcal{E} \times N_\theta(\omega)$ и $v \in \mathcal{E} \times N_\theta(\omega)$ по определению

$$(u \sqsubseteq v) \iff ((\text{pr}_1(v) \subset \text{pr}_1(u)) \& (\text{pr}_2(v) \subset \text{pr}_2(u))). \quad (4.10)$$

Тогда $(\mathcal{E} \times N_\theta(\omega), \sqsubseteq)$ есть непустое направленное множество, а

$$(\mathcal{E} \times N_\theta(\omega), \sqsubseteq, \rho)$$

есть направленность в множестве E . Здесь мы используем (3.1) и стандартные свойства окрестностей (см. раздел 3). Заметим, что для $A \in \mathcal{E}$, $B \in N_\theta(\omega)$ и $z \triangleq (A, B)$ имеют место следующие свойства: $\text{pr}_1(z) = A$, $\text{pr}_2(z) = B$ и $\rho(A, B) = \rho((A, B)) = \rho(z)$ (обычное правило экономии скобок). Теперь уже легко проверяется, что

$$(\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[\mathcal{E} \times N_\theta(\omega); \sqsubseteq; \rho]) \& ((\mathcal{E} \times N_\theta(\omega), \sqsubseteq, \mathbf{h} \circ \rho) \xrightarrow{\theta} \omega). \quad (4.11)$$

Ограничимся подробным доказательством первого положения в (4.11), фиксируя $W \in \mathcal{E}$. Поскольку $\mathbf{H} \in N_\theta^0(\omega)$, то

$$w \triangleq (W, \mathbf{H}) \in \mathcal{E} \times N_\theta(\omega).$$

Пусть $z \in \mathcal{E} \times N_\theta(\omega)$ таково, что $w \sqsubseteq z$, $A_z \triangleq \text{pr}_1(z)$ и $B_z \triangleq \text{pr}_2(z)$. Из (4.10) вытекает, что $A_z \subset W$ и $B_z \subset \mathbf{H}$. Вместе с тем $\rho(z) \in A_z$ по выбору ρ . Следовательно, $\rho(z) \in W$. Импликация

$$(w \sqsubseteq z) \implies (\rho(z) \in W)$$

установлена. Тем самым получено свойство

$$W \in (E\text{-ass})[\mathcal{E} \times N_\theta(\omega); \sqsubseteq; \rho]$$

(см. (3.18)). Поскольку выбор W был произвольным, первое положение в (4.11) установлено. Относительно второго сделаем только ряд кратких замечаний, фиксируя $\Lambda \in N_\theta(\omega)$. Поскольку $\mathcal{E} \neq \emptyset$, то существует $q \in \mathcal{E} \times N_\theta(\omega)$ со свойством $\text{pr}_2(q) = \Lambda$. Для $\nu \in \mathcal{E} \times N_\theta(\omega)$ со свойством $q \sqsubseteq \nu$ имеем $\Gamma \triangleq \text{pr}_2(\nu) \subset \Lambda$ и, по выбору ρ , выполняется $\rho(\nu) \in \mathbf{h}^{-1}(\Gamma)$, т. е. $\mathbf{h}(\rho(\nu)) \in \Gamma$. В итоге

$$(q \sqsubseteq \nu) \implies ((\mathbf{h} \circ \rho)(\nu) \in \Lambda).$$

Как следствие (выбор ν был произвольным)

$$\Lambda \in (\mathbf{H}\text{-ass})[\mathcal{E} \times N_\theta(\omega); \sqsubseteq; \mathbf{h} \circ \rho]$$

(см. (3.18)). Поскольку и Λ выбиралось произвольно, то

$$N_\theta(\omega) \subset (\mathbf{H}\text{-ass})[\mathcal{E} \times N_\theta(\omega); \sqsubseteq; \mathbf{h} \circ \rho].$$

Дальнейшее рассуждение по обоснованию (4.11) сводится к применению (3.13), (3.18) и (3.19). Из (4.11) имеем свойство $\omega \in (\mathbf{AS})[\mathcal{E}]$ (см. (4.3)). Вложение $\Omega \subset (\mathbf{AS})[\mathcal{E}]$ установлено. $\square$

Напомним одно стандартное понятие общей топологии: если (X, τ) — ТП, то говорят, что оно есть ТП с первой аксиомой счетности, если

$$\forall x \in X \exists (S_i)_{i \in \mathcal{N}} \in N_\tau(x)^\mathcal{N} \forall U \in N_\tau(x) \exists j \in \mathcal{N}: S_j \subset U$$

(см. [19, § 1.1]). Кроме того, введем множество $\beta_\mathcal{N}(E)$ всех семейств $\mathcal{B} \in \beta[E]$, таких что

$$\exists (B_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \mathcal{B}^\mathcal{N} \forall \mathbf{B} \in \mathcal{B} \exists j \in \mathcal{N}: B_j \subset \mathbf{B}.$$

Мы ввели в рассмотрение семейства из $\beta[E]$ со счетной базой (см. [22, с. 37]). Напомним одно положение [22, с. 38].

Предложение 4.3. Пусть $(\mathbf{H}, \theta)$ есть ТП с первой аксиомой счетности и $\mathcal{E} \in \beta_\mathcal{N}(E)$. Тогда

$$(\mathbf{SAS})[\mathcal{E}] = (\mathbf{AS})[\mathcal{E}].$$

Доказательство. В силу предложения 4.1 достаточно установить вложение

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] \subset (\mathbf{SAS})[\mathcal{E}]. \quad (4.12)$$

Пусть $z \in (\mathbf{AS})[\mathcal{E}]$. Тогда $z \in \mathbf{H}$ и можно указать такую последовательность $(S_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в $N_\theta(z)$, что

$$\forall \mathbb{S} \in N_\theta(z) \exists j \in \mathcal{N}: S_j \subset \mathbb{S}.$$

Кроме того, как легко видеть,

$$T_k \triangleq \bigcap_{i=1}^k S_i \in N_\theta(z) \quad \forall k \in \mathcal{N}. \quad (4.13)$$

Посредством (4.13) введена «монотонная» последовательность окрестностей z , порождающая локальную счетную базу ТП $(\mathbf{H}, \theta)$ в точке z .

Из предложения 4.2 имеем такое свойство: $z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(U), \theta) \quad \forall U \in \mathcal{E}$. По выбору $\mathcal{E}$ имеем некоторую последовательность $(\tilde{U}_j)_{j \in \mathcal{N}}$ в $\mathcal{E}$, для которой

$$\forall \mathbb{U} \in \mathcal{E} \exists k \in \mathcal{N}: \tilde{U}_k \subset \mathbb{U}. \quad (4.14)$$

Поскольку $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то рассуждением по индукции проверяется, что

$$\forall m \in \mathcal{N} \exists S \in \mathcal{E}: S \subset \bigcap_{i=1}^m \tilde{U}_i.$$

Используя это свойство и аксиому выбора (здесь достаточно счетной версии этой аксиомы), конструируем последовательность $(U_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \mathcal{E}^\mathcal{N}$, для которой

$$U_m \subset \bigcap_{i=1}^m \tilde{U}_i \quad \forall m \in \mathcal{N}.$$

Эта новая последовательность множеств обладает свойствами, подобными (4.14), и вместе с тем

$$\forall k \in \mathcal{N} \quad \forall j \in \overrightarrow{k, \infty} \quad U_j \subset \tilde{U}_k. \quad (4.15)$$

Тогда, в частности, имеем следующее свойство:

$$z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(U_j), \theta) \quad \forall j \in \mathcal{N}. \quad (4.16)$$

Кроме того, отметим, что из (4.14), (4.15) следует, что

$$\bigcap_{k \in \mathcal{N}} \text{cl}(\mathbf{h}^1(U_k), \theta) = \bigcap_{U \in \mathcal{E}} \text{cl}(\mathbf{h}^1(U), \theta). \quad (4.17)$$

Из (4.13), (4.16) и (4.17) вытекает, что справедливо

$$\mathbf{h}^1(U_k) \cap T_k \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathcal{N}.$$

Как следствие мы получаем, что справедливо свойство

$$V_k \triangleq U_k \cap \mathbf{h}^{-1}(T_k) \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathcal{N}.$$

Конечно, $(V_i)_{i \in \mathcal{N}}$ есть последовательность в $\mathcal{P}'(E)$. С использованием аксиомы выбора (здесь достаточно счетной ее версии) получаем, что $\prod_{i \in \mathcal{N}} V_i \neq \emptyset$. Пусть

$$(v_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \prod_{i \in \mathcal{N}} V_i. \quad (4.18)$$

При этом $(v_i)_{i \in \mathcal{N}} \in E^{\mathcal{N}}$. Более того,

$$(v_i)_{i \in \mathcal{N}} \in (\text{Seq})[\mathcal{E}]. \quad (4.19)$$

В самом деле, пусть $U^* \in \mathcal{E}$. Используя (4.14) и (4.15), мы подберем такое $n \in \mathcal{N}$, что

$$U_j \subset U^* \quad \forall j \in \overline{n, \infty}.$$

Как следствие из (4.18) получаем, что $v_j \in U^* \quad \forall j \in \overline{n, \infty}$. Поскольку выбор U^* был произвольным, (4.19) доказано.

Выберем произвольную окрестность $\mathbb{T} \in N_\theta(z)$. С учетом (4.13) имеем, по выбору $(S_i)_{i \in \mathcal{N}}$, для некоторого $r \in \mathcal{N}$ свойство

$$T_k \subset \mathbb{T} \quad \forall k \in \overline{r, \infty}.$$

С другой стороны, из (4.18) имеем тогда

$$\mathbf{h}(v_k) \in \mathbb{T} \quad \forall k \in \overline{r, \infty}.$$

Это означает, что $\mathbb{T} \in (\mathbf{H}\text{-ass})[\mathcal{N}; \leq; (\mathbf{h}(v_i))_{i \in \mathcal{N}}]$ (см. (3.18)). Поскольку выбор $\mathbb{T}$ был произвольным,

$$(\mathbf{h}(v_i))_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\theta} z. \quad (4.20)$$

Из (4.2), (4.19) и (4.20) имеем $z \in (\mathbf{SAS})[\mathcal{E}]$. Вложение (4.12) установлено. $\square$

Заметим, что направленности в E , применяемые в (4.3), обеспечивают естественное обобщение (4.2). В то же время построение с их помощью разумного обобщения (4.1) до множества всех ПР (в том числе и несеквенциальных), формирующих элементы притяжения в ТП $(\mathbf{H}, \theta)$, сопряжено с некоторыми затруднениями теоретико-множественного характера. Дело в том, что «совокупность» всех направленностей в множестве E затруднительно интерпретировать как множество, имея в виду формализм Цермело—Френкеля (если бы это удалось, то согласно (4.3) можно было бы воспользоваться аксиомой выделения для высказывательной функции, см. [14, § II.2]). Использование же понятия «класс всех направленностей в E » (имеется в виду аксиоматика Гёделя—Бернайса—фон Неймана, см. [8]) не представляется естественным уже в связи с целесообразностью сохранения аналогии с множеством (4.1). В то же время соотношения (3.19), (3.21), (4.4) и (4.5) подсказывают подходящий выход: вместо направленностей, которые уже сыграли свою роль в (4.3), следует использовать их дуальные аналоги — фильтры. При $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ вводим множество

$$(\mathfrak{F}\text{-sol})[\mathcal{E}] \triangleq \bigcup_{z \in \mathbf{H}} \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta(z)]] = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}] \mid \exists z \in \mathbf{H}: \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\} \quad (4.21)$$

всех ПР-фильтров, формирующих элементы притяжения в ТП $(\mathbf{H}, \theta)$. Разумеется,

$$\begin{aligned} (\mathbf{AS})[\mathcal{E}] &= \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}]: \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\} = \\ &= \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in (\mathfrak{F}\text{-sol})[\mathcal{E}]: \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Как видно из (4.22), фильтры — элементы множества (4.21) — могут рассматриваться как действия, формирующие МП соответствующей задачи асимптотического анализа. Полезно отметить с учетом положений [4, § I.7], что в случае, когда $(\mathbf{H}, \theta)$ — хаусдорфово ТП, имеет место

$$\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \quad \forall \mathcal{F} \in (\mathfrak{F}\text{-sol})[\mathcal{E}] \quad \exists! z \in \mathbf{H}: \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z.$$

В связи с предложением 4.2 отметим следующее очевидное свойство:

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \{z \in \mathbf{H} \mid U \cap \mathbf{h}^{-1}(V) \neq \emptyset \forall U \in \mathcal{E} \forall V \in N_\theta(z)\} \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \quad (4.23)$$

Общий случай, когда $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, легко сводится к (4.23). В самом деле, при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ семейство

$$\mathcal{E}_f \triangleq \left\{ \bigcap_{U \in \mathcal{K}} U : \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{E}) \right\} \in \beta[E] \quad (4.24)$$

порождает то же самое МП, что и семейство $\mathcal{E}$, именно

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\mathbf{AS})[\mathcal{E}_f]. \quad (4.25)$$

С принципиальной точки зрения (4.24), (4.25) позволяют ограничиться рассмотрением случая $\mathcal{E} \in \beta[E]$. В этой связи отметим, что случай $\mathcal{E} \in \beta[E] \setminus \beta_0[E]$ также не представляет особого интереса, поскольку в данном случае (см. (3.1), (3.2)) $\emptyset \in \mathcal{E}$, а тогда в силу (4.23)

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \emptyset.$$

Таким образом, существенным является лишь случай $\mathcal{E} \in \beta_0[E]$, т. е. случай, когда ограничения асимптотического характера определяются базой некоторого фильтра в E . С учетом определенных раздела 3 (см. (3.17), (4.23)) и предложения 4.2 получаем следующее представление: если $\mathcal{E} \in \beta_0[E]$, то

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\theta\text{-CL})[\mathbf{h}^1[\mathcal{E}]]. \quad (4.26)$$

Итак, в нетривиальном случае МП, определяемое в (4.3), является множеством всех точек прикосновения базы фильтра в $\mathbf{H}$, получающейся, в свою очередь, в виде образа базы фильтра в пространстве решений. В связи с (4.26) отметим равенство (3.16), позволяющее переходить к рассмотрению множества точек прикосновения фильтра в $\mathbf{H}$. Фильтры из множества (4.21) являются действиями, формирующими множество (4.26) посредством использования предельных переходов. Среди фильтров в E , т. е. среди всевозможных ПР, интересно выделить наиболее совершенные ПР, используя уже понятие у/ф. Эти вопросы обсуждаются в следующем разделе.

5. УЛЬТРАФИЛЬТРЫ И КОНСТРУИРОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Обращаясь к (4.21), мы постараемся решить вопрос о достаточности у/ф в множестве E для целей конструирования ПР, формирующих элементы притяжения в $(\mathbf{H}, \theta)$. Мы будем использовать при этом лишь часть множества (4.21). С учетом (3.9) заметим в этой связи, что

$$\forall \mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \quad (\mathfrak{F}_0[E|\mathcal{L}] \neq \emptyset) \iff (\mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{L}] \neq \emptyset). \quad (5.1)$$

Отметим, кроме того, что в силу (4.4)

$$\mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta(z)]] = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\} \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \forall z \in \mathbf{H}. \quad (5.2)$$

Комбинируя (4.5), (5.1) и (5.2), мы получаем еще одно представление МП:

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \{z \in \mathbf{H} \mid \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta(z)]] \neq \emptyset\}. \quad (5.3)$$

С учетом (5.3) мы по аналогии с (4.21) введем при всяком выборе семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ множество

$$(\mathfrak{F}_u\text{-sol})[\mathcal{E}] \triangleq \bigcup_{z \in \mathbf{H}} \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta(z)]] = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] \mid \exists z \in \mathbf{H} : \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\}. \quad (5.4)$$

Элементами множества (5.4) являются у/ф, интерпретируемые как ПР и формирующие всевозможные элементы притяжения в $(\mathbf{H}, \theta)$:

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in (\mathfrak{F}_u\text{-sol})[\mathcal{E}] : \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\} = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] : \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\}. \quad (5.5)$$

Проверка (5.5) сводится к очевидной комбинации (3.9), (4.22) и (5.1)–(5.4). При этом, конечно, для $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ имеем

$$\mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] \subset \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}], \quad (5.6)$$

$$(\mathfrak{F}_u\text{-sol})[\mathcal{E}] \subset (\mathfrak{F}\text{-sol})[\mathcal{E}]. \quad (5.7)$$

В связи с (5.6) напомним (3.6); (5.7) следует из (4.21), (5.4) и (5.6). Для ПР из множества (5.4) сохраняет силу свойство, отмеченное в разделе 4: если $(\mathbf{H}, \theta)$ — хаусдорфово ТП, то

$$\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \forall \mathcal{F} \in (\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[\mathcal{E}] \exists ! z \in \mathbf{H}: \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z. \quad (5.8)$$

Из (5.5), (5.7) и (5.8) следует, что (5.4) может рассматриваться как достаточное, для исчерпывающей реализации МП, множество ПР. Как будет видно из дальнейшего рассмотрения, при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ множество (5.4) отождествимо с $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$ в целом ряде интересных для практики случаев (напомним, что $\mathcal{E}$ — семейство, определяющее ограничения асимптотического характера). Следует, однако, напомнить, что «построение» конкретных у/ф в множестве E реализуется, как правило, лишь с использованием аксиомы выбора. Исключение составляют так называемые тривиальные у/ф: если $x \in E$, то

$$\mathcal{F}_x^{\natural} \triangleq \{F \in \mathcal{P}(E) \mid x \in F\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \quad (5.9)$$

В связи с (5.9) введем оператор погружения

$$x \mapsto \mathcal{F}_x^{\natural}: E \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \quad (5.10)$$

обозначаемый далее через $\mathbf{m}$. Итак,

$$\mathbf{m}: E \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$$

определяется правилом $\mathbf{m}(x) \triangleq \mathcal{F}_x^{\natural} \forall x \in E$. Вполне очевидно следующее утверждение.

Предложение 5.1. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\mathbf{m}^{-1}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) = \bigcap_{U \in \mathcal{E}} U$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $x_* \in \mathbf{m}^{-1}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}])$. Тогда $x_* \in E$ и

$$\mathcal{F}_{x_*}^{\natural} = \mathbf{m}(x_*) \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}],$$

т. е. $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_{x_*}^{\natural}$. Из (5.9) имеем такое свойство: x_* есть элемент пересечения всех множеств из $\mathcal{E}$. Установлено вложение

$$\mathbf{m}^{-1}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) \subset \bigcap_{U \in \mathcal{E}} U. \quad (5.11)$$

Пусть $x^* \in \bigcap_{U \in \mathcal{E}} U$. Тогда $x^* \in E$ и в силу (5.9)

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_{x^*}^{\natural},$$

что означает справедливость свойства $\mathbf{m}(x^*) \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$ (см. раздел 3). Поэтому

$$x^* \in \mathbf{m}^{-1}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]).$$

Вложение, противоположное (5.11), установлено. $\square$

Из предложения 5.1 следует, что тривиальные у/ф вида (5.9) непригодны для построения элементов притяжения в ТП $(\mathbf{H}, \theta)$, отличных от «обычных» оценок.

При построении МП существенную роль играет обычно этап, именуемый расширением задачи и сводящийся, по сути дела, к построению обобщенной задачи со стандартными (и невозмущаемыми) ограничениями. Пространство решений E при этой процедуре обычно погружается в компактное ТП в виде всюду плотного множества (расширения, не сводящиеся к компактификациям, см., например, в [16, 17, 22, 24]). В этой связи имеет смысл выделить круг задач, для которых такая процедура (именуемая далее компактификацией по аналогии с компактификациями в общей топологии, см. [9, 19] и др.) возможна. Итак, мы стремимся обозначить круг «компактифицируемых» задач.

Определение 5.1. Компактификатором называем всякий кортеж $(\mathbf{K}, \tau, p, q)$, для которого $(\mathbf{K}, \tau)$ есть компактное ТП, $p \in \mathbf{K}^E$, $q \in C(\mathbf{K}, \tau, \mathbf{H}, \theta)$ и $\mathbf{h} = q \circ p$.

Напомним известное (см. [16, 17, 21, 22] и др.) свойство.

Предложение 5.2. Если $\mathcal{E} \in \beta[E]$, $(\mathbf{K}, \tau, p, q)$ — компактификатор и $(\mathbf{H}, \theta)$ — хаусдорфово ТП, то

$$\mathbf{K}_{\mathcal{E}} \triangleq \bigcap_{U \in \mathcal{E}} \text{cl}(p^1(U), \tau) \in (\tau\text{-comp})[\mathbf{K}] \quad (5.12)$$

$$\text{и } (\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = q^1(\mathbf{K}_{\mathcal{E}}) \in (\theta\text{-comp})[\mathbf{H}].$$

Весьма очевидное доказательство см., например, в [22, § 5.2]. Элементы множества (5.12) играют роль допустимых ОЭ.

Определение 5.2. Кортеж $(E, \mathbf{H}, \theta, \mathbf{h})$ называем компактифицируемым, если некоторый компактификатор существует.

Компактифицируемость триплета $(E, \mathbf{H}, \theta, \mathbf{h})$ является весьма важным свойством и с точки зрения реализации МП в терминах п/м $\mathbf{H}$, характеризующих наши возможности в части достижимости тех или иных оценок (элементов $\mathbf{H}$) при конкретном выборе множеств из семейства $\mathcal{E} \in \beta[E]$. Отметим следующий известный факт: если $(E, \mathbf{H}, \theta, \mathbf{h})$ — компактифицируемый триплет, а $(\mathbf{H}, \theta)$ — хаусдорфово ТП, то

$$\forall \mathcal{E} \in \beta[E] \quad \forall \Omega \in \mathbb{N}_{\theta}[(\mathbf{AS})[\mathcal{E}]] \quad \exists P \in \mathcal{E} \quad \forall Q \in \mathcal{E} \quad (Q \subset P) \implies (\Omega \in \mathbb{N}_{\theta}[\text{cl}(\mathbf{h}^1(Q), \theta)]). \quad (5.13)$$

Содержательный смысл (5.13) состоит в следующем: при упомянутых условиях на кортеж $(E, \mathbf{H}, \theta, \mathbf{h})$ для каждого семейства $\mathcal{E} \in \beta[E]$ и любой окрестности $G \in \mathbb{N}_{\theta}^0[(\mathbf{AS})[\mathcal{E}]]$ найдется такое множество $P \in \mathcal{E}$, что

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(P), \theta) \subset G. \quad (5.14)$$

Свойство (5.14) является упрощенной версией (5.13), оно легко извлекается из предложения 4.2 и (5.13) и говорит о том, что МП «почти совпадает» с $\text{cl}(\mathbf{h}^1(P), \theta)$. Заметим, что в общем случае МП может не обладать упомянутым свойством «окрестностной» реализации (см. [25, § 3.6]).

Предложение 5.3. Эквивалентны следующие два условия:

- 1) кортеж $(E, \mathbf{H}, \theta, \mathbf{h})$ компактифицируем;
- 2) множество $\mathbf{h}^1(E)$ предкомпактно, т. е. $\mathbf{h}^1(E) \in (\theta\text{-comp})^0[\mathbf{H}]$.

Весьма очевидное доказательство предложения опустим, отметим только, что связь упомянутых в предложении 5.3 условий 1), 2) была отмечена Е. Г. Пыткеевым в устной беседе.

Итак, для наиболее распространенного случая хаусдорфова ТП $(\mathbf{H}, \theta)$ предкомпактность множества $\mathbf{h}^1(E)$ гарантирует справедливость (5.13), (5.14). Отметим еще одно полезное следствие данного свойства предкомпактности, обращаясь к вопросу о реализации оценок в виде пределов у/ф.

Пусть

$$(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}] \triangleq \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\} \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E].$$

Точки $(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}]$ и только они соответствуют оценкам в $\mathbf{H}$, реализуемым на значениях $\mathbf{h}$ при использовании у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ в качестве некой обобщенной асимптотики обычных решений.

Предложение 5.4. Если $\mathbf{h}^1(E) \in (\theta\text{-comp})^0[\mathbf{H}]$ и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то

$$(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}] \in \mathcal{P}'(\text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta)).$$

Если к тому же $(\mathbf{H}, \theta)$ — хаусдорфово ТП, то

$$\exists! z \in \mathbf{H}: (\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}] = \{z\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{h}^1(E)$ — предкомпактное множество: $\mathbf{h}^1(E) \in (\theta\text{-comp})^0[\mathbf{H}]$. Фиксируем (см. (2.4)) такое $K \in (\theta\text{-comp})[\mathbf{H}]$, что $\mathbf{h}^1(E) \subset K$. Тогда

$$\mathbf{h}: E \rightarrow K. \quad (5.15)$$

Пусть $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Тогда с учетом (3.5), (3.11) и (5.15) имеем

$$\mathcal{K} \triangleq (K\text{-fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[K]. \quad (5.16)$$

Из (3.15), (5.16) получаем для некоторого $y \in K$ сходимость $\mathcal{K} \xrightarrow{\theta} y$, т. е.

$$N_{\theta}(y) \subset (\mathbf{H}\text{-fi})[\mathcal{K}]. \quad (5.17)$$

В (5.17) мы используем (3.22) и (5.16). Учитывая, что $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$, введем у/ф

$$\mathcal{H} \triangleq (\mathbf{H}\text{-fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{H}] \quad (5.18)$$

(мы снова учли (3.5), (3.11)). При этом в силу (3.22), (5.16) $\mathcal{K} \in \beta_0[\mathbf{H}]$; $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, поскольку $K \subset \mathbf{H}$ (см. также (3.4), (5.16), (5.18)). В итоге $(\mathbf{H}\text{-fi})[\mathcal{K}] \subset \mathcal{H}$, и согласно (5.17) $N_{\theta}(y) \subset \mathcal{H}$. Последнее означает сходимость

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} y,$$

поэтому $y \in (\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}]$. Свойство

$$(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}] \neq \emptyset$$

установлено. Имеем, однако, наряду с (5.15) свойство

$$\mathbf{h}: E \rightarrow \mathbf{h}^1(E).$$

Оно означает, что $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \in \beta_0[\mathbf{h}^1(E)]$ (см. (3.3), (3.10)). В частности,

$$B \subset \mathbf{h}^1(E) \quad \forall B \in \mathbf{h}^1[\mathcal{F}]$$

(см. (3.2)). Пусть $z \in (\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}]$. Тогда

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z.$$

Поэтому (см. (3.12)) в терминах (5.18) имеет место $N_{\theta}(z) \subset \mathcal{H}$. Поскольку $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \subset \mathcal{H}$ (см. (5.18)), то (см. (3.3)) при всяком выборе $B_1 \in N_{\theta}(z)$ и $B_2 \in \mathbf{h}^1[\mathcal{F}]$ имеем $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Тем более

$$\mathbf{h}^1(E) \cap S \neq \emptyset \quad \forall S \in N_{\theta}(z).$$

Это означает, что $z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta)$. Поскольку выбор z был произвольным, установлено вложение

$$(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}] \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta).$$

Тем самым завершено доказательство свойства, что $(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}]$ есть непустое п/м множества $\text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta)$. При наложении дополнительного условия отделимости ТП $(\mathbf{H}, \theta)$ упомянутое п/м $\text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta)$ одноэлементно, что легко следует из хорошо известных положений общей топологии [4, гл. I] (см. в этой связи аналогичное замечание в разделе 4). $\square$

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее условие.

Условие 5.1. $(\mathbf{H}, \theta)$ — хаусдорфово ТП и, кроме того, $\mathbf{h}^1(E) \in (\theta\text{-comp})^0[\mathbf{H}]$.

Итак (см. предложение 5.4), имеем следующее свойство: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то

$$\exists! z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta): (\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}] = \{z\}.$$

С учетом этого свойства введем оператор

$$\mathfrak{H}: \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \rightarrow \text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta) \quad (5.19)$$

по следующему правилу: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то $(\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}] = \{\mathfrak{H}(\mathcal{F})\}$. Это означает, что

$$\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \quad \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} \mathfrak{H}(\mathcal{F}). \quad (5.20)$$

Отметим, что из (5.19), в частности, следует, что

$$\mathfrak{H}: \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \rightarrow \mathbf{H}. \quad (5.21)$$

В (5.20), (5.21) имеем способ поставить в соответствие каждому у/ф предел значений $\mathbf{h}$ «вдоль» данного конкретного у/ф. Этот предел определяется в исходном ТП $(\mathbf{H}, \theta)$, т. е. в пространстве оценок.

Предложение 5.5. Справедливо равенство $\mathbf{h} = \mathfrak{H} \circ \mathbf{m}$.

Доказательство. Пусть $x \in E$. Тогда $\mathbf{m}(x) = \mathcal{F}_x^{\mathbf{h}}$ (см. (5.10)), а потому (см. (5.9))

$$\mathbf{h}(x) \in \mathbf{h}^1(F) \quad \forall F \in \mathbf{m}(x).$$

С другой стороны, имеем сходимост (5.20). Если точки $\mathbf{h}(x)$ и $\mathfrak{H}(\mathcal{F}_x^{\mathbf{h}}) = (\mathfrak{H} \circ \mathbf{m})(x)$ различны, то, используя отделимость ТП $(\mathbf{H}, \theta)$, мы легко приходим к противоречию с аксиомами фильтра (см. (3.3)). В самом деле, $\{x\} \in \mathbf{m}(x)$. Множество

$$\{\mathbf{h}(x)\} = \mathbf{h}^1(\{x\}) \in \mathbf{h}^1[\mathbf{m}(x)]$$

должно иметь (см. (5.20)) непустое пересечение с каждым множеством из $N_\theta((\mathfrak{H} \circ \mathbf{m})(x))$. Получаемое на этой основе противоречие означает совпадение $\mathbf{h}(x)$ и $(\mathfrak{H} \circ \mathbf{m})(x)$. Поскольку выбор x был произвольным, предложение доказано. $\square$

6. ОБОБЩЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

В настоящем разделе будет построен стоун-чеховский компактификатор и установлен факт отождествимости ОЭ и ПР при таком способе расширения исходной задачи. Для этого будет рассмотрена одна весьма традиционная версия компактификации Стоуна—Чеха, т. е. вариант βE (см. [19, § 3.6]). Вместе с тем сам язык, на котором будут излагаться основные конструкции, не является, по-видимому, традиционным для построений, используемых в общей топологии (см., например, [19, § 3.6]). В связи с последующим изложением отметим построения в [18, заключение главы 1].

Прежде всего нам потребуется некоторое обобщение схемы, использовавшейся в (5.19), (5.21). Если $A \in \mathcal{P}'(E)$, то полагаем

$$\mathbb{F}_c^0[A] \triangleq \{f \in \mathbf{H}^A \mid f^1(A) \in (\theta\text{-comp})^0[\mathbf{H}]\}. \quad (6.1)$$

Элементами множества (6.1) являются функции, подобные $\mathbf{h}$ (см. условие 5.1, полагаемое, как уже отмечалось, выполненным). По аналогии со свойством отображения $\mathbf{h}$, упоминаемым в разделе 5, имеем при $A \in \mathcal{P}'(E)$, $f \in \mathbb{F}_c^0[A]$ и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[A]$, что

$$\exists! z \in \mathbf{H}: f^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z. \quad (6.2)$$

В силу (6.2) корректно следующее определение. Если $A \in \mathcal{P}'(E)$ и $f \in \mathbb{F}_c^0[A]$, то оператор

$$\mathfrak{H}_A^0[f]: \mathfrak{F}_u[A] \rightarrow \mathbf{H} \quad (6.3)$$

определяется следующим естественным правилом:

$$f^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} \mathfrak{H}_A^0[f](\mathcal{F}) \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[A]. \quad (6.4)$$

Из (6.1) имеем $\mathbf{h} \in \mathbb{F}_c^0[E]$. Следовательно, мы можем рассматривать оператор $\mathfrak{H}_E^0[\mathbf{h}]$ из $\mathfrak{F}_u[E]$ в $\mathbf{H}$. Легко видеть, что

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_E^0[\mathbf{h}].$$

Итак, наша новая конструкция на основе (6.2), (6.3) действительно является естественным обобщением подхода, связанного с оператором $\mathfrak{H}$ (5.21). По свойствам $\mathbf{h}$ имеем, что

$$(\mathbf{h}|A) \in \mathbb{F}_c^0[A] \quad \forall A \in \mathcal{P}'(E). \quad (6.5)$$

Поэтому мы можем рассматривать действие оператора (6.3), соответствующее сужению отображения $\mathbf{h}$: если $A \in \mathcal{P}'(E)$ и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[A]$, то $\mathfrak{H}_A^0[(\mathbf{h}|A)](\mathcal{F}) \in \mathbf{H}$. Это свойство позволяет применять «расширения» сужений $\mathbf{h}$ к у/ф, определенным в соответствующих непустых п/м E .

В этой связи отметим следующее важное свойство: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$, то справедливо равенство

$$\{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \cap F \neq \emptyset \quad \forall F \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}. \quad (6.6)$$

В силу (6.6) каждый у/ф содержит все п/м E , обладающие каждое непустыми пересечениями со всеми множествами данного у/ф. При этом

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}'(E) \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]. \quad (6.7)$$

Мы можем использовать (6.5) и (6.7) в непосредственной комбинации. Легко заметить такое свойство: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$ и $A \in \mathcal{F}$, то

$$\mathcal{F}|_A = \{F \in \mathcal{F} \mid F \subset A\} \in \mathfrak{F}[A]. \quad (6.8)$$

Кроме того, истинна импликация

$$(\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]) \implies (\mathcal{F}|_A \in \mathfrak{F}_u[A]) \quad (6.9)$$

(в связи с (6.9) см. [4, гл. I, § 6, п. 5]). В силу (6.9) мы можем при $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$ и $A \in \mathcal{F}$ рассматривать элемент

$$\mathfrak{H}_A^0[(\mathbf{h}|A)](\mathcal{F}|_A) \in \mathbf{H}.$$

Легко видеть, что имеет место

$$\mathfrak{H}_A^0[(\mathbf{h}|A)](\mathcal{F}|_A) \in \text{cl}((\mathbf{h}|A)^1(A), \theta).$$

Последнее свойство «повторяет» (5.19) (здесь мы учитываем (6.5)), соответствующее обоснование подобно рассуждениям при доказательстве предложения 5.4. С другой стороны, $(\mathbf{h}|A)^1(A) = \mathbf{h}^1(A)$ при $A \in \mathcal{P}(E)$. Следовательно, имеет место такое свойство: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$ и $A \in \mathcal{F}$, то

$$\mathfrak{H}_A^0[(\mathbf{h}|A)](\mathcal{F}|_A) \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(A), \theta). \quad (6.10)$$

В этих условиях имеем (см. (3.22)) также равенство

$$(\mathbf{h}|A)^1[\mathcal{F}|_A] = \mathbf{h}^1[\mathcal{F}|_A] \in \beta_0[\mathbf{H}]. \quad (6.11)$$

Предложение 6.1. Пусть $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$ и $A \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\mathfrak{H}(\mathcal{F}) = \mathfrak{H}_A^0[(\mathbf{h}|A)](\mathcal{F}|_A).$$

Доказательство. Используя (5.20) и определение оператора (5.19), получаем

$$(\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} \mathfrak{H}(\mathcal{F})) \ \& \ (\forall z \in \mathbf{H} ((\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z) \implies (z = \mathfrak{H}(\mathcal{F}))). \quad (6.12)$$

Пусть $v \triangleq \mathfrak{H}_A^0[(\mathbf{h}|A)](\mathcal{F}|_A)$. Из (6.4), (6.5), (6.9), (6.11) вытекает сходимость

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}|_A] \xrightarrow{\theta} v.$$

Это означает, что (см. (3.12)) справедливо

$$N_\theta(v) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}|_A]]. \quad (6.13)$$

Напомним, что (см. (6.8)) $\mathcal{F}|_A \subset \mathcal{F}$ и, как следствие,

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}|_A] \subset \mathbf{h}^1[\mathcal{F}].$$

Это означает (см. (3.4), (6.11)) справедливость вложения

$$(\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}|_A]] \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]]. \quad (6.14)$$

Из (6.13), (6.14) получаем вложение

$$N_\theta(v) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]].$$

Поэтому $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} v$, и в силу (6.12) имеет место равенство $v = \mathfrak{H}(\mathcal{F})$. С учетом определения v получаем требуемое утверждение. $\square$

Следствие 6.1. Пусть $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$, $f_1 \in \mathbb{F}_c^0[E]$ и $f_2 \in \mathbb{F}_c^0[E]$. Тогда

$$(\exists A \in \mathcal{F}: (f_1|_A) = (f_2|_A)) \implies (\mathfrak{H}_E^0[f_1](\mathcal{F}) = \mathfrak{H}_E^0[f_2](\mathcal{F})). \quad (6.15)$$

Доказательство практически полностью повторяет обоснование предложения 6.1. Отметим, что следствие 6.1 подобно в логическом отношении свойству, отмеченному в [18, заключение главы 1].

Замечание 6.1. Условие посылки импликации (6.15) связано с естественным отношением эквивалентности на множестве $\mathbb{F}_c^0[E]$, определяемым при фиксации у/ф в множестве E . Именно, если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$, то на $\mathbb{F}_c^0[E]$ определяется бинарное отношение $\sim = \sim_{\mathcal{F}}$ посредством правила

$$(f \sim g) \iff (\exists A \in \mathcal{F}: (f|A) = (g|A)) \quad \forall f \in \mathbb{F}_c^0[E] \quad \forall g \in \mathbb{F}_c^0[E]. \quad (6.16)$$

Тогда $\sim$ есть отношение эквивалентности на $\mathbb{F}_c^0[E]$ со следующим свойством (см. следствие 6.1): для $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$ и $\sim = \sim_{\mathcal{F}}$ (см. (6.16)) имеем

$$\forall f_1 \in \mathbb{F}_c^0[E] \quad \forall f_2 \in \mathbb{F}_c^0[E] \quad (f_1 \sim f_2) \implies (\mathfrak{H}_E^0[f_1](\mathcal{F}) = \mathfrak{H}_E^0[f_2](\mathcal{F})).$$

Из (6.10) и предложения 6.1 вытекает следующее свойство: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$ и $A \in \mathcal{F}$, то

$$\mathfrak{H}(\mathcal{F}) \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(A), \theta). \quad (6.17)$$

Более того, имеет место следующая теорема (см. в этой связи также [2, 3]).

Теорема 6.1. Если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$, то справедливо равенство

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} \text{cl}(\mathbf{h}^1(A), \theta) = \{\mathfrak{H}(\mathcal{F})\}.$$

Доказательство. Выберем произвольный у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$. Тогда $\mathfrak{H}(\mathcal{F}) \in \mathbf{H}$ (см. (5.2)). Более того, из (6.17) мы получаем, что $\mathfrak{H}(\mathcal{F}) \in \Omega$, где

$$\Omega \triangleq \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \text{cl}(\mathbf{h}^1(A), \theta).$$

Таким образом, для доказательства достаточно установить, что $\Omega \subset \{\mathfrak{H}(\mathcal{F})\}$. В этой связи напомним (5.20) и тот факт, что

$$\forall y \in \mathbf{H} \quad (\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} y) \implies (y = \mathfrak{H}(\mathcal{F})). \quad (6.18)$$

Воспользуемся свойством, аналогичным (6.6), для у/ф $\mathcal{H} \triangleq (\mathbf{H}\text{-fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]] \in \mathfrak{F}_u[\mathbf{H}]$ (см. (3.11)). Именно,

$$\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{H}) \mid A \cap S \neq \emptyset \quad \forall S \in \mathcal{H}\}. \quad (6.19)$$

Пусть $q \in \Omega$. По свойствам оператора замыкания (в ТП $(\mathbf{H}, \theta)$) имеем для $q \in \mathbf{H}$ свойство

$$W \cap \mathbf{h}^1(A) \neq \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \forall W \in N_{\theta}(q).$$

Фиксируем $\Lambda \in N_{\theta}(q)$. Тогда $\Lambda \cap \mathbf{h}^1(A) \neq \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{F}$. С учетом (3.4) и определения $\mathcal{H}$ получаем для $\Lambda \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$ свойство

$$\Lambda \cap S \neq \emptyset \quad \forall S \in \mathcal{H}.$$

Последнее означает в силу (6.19) справедливость включения $\Lambda \in \mathcal{H}$. Итак, установлено вложение $N_{\theta}(q) \subset \mathcal{H}$, которое означает сходимость

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} q.$$

С учетом (6.18) получаем равенство $q = \mathfrak{H}(\mathcal{F})$. Поскольку выбор q был произвольным, требуемое вложение $\Omega \subset \{\mathfrak{H}(\mathcal{F})\}$ установлено. $\square$

В связи с теоремой 6.1 отметим известное (см., например, [4, 26]) свойство у/ф: если X — множество и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[X]$, то

$$\left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset \right) \vee \left(\exists ! x \in X: \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \{x\} \right).$$

Из этого свойства при упомянутых условиях на выбор X и $\mathcal{F}$ следует, что

$$\left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset \right) \vee (\exists ! x \in X: \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(X) \mid x \in F\}).$$

7. Компактификация Стоуна—Чеха и структура обобщенной задачи о достижимости

В этом разделе рассматривается одна весьма общая схема построения компактификатора, имеющая естественный аналог в топологии. Речь идет о применении компактификации Стоуна—Чеха [9, 19, 26] для целей представления МП и множества ПР, реализующих это МП. В целях полноты изложения напомним основные элементы данной конструкции (см., например, [2, п. 6.2]) в конкретизации, естественной для рассматриваемой здесь задачи асимптотического анализа. Затем при использовании стоун-чеховского компакта (в рассматриваемом случае можно говорить и о волмэновской компактификации, см. [2, п. 6.4]) будет установлено, что ПР и ОЭ в упомянутой задаче отождествимы. Введем в рассмотрение оператор

$$\varphi: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \quad (7.1)$$

посредством условия

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad \varphi(A) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid A \in \mathcal{F}\}. \quad (7.2)$$

Будем обозначать через $\mathbf{E}$ образ множества $\mathcal{P}(E)$ при действии оператора φ (7.1), (7.2):

$$\mathbf{E} \triangleq \varphi^1(\mathcal{P}(E)) = \{\varphi(A) : A \in \mathcal{P}(E)\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E])). \quad (7.3)$$

Отметим некоторые простые свойства оператора φ . Из (3.3) и (7.2) имеем

$$\varphi(\emptyset) = \emptyset. \quad (7.4)$$

Кроме того, из (3.3) и (7.2) легко следует, что

$$\varphi(A_1 \cap A_2) = \varphi(A_1) \cap \varphi(A_2) \quad \forall A_1 \in \mathcal{P}(E) \quad \forall A_2 \in \mathcal{P}(E). \quad (7.5)$$

Полезно напомнить известное [4, гл. I] представление множества всех у/ф в E :

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E] \mid (A \in \mathcal{F}) \vee (E \setminus A \in \mathcal{F}) \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)\}. \quad (7.6)$$

Из (7.6) вытекает следующее положение:

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad \varphi(E \setminus A) = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid A \notin \mathcal{F}\} = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \setminus \varphi(A). \quad (7.7)$$

С использованием формул двойственности получаем теперь, что

$$\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2) \quad \forall A_1 \in \mathcal{P}(E) \quad \forall A_2 \in \mathcal{P}(E). \quad (7.8)$$

Легко видеть, что φ есть биекция $\mathcal{P}(E)$ на $\mathbf{E}$. В самом деле, допустим, что $A_1 \in \mathcal{P}(E)$ и $A_2 \in \mathcal{P}(E)$ таковы, что $\varphi(A_1) = \varphi(A_2)$. Тогда $A_1 = A_2$. Действительно, допустим противное. Тогда

$$(A_1 \setminus A_2 \neq \emptyset) \vee (A_2 \setminus A_1 \neq \emptyset). \quad (7.9)$$

Допустим, что $A_1 \setminus A_2 \neq \emptyset$. Пусть $y \in A_1 \setminus A_2$. Тогда (см. (5.9)) $A_1 \in \mathcal{F}_y^{\mathbf{h}}$ и $A_2 \notin \mathcal{F}_y^{\mathbf{h}}$. В силу (7.2) имеем теперь

$$\mathcal{F}_y^{\mathbf{h}} \in \varphi(A_1) \setminus \varphi(A_2),$$

что невозможно. Если же $A_2 \setminus A_1 \neq \emptyset$, то, выбирая $z \in A_2 \setminus A_1$, мы получаем (см. (5.9)) $A_2 \in \mathcal{F}_z^{\mathbf{h}}$ и $A_1 \notin \mathcal{F}_z^{\mathbf{h}}$. В итоге из (7.2) имеем

$$\mathcal{F}_z^{\mathbf{h}} \in \varphi(A_2) \setminus \varphi(A_1),$$

что также означает противоречие с предположением. Итак, (7.9) невозможно, и следовательно, $A_1 = A_2$. Таким образом,

$$(\varphi(A_1) = \varphi(A_2)) \implies (A_1 = A_2).$$

Поскольку выбор A_1, A_2 был произвольным, биективность отображения

$$\varphi: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{E} \quad (7.10)$$

установлена: φ (см. (7.10)) есть взаимно-однозначное отображение $\mathcal{P}(E)$ на $\mathbf{E}$. Через

$$\psi: \mathbf{E} \rightarrow \mathcal{P}(E) \quad (7.11)$$

условимся обозначать биекцию из $\mathbf{E}$ на $\mathcal{P}(E)$, обратную к φ (7.10): $\psi \triangleq \varphi^{-1}$. При этом, конечно,

$$((\psi \circ \varphi)(H) = H \quad \forall H \in \mathcal{P}(E)) \ \& \ ((\varphi \circ \psi)(S) = S \quad \forall S \in \mathbf{E}). \quad (7.12)$$

Для отображения ψ мы имеем свойства, подобные (7.4)—(7.8), что легко устанавливается посредством (7.12). Так, например, в силу (7.4), (7.12)

$$\psi(\emptyset) = \psi(\varphi(\emptyset)) = \emptyset. \quad (7.13)$$

Далее, для $B_1 \in \mathbf{E}$ и $B_2 \in \mathbf{E}$ имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \psi(B_1 \cap B_2) &= \psi((\varphi \circ \psi)(B_1) \cap (\varphi \circ \psi)(B_2)) = \psi(\varphi(\psi(B_1)) \cap \varphi(\psi(B_2))) = \\ &= \psi(\varphi(\psi(B_1) \cap \psi(B_2))) = (\psi \circ \varphi)(\psi(B_1) \cap \psi(B_2)) = \psi(B_1) \cap \psi(B_2) \end{aligned} \quad (7.14)$$

(здесь мы учли (7.5) и (7.12)). Из (7.8) и (7.12) имеем с помощью рассуждения, подобного (7.14), равенство

$$\psi(B_1 \cup B_2) = \psi(B_1) \cup \psi(B_2). \quad (7.15)$$

Наконец, из (7.7) и (7.12) получаем свойство

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathbf{E} \quad \psi(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \setminus B) &= \psi(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \setminus \varphi(\psi(B))) = \psi(\varphi(E \setminus \psi(B))) = \\ &= (\psi \circ \varphi)(E \setminus \psi(B)) = E \setminus \psi(B). \end{aligned} \quad (7.16)$$

С учетом (7.3)—(7.8) легко проверяется, что $\mathbf{E}$ — алгебра п/м $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. При этом

$$\varphi(\{x\}) = \{\mathcal{F}_x^{\dagger}\} \quad \forall x \in E. \quad (7.17)$$

Проверка (7.17) очевидна и использует (3.6) и (5.9). Здесь же отметим, что $\mathbf{E}$ — база некоторой топологии множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ (см. [19, § 1.1]):

- 1) объединение всех множеств из $\mathbf{E}$ совпадает с $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$;
- 2) $\forall B_1 \in \mathbf{E} \quad \forall B_2 \in \mathbf{E} \quad \forall \mathcal{F} \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B_3 \in \mathbf{E} : (\mathcal{F} \in B_3) \ \& \ (B_3 \subset B_1 \cap B_2)$.

Мы использовали тот факт, что $\mathbf{E}$ — алгебра множеств. Соответствующая топология непустого множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, порожденная базой $\mathbf{E}$, имеет следующий вид:

$$\tau_{\mathfrak{F}} \triangleq \{G \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \mid \forall \mathcal{G} \in G \quad \exists B \in \mathbf{E} : (\mathcal{G} \in B) \ \& \ (B \subset G)\}. \quad (7.18)$$

В терминах (7.18) определяем ТП

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{F}}). \quad (7.19)$$

В этой связи интересны построения в [19, § 3.6], связанные с компактификацией Стоуна—Чеха и расширением Волмэна, а также краткое обсуждение в [15, гл. I]; кроме того, см. [26, с. 808—819]. Отметим оригинальные конструкции П. С. Александрова, излагаемые в [1, разделы 20 и 25]. Кроме того, см. конструкции с применением у/ф в [2, 3]. Подчеркнем, что ТП (7.19) есть нульмерный компакт, т. е. нульмерное [19, § 6.2] компактное хаусдорфово ТП.

Замечание 7.1. В целях полноты изложения мы воспроизводим схему рассуждения по обоснованию вышеупомянутых свойств ТП (7.19).

Пусть $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и $\mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \setminus \{\mathcal{F}_1\}$. Тогда

$$(\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2 \neq \emptyset) \vee (\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_1 \neq \emptyset). \quad (7.20)$$

Допустим, что $\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$. Пусть $A \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$. Тогда по свойствам у/ф [4, гл. I] имеем, что $E \setminus A \in \mathcal{F}_2$. Следовательно (см. (7.3), (7.18)),

$$\varphi(A) \in N_{\tau_{\mathfrak{F}}}(\mathcal{F}_1), \quad \varphi(E \setminus A) \in N_{\tau_{\mathfrak{F}}}(\mathcal{F}_2).$$

При этом (см. (7.2)) $\varphi(A) \cap \varphi(E \setminus A) = \emptyset$, так как для $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$ свойство

$$(A \in \mathcal{F}) \ \& \ (E \setminus A \in \mathcal{F})$$

не может иметь места (см. (3.3)). Поскольку выбор $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ был произвольным, то (7.19) — хаусдорфово ТП.

В части доказательства компактности ТП (7.19) ограничимся следующим рассуждением, использующим то, что $\mathbf{E}$ — база топологии (7.18). Пусть $\kappa \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})$ и $\mathcal{X} \triangleq \psi^1[\kappa]$. Полагаем, что

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \bigcup_{\mathbb{L} \in \kappa} \mathbb{L}. \quad (7.21)$$

Придерживаемся такого соглашения: если $n \in \mathcal{N}$ и $\mathcal{S}$ — множество (в частности, семейство), то $\mathcal{S}^n$ используем вместо $\mathcal{S}^{\overline{1,n}}$, где $\overline{1,n} \triangleq \{i \in \mathcal{N} \mid i \leq n\}$. Тогда (при условии (7.21))

$$\exists n \in \mathcal{N} \exists (\mathbb{L}_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \kappa^n : \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{L}_i. \quad (7.22)$$

В самом деле, допустим противное:

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \neq \bigcup_{i=1}^n \mathbb{L}_i \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad \forall (\mathbb{L}_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \kappa^n. \quad (7.23)$$

Из (7.23) сразу следует, что справедливо

$$\bigcap_{i=1}^n (\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \setminus \mathbb{L}_i) \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad \forall (\mathbb{L}_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \kappa^n. \quad (7.24)$$

Поскольку $\mathbf{E}$ — алгебра множеств, имеем свойство

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \setminus \mathbb{L} \in \mathbf{E} \quad \forall \mathbb{L} \in \kappa.$$

Тогда

$$\mathcal{Y} \triangleq \{\psi(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \setminus \mathbb{L}) : \mathbb{L} \in \kappa\} = \{E \setminus X : X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (7.25)$$

По определению $\mathcal{X}$ имеем (см. (7.12)) равенство

$$\bigcup_{\mathbb{L} \in \kappa} \mathbb{L} = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \varphi(X). \quad (7.26)$$

Из (7.21) и (7.26) мы получаем равенство

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \varphi(X). \quad (7.27)$$

С другой стороны, из (7.13), (7.14), (7.24) и (7.25) легко следует, что

$$\bigcap_{i=1}^n Y_i \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad \forall (Y_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{Y}^n.$$

Как следствие мы получаем такое свойство: если $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{Y})$, то пересечение всех множеств из $\mathcal{K}$ непусто. Это означает (см. (4.24)), что $\mathcal{Y}_{\mathbf{f}} \in \beta_0[E]$, а потому в силу (3.4) имеем

$$\mathcal{Z} \triangleq (E\text{-fi})[\mathcal{Y}_{\mathbf{f}}] \in \mathfrak{F}[E].$$

Используя (3.7), подбираем такой у/ф $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, что $\mathcal{Z} \subset \mathcal{W}$. При этом

$$\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_{\mathbf{f}} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{W}. \quad (7.28)$$

С учетом (7.21) и (7.26) подберем множество $\Lambda \in \mathcal{X}$, для которого (см. (7.27)) $\mathcal{W} \in \varphi(\Lambda)$. Из (7.2) имеем теперь свойство $\Lambda \in \mathcal{W}$. Но из (7.25) и (7.28) следует, что $E \setminus \Lambda \in \mathcal{W}$. Получено противоречие: по аксиомам фильтра (см. (3.3)) $\emptyset \notin \mathcal{W}$, с другой стороны, семейство $\mathcal{W}$ замкнуто относительно конечных пересечений и, следовательно, $\Lambda \cap (E \setminus \Lambda) \in \mathcal{W}$, что невозможно, ибо $\Lambda \cap (E \setminus \Lambda) = \emptyset$. Противоречие показывает, что (7.23) невозможно и, следовательно, справедливо (7.22). Поскольку выбор κ со свойством (7.21) был произвольным, установлено следующее: если $\gamma \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})$, то

$$\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \bigcup_{\mathbb{L} \in \gamma} \mathbb{L} \right) \implies \left(\exists \mathcal{K} \in \text{Fin}(\gamma) : \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \bigcup_{\mathbb{L} \in \mathcal{K}} \mathbb{L} \right).$$

Это означает компактность ТП (7.19), поскольку $\mathbf{E}$ — база этого ТП (см. [9, гл. 5]). Мы установили, что ТП (7.19) — компакт.

Для проверки свойства нульмерности этого компакта зафиксируем $M \in \mathcal{P}(E)$ и рассмотрим $\varphi(M) \in \mathbf{E}$ (см. (7.2)). Покажем, что

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \setminus \varphi(M) \in \tau_{\mathbf{f}}. \quad (7.29)$$

В самом деле, в силу (7.3) и (7.7)

$$\mathfrak{F}_u[E] \setminus \varphi(M) = \varphi(E \setminus M) \in \mathbf{E},$$

что, в частности, означает справедливость (7.29). Тогда $\varphi(M)$ замкнуто в ТП (7.19) и, следовательно (см. (7.18)), открыто-замкнуто в этом ТП. Поскольку выбор M был произвольным, установлено, что $\mathbf{E}$ — база ТП (7.19), состоящая только из открыто-замкнутых (в топологии (7.18)) множеств. На самом же деле $\mathbf{E}$ — семейство всех открыто-замкнутых п/м компакта (7.19).

В самом деле, пусть $\Omega \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_u[E])$ — открыто-замкнутое, в смысле ТП (7.19), п/м $\mathfrak{F}_u[E]$: $\Omega \in \tau_{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{F}_u[E] \setminus \Omega \in \tau_{\mathfrak{H}}$. Пусть (в этом рассуждении) $\mathcal{W} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$ таково, что

$$\Omega = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W. \quad (7.30)$$

При $\mathcal{W} = \emptyset$ имеем $\Omega = \emptyset \in \mathbf{E}$ (см. (7.3), (7.4)). Пусть $\mathcal{W} \neq \emptyset$, т. е. $\mathcal{W} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})$. Поскольку Ω замкнуто в ТП (7.19), то

$$\Omega \in (\tau_{\mathfrak{H}}\text{-comp})[\mathfrak{F}_u[E]]. \quad (7.31)$$

При этом $\mathcal{W} \subset \tau_{\mathfrak{H}}|_{\Omega}$. Поэтому (см. (7.30), (7.31)) для некоторых $q \in \mathcal{N}$ и $(W_i)_{i \in \overline{1, q}} \in \mathcal{W}^q$

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^q W_i \quad (7.32)$$

(мы учли, что в силу (7.30) $\mathcal{W}$ есть открытое покрытие Ω в компактном подпространстве $(\Omega, \tau_{\mathfrak{H}}|_{\Omega})$ исходного ТП (7.19)). Поскольку $\mathbf{E}$ — алгебра п/м множества $\mathfrak{F}_u[E]$, то из (7.32) имеем свойство $\Omega \in \mathbf{E}$ (мы учли, что $W_i \in \mathbf{E}$ при $i \in \overline{1, q}$). Итак, всякое п/м $\mathfrak{F}_u[E]$, открыто-замкнутое в компакте (7.19), является элементом семейства $\mathbf{E}$.

Возвращаясь к основному изложению, отметим такое свойство: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[E]$, то

$$\mathfrak{N}[\mathcal{F}] \triangleq \{\varphi(A) : A \in \mathcal{F}\} \quad (7.33)$$

есть локальная база ТП (7.19) в точке $\mathcal{F}$, т. е. фундаментальная система окрестностей $\mathcal{F}$ в ТП (7.19). Проверка данного свойства очевидна (см. (7.18)).

Напомним (см. (2.5), условие 5.1), что $\text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta) \in (\theta\text{-comp})[\mathbf{H}]$. Поэтому для топологии

$$\mathbf{t} \triangleq \theta|_{\text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta)}$$

множества $\text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta)$ имеем важное свойство: ТП

$$(\text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta), \mathbf{t}) \quad (7.34)$$

есть непустой компакт, являющийся подпространством ТП $(\mathbf{H}, \theta)$.

Вернемся к свойствам оператора (5.19).

Предложение 7.1. $\mathfrak{H} \in C(\mathfrak{F}_u[E], \tau_{\mathfrak{H}}, \text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta), \mathbf{t})$.

Доказательство. Поскольку (7.34) — компакт, имеем, в частности, такое свойство: ТП (7.34) регулярно [9, гл. 4] (см. в этой связи [4, гл. I, § 9]). Это означает, что каждая точка $y \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta)$ обладает фундаментальной системой окрестностей, замкнутых в компакте (7.34).

Пусть $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u[E]$. Тогда (см. (3.10)) $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$ и

$$\mathcal{H} \triangleq (\mathbf{H}\text{-fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]] \in \mathfrak{F}[\mathbf{H}].$$

Напомним (см. (5.20)), что $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\theta} \mathfrak{H}(\mathcal{U})$. Это означает, что (см. (3.12))

$$N_{\theta}(\mathfrak{H}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{H}. \quad (7.35)$$

Если $A \in \mathcal{U}$, то $\mathbf{h}^1(A) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta)$ и, как следствие,

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(A), \theta) = \text{cl}(\mathbf{h}^1(A), \mathbf{t}) \quad (7.36)$$

((7.34) — замкнутое подпространство ТП $(\mathbf{H}, \theta)$). Выберем произвольную окрестность

$$\mathbf{N} \in N_{\mathbf{t}}(\mathfrak{H}(\mathcal{U})).$$

С учетом вышеупомянутой регулярности ТП (7.34) можно подобрать окрестность $\mathbf{F} \in N_t(\mathfrak{H}(\mathcal{U}))$, замкнутую в смысле ТП (7.34) и такую, что $\mathbf{F} \subset \mathbf{N}$. Итак, $\mathbf{F}$ — замкнутое в ТП (7.34) множество, являющееся окрестностью точки $\mathfrak{H}(\mathcal{U})$. Легко видеть, что

$$\mathbf{F} = \text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta) \cap \mathbb{F}$$

для некоторой окрестности $\mathbb{F} \in N_\theta(\mathfrak{H}(\mathcal{U}))$. Тогда (см. (7.35)) $\mathbb{F} \in \mathcal{H}$, а потому

$$\mathbf{h}^1(\Phi) \subset \mathbb{F} \quad (7.37)$$

для некоторого множества $\Phi \in \mathcal{U}$ (см. определение $\mathcal{H}$ и (3.4)). В силу (7.33) получаем, что $\varphi(\Phi) \in \mathfrak{N}[\mathcal{U}]$ и, в частности,

$$\varphi(\Phi) \in N_{\tau_{\mathfrak{H}}}(\mathcal{U}). \quad (7.38)$$

Пусть $\mathcal{V} \in \varphi(\Phi)$. Тогда (см. (7.2)) имеем $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и при этом $\Phi \in \mathcal{V}$. Согласно (2.1) $\mathbf{h}^1(\Phi) \in \mathbf{h}^1[\mathcal{V}]$. Кроме того,

$$\mathbf{h}^1(\Phi) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta). \quad (7.39)$$

В силу (6.17) имеем свойство

$$\mathfrak{H}(\mathcal{V}) \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\Phi), \theta). \quad (7.40)$$

Далее, из (7.37) и (7.39) вытекает вложение

$$\mathbf{h}^1(\Phi) \subset \mathbb{F} \cap \text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \theta),$$

т. е. $\mathbf{h}^1(\Phi) \subset \mathbf{F}$. В силу замкнутости $\mathbf{F}$ в ТП (7.34) получаем вложение

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\Phi), \mathbf{t}) \subset \mathbf{F}.$$

С учетом (7.36), (7.40) имеем $\mathfrak{H}(\mathcal{V}) \in \mathbf{F}$ и, в частности, $\mathfrak{H}(\mathcal{V}) \in \mathbf{N}$. Поскольку выбор $\mathcal{V}$ был произвольным, установлено (см. (7.38)), что

$$\exists S \in N_{\tau_{\mathfrak{H}}}(\mathcal{U}): \mathfrak{H}(\mathcal{F}) \in \mathbf{N} \quad \forall \mathcal{F} \in S.$$

Однако и выбор $\mathbf{N}$ был произвольным. Поэтому отображение $\mathfrak{H}$ непрерывно в точке $\mathcal{U}$. Поскольку выбор $\mathcal{U}$ также был произвольным, установлено, что $\mathfrak{H}$ — непрерывный, в смысле ТП (7.19) и (7.34), оператор. $\square$

Следствие 7.1. $\mathfrak{H} \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{H}}, \mathbf{H}, \theta)$.

Доказательство очевидным образом следует из предложения 7.1 и определения топологии $\mathbf{t}$.

Теорема 7.1. *Кортеж $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{H}}, \mathbf{m}, \mathfrak{H})$ является компактификатором.*

Доказательство получаем непосредственной комбинацией предложений 5.5 и 7.1 с учетом замечания 7.1. Компактификатор, определяемый в теореме 7.1, условимся называть стоун-чеховским. Следующее известное [19, § 3.6] положение дополняет теорему 7.1.

Предложение 7.2. *Оператор (5.10) переводит пространство решений E в множество, всюду плотное в компакте (7.19):*

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \text{cl}(\mathbf{m}^1(E), \tau_{\mathfrak{H}}).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и $A \in \mathcal{F}$. Тогда $A \in \mathcal{P}'(E)$. В частности, $A \neq \emptyset$. Пусть $a \in A$. Для $\mathcal{F}_a^{\mathbf{h}} \in \mathbf{m}^1(E)$ имеем в силу (5.9) свойство $A \in \mathcal{F}_a^{\mathbf{h}}$ и, как следствие, $\mathcal{F}_a^{\mathbf{h}} \in \varphi(A)$ (см. (7.2)). Следовательно,

$$\mathbf{m}^1(E) \cap \varphi(A) \neq \emptyset.$$

Поскольку выбор A был произвольным, имеем из (7.33)

$$\mathbf{m}^1(E) \cap S \neq \emptyset \quad \forall S \in \mathfrak{N}[\mathcal{F}]. \quad (7.41)$$

Однако (7.33) — локальная база ТП (7.19) в точке $\mathcal{F}$. Поэтому в силу (7.41) $\mathcal{F} \in \text{cl}(\mathbf{m}^1(E), \tau_{\mathfrak{H}})$. Вложение $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \subset \text{cl}(\mathbf{m}^1(E), \tau_{\mathfrak{H}})$ установлено. $\square$

Замечание 7.2. В связи со свойствами компакта (7.19) отметим свойство дискретной вложенности множества E в этот компакт. Для этого прежде всего заметим, что в силу (7.3), (7.17) и (7.18) при $x \in E$ имеют место свойства $\{\mathcal{F}_x^{\natural}\} \in \mathbf{E}$ и, как следствие,

$$\{\mathbf{m}(x)\} = \{\mathcal{F}_x^{\natural}\} \in \tau_{\mathbf{f}}. \quad (7.42)$$

Из данного свойства открытости синглетонов, соответствующих точкам $\mathbf{m}^1(E)$, легко следует, что

$$\tau_{\mathbf{f}}|_{\mathbf{m}^1(E)} = \mathcal{P}(\mathbf{m}^1(E)), \quad (7.43)$$

т. е. подпространство компакта (7.19), соответствующее $\mathbf{m}$ -образу множества E , дискретно. Из (7.42) вытекает, что данный образ открыт в ТП (7.19):

$$\mathbf{m}^1(E) \in \tau_{\mathbf{f}}.$$

Отметим, наконец, что $\mathbf{m}$ (5.10) есть биекция E на $\mathbf{m}^1(E)$. Дело в том, что для любых двух точек $x_1 \in E$ и $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$ совпадение у/ф $\mathbf{m}(x_1) = \mathcal{F}_{x_1}^{\natural}$ и $\mathbf{m}(x_2) = \mathcal{F}_{x_2}^{\natural}$ исключено, так как

$$\{x_1\} \in \mathbf{m}(x_1), \quad \{x_2\} \in \mathbf{m}(x_2), \quad \{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$$

(если $\mathbf{m}(x_1) = \mathbf{m}(x_2)$, то имеем противоречие с (3.3)). С учетом (7.43) получаем, что $\mathbf{m}$ — гомеоморфизм дискретного ТП $(E, \mathcal{P}(E))$ на дискретное же ТП

$$(\mathbf{m}^1(E), \tau_{\mathbf{f}}|_{\mathbf{m}^1(E)})$$

(мы принимаем во внимание, что отображение дискретного ТП в произвольное ТП всегда непрерывно).

Предложение 7.3. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E])$ есть множество, замкнутое в ТП (7.19).

Доказательство. Выберем произвольно $\mathcal{F} \in \text{cl}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}], \tau_{\mathbf{f}})$. Тогда $\mathcal{F}$ есть у/ф в множестве E , т. е. $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Покажем, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. В самом деле, допустим противное: $\mathcal{E} \setminus \mathcal{F} \neq \emptyset$. Пусть $A \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{F}$. Поскольку $\mathcal{F}$ есть у/ф, то (см. [4, гл. I])

$$E \setminus A \in \mathcal{F}.$$

С учетом (7.33) получаем свойство $\varphi(E \setminus A) \in \mathfrak{N}[\mathcal{F}]$, в частности

$$\varphi(E \setminus A) \in N_{\tau_{\mathbf{f}}}(\mathcal{F}).$$

По выбору $\mathcal{F}$ имеем свойство $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \cap \varphi(E \setminus A) \neq \emptyset$. Пусть

$$\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \cap \varphi(E \setminus A). \quad (7.44)$$

Тогда, с одной стороны, у/ф $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ имеет свойство $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$ и, в частности, $A \in \mathcal{U}$. С другой стороны, из (7.2) и (7.44) следует, что $E \setminus A \in \mathcal{U}$. Однако $\mathcal{U}$ — фильтр в E , и потому (см. (3.3)) одновременное осуществление включений $A \in \mathcal{U}$ и $E \setminus A \in \mathcal{U}$ невозможно. Противоречие означает, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, т. е. $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$. Установлено вложение

$$\text{cl}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}], \tau_{\mathbf{f}}) \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}].$$

Предложение доказано. $\square$

Следствие 7.2. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \in (\tau_{\mathbf{f}}\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]$.

Доказательство очевидно: при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ имеем в виде $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$ замкнутое (см. предложение 7.3) п/м компакта.

Предложение 7.4. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) \in (\tau_{\mathbf{f}}\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]. \quad (7.45)$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и полагаем

$$E_0 \triangleq \bigcap_{U \in \mathcal{E}} U,$$

при этом $E_0 \subset E$. Множество $\mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}]$ замкнуто в ТП (7.19) по предложению 7.3. Из (7.42) имеем свойство

$$\{\mathbf{m}(x)\} \in \tau_{\mathbf{F}} \quad \forall x \in E_0.$$

Тогда для семейства $\mathcal{G} \triangleq \{\{\mathbf{m}(x)\} : x \in E_0\}$, $\mathcal{G} \subset \tau_{\mathbf{F}}$, имеем

$$\mathbf{m}^1(E_0) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau_{\mathbf{F}}.$$

Множество $\mathfrak{F}_u[E] \setminus \mathbf{m}^1(E_0)$ замкнуто в ТП (7.19), а следовательно, замкнуто в этом ТП и множество

$$\mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1(E_0) = \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] \cap (\mathfrak{F}_u[E] \setminus \mathbf{m}^1(E_0)).$$

С учетом компактности ТП (7.19) имеем (7.45). $\square$

Заметим, что в силу предложения 5.1 имеем при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) = \{\mathcal{F} \in \mathbf{m}^1(E) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{F}\} = \mathbf{m}^1(E) \cap \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}]$$

(см. определение $\mathbf{m}$ (5.10)). Поэтому как следствие имеем

$$\mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) = \mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1(E).$$

Замечание 7.3. Полезно рассматривать предложения 5.1 и 7.4 в их естественной совокупности. Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $\mathbf{F}$ — множество в левой части (7.45). Оно имеет следующий смысл (см. предложение 5.1): из множества $\mathfrak{F}_u^0[E|\mathcal{E}]$ «выбрасываются» все те тривиальные у/ф, которые порождаются точками из $E_0 = \bigcap_{U \in \mathcal{E}} U$, т. е. все те тривиальные у/ф, которые соблюдают ограничения асимптотического характера, определяемые семейством $\mathcal{E}$.

В этой связи напомним, что у/ф (в множестве E) с пустым пересечением всех своих множеств называется свободным у/ф (см. [19, § 3.6]). Каждый у/ф в E является либо свободным, либо тривиальным. Тогда $\mathbf{F}$ есть множество всех свободных у/ф в E , соблюдающих ограничения, определяемые семейством $\mathcal{E}$. Множество $\mathbf{F}$ компактно и, в частности, замкнуто в ТП (7.19).

С теоремой 7.1 естественным образом связывается процедура, используемая в предложении 5.2 (см. (5.12)). Именно, по аналогии с (5.12) мы можем ввести некое вспомогательное МП (аналог $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}$). Это вспомогательное МП объективно играет роль множества всех допустимых ОЭ, а его образ реализует искомое (основное) МП. К этой схеме мы обращаемся в следующем разделе, имея в виду уже установленные топологические свойства (см., в частности, следствие 7.2).

8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОЖЕСТВ ПРИТЯЖЕНИЯ

В ТЕРМИНАХ ОБОБЩЕННЫХ ЗАДАЧ О ДОСТИЖИМОСТИ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мы возвращаемся к теореме 7.1 с тем, чтобы использовать ее утверждение в сочетании с предложением 5.2 (см. (5.12)). Наиболее существенным является здесь прояснение структуры множества $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}$ в (5.12). В этой связи отметим, что для $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}$ справедливо утверждение, подобное предложению 4.2 и обеспечивающее, в условиях предложения 5.2, представление $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}$ (в (5.12)) в виде МП (см. [21, § 2.5]). Поэтому имеет смысл говорить о вспомогательном (по смыслу) МП, определяющем $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}$ в (5.12). Более того, это МП можно рассматривать и в случае $\mathcal{E} \notin \beta[E]$, т. е. в условиях, более общих в сравнении с предложением 5.2. Разумеется, и в этом построении можно было бы использовать схему, подобную (4.1), (4.2), т. е. схему, в которой применялись бы СПР. Однако, как видно из предложения 5.2 и теоремы 7.1, пространство $(\mathbf{K}, \tau)$ в (5.12) совпадает в данном случае с ТП (7.19), и, как правило, секвенциальная версия вспомогательного МП оказывается недостаточной.

Последнее означает, что в данной версии может не выполняться положение, подобное предложению 4.3. В этой связи для требуемого МП будем использовать определение в духе (4.3), близкое в логическом отношении к (4.1), (4.2). Именно, если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то через $(\mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, для каждого из которых существует такая направленность $(D, \preceq, f)$ в множестве E , что

$$(\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[D; \preceq; f]) \ \& \ ((D, \preceq, \mathbf{m} \circ f) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{n}}} \mathcal{F}). \quad (8.1)$$

Замечание 8.1. Так же, как и в (5.3), (5.5), в последнем определении вместо (8.1) можно было бы использовать аналог, в котором направленности заменены фильтрами или, что более логично, у/ф в E , это сократило бы и некоторые формальные построения. Однако аналогия с конструкцией, подобной (4.1), (4.2), представляется более существенной, и мы ограничимся здесь определением на основе (8.1).

Подобно предложению 4.2 устанавливается следующее утверждение.

Предложение 8.1. $(\mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{E}] = \bigcap_{U \in \mathcal{E}} \text{cl}(\mathbf{m}^1(U), \tau_{\mathbf{n}}) \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E]$.

В связи с последним предложением отметим (2.5.1) в [21] и свойства, подобные (4.25), (4.26) и позволяющие в практически интересных случаях семейства $\mathcal{E}$ рассматривать МП $(\mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{E}]$ как множество всех точек прикосновения базы фильтра в $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, реализуемой в виде образа базы фильтра в E . Доказательство предложения 8.1 фактически повторяет аналогичное обоснование предложения 4.2.

Напомним, что из предложений 5.2, 8.1 и теоремы 7.1 непосредственно следует, что

$$(\mathbf{A}\mathbf{S})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}^1((\mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{E}]) \in (\theta\text{-comp})[\mathbf{H}] \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \quad (8.2)$$

Теорема 8.1. $(\mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$.

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Пусть $\mathcal{F} \in (\mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{E}]$, а $(D, \preceq, f)$ — направленность в множестве E , для которой выполняется (8.1). При этом $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Фиксируем $A \in \mathcal{E}$ и (см. (8.1)) индекс $\delta \in D$, для которого $f(d) \in A$ при $d \in D$ со свойством $\delta \preceq d$. Имеем (см. (5.9), (5.10))

$$\forall d \in D \ (\delta \preceq d) \implies (A \in (\mathbf{m} \circ f)(d)). \quad (8.3)$$

Тогда $A \in \mathcal{F}$. Действительно, допустим противное: $A \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{F}$. По свойствам у/ф [4, гл. I] имеем включение $E \setminus A \in \mathcal{F}$ и, как следствие, $\varphi(E \setminus A) \in \mathfrak{N}[\mathcal{F}]$ (см. (7.33)). В частности,

$$\varphi(E \setminus A) \in N_{\tau_{\mathbf{n}}}(\mathcal{F}).$$

С учетом второго свойства в (8.1) подберем $\kappa \in D$ так, чтобы

$$\forall d \in D \ (\kappa \preceq d) \implies ((\mathbf{m} \circ f)(d) \in \varphi(E \setminus A)). \quad (8.4)$$

По свойствам направленных множеств имеем для некоторого элемента $\gamma \in D$

$$(\delta \preceq \gamma) \ \& \ (\kappa \preceq \gamma).$$

В итоге (см. (8.3), (8.4)) $A \in (\mathbf{m} \circ f)(\gamma)$ и одновременно $(\mathbf{m} \circ f)(\gamma) \in \varphi(E \setminus A)$. С использованием (3.3) и (7.2) приходим к противоречию. Итак, свойство $A \in \mathcal{F}$ истинно. Мы установили вложение $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, которое означает выполнение свойства $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$. Вложение

$$(\mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{E}] \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \quad (8.5)$$

установлено. Осталось установить вложение, противоположное (8.5). Пусть $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$, т. е. $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$. Воспользуемся предложением 7.2: существует (в условиях аксиомы выбора) направленность $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, g)$ в множестве E , для которой

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathbf{m} \circ g) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{n}}} \mathcal{U} \quad (8.6)$$

(см. [19, § 1.6]). Пусть $\Omega \in \mathcal{E}$. Тогда $\Omega \in \mathcal{U}$ и $\varphi(\Omega) \in \mathfrak{N}[\mathcal{U}]$ (см. (7.33)). В частности,

$$\varphi(\Omega) \in N_{\tau_{\mathbf{n}}}(\mathcal{U}). \quad (8.7)$$

Из (8.6), (8.7) имеем $(\mathbf{m} \circ g)(\mathbf{d}) \in \varphi(\Omega)$ и, как следствие, $\Omega \in (\mathbf{m} \circ g)(\mathbf{d})$ с некоторого момента. Из (5.9), (5.10) следует, что $g(\mathbf{d}) \in \Omega$ с некоторого момента, т. е. $\Omega \in (E\text{-ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; g]$. Вложение

$$\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; g] \quad (8.8)$$

установлено. Непосредственная комбинация (8.6) и (8.8) реализует свойство $\mathcal{U} \in (\mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{E}]$ (см. (8.1)). Поскольку выбор $\mathcal{U}$ был произвольным, вложение, противоположное (8.5), установлено. $\square$

Итак, в теореме 8.1 мы установили структуру множества $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}$ предложения 5.2 для случая, когда компактификатор определяется по теореме 7.1.

Предложение 8.2. $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)).$

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. В силу (5.4) достаточно проверить справедливость вложения

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \subset (\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[\mathcal{E}].$$

Оно, однако, вполне очевидно: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$, то для $\mathfrak{H}(\mathcal{F}) \in \mathbf{H}$ выполнено (5.20), а тогда $\mathcal{F} \in (\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[\mathcal{E}]$ согласно (5.4). $\square$

Следствие 8.1. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[\mathcal{E}] = (\mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \in (\tau_{\mathbf{H}}\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]].$$

В случае $\mathcal{E} \in \beta[E]$ имеет место равенство

$$(\mathbf{A}\mathbf{S})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]). \quad (8.9)$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией следствия 7.2, теоремы 8.1 и предложения 8.2. В связи с (8.9) отметим, что сейчас мы ограничиваемся случаем $\mathcal{E} \in \beta[E]$ по соображениям «привязки» указанного свойства к общей конструкции предложения 5.2 (см. (5.12)). К обсуждению более общей версии этого свойства мы вернемся позднее. Из следствия 8.1 имеем, в частности, такое свойство: допустимые ОЭ (образующие в своей совокупности вспомогательное МП $(\mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{E}]$ и ПР, определяемые в (5.4), отождествимы и составляют компакт $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$ (см. следствие 7.2). В составе этого компакта выделяется (см. предложение 7.4) нетривиальная «часть», также образующая компакт. Речь идет о множестве (7.45), составленном из ПР (формализуемых в виде у/ф), не сводящихся к точным решениям, т. е. к точкам пересечения всех множеств из $\mathcal{E}$. Иными словами, (7.45) характеризуют множество ПР, определяемых как свободные у/ф в множестве E и соблюдающих, конечно, ограничение, определяемое посредством $\mathcal{E}$. Следствие 8.1 позволяет, однако, такие ПР рассматривать как ОЭ (только и ответственные за расширение задачи в сравнении с постановкой в классе точных решений). Из следствия 7.1 и предложения 7.4 мы получаем такое свойство: если $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то

$$\Xi \triangleq \mathfrak{H}^1\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) = \mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1(E)) \in (\theta\text{-comp})[\mathbf{H}], \quad (8.10)$$

и при этом $\Xi \subset (\mathbf{A}\mathbf{S})[\mathcal{E}]$ (мы учли также (8.2) и теорему 8.1).

Предложение 8.3. Пусть $\mathcal{E} \in \beta[E]$ и Ξ определяется посредством (8.10). Тогда

$$(\mathbf{A}\mathbf{S})[\mathcal{E}] = \Xi \cup \mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right).$$

Доказательство. Напомним, что в силу (8.2) и теоремы 8.1 справедливо равенство (8.9). Далее, из предложения 5.1 получаем, что

$$\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) = \mathbf{m}^1(\mathbf{m}^{-1}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}])) \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]. \quad (8.11)$$

Из (8.9), (8.11) и предложения 5.5 получаем вложение

$$\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) = \mathfrak{H}^1\left(\mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) \subset \mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) = (\mathbf{A}\mathbf{S})[\mathcal{E}]. \quad (8.12)$$

Поэтому $\Xi \cup \mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) \subset (\mathbf{AS})[\mathcal{E}]$. Пусть $z \in (\mathbf{AS})[\mathcal{E}]$. В силу (8.9) справедливо $z = \mathfrak{H}(\mathcal{F})$ для некоторого $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$. В силу предложения 5.5 верна импликация

$$\left(\mathcal{F} \in \mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) \implies \left(z \in \mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right)$$

(см. в этой связи рассуждение в (8.12)). С другой стороны,

$$\left(\mathcal{F} \notin \mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)\right) \implies (z \in \Xi).$$

Две последних импликации означают, что $z \in \Xi \cup \mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right)$. Итак, установлено вложение

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] \subset \Xi \cup \mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right).$$

Предложение доказано. $\square$

Замечание 8.2. При условии $\mathcal{E} \in \beta[E]$ и требовании о том, что Ξ определяется посредством (8.10), возможна ситуация $\Xi \cap \mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) \neq \emptyset$. Кроме того, свойство

$$\mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) \setminus \Xi \neq \emptyset \quad (8.13)$$

также возможно.

Рассмотрим следующий простейший пример.

Пример. Пусть $E = \mathcal{N}$. Определяем $\mathcal{E} \in \beta_0[E]$ в виде семейства всех множеств $\{1\} \cup \overline{n, \infty}$, $n \in \mathcal{N}$. Пусть множество $\mathbf{H}$ есть вещественная прямая $\mathbb{R}$, а θ есть обычная топология $\mathbb{R}$, порожденная метрикой-модулем. Отображение $\mathbf{h}$ (вещественнозначная последовательность) задается правилом

$$\mathbf{h}(k) \triangleq \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathcal{N}.$$

Тогда число 1 есть точка пересечения всех множеств семейства $\mathcal{E}$, поэтому

$$\mathbf{h}(1) = 1 \in \mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right). \quad (8.14)$$

На самом же деле число 1 есть элемент множества в левой части (8.13). В самом деле, пусть

$$\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1(E). \quad (8.15)$$

Тогда $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_x^{\natural}$ для любого $x \in E$. Это означает, в частности, что (см. (8.15)) $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_1^{\natural}$. Последнее может иметь место лишь тогда, когда

$$\exists U \in \mathcal{F}: 1 \notin U.$$

В самом деле, если $1 \in U$ для всех $U \in \mathcal{F}$, то $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1^{\natural}$ согласно (5.9), и в силу максимальности $\mathcal{F}$ мы получили бы $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^{\natural}$. Итак, можно указать такое $\mathbb{U} \in \mathcal{F}$, что $1 \notin \mathbb{U}$. Тогда $\mathbb{U} \subset \overline{2, \infty}$ и

$$\mathbf{h}^1(\mathbb{U}) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Как следствие, $\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbb{U}), \theta) \subset [0, \frac{1}{2}]$. Из (6.17) получаем свойство $\mathfrak{H}(\mathcal{F}) \in [0, \frac{1}{2}]$. Поскольку у/ф $\mathcal{F}$ (8.15) был выбран произвольно, то

$$\Xi = \{\mathfrak{H}(\mathcal{S}): \mathcal{S} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1(E)\} \subset \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

а потому (см. (8.14)) имеем свойство

$$1 \in \mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) \setminus \Xi,$$

т. е. справедливо (8.13). Итак, в $\mathbf{H}$ могут существовать оценки, реализуемые точно, но нереализуемые в классе свободных у/ф. Последние можно интерпретировать как нетривиальные ПР.

Возвращаясь к предложению 8.3, отметим, что при всяком выборе семейства $\mathcal{E} \in \beta[E]$ рассматриваемое в данной работе МП $(\mathbf{AS})[\mathcal{E}]$ (при условии 5.1) имеет следующий вид (см. предложение 5.2):

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] \in (\theta\text{-comp})[\mathbf{H}]$$

и, кроме того, для некоторого множества $\mathbf{K} \in (\theta\text{-comp})[\mathbf{H}]$ справедливо равенство

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \mathbf{K} \cup \mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right).$$

Для проверки последнего свойства достаточно учесть (8.10) и предложение 8.3.

9. ДОБАВЛЕНИЕ

В двух предыдущих разделах мы акцентировали внимание на рассмотрении стоун-чеховского компактификатора в свете представления (5.12). В частности, для этой цели было естественным ограничиться случаем $\mathcal{E} \in \beta[E]$ (см., в частности, предложение 8.1, (8.9)). В то же время данный компактификатор обслуживает и более общие случаи. Так, например, из (4.24), (4.25) и (8.9) легко следует (см. определение в разделе 3) свойство

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (9.1)$$

Дело в том, что поскольку каждый фильтр замкнут относительно конечных пересечений, то (см. (3.3))

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}_f] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$$

(см. также (4.25)). Полезно отметить следующее очевидное утверждение.

Предложение 9.1. Если $\mathfrak{G} \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E])$, то

$$\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}) = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{G}: \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\}. \quad (9.2)$$

Доказательство. Пусть Ω — множество в правой части (9.2). Для $y \in \mathfrak{H}^1(\mathfrak{G})$ имеем: $y = \mathfrak{H}(\mathcal{Y})$ для некоторого у/ф $\mathcal{Y} \in \mathfrak{G}$. Поэтому (см. (5.20)) $\mathbf{h}^1[\mathcal{Y}] \xrightarrow{\theta} y$ и, как следствие, $y \in \Omega$. Вложение

$$\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}) \subset \Omega \quad (9.3)$$

установлено. Пусть $\omega \in \Omega$. Тогда $\omega \in \mathbf{H}$ и для некоторого $\mathcal{F} \in \mathfrak{G}$

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} \omega.$$

В итоге $\omega \in (\mathbf{h}\text{-LIM})[\mathcal{F}]$ и (см. определение $\mathfrak{H}$ (5.19)) $\omega = \mathfrak{H}(\mathcal{F}) \in \mathfrak{H}^1(\mathfrak{G})$. Поскольку и выбор ω был произвольным, вложение, противоположное (9.3), установлено. $\square$

Заметим, что в качестве $\mathfrak{G}$ предложения 9.1 можно использовать п/м $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$, где $\mathcal{E}$ — непустое подсемейство $\mathcal{P}(E)$. Введем, в частности,

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}] \triangleq \left\{ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \mid \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset \right\} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (9.4)$$

Из предложения 7.4 и (9.4) следует (см. замечание 7.3) свойство компактности упомянутого множества (9.4) всех свободных у/ф в множестве E , соблюдающих ограничения в виде непустого подсемейства $\mathcal{P}(E)$:

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}] \in (\tau_{\mathbf{H}}\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (9.5)$$

В связи с (9.4), (9.5) отметим очевидное следствие предложения 9.1: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]: \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\}. \quad (9.6)$$

Аналогичное рассуждение позволяет дополнить (9.1) используя (5.5) и следствие 8.1 представлением

$$\mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]) = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]: \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\}. \quad (9.7)$$

Введем теперь в рассмотрение свободные фильтры в множестве E , соблюдающие ограничения асимптотического характера. Пусть

$$\mathfrak{F}_{00}[E|\mathcal{E}] \triangleq \left\{ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}] \mid \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset \right\} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (9.8)$$

Из (3.8), (9.4), (9.8) получаем следующее очевидное свойство: $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}] \subset \mathfrak{F}_{00}[E|\mathcal{E}]$ для каждого непустого семейства $\mathcal{E}$ п/м множества E .

Предложение 9.2. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}])$ есть множество всех таких $z \in \mathbf{H}$, что

$$\exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{00}[E|\mathcal{E}]: \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z. \quad (9.9)$$

Доказательство. Через Ω обозначаем множество всех $z \in \mathbf{H}$, обладающих свойством (9.9). Из (9.6) имеем вложение

$$\mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) \subset \Omega. \quad (9.10)$$

Пусть $\omega \in \Omega$ и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{00}[E|\mathcal{E}]$ реализует сходимость $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} \omega$. С учетом (3.9) и (9.8) подберем $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$ так, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. При этом, конечно,

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \emptyset$$

(см. (9.8)). Из (9.4) имеем теперь свойство $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]$, причем $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \subset \mathbf{h}^1[\mathcal{U}]$, поэтому

$$(\mathbf{H} - \mathbf{f})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]] \subset (\mathbf{H} - \mathbf{f})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]].$$

Однако в силу сходимости (базы фильтра) $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]$ имеем (см. (3.12)) вложение $N_{\theta}(\omega) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{f})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]]$. Поэтому $N_{\theta}(\omega) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{f})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]$, т. е.

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\theta} \omega.$$

Но тогда (см. (9.6)) $\omega \in \mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}])$. Вложение, противоположное (9.10), установлено. $\square$

Легко видеть (см. (9.4) и замечание 7.3), что

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \setminus \mathbf{m}^1(E) \in (\tau_{\mathbf{f}}\text{-comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]. \quad (9.11)$$

Непосредственная комбинация (9.11) и предложения 9.2 доставляет (см. следствие 7.1) такое свойство: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{00}[E|\mathcal{E}]: \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z\} \in (\theta\text{-comp})[\mathbf{H}], \quad (9.12)$$

и при этом (см. (9.1)) имеет место представление

$$(\mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) \cup \mathbf{h}^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right) \in (\theta\text{-comp})[\mathbf{H}]. \quad (9.13)$$

В (9.13) мы фактически имеем аналог предложения 8.3 (см. также (8.9)). В свете (9.13) полезно распространить действие (9.12) на представления, использующие направленности в E .

Если $(D, \preceq)$ есть непустое направленное множество, то

$$[\delta; \preceq] \triangleq \{d \in D \mid \delta \preceq d\} \in \mathcal{P}'(D) \quad \forall \delta \in D. \quad (9.14)$$

Если к тому же $f \in E^D$, то $(D, \preceq, f)$ есть направленность в E ,

$$\mathfrak{B}[D; \preceq; f] \triangleq \{f^1([d; \preceq]): d \in D\} \in \beta_0[E] \quad (9.15)$$

и (см. (3.18)) имеет место свойство

$$\begin{aligned} (E\text{-ass})[D; \preceq; f] &= \{S \in \mathcal{P}(E) \mid \exists d \in D: f^1([d; \preceq]) \subset S\} = \\ &= \{S \in \mathcal{P}(E) \mid \exists B \in \mathfrak{B}[D; \preceq; f]: B \subset S\} = (E - \mathbf{f})[\mathfrak{B}[D; \preceq; f]] \end{aligned} \quad (9.16)$$

(см. (3.4), (3.18)). Заметим, что определение (9.14) корректно, так как множество D определяется «своим» направлением $\preceq$ однозначно, поскольку $\preceq$ как бинарное отношение в D содержит диагональ множества D , т. е. множество всех пар (d, d) , $d \in D$. Из (9.15), (9.16) имеем для каждой направленности $(D, \preceq, f)$ в E равенство

$$\bigcap_{F \in (E\text{-ass})[D; \preceq; f]} F = \bigcap_{B \in \mathfrak{B}[D; \preceq; f]} B, \quad (9.17)$$

следовательно (см. (9.14), (9.15), (9.17)), эквивалентны следующие свойства:

- 1') пересечение всех множеств из $(E\text{-ass})[D; \preceq; f]$ является пустым множеством,
- 2') $\forall x \in E \exists \delta \in D: x \neq f(d) \forall d \in [\delta; \preceq]$.

Каждое из этих свойств характеризует, следовательно, невырожденные направленности в множестве E . Именно, будем называть направленность $(D, \preceq, f)$ в множестве E невырожденной, если выполняется 2'). Посредством 1') данное понятие связывается с конструкцией, используемой в (9.8).

Предложение 9.3. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}])$ есть множество всех таких $z \in \mathbf{H}$, что существует невырожденная направленность $(D, \preceq, f)$ в множестве E , для которой

$$(\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[D; \preceq; f]) \ \& \ ((D, \preceq, \mathbf{h} \circ f) \xrightarrow{\theta} z). \quad (9.18)$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и Ω есть по определению множество всех таких $z \in \mathbf{H}$, что для некоторой невырожденной направленности $(D, \preceq, f)$ в E выполняется (9.18). Выберем произвольно $z_* \in \mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}])$, после чего с учетом предложения 9.2 подберем фильтр $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{00}[E|\mathcal{E}]$, для которого

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\theta} z_*. \quad (9.19)$$

Тогда (см. (9.18)) $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}]$, и при этом

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset. \quad (9.20)$$

Таким образом, мы имеем $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, причем $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Используя (3.21), подберем направленность $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \varphi)$ в множестве E со свойством

$$\mathcal{F} = (E\text{-ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \varphi]. \quad (9.21)$$

Из (9.17), (9.20), (9.21) и эквивалентности свойств 1'), 2') мы получаем, что

$$\forall x \in E \exists \delta \in \mathbb{D}: x \neq \varphi(d) \forall d \in [\delta; \sqsubseteq].$$

Стало быть, $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \varphi)$ есть невырожденная направленность в множестве E . Из (9.21) по выбору $\mathcal{F}$ имеем вложение

$$\mathcal{E} \subset (E\text{-ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \varphi]. \quad (9.22)$$

Из (3.14), (9.19) и (9.21) вытекает свойство

$$\mathbf{h}^{-1}[N_{\theta}(z_*)] \subset (E\text{-ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \varphi].$$

Тогда $N_{\theta}(z_*) \subset (\mathbf{H}\text{-ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \mathbf{h} \circ \varphi]$, что в силу (3.13) означает сходимость

$$(\mathbf{H}\text{-ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \mathbf{h} \circ \varphi] \xrightarrow{\theta} z_*.$$

Используя (3.19), мы получаем сходимость

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathbf{h} \circ \varphi) \xrightarrow{\theta} z_*.$$

С учетом (9.22) и невырожденности направленности $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \varphi)$ мы имеем теперь (см. (9.18)) включение $z_* \in \Omega$. Вложение

$$\mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) \subset \Omega \quad (9.23)$$

установлено. Пусть $\omega \in \Omega$. Тогда $\omega \in \mathbf{H}$ и можно указать невырожденную направленность $(D, \preceq, f)$ в множестве E , для которой при $z = \omega$ выполнено (9.18). В силу эквивалентности свойств 1' и 2' для

$$\mathcal{U} \triangleq (E\text{-ass})[D; \preceq; f] \in \mathfrak{F}[E]$$

имеем следующее свойство: пересечение всех множеств из $\mathcal{U}$ есть $\emptyset$. Поскольку (см. (9.18)) $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$, то $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}]$, и как следствие из (9.8) имеем

$$\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{00}[E|\mathcal{E}]. \quad (9.24)$$

При нашей конкретизации z в (9.18) имеем, что

$$(\mathbf{H}\text{-ass})[D; \preceq; \mathbf{h} \circ f] \xrightarrow{\theta} \omega,$$

т. е. справедливо (см. (3.13))

$$N_{\theta}(\omega) \subset (\mathbf{H}\text{-ass})[D; \preceq; \mathbf{h} \circ f].$$

Как следствие мы получаем вложение

$$\mathbf{h}^{-1}[N_{\theta}(\omega)] \subset (E\text{-ass})[D; \preceq; f] = \mathcal{U}. \quad (9.25)$$

Из (3.14) и (9.25) вытекает следующее свойство сходимости:

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\theta} \omega. \quad (9.26)$$

Из (9.24)—(9.26) и предложения 9.2 получаем, что $\omega \in \mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}])$. Итак, вложение, противоположное (9.23), установлено, а тогда

$$\mathfrak{H}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^{00}[E|\mathcal{E}]) = \Omega.$$

Предложение доказано. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С. Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств. — М.: Наука, 1978. — 416 с.
2. Архангельский А. В. Компактность // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 50. — М.: ВИНТИ, 1989. — С. 5—128.
3. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1974. — 423 с.
4. Бурбаки Н. Общая топология. — М.: Наука, 1968. — 272 с.
5. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.
6. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. — М.: Наука, 1971. — 351 с.
7. Даффин Р. Дж. Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. — М., 1959. — С. 263—267.
8. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. — М.: Мир, 1973. — 148 с.
9. Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 431 с.
10. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с.
11. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985. — 518 с.
12. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. — 1970. — 34, N 6. — С. 1005—1022.
13. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с.
14. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970. — 416 с.
15. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969. — 309 с.

16. *Ченцов А. Г.* К вопросу о корректном расширении некоторых неустойчивых задач управления с интегральными ограничениями // Изв. РАН. Сер. Мат. — 1999. — 63. — С. 185—223.
17. *Ченцов А. Г.* К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2002. — С. 58—80.
18. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.
19. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 751 с.
20. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1970. — 488 с.
21. *Chentsov A. G.* Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. — New York, London, Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. — 244 p.
22. *Chentsov A. G.* Asymptotic attainability. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 322 p.
23. *Chentsov A. G.* Topological constructions of extensions and representations of attraction sets // Proc. Steklov Math. Inst. Suppl. 1. — 2000. — P. 35—60.
24. *Chentsov A. G.* Finitely additive measures and extension constructions // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. — 2001. — 11. — P. 531—545.
25. *Chentsov A. G., Morina S. I.* Extensions and Relaxations. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 408 p.
26. *Čech E.* Topological Spaces. — Prague: Academia, 1966. — 893 p.

А. Г. Ченцов

E-mail: chentsov@imm.uran.ru