საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემია
АКАДЕМИЯ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР

კიბერნეტიკის ინსტიტუტის შრომები

ТРУДЫ ИНСТИТУТА КИБЕРНЕТИКИ

ტ.
Т. II

თბილისი • 1977 • ТБИЛИСИ

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემია

АКАДЕМИЯ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР

60

კიბერნეტიკის ინსტიტუტის შრომები

ТРУДЫ ИНСТИТУТА КИБЕРНЕТИКИ

ტ II

თბილისი. 1977. ТБИЛИСИ

ეძღვნება დიდი ოქტომბრის სოციალისტური
რევოლუციის მე-60 წლისთავს

Посвящается 60-летию Великой Октябрьской
социалистической революции

Под редакцией академика АН ГССР В.В.Чавчанидзе

А.Х.Гиоргадзе

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ АВТОМАТОВ

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы декомпозиции детерминированных автоматов составляют, уже ставшую классической, главу теории автоматов. Работы Хартманиса и Стирнса [6], Крона и Роудза [53] Зейгера [54] , Гинзбурга [10], Куртиса [55], Джампа [39], Путсолу [27] и последующий за ними целый ряд работ образовали, вполне завершенную в настоящее время, теорию декомпозиции детерминированных автоматов.

Работа Бекона [8], появившаяся в 1964 г., оказалась естественным распространением идей декомпозиции в область вероятностных автоматов. В последующем появились работы, из которых, в первую очередь, следует отметить работы Геленби [12], Паза [2], Сантоса [50], Хеллера [51]. В этих работах, как в постановке задач, так и в результатах, отчетливо отражаются многие особенности вероятностной природы изучаемых объектов. Однако и здесь, так же как и в теории вероятностных автоматов в целом, существует множество вопросов, на которые подчас невозможно ответить, оставаясь в рамках существующих в настоящее время (традиционных для детерминированной теории) взглядов, подходов к постановке задач, технических приемов и основных определений и понятий.

Целью данной работы является не столько систематизация, классификация и дополнение ранее полученных результатов (с точки зрения классической), сколько поиски принципиально нового подхода к проблеме декомпозиции вообще и изложение полученных результатов, которые, на наш взгляд, более полным образом раскрывают сущность природы вероятностных автоматов.

ГЛАВА I

Начала теории декомпозиции вероятностных автоматов

I.I. Обычная декомпозиция стохастических машин

Определения изученных нами вероятностных объектов являются общепринятыми. Они приводятся в целом ряде работ, посвященных вероятностным автоматам: [1], [2], [3], [4], [5], и мы приведем некоторые из них в форме удобной для дальнейшего изложения.

Определение I.I: Вероятностная последовательная машина (ВПМ) есть объект M, описываемый четверкой

$$M = (X, Y, S, P(s', y / s, x)),$$

где X, Y, S – конечные множества входных, выходных символов и состояний, а $P(s', y / s, x)$ – вероятность машины будучи в состоянии s перейти в состояние s' при подаче входного символа (буквы) $x \in X$ и одновременно выдать выходной символ $y \in Y$.

Определение I.2. Вероятностный автомат (ВА) есть объект, описываемый шестеркой

$$A = (X, Y, S, \{H(x)\}, F, \bar{P}),$$

где X, Y, S имеют тот же смысл, что и в определении I.I, $H(x)$ – стохастическая матрица переходных вероятностей из состояний в состояния под воздействием буквы x, $\{H(x)\}$ – множество матриц $H(x)$ по числу букв $x \in X$, $F = F(x, s_i, y_j)$ – выходная функция – отображение $(X \times S \times Y)$ в отрезок $[0, 1]$ – вероятность получения буквы $y_j \in Y$, если на вход автомата, находящегося в состоянии $s_i \in S$, была подана буква $x \in X$.

$$\sum_{y_j \in Y} F(x, s_i, y_j) = 1$$

$\bar{P}$ – множество конечных (выделенных) состояний, или решающий вектор [1].

Определение I.3. Стохастическая система (СМ) или марковская система над конечным алфавитом X есть двойка $(S, \{H(x)\})$, где S – конечное множество состояний, $\{H(x)\}$ – множество матриц переходных вероятностей по числу $x \in X$. Иногда мы будем писать $(X, S, \{H(x)\})$.

Далее, мы приводим ряд основных определений и обозначений, используемых в работе, и некоторые результаты, известные в литературе и являющиеся отправными для развития теории декомпозиции вероятностных автоматов, а также некоторые результаты, полученные нами.

Разбиение множества S на непересекающиеся подмножества (блоки) будем обозначать греческими буквами π, τ, θ и т.д. Через I будем обозначать разбиение с одним единственным блоком, и через O – разбиение, каждый блок которого содержит только один элемент множества S.

Пусть π и τ – разбиения множества S и Ω – множества всех блоков, входящих в π и τ. Произведение разбиений π и τ есть разбиение $\pi \cdot \tau$, блоками которого являются пересечения блоков из Ω. Блоки A и B из Ω считаются связанными, если существует последовательность блоков $A_1 = A, A_2, \dots, A_k = B$ из Ω такая, что $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \dots, k-1$. Множество S_π всех разбиений заданного множества S образует структуру [6], [7]. S_π частично упорядочено по отношению $\geqslant$, которое для любых двух разбиений π_1 и π_2 определяется следующим образом: $\pi_1 \geqslant \pi_2$, если каждый блок π_1 есть объединение одного или более блоков π_2, $O \leqslant \pi \leqslant I$. Алгебра разбиений изложена в [6].

Определение I.4: Два разбиения π и τ множества S ВА A называются независимыми [8], если и только если для каждой матрицы $H(x) = [p_{ij}(x)]$ выполняется

$$\sum_{j \in \pi_k \cap \tau_e} p_{ij}(x) = \Big(\sum_{j \in \pi_k} p_{ij}(x)\Big)\Big(\sum_{j \in \tau_e} p_{ij}(x)\Big) \qquad (I.I)$$

для всех $\pi_k \cap \tau_e \neq \emptyset$, где π_k и τ_e – блоки разбиений π и τ соответственно.

Определение I.5: Стохастическая матрица $H(x)$ укрупнима по разбиению $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ если и только если для любой пары блоков, например π_k и π_e, имеет место

$$\sum_{j \in \pi_e} p_{ij}(x) = \sum_{j \in \pi_e} p_{mj}(x) \qquad (I.2)$$

для всех $i, m \in \pi_k$.

ВА A укрупним по разбиению π, если укрупнимы все матрицы $H(x)$. Мы будем говорить также, что π обладает свойством подстановки (СП), если цепь, определенная на множестве, разбиваемом по π, укрупнима по π.

Пусть (S,H), $H=[p_{ij}]$ – цепь Маркова, определенная на множестве S матрицей переходных вероятностей $H=[p_{ij}]$, укрупнима по разбиениям π и τ.

Т е о р е м а I.I. Цепь (S,H) укрупнима по $\pi\cdot\tau$, если для любой пары блоков π_a и τ_b, $\pi_a\in\pi$ и $\tau_b\in\tau$, и всех $i\in S$

$$\sum_{j\in\pi_a\cap\tau_b} p_{ij} = \Big(\sum_{j\in\pi_a} p_{ij}\Big)\Big(\sum_{j\in\tau_b} p_{ij}\Big)$$

Доказательство: рассмотрим два произвольных π_c и τ_d. Поскольку $\sum_{j\in\pi_a} p_{ij}=const=c_1$ для всех $i\in\pi_c$, а $\sum_{j\in\tau_b} p_{ij}=const=c_2$ для всех $i\in\tau_d$, то $\sum_{j\in\pi_a\cap\tau_b} p_{ij}=const=c_3$ для всех $\pi_c\cap\tau_d$. Теорема доказана, поскольку $\pi_a\cap\tau_b$ и $\pi_c\cap\tau_d$ образуют блоки разбиения $\pi\cdot\tau$.

Т е о р е м а I.2: Цепь (S,M) укрупнима по $\pi+\tau=\theta$, если она укрупнима по π и по τ.

Доказательство: из определения разбиения $\pi+\tau=\theta$ [6], легко следует $\theta\geqslant\pi$, то есть каждый блок θ является объединением нескольких блоков π и одновременно объединением нескольких блоков τ. Из укрупняемости (S,M) по π и τ легко следует

$$\forall i\in\theta_a,\ \sum_{j\in\theta_b} p_{ij} = \sum_{j\in\pi_a} p_{ij} + \dots + \sum_{j\in\pi_k} p_{ij} = const.$$

Используя алгебру разбиений [6] и эти теоремы, мы получаем возможность нахождения различных разбиений со свойством подстановки для декомпозиции заданного автомата.

Определение I.6: Пусть $[A]=[a_{ij}]$ и $[B]=[b_{ke}]$ – матрицы размерности $m\times n$ и $p\times q$ соответственно. Через $[C]=[A]\otimes[B]$ обозначим кронекерово или прямое произведения этих матриц

$$[C]=[c_{ik,je}]=[a_{ij}b_{ke}]$$

Матрицу $[C]$ можно записать в виде:

$$[C]=\begin{bmatrix} a_{11}[B] & \dots & a_{1n}[B]\\ \vdots & & \\ a_{m1}[B] & \dots & a_{mn}[B]\end{bmatrix} \qquad (I.3)$$

Легко проверяется [9], что:

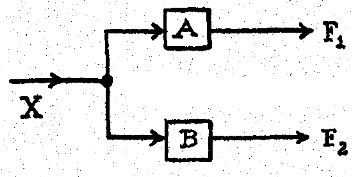
$$(AB)\otimes(A'B')=(A\otimes B)(A'\otimes B'), \qquad (I.4)$$

где A, B, A', B' – матрицы.

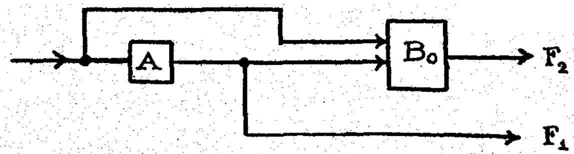
Определение I.7: Косое произведение матрицы $[A]$ и множества m матриц $\{[B(i)]\}$ есть матрица $[C']=[c_{ik,je}]=[a_{ij}b_{ke}(i)]$. Матрицу $[C']$ можно записать в виде

$$[C']=\begin{bmatrix} a_{11}[B_1] & \dots & a_{1n}[B_1]\\ \vdots & & \\ a_{n1}[B_m] & \dots & a_{nn}[B_m]\end{bmatrix} \qquad (I.4)$$

Параллельное соединение двух ВА $A=(X,S_1,Y,\{A(x)\},F_1)$ и $B=(X,S_2,Y_2\{B(x)\},F_2)$ предоставляющее некоторый автомат C, будем обозначать через $A\otimes B=C$. Каскадное соединение двух автоматов A и B_0 будем обозначать через $C_0=A\circ B_0$. На рис.I дано графическое объяснение этих соединений



Параллельное соединение, автомат C



Каскадное соединение, автомат C_0

Рис. I.I

Входным алфавитом для ВА B_0 являются элементы множества $X\times S_1$.

Определение I.8: СМ $A=(X_A,S_A,\{A(x)\})$ накрывает СМ $B=(X_B,S_B,\{B(x)\})$, если для каждого x в X_B можно указать $x'\in X_A$ так, чтобы для всех $x\in X_B$ существоваля матрица полного ранга K такая, что в матрицах $A(x')K$ и $KB(x)$ первые ℓ строк совпадали, где ℓ – число состояний СМ B.

В случае, когда K -стохастическая матрица с элементами, равными 0 и 1, накрытие имеет следующий физический смысл. Во множестве S_A выбирается некоторое подмножество S_A° и разбивается на непересекающиеся блоки. Каждому блоку ставится в соответствие состояние из S_B. Это означает, что подматрицы $A^\circ(x)$, определенные на множестве S_A° должны быть укрупнимы по этому разбиению. Фактически из СМ должна получаться "склеиванием" состояний некоторая машина с множеством состояний S_A' таким, чтоб в $S_{A'}$, можно было выделить подмножество $S_{A'}^\circ$ такое, что подмашина, определенная на $S_{A'}^\circ$ была изоморфной СМ B.

Рассмотрим СМ $C=A\otimes B$, где A и B -стохастические машины с числом состояний m и ℓ соответственно. Пусть СМ A' с числом состояний $n, n\geqslant m$, накрывает СМ A,

$$A'(x)K_{n\times m}=K_{n\times m}A(x)$$

Утверждение I.1: СМ $C'=A'\otimes B$ накрывает C, $C'(x)K'=K'C(x)$ и $K'=K\otimes E_\ell$, где $E_\ell=[\delta_{ij}]$ – единичная матрица размерности ℓ, $\delta_{ij}=0,\ i\neq j$ и $\delta_{ij}=1, i=j$

Рассмотрим теперь каскадное соединение СМ A и B_0 с числами состояний m и ℓ, $C_0=A\circ B_0$. Пусть СМ B_0' накрывает B_0 и имеет место $B_0'(x,s_i)K=KB_0(x,s_i)$ для всех матриц $B_0(x,s_i)$.

Утверждение I.2: СМ $C_0'=A\circ B_0'$ накрывает C_0, $C_0'(x)K_0'=K_0'C_0(x)$. При этом $K_0'=E_m\otimes K$.

Пусть $C_1=A_1\circ B_1$ и все матрицы переходов СМ B_1 – биостохастические (кроме обычной нормировки – $\sum_j p_{ij}=1, \forall i$; имеет место $\sum_i p_{ij}=1,\ \forall j$). Пусть, кроме того, A_1', накрывает A_1, $A_1'(x)K_1=K_1A_1(x)$.

Утверждение I.3: $C_1'=A_1'\circ B_1$ накрывает $C_1=A_1\circ B_1$, $C_1'(x)K_1'=K_1'C_1(x)$. При этом, если ℓ – число состояний B_1, n – число состояний A_1' и $K_1=[d_{ij}]$, то K_1' имеет вид:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & & \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix},$$

где K_{ij} – квадратные матрицы размерности ℓ, и все элементы матрицы K_{ij} равны d_{ij}.

Утверждения I.I–I.3 легко проверяются осуществлением подстановок соответствующих матриц, перемножением матриц и поэлементным сравнением матриц, полученных в результате перемножения.

В случае, когда $C=A\circ B$, матрицы СМ B не бистохастические и A' накрывает A так, что $A'(x)K=KA(x)$, где K -стохастическая матрица с элементами 1 и 0, т.е. имеет место "склеивание" состояний машины A', просто доказать еще одно утверждение.

Утверждение I.4: $C'=A'\circ B$ накрывает $C=A\circ B$, $C'(x)K_1'=K_1'C(x)$, где K' строится следующим образом: в матрице K каждый 0 заменяется матрицей размерности $\ell\times\ell$, все элементы которой равны 0, и каждая 1 заменяется матрицей E_ℓ, где ℓ – число состояний матриц $B(x,s_i)$.

Утверждения, аналогичные I.I–I.4 для детерминированных автоматов доказаны в [10] и обобщены нами для вероятностного случая. Они оказываются полезными при рассмотрении вопроса полной декомпозиции вероятностных автоматов, т.е. при нахождении системы каскадно соединенных автоматов, накрывающей исходный автомат, когда ни один из автоматов этой системы дальше не декомпозируется.

Определение I.9: На множестве S' состояний стохастической машины $A=(S,\{A(x)\})$ определена подмашина A_s если и только если для любого $s_i\in S'$ состояние s_j, достижимое из s_i, принадлежит S'. Состояние s_j достижимо из s_i, если существует последовательность входных символов (слово), переводящая СМ из состояния s_i в s_j с ненулевой вероятностью.

Определение I.10: СМ $A=(S,\{A(x)\})$ декомпозируема в обычном смысле, если она изоморфна подмашине каскадного соединения двух или более машин, и при этом, число состояний каждой из этих машин меньше числа состояний СМ A .

Определение I.II: СМ A декомпозируется с расщеплением состояний, если подмашина каскадного соединения двух или более машин накрывает A и при этом: I. число состояний каждой из машины в каскадном соединении меньше числа состояний СМ A , 2. матрица накрытия - стохастическая матрица с элементами 0 и 1, осуществляющая склеивание состояний.

Неформально это означает, что в СМ A некоторые состояния расщепляются, или матрицы переходных вероятностей разукрупняются [11] , таким образом, что мы имеем возможность построить некоторую машину C , которая состоит из каскадного соединения двух или более машин с числами состояний меньшими, чем число состояний СМ A . Декомпозиции с расщеплением состояний мы посвятим в дальнейшем специальную главу.

Пусть СМ $C=(S,\{C(x)\})$ декомпозируема в обычном смысле на СМ $A=(S',\{A(x)\})$ и $B=(S'',\{B(x,s)\})$, $|S|>|S'|, |S|>|S''|$. Согласно (I.4)

$$[c_{ik,je}(x)]=[a_{ij}(x)\,b_{ke}(x,s)] . \qquad (I.5)$$

Из (I.5) легко следует

$$\sum_e c_{ik,je}(x) = a_{ij}(x) \qquad (I.6)$$

и

$$\sum_j c_{ik,je}(x) = b_{ke}(x,s) . \qquad (I.7)$$

Из (I.6) и (I.7) получаем необходимое условие декомпозируемости

$$\Big(\sum_e c_{ik,je}(x)\Big)\Big(\sum_j c_{ik,je}(x)\Big) = c_{ik,je}(x) \qquad (I.8)$$

Нетрудно видеть, что СМ C укрупнима по некоторому разбиению π , что следует из уравнения (I.6). Из (I.8) легко также следует существование некоторого разбиения τ такого, что $\pi\cdot\tau=0$ и π и τ - независимы. Пусть теперь разбиения π и τ таковы, что $\pi\cdot\tau=0$, выполняется условие независимости этих разбиений и условие укрупняемости матриц $C(x)$, для всех $x\in X$, по разбиению π .

С помощью формул (I.6-I.8) легко построить СМ A и B

Таким образом, мы привели доказательство теоремы Г.Бекона о

декомпозируемости СМ на каскадно соединенные две машины.

Вот эта теорема

Т е о р е м а I.3. Стохастическая машина C допускает декомпозицию в обычном смысле на две каскадно соединенные машины, если и только если C укрупнима по некоторому нетривиальному разбиению π и существует разбиение τ, такое, что $\pi\cdot\tau=0$ и независимы.

Т е о р е м а I.4: Стохастическая машина C допускает декомпозицию в обычном смысле на две машины, расположенные параллельно (параллельную декомпозицию) если и только если C укрупнима по нетривиальным разбиениям π и τ , $\pi\cdot\tau=0$ и независимы.

Доказательство этой теоремы по сути не отличается от доказательства теоремы I.3. Действительно, укрупняемость C по π означает выделение некоторой машины из C , которая никак не связана, что и означает параллельность, с машиной выделяемой из C с помощью разбиения τ .

Заметим, что условие независимости двух разбиений, когда одно из них укрупняет автомат, выполняется всегда, если автомат детерминированный.

Пример: пусть задана автономная СМ $C=(S,H)$, $S=(1,2,3,4,5)$

$$H=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0.2&0.8&0&0&0\\0.5&0.5&0&0&0\\0.6&0.4&0&0&0\\0.14&0.56&0&0.15&0.15\\0.35&0.35&0&0.15&0.15\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\end{array}$$

Нетрудно проверить, что H укрупнима по разбиениям $\pi=(\overline{1,2,3};\overline{4,5})$ и $\tau=(\overline{1,4};\overline{2,5};\overline{3})$. В результате укрупнения H по π и по τ получим соответственно матрицы

$$R_1=\begin{bmatrix}0.2&0.8&0\\0.5&0.5&0\\0.6&0.4&0\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad R_2=\begin{bmatrix}1&0\\0,7&0,3\end{bmatrix}$$

Кронекерово произведение этих матриц, согласно формуле (I.3), дает матрицу H', в которой можно выделить подматрицу, совпадающую с H

$$H' = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.14 & 0.56 & 0 & 0.06 & 0.24 & 0 \\ 0.35 & 0.35 & 0 & 0.15 & 0.15 & 0 \\ \hline 0.42 & 0.28 & 0 & 0.18 & 0.12 & 0 \end{array}\right]$$

Взяв R_1 и R_2 в качестве матриц переходных вероятностей машин A и B с числами состояний 3 и 2 соответственно и расположив (соединив) их параллельно, мы получим машину, в которой выделяется подмашина изоморфная (в данном случае совпадающая) машине C.

I.2. $\mathfrak{s}$ - декомпозиция.

Часто, разделяя логический преобразователь и "память", автомат изображают так, как это показано на рис.I.2.

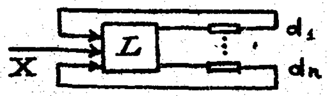


Рис.I.2

Здесь L - логическая часть автомата, а $d_1, d_2, \ldots, d_n$ - элементы задержек (повсюду далее элементы задержек будут считаться двоичными), X - вход автомата. Каскадное соединение СМ, изображенное на рис.I.I с учетом интерпретации, приведенной на рис.I.2 для передней машины будет выглядеть следующим образом:

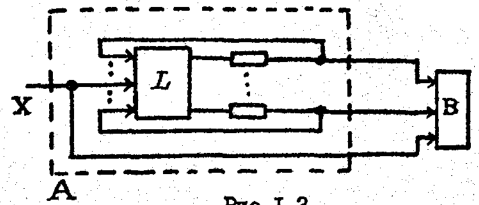


Рис.I.3

Остроумную идею, так называемой, $\mathfrak{s}$ -декомпозиции (сокращение слов *strong decomposition*) предложил Э.Геленби (1970), [12]. Наглядная интерпретация $\mathfrak{s}$ -декомпозиции приведена на рис.I.4.

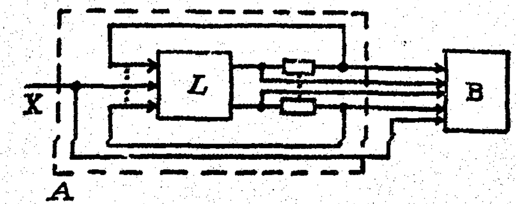


Рис.I.4

Из рис.I.4 видно, что входным алфавитом для машины B является тройка - состояние A в такте t, состояние СМ A в такте $t+1$ и буква входного алфавита всей системы. Теорема Геленби утверждает. что наличие нетривиального разбиения π со свойством подстановки для множества состояний СМ $C = A \circ B$ необходимо и достаточно для ее каскадной $\mathfrak{s}$ -декомпозиции. Пусть $C = (X, S_c, \{H(x)\})$ и $A = (X, S, \{(H(x))_\pi\})$, где $(H(x))_\pi$ - матрица, получающаяся в результате укрупнения $H(x)$ по разбиению π. СМ A - передняя машина в системе каскадной $\mathfrak{s}$ -декомпозиции СМ C. Машина $B = (X', S', \{G(x')\})$ является хвостовой, $X' = \pi \times \pi \times X$, S' - множество ее состояний, $\{G(x')\}$ - множество матриц переходных вероятностей. Состояниями СМ A являются блоки разбиения π, а состояниями СМ B - блоки некоторого нетривиального разбиения τ такого, что $\pi \cdot \tau = 0$. Если π_a и π_b - блоки π, а τ_c и τ_d - блоки τ , то $t = (\pi_a, \pi_b, x)$ есть буква входного алфавита для СМ B . Пусть $H(x) = [p_{ij}(x)]$, $G(x') = [g_{ij}(x')] = [g_{\tau_c\tau_d}(x')]$ и $(H(x))_\pi = [\tau_{ij}(x)] = [\tau_{\pi_a\pi_b}(x)]$.

Теорема I.5: СМ C допускает каскадную $\mathfrak{I}$-декомпозицию на СМ A и B если и только если существуют нетривиальные разбиения π и τ такие, что СМ A получается из СМ C укрупнением по π всех ее матриц переходных вероятностей и $\pi \cdot \tau = 0$. Кроме того

$$g_{\tau_c\tau_d}(x') = p_{ij}(x) / \tau_{\pi_a\pi_b}(x),$$

где $i = \pi_a \cap \tau_c$, $j = \pi_b \cap \tau_d$, если $\pi_a \cap \tau_c \neq \varnothing$ и $\pi_b \cap \tau_d \neq \varnothing$ и если $\tau_{\pi_a\pi_b} \neq 0$. В противном случае $g_{\tau_c\tau_d}$ доопределяется произвольным образом.

Мы приведем наглядное конструктивное доказательство этой теоремы для автономной СМ, обобщение на случай многобуквенной машины тривиально. Пусть существует разбиение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ такое, что из СМ C можно получить СМ $A = C_\pi$. Через $|\pi_i|$ мы будем обозначать число элементов в блоке π_i . Пусть $b = \max\{|\pi_1|, |\pi_2|, \ldots, |\pi_k|\}$. Введем некоторую матрицу H' , блочный вид которой таков:

$$H' = \begin{bmatrix} \tau_{11}G^{11} & \tau_{12}G^{12} & \ldots & \tau_{1k}G^{1k} \\ \vdots & & & \\ \tau_{k1}G^{k1} & \tau_{k2}G^{k2} & \ldots & \tau_{kk}G^{kk} \end{bmatrix} .$$

Здесь $G^{ij} = [g^{ij}_{ij}]$ – некоторые матрицы размерности $b \times b$, которые нам следует заполнить. Рассмотрим матрицу G^{11}. Пусть $|\pi_j| = b_j$, $b_j \leq b$. Положим $g^{11}_{11} = p_{11}/\tau_{11}$ $g^{11}_{12} = p_{12}/\tau_{11}$, ..., $g^{11}_{1b_1} = p_{1b_1}/\tau_{11}$. Поскольку $\sum_{j=1}^{b_1} g^{11}_{1j} = 1$, в силу укрупняемости H по π , то $\sum_{j=1}^{b_1} g^{11}_{1j} = 1$. Остальные g^{11}_{1i} , $i = b_1+1, \ldots, b$ положим равными 0 . Аналогично заполним последующие $b_1 - 1$ строк. Остальные $b - b_1$ строк этой матрицы заполняются произвольным образом. Далее заполняем G^{12}: $g^{12}_{11} = p_{1b+1}/\tau_{12}$, $g^{12}_{12} = p_{1b+2}/\tau_{12}$, ..., $g^{12}_{1b_2} = p_{1b+b_2}/\tau_{12}$. Остальные g^{12}_{1i} кладем равными 0 для $i = b_2+1, \ldots, b$. Ясно, что

$\sum_{j=1}^{b_2} g^{12}_{1j} = 1$. Таким же образом заполняем последующие $b_2 - 1$ строк, а остальные строки матрицы G^{12} заполняем произвольным образом. Аналогично заполняются все другие матрицы G^{ij} . Теперь если при переходе СМ A из состояния π_i в π_j на его выходе образовать сигнал, соответствующий этому переходу, а в СМ B в качестве матрицы, "реагирующей" на этот сигнал, взять матрицу G^{ij} , то доказательство теоремы относительно достаточности ее условий будет фактически завершено. Факт перехода СМ A из состояния π_i в π_j и организация соответствующей буквы на рис.I.4 изображен тем, что от каждого двоичного элемента задержки на вход хвостовой машины в каждый такт работы поступает пара значений задержки в тактах t и $t+1$.

Доказательство необходимости условий теоремы взято из [I2]. Пусть заданы СМ A и B , которые можно соединить каскадным образом: $A = (X, \pi, \{(H(x))_\pi\})$, $B = (\pi \times \pi \times X, \tau, \{G(x')\})$, где $x' \in X'$, $X' = \pi \times \pi \times X$. Построим $C = (X, S, \{H(x)\})$, где $S = \pi \times \pi$, π_a и π_b – состояния множества π , τ_c и τ_d – состояния множества τ . Тогда

$p_{ij}(x) = \tau_{\pi_a\pi_b}(x)\, g_{\tau_c\tau_d}(x')$, где $(H(x))_\pi = [\tau_{\pi_a\pi_b}]$. Поскольку $\sum_{j \in \tau_d} p_{ij}(x) = \tau_{\pi_a\pi_b} = \sum_{j \in \tau_d} p_{kj}(x)$ для любых $k = (\pi_a, \tau_t)$, $\tau_t \in \tau$, то матрица переходных вероятностей СМ C укрупнима по π . Множества π

КВ

и τ легко интерпретировать как разбиения, определенные на множестве S_C . Кроме того, $\pi \cdot \tau = 0$ и C изоморфна каскадному соединению A и B .

Заметим, что если для каждого i положить $G^{ij} = G^{ik}$, $j, k = 1, 2 \ldots$, то мы придем к случаю декомпозиции в обычном смысле, и это ограничение на матрицы G^{ij} фактически и вызывает независимость разбиений π и τ . Заметим, кроме того, что параллельная $\mathfrak{I}$-декомпозиция стохастических машин, а следовательно и вероятностных автоматов, невозможна. Это утверждение легко подтверждается конструктивным доказательством теоремы I.5, которое мы привели.

1.3. Декомпозиция вероятностных последовательных машин с декомпозицией выходного преобразователя.

Пусть задана вероятностная последовательная машина $C = (X, F, W, p(f', \omega / f, x))$, где X – входной алфавит, W – выходной алфавит, F – множество состояний, $|F| = n$ и задано распределение вероятностей $\{Q(x)\}$ выходных букв $\omega \in W$, $|W| = \kappa$, для каждой буквы $x \in X$:

$$\{Q(x)\} = \begin{cases} q_1(\omega_1/x), q_1(\omega_2/x), \ldots, q_1(\omega_\kappa/x) \\ q_2(\omega_1/x), q_2(\omega_2/x), \ldots, q_2(\omega_\kappa/x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n(\omega_1/x), q_n(\omega_2/x), \ldots, q_n(\omega_\kappa/x) \end{cases}$$

Переходные вероятности ВПМ C определяются следующим образом $P_{ff'}(x) = \sum_{\omega \in W} p(f', \omega / f, x) = P_{ff'}(x) \sum_{\omega \in W} (\omega / f, x)$, $\sum_{\omega \in W} (\omega / f, x) = 1$.

Таким образом, из ВПМ C можно построить соответствующую ей СМ $C' = \{X, F, \{C'(x)\}\}$, где $C'(x) = [P_{ff'}(x)]$. Введем следующее обозначение для C с учетом распределений $\{Q(x)\}$: $C = (C', \{Q(x)\})$.

Рассмотрим каскадное соединение C двух вероятностных последовательных машин A и B, $C = A \circ B$, $A = (X, Y, S, p(s', y / s, x))$, $B = (U, V, Z, p(z', v / z, u))$, где $U = X \times S$, и $u \in U$, V и Z – множества выходных букв и состояний ВПМ B, $|S| = m$, $|Z| = \ell$, $\ell m = n$. Множество состояний ВПМ C, определяемое парами вида (s, z), упорядочим следующим образом: $s_1 z_1, s_1 z_2, \ldots, s_1 z_\ell, s_2 z_1, s_2 z_2, \ldots, s_2 z_\ell, \ldots, s_m z_1, s_m z_2, \ldots, s_m z_\ell$ и перенумеруем их $1, 2, \ldots, n$. С каждым состоянием $(s_i z_j)$ и буквой x связано распределение вероятностей выходных букв ω_i алфавита $Y \times V = W$, где $|Y| = d$, $|V| = \tau$, $|W| = \kappa$. То есть для каждой буквы x мы имеем стохастические вектора вида:

$$q^x_{s_i z_j}(\omega_1), q^x_{s_i z_j}(\omega_2), \ldots, q^x_{s_i z_j}(\omega_\kappa).$$

Обозначим через $q^x_{s_i}(y)$ и $q^x_{z_i}(v)$ вероятности появления выходных букв y и v на выходах A и B, находящихся соответственно в состояниях s_i и z_j, при входной букве x. Таким образом, для каждого $s_i \in S$ и $z_j \in Z$ и $x \in X$ мы можем записать еще два распределения для вероятностей появления выходных букв ВПМ A и B: $q^x_{s_i}(y_1), q^x_{s_i}(y_2), \ldots, q^x_{s_i}(y_d)$

и $q^x_{z_j}(v_1), q^x_{z_j}(v_2), \ldots, q^x_{z_j}(v_\tau)$ и

При этом мы рассмотрим сначала случай, когда выход ВПМ B не зависит от состояния ВПМ A.

Вероятность получения буквы $\omega_g \in W$ на выходе C, находящейся в состоянии $s_i z_j$, при входной букве x запишется как

$$q^x_{s_i z_j}(\omega_g) = q^x_{s_i}(y_f)\, q^x_{z_j}(v_t),$$

где ω_g – обозначение пары $(y_f v_t)$. Введем следующие обозначения для букв ω: $\omega_1 = y_1 v_1, \omega_2 = y_1 v_2, \ldots, \omega_\tau = y_1 v_\tau$, $\omega_{\tau+1} = y_2 v_1, \omega_{\tau+2} = y_2 v_2, \ldots, \omega_{2\tau} = y_2 v_\tau, \ldots, \omega_{\kappa-1} = y_d v_{\tau-1}$, $\omega_\kappa = y_d v_\tau$.

Введем СМ A' и B', соответствующие A и B. Для декомпозиции C' на A' и B', соединенные каскадным образом, необходимо и достаточно выполнение условий теоремы 1.3.

Т е о р е м а 1.6. Для декомпозиции $C = (C', \{Q(x)\})$ на каскадно соединенные ВПМ A и B с параллельным расположением выходных преобразователей и в случае, когда выходной преобразователь хвостовой машины B не зависит от состояния машины A, необходимо и достаточно существование каскадной декомпозиции C' на A' и B' и существование для каждой буквы x двух разбиений α^x и β^x множества W таких, что:

1. $\alpha^x \beta^x = 0$,

2. для любых двух блоков $\pi_a \in \pi$ и $\alpha^x_\ell \in \alpha^x$ и любых $i, t \in \pi_a$

$$\sum_{j \in \alpha^x_\ell} q^x_i(\omega_j) = \sum_{j \in \alpha^x_\ell} q^x_t(\omega_j),$$

3. для любых двух блоков τ_c и β^x_d и любых $i, t \in \tau_c$

$$\sum_{j \in \beta^x_d} q^x_i(\omega_j) = \sum_{j \in \beta^x_d} q^x_t(\omega_j),$$

4. разбиения α^x и β^x незав[illegible], то есть: для любых $i \in S \times Z$ и любых двух блоков α^x_a и β^x_b

$$q^x_i(\omega_g) = \Big(\sum_{j \in \alpha^x_a} q^x_i(\omega_j)\Big)\Big(\sum_{j \in \beta^x_b} q^x_i(\omega_j)\Big)$$
$$g \in \alpha^x_a \cap \beta^x_b$$

где π и τ – разбиения множества F, определяющие декомпозицию C' на A' и B'.

Доказательство. Каскадное соединение ВПМ A и B, кроме разбиений π и C, определяет еще два разбиения на множестве W: $\alpha^x = (\overline{1,2,\dots,\tau};\ \overline{\tau+1,\dots,2\tau};\ \dots;\ \overline{(k-1)\tau+1,\dots,k})$ и $\beta^x = (\overline{1,\tau+1,\dots,(k-1)\tau+1};\ \overline{2,\tau+1,\dots,(k-1)\tau+2};$ и $\dots;\ \overline{\tau,2\tau,\dots,k})$. Блоки обозначены чертой. Здесь числа $1,2,\dots,k$ заменяют, с целью удобства записи, $\omega_1, \omega_2,\dots,\omega_k$. Покажем, что выполняется условие I.

Действительно, если $i,t \in \pi_a$, то они соответствуют парам $i=(s_e z_k)$ и $t=(s_e z_f)$, в которых первые компоненты равны. Имеем: $q^x_i(\omega_1)+q^x_i(\omega_2)+\dots+q^x_i(\omega_\tau)=q^x_s(y_1)\times q^x_{z_k}(v_1)+q^x_{s_e}(y_1)q^x_{z_k}(v_2)+\dots+q^x_{s_e}(y_1)q_{z_k}(v_\tau)=q^x_{s_e}(y_1)$, так как $\sum_{i=1}^{\tau} q^x_{z_k}(v_i)=1$, $q^x_t(\omega_1)+\dots+q^x_t(\omega_\tau)=q^x_{s_e}(y_1)q^x_{z_f}(v_1)+\dots+q^x_{s_e}(y_1)q^x_{z_f}(v_\tau)=q^x_{s_e}(y_1)$, так как $\sum_{i=1}^{\tau} q_{z_f}(v_i)=1$, что доказывает выполнение условия I. Аналогично можно убедиться в справедливости выполнения условия 2. Далее, $\sum_{j\in\alpha^x_a} q^x_i(\omega_j)$ есть $q^x_{s_e}(y)$, $\sum q^x_i(\omega_j)$ есть $q^x_{z_f}(v)$, где $(yv)=g \in \alpha^x_a \cap \beta^x_b$. Наконец, очевидно, что $\alpha^x\beta^x=0$. Наоборот, если существует разбиения π,τ и α^x,β^x для всех $x\in X$, удовлетворяющие соответственно условиям I–3 и I–4 теорем I.3 и I.6, мы можем легко определить матрицы переходных вероятностей СМ A и B, а также распределения вероятностей выходных букв. Например,

$$\sum_{j\in\alpha^x_a} q^x_i(\omega_j) = q^x_i(y_a),\ \sum_{j\in\beta^x_b} q^x_i(\omega_j) = q^x_i(v_b) \text{ и т.д.}$$

Наглядное изображение рассматриваемой декомпозиции приведено на рис.I.5.

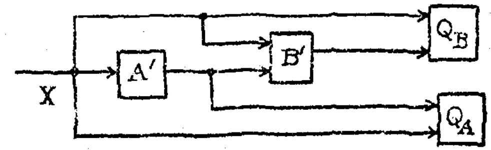


Рис. I.5

Здесь Q_A и Q_B – выходные преобразователи машин A и B соответственно.

Аналогичным образом доказывается теорема о декомпозиции в случае, когда выходной преобразователь ВПМ B зависит как от входной буквы и состояния машины B, так и от состояния машины A, рис.I.6.

Т е о р е м а I.7: *Для декомпозиции* $C=(C',\{Q(x)\})$ на каскадно соединенные ВПМ A и B с параллельным расположением выходных преобразователей и в случае, когда выходной преобразователь хвостовой машины B зависит от входной буквы x, состояния машины B и состояния машины A, необходимо и достаточно существование каскадной декомпозиции C' на A' и B' и существование для каждой буквы x двух разбиений α^x и β^x множества W таких, что:

I. $\alpha^x\beta^x=0$,

2. для любых двух блоков $\pi_a\in\pi$ и $\alpha_b\in\alpha$ любых $i,t\in\pi_a$

$$\sum_{j\in\alpha^x_b} q^x_i(\omega_j) = \sum_{j\in\alpha^x_b} q^x_t(\omega_j)$$

3. разбиения α^x и β^x независимы, то есть: для любых $i\in S\times Z$ и любых двух блоков α^x_a и β^x_b

$$q_i(\omega_g) = \Big(\sum_{j\in\alpha^x_a} q^x_i(\omega_j)\Big)\Big(\sum_{j\in\beta^x_b} q^x_i(\omega_j)\Big),$$
$$g\in\alpha^x_a\cap\beta^x_b$$

где π и τ -разбиения множества F, определяющие декомпозицию C' на A' и B'.

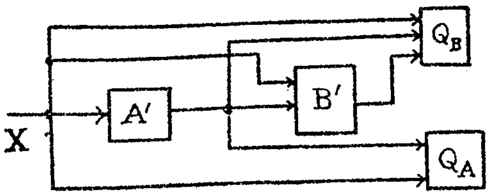


Рис. I.6.

Наконец, мы можем ограничиваться декомпозицией с общим для обеих машин A и B выходным преобразователем Q_C рис.I.7. В этом случае теоремы о декомпозиции ВПМ совпадают с теоремами о декомпозиции СМ.

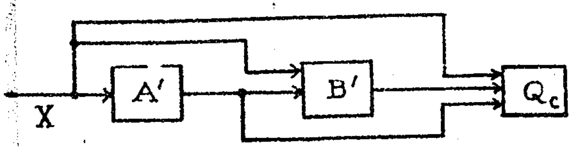


Рис. I.7.

I.4. О декомпозиции с произвольным соединением автоматов

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – вероятностные автоматы, которые мы можем соединять не накладывая ограничений типа параллельность, последовательность, каскадность и т.д. на вид соединений. В этом случае мы будем говорить, что автоматы соединены произвольным образом. Следующая теорема взята из [13] и приводится без доказательства, поскольку в главе IУ мы приведем обобщение этой теоремы и соответствующие доказательства.

Т е о р е м а I.8. Произвольная СМ $A=(X,S,\{H(x)\})$ с числом состояний n декомпозируется с расщеплением состояний на две машины, каждая из которых связана с другой, и при этом одна из них имеет два состояния, а вторая $n-1$ состояние.

Г Л А В А 2

Декомпозиция обобщенных автоматов

Обобщенные автоматы были введены фактически как "техническое средство для простого доказательства некоторых теорем в задачах представимости событий вероятностными автоматами [5], [14]. Хотя идея обобщения вероятностных автоматов напрашивалась сама собой, обобщенные автоматы не расширили класса событий, представимых в вероятностных автоматах.

В данной главе мы рассматриваем декомпозицию [15], [16], [17] обобщенных автоматов с тем, чтобы в последующих главах применить этот результат в различных задачах декомпозиции вероятностных автоматов.

Определение 2.I: По аналогии с [5], о.а. A^0 есть пятерка $A^0=(X,S,\{M(x)\},g_0,f_0)$, где X – входной алфавит, $S=(s_1,s_2,\ldots s_n)$ – множество состояний, $M(x)$ – матрица, связанная с буквой $x\in X$, g_0 -n-мерный вектор-строка (начальный вектор), f_0 – n-мерный вектор-столбец (вектор конечных состояний); компоненты $M(x)$, g_0 и f_0 – суть действительные числа.

Иногда под о.а. будем подразумевать четверку

$$(X, S, \{M(x)\}, g_0)$$

Определение 2.2: Каскадное произведение обобщенных автоматов $A_1^0=(X, S^1=(s_1^1,\ldots,s_n^1),\{M^1(x_i)\}, g_0^1=(p_1,\ldots,p_n))$, $A_2^0=(X\times Y, S^2=(s_1^2,\ldots,s_m^2),$ $\{M^2(x_i y_j)\}, g_0^2)$, Y – множество букв $y_1,\ldots,y_n$, генерируемых автоматом A_1^0 при нахождении его в состояниях $s_1^1, s_2^1,\ldots,s_n^1$, соответственно, есть автомат $A_1^0\circ A_2^0=(X,S^1\times S^2,\{M(x_i)\},g_0)$, где $g_0=(p_1g_0^2, p_2g_0^2,\ldots,p_ng_0^2)$, $M(x_i)=M^1(x_i)\circ\{M^2(x_i y_j)\}$ – каскадное произведение матрицы $M^1(x_i)$ и множества $\{M^2(x_i,y_j)\}$, т.е. матрица вида

$$\begin{bmatrix} p_{11}M^2(x_i y_1) \cdots p_{1n}M^2(x_i y_1) \\ p_{21}M^2(x_i y_2) \cdots p_{2n}M^2(x_i y_2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p_{n1}M^2(x_i y_n) \cdots p_{nn}M^2(x_i y_n) \end{bmatrix} \quad (2.I)$$

где P_{ij} - элементы $M^1(x_i)$. Каскадное произведение автоматов означает их последовательное соединение. Если для каждой буквы x_i $M^2(x_i, y_j) = M^2(x_i)$ для всех $y_j \in Y$, тогда произведение $A_1^\circ \circ A_2^\circ$ называется прямым произведением автоматов и означает их параллельное соединение.

Определение 2.3: Автомат A° допускает последовательную декомпозицию на автоматы A_1° и A_2°, если в автомате $A_1^\circ \circ A_2^\circ$ выделяется подавтомат $A^{\circ\prime}$, изоморфный A° и $|A_1^\circ| < |A^\circ|$, $|A_2^\circ| < |A^\circ|$, $|A|$ - число состояний автомата A.

Т е о р е м а 2.I. Для того, чтобы о.а. A° допускал последовательную декомпозицию на автоматы A_1° и A_2° необходимо и достаточно существование двух разбиений π и τ множества S состояний автомата A° на непересекающиеся подмножества, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$, таких, что:

I. $\pi \cdot \tau = 0$

2. $m < |A^\circ|, k < |A^\circ|, |\pi_i| < |A^\circ|, |\tau_j| < |A^\circ|, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}$

($|\pi_i|$ - число элементов подмножества π_i разбиения π)

3. Для каждого π_a произвольных π_b, π_c и всех $x \in X$ либо $\operatorname{sign} P^x_{i\tau_a \cap \pi_b} = \operatorname{sign} P^x_{i\tau_a \cap \pi_c}$ для всех $i \in \pi_a$ и всех $\tau_a \in \tau$ либо $\operatorname{sign} P^x_{i\tau_a \cap \pi_b} = -\operatorname{sign} P^x_{i\tau_a \cap \pi_c}$ для всех $i \in \pi_a$ и всех $\tau_a \in \tau$.

4. Для каждого π_a, произвольных $i, j \in \pi_a$ и произвольных τ_b, τ_c (τ_b может совпадать с τ_c) и всех $x \in X$:

$$\frac{P^x_{i\tau_b \cap \pi_1}}{P^x_{j\tau_c \cap \pi_1}} = \frac{P^x_{i\tau_b \cap \pi_2}}{P^x_{j\tau_c \cap \pi_2}} = \dots = \frac{P^x_{i\tau_b \cap \pi_m}}{P^x_{j\tau_c \cap \pi_m}},$$

где P^x_{ij} - элементы матрицы $M(x)$ автомата A°.

Пусть условия теоремы выполнены. Рассмотрим π_i и π_j. Пусть $P^x_{i\tau_b \cap \pi_i} = \alpha^x_{ij} P^x_{i\tau_b \cap \pi_j}$, где α^x_{ij} - некоторое действительное число. Покажем, что для любых $\tau_k \in \tau$, $P^x_{i\tau_k \cap \pi_i} = \alpha^x_{ij} P^x_{i\tau_k \cap \pi_j}$. Действительно, это следует из равенства $P^x_{i\tau_b \cap \pi_i} / P^x_{i\tau_k \cap \pi_i} = P^x_{i\tau_b \cap \pi_j} / P^x_{i\tau_k \cap \pi_j}$. Рассмотрим некоторое π_a. Используя условия 3 и 4 теоремы, можно доказать также, что $P^x_{i\tau_k \cap \pi_i} = \alpha^x_{ij} P^x_{i\tau_k \cap \pi_j}$ и для любого $i \in \pi_i$.

Подмножества π_i и π_j определяют соответствующие подматрицы в матрицах $M(x)$ автомата A°. Пусть π_d - максимальное подмножество по числу элементов в π. Подматрицы $\pi_i \pi_j$ $i, j = 1, 2, \dots, m$ увеличим до размеров $|\pi_d| \times |\pi_d|$, дополняя их столбцами и строками. Их можно заполнить так, чтобы полученная матрица имела вид (2.I). При этом подматрица $\pi_i \pi_j$, умноженная на α^x_{ij}, будет совпадать поэлементно с подматрицей $\pi_i \pi_j$. Согласно определениям 2.2 и 2.3, числа α^x_{ij} определяют элементы матрицы $M^1(x)$ автомата A_1°, а подматрица $\pi_i \pi_j$ есть матрица $M^2(x, y_i)$ автомата A_2°. Необходимость условий теоремы очевидна.

Г Л А В А 3

Постановка и решение некоторых задач в теории декомпозиции вероятностных автоматов

3.I. Условия существования декомпозируемого вероятностного автомата, реализующего заданное вход-выходное соотношение.

Рассмотрим ВА $A = (S, X, Y, \{[a_{ij}(y/x)]\})$, где S, X, Y – множества состояний, входных и выходных букв, а $[a_{ij}(y/x]$ – матрица вероятностей парехода из состояния i в j и получения выходной буквы y при продаче буквы x. Декомпозицию ВА A, заданного в такой форме, можно изучать либо используя результаты теорем: I.3, I.4, I.5, I.6, либо, рассматривая ВА как обобщенный автомат, использовать теорему 2.I. Будем интерпретировать ВА A как каскадное соединение СМ $\bar{A}_1 = (S, X, \{\Sigma_y [a_{ij}(y/x)]\})$ с СМ $\bar{A}_2 = (S', X \times S, \{[\bar{a}_{ij}(x, s)]\})$, где $|S'| = |Y|$, в $[\bar{a}_{ij}(x, s)]$ все строчки одинаковы и элемент $\bar{a}_{ij}(x, s)$ ее есть вероятность генерирования выходной буквы y_j под воздействием x, когда СМ $\bar{A}_1$ находилась в состоянии $s \in S$.

Определение 3.I. Вход-выходное соотношение есть функция $P = P(v/u)$, где (v, u) – пара слов одинаковой длины из выходного алфавита Y и входного алфавита X соответственно, принимающая значения из интервала $[0, 1]$ и удовлетворяющая ограничениям

I. $P(\lambda/\lambda) = 1$, где λ – пустое слово,

2. $\Sigma_y P(vy/ux) = P(v/u)$, $\forall\ x, y$

Определение 3.2: Для класса $E(X,Y)$ всех функций левая производная функции P относительно пары (u'/v') есть

$$P_{[u',v']} = \begin{cases} P(vv'/uu')/P(v'/u'), & \text{если } P(v'/u') > 0 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Т е о р е м а 3.I,[17]: Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ – множество

функций из $E(X,Y)$. Тогда в.а. A, для которого $P_i = P_i(A)$, где $P_i(A)$ – множество $P_i(v/u)$ – вероятностей получения слова v на выходе A, находящегося в состоянии i при входном слове u, существует и допускает последовательную декомпозицию на автоматы A_1 и A_2, тогда и только тогда, когда I) для любого i и любой пары (x, y), $P_i(y/x) \neq 0$, функция $P_{i[x,y]}$ есть выпуклая комбинация функций P_i с коэффициентами λ_{ij}^{x}, 2) матрица $[\lambda_{ij}^{x}]_{n \times n}$ есть подматрица косого произведения матрицы $[\alpha_{ij}^{x}]_{m \times m}$ и множества матриц $\{[\beta_{ik}^{x}]_{k \times k}\}$ согласно разбиениям τ и π, $m, k < n$ для всех $x \in X$, 3) матрица $[P_i(y/x)]_{n \times n}$, все строчки которой одинаковы и равны $P_1(y/x), \ldots, P_n(y/x)$, допускает каскадную декомпозицию по разбиениям τ и π, согласно теореме 2.I, на матрицу $[q_i(y^1/x)]_{m \times m}$ и можнество $\{[\tau_1(y^2/x)], [\tau_2(y^2/x)], \ldots, [\tau_m(y^2/x)]\}$,

4) $\Sigma_y q_i(y^1/x) = 1$, $\forall\ i = \overline{1,m}$,

$\Sigma_y \tau_j(y^2/x, f) = 1$, $\forall\ j = \overline{1,k}$, $y = (y^1, y^2)$

Пусть A накрывается каскадным произведением автоматов $A_1 = (X, S^1, Y^1, \{[P_{fg}^1(y^1/x)]\})$ и $A_2 = (X \times S^1, S^2, Y^2, \{[P_{ts}^2(y^2/x, f)]\})$. Состояние i автомата A', описывающего A_1 и A_2, есть пара (f, t), где f и t – состояния автоматов A_1 и A_2 соответственно. Аналогично, состоянию j соответствует пара (g, s). Тогда выражение $P_i(yv/xu)$ для A' запишется в виде

$$\sum_{(g,s)} P_{fg}^1(y^1/x) P_{ts}^2(y^2/x, f) P_{gs}(v/u) \qquad (I.I)$$

Поскольку A определен на некотором подмножестве $S_0 \subset S^1 \times S^2$, в (I.I) рассмотрим только члены с индексом $(g, s) \in S_0$. Перепишем (I.I) в виде

$$P_i(yv/xu)/P_i(y,x) = \sum_{(g,s)} P_{fg}^1(y^1/x) P_{ts}^2(y^2/x, f) P_{gs}(v/u) P_i(y/x) \qquad (I.2)$$

Из (I.2) видно, что левая часть есть выпуклая комбинация чисел $P_{gs}(v/u)$, $(g,s) \in S_0$. Необходимость остальных условий очевидна. Выполнение условия I означает существование в.а. A, и, согласно [2], $a_{ij}(y/x) = \lambda_{ij} P_i(y/x)$, где $a_{ij}(y,x)$ – вероятность автомата A перейти из i

в j под воздействием x и выдать при этом на выходе y. При выполнении условий 2 и 3 $a_{ij}(y/x) = \alpha_{ts}(x)\,\beta_{ts}(x,f)\,q_f(y^1/x)\,\tau_t(y^2/x,f) = P^1_{ts}(y^1/x)\,P^2_{ts}(y^2/x,f)$, что вместе с выполнением условия 4 означает существование автоматов A_1 и A_2, соединенных последовательно и накрывающих A.

3.2. Беспетельная декомпозиция вероятностного автомата, представленного в виде последовательного соединения датчиков Бернулли и детерминированного автомата.

Т е о р е м а 3.2: [18] Произвольную стохастическую матрицу H^o размерности $n \times n$ можно представить в виде

$$H^o = \sum_{i=1}^{k} q_i D_i \quad , \quad H^o = [P^o_{ij}] , \qquad (2.I)$$

где D_i - стохастическая матрица, элементы которых равны 0 или 1 (мы их будем называть элементарными),

$$\sum_{i=1}^{k} q_i = 1 \quad , \quad 0 < q_i \leq 1 \quad , \quad k \leq n^2 - n + 1$$

Докажем сначала, что

$$H^o = P_1 D^1 + (1 - P_1) H^1 \qquad (2.2)$$

и $\nu_0 < \nu_1$,

где $P_1 = \min_i \max_j (P^o_{ij})$, а ν_i - число нулей в матрице H^i. Пусть $I = \{i,j\}$, $i = \overline{1,n}$ - множество пар целых чисел, таких, что для каждого i P^o_{ij} есть максимальный элемент в строке i. Тогда D^1 строится следующим образом: $d^1_{ij} = 0$ если $(i,j) \notin I$ и $d^1_{ij} = 1$, если $(i,j) \in I$. Ясно, что матрица $H^o - P_1 D^1$ неотрицательна, ибо $P_1 \leq P^o_{ij}$ для всех $(i,j) \in I$. Далее $(H^o - P_1 D^1)/(1 - P_1) = H^1$ - стохастическая матрица, ибо сумма строк матрицы $H^o - P_1 D^1$ равна $1 - P_1$. Это доказывает (2.2). Пусть $P^o_{ij} = P_1$, тогда $P^1_{ij} = 0$. Поэтому $\nu_0 < \nu_1$. Разлагая аналогично H^1, мы доказываем теорему полностью.

Л е м м а 3.I. Автономный ВА B можно представить в виде последовательно соединения двух автоматов: ВА с матрицей переходов, все строчки которой одинаковы и равны q_1,

$q_2, \dots, q_k$ и детерминированного автомата (ДА) D с k входными буквами и с матрицами переходов D_i, [18].

Для представления ВА B в виде автоматов g и D, соединенных последовательно, введем запись $B(g,D)$. Входными буквами для автомата D являются буквы $x_1, x_2, \dots, x_k$ связанные с состояниями $s_1, s_2, \dots, s_k$ автомата g, являющегося бернуллиевским датчиком.

Построим матрицу переходов H ВА $B(g,D)$, описывающую совместную работу g и D. Пусть $s'_1, s'_2, \dots, s'_n$ - состояния автомата D. Состояния автомата $B(g,D)$ есть пары вида $(s_1,s'_1), (s_1,s'_2), \dots, (s_1,s'_n), (s_2,s'_1), (s_2,s'_2), \dots, (s_2,s'_n), \dots, (s_k,s'_1), (s_k,s'_2), \dots, (s_k,s'_n)$.

Вероятность перехода из состояния (s_i, s'_j) в состояние (s_t, s'_d) для автомата $B(g,D)$ вычисляется как

$$P(s_i, s'_j \to s_t, s'_d) = P(s_i \to s_t)\, P_x(s'_j \to s'_d) , \qquad (2.3)$$

где $P(s_i \to s_t)$ - вероятность автомата g перейти из s_i в s_t, а $P_x(s'_j \to s'_d)$ есть вероятность автомата D перейти из s'_j в s'_d под воздействием буквы x, связанной с состоянием s_i автомата g.

Не ограничивая общность, будем считать, что в разложении (2.I) среди матриц $D(i)$ нет одинаковых. Составим матрицу H согласно выражению (2.3). Нетрудно видеть, что в матрице H будет ровно n различных строчек. Введем разбиение τ множества L состояний ВА $B(g,D)$ на непересекающиеся блоки $A_1, A_2, \dots, A_n$; $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = L$, и в каждый блок поместим состояния ВА $B(g,D)$, соответствующие одинаковым отрочкам матрицы H. Легко проверить, что матрица H, укрупненная по τ, H_τ совпадает с матрицей $H(B)$: $H_\tau = H(B)$.

Пусть теперь $H(B)$ имеет нулевые столбцы. Введем в рассмотрение вспомогательную матрицу $\overline{H}(B)$ размерности $(n+1) \times (n+1)$, полученную из $H(B)$ прибавлением $(n+1)$-ой строки и $(n+1)$-го столбца по следующему правилу: все элементы новой строки нулевые, кроме элементов, расположенных под нулевыми столбцами исходной матрицы, а $(n+1)$-й столбец целиком нулевой. Таким образом, в $\overline{H}(B)$

все столбцы, кроме $(n+1)$-го, ненулевые. Нетрудно видеть, что матрица $\bar{H}$, полученная из разложения (2.I) матрицы $\bar{H}(B)$, согласно формуле (2.3), содержит n различных строчек, и разбиение τ, построенное так же, как и для H, дает укрупнение $\bar{H}_\tau$ матрицы $\bar{H}$ до матрицы $H(B)$: $\bar{H}_\tau = H(B)$.

Лемма 3.I. легко обобщается на случай неавтономного ВА B_τ с входными буквами $y_1, y_2, \dots, y_\tau$. Для этого надо произвести разложение (2.I) для каждой входной буквы. Мы получим бернуллиевские датчики $g_1, \dots, g_\tau$. Выберем $k = \max\{k_1,\dots,k_\tau\}$ и каждую матрицу, описывающую датчик g_i, расширим до размерности k, дополняя ее нулевыми столбцами и в точности такими же, как и предыдущие k_i строк, строками. Тогда первая компонента разложения B_τ будет k-буквенным датчиком с τ входными буквами. Вторая компонента – ДА размерности n или $n+1$, причем входными буквами для него будут пары букв (x_i, g_j).

Итак, пусть имеем ВА B, представленный в виде $B \to (g, D)$. Пусть $D(x_1), D(x_2), \dots, D(x_m)$ – матрицы переходов автомата D для соответствующих входных букв $x_1, \dots, x_m$.

Множество Z состояний автомата g разобьем на непересекающиеся подмножества $A_1, \dots, A_k$, $\bigcup_{\tau=1}^{k} A_\tau = Z$ такие, что $s_i, s_j \in A_\tau \Leftrightarrow D(x_i) = D(x_j)$ для всех $\tau = \overline{1,k}$. Такие разбиения будем обозначать буквой π, $\pi = (A_1, \dots, A_k)$, где A_τ – блоки разбиения. Разбиение π полностью задается автоматом D.

Пусть разложение $B \to (g, D)$ таково, что ДА D разлагается на ДА D_1 и D_2, работающие параллельно. Найдем условия, дополнительные к разложимости D на D_1 и D_2, при которых ВА B разложим на ВА B_1 и B_2, работающие параллельно.

Введем $\pi_1 = (A_1, \dots, A_k)$ и $\pi_2 = (M_1, \dots, M_\ell)$, задаваемые на множестве состояний Z датчика g автоматам D_1 и D_2 соответственно.

Л е м м а 3.2: ВА B допускает параллельную декомпозицию на ВА B_1 и B_2, если π_1 и π_2 независимы и $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$.

Доказательство. Автомат g обладает свойством под-

становки (СП) по π_1 и π_2, и, следовательно, разлагается на датчики g_1 и g_2, работающие параллельно (см. теор. I.4).

С каждым блоком A_τ (соответственно M_τ) связана выходная буква x^1_τ (x^2_τ) соответствующего датчика g_1 или g_2. Входными буквами ДА D_1 и D_2 являются пары вида (x^1_τ, x^2_τ) (рис.3.I).

Состояния автоматов g_1 и g_2 есть блоки разбиений π_1 и π_2 и каждому состоянию $s \in Z$ соответствует пара $(A, M) = s$.

Пусть $p(x_j)$ – вероятность появления буквы x_j, связанной с состоянием s_j датчика g.

Тогда
$$\sum_{s_j \in A_\tau} p(x_j) = \sum_{(A,M) = s_j \in A_\tau} p(x^1, x^2), \qquad (2.4)$$
где $p(x^1, x^2)$ – вероятность одновременного появления x^1 и x^2 на выходах g_1 и g_2.

Но пара (A, M) соответствует состоянию $s \in A_\tau$, тогда и только тогда, когда $A \in A_\tau$ при произвольных M. Отсюда следует, что работа ДА D_1 определяется только выходом датчика g_1. Аналогично можно доказать, что работа D_2 зависит только от датчика g_2. Таким образом, при выполнении условий леммы реализацию, приведенную на рис.3.I, можно заменить реализацией, приведенной на рис.3.2. Наконец, автоматы g_1 и D_1 (g_2 и D_2) реализуют некоторый ВА B_1 (B_2).

Рассмотрим разложение ВА B на автоматы g и D, при котором D разлагается на последовательно соединенные автоматы D_1 и D_2.

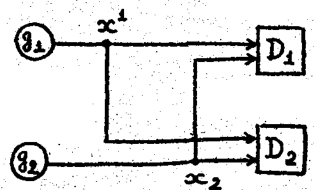


Рис. 3.I.

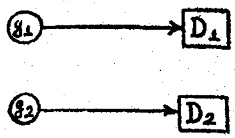


Рис. 3.2.

Входными буквами для D_2, являются пары (x_i, y_k), где y_k – выходные буквы автомата D_1, x_i – выходные буквы датчика g, связанные с состояниями s_i. Введем разбиения $\pi_1=(A_1,\dots,A_k)$, $\pi_2=(M_1,\dots,M_l)$, задаваемые на множестве состояний g автоматами D_1 и D_2 соответственно:

$$s_i, s_j \in A_\tau \Leftrightarrow D_1(x_i)=D_1(x_j), \quad \tau=\overline{1,k}$$

$$s_i, s_j \in M_t \Leftrightarrow D_2(x_i,y_k)=D_2(x_j,y_k), \quad t=\overline{1,l}$$

Лемма 3.3. ВА B допускает последовательную декомпозицию на ВА B_1 и B_2, если π_1 и π_2 независимы и $\pi_1\pi_2=0$.

Доказательство леммы 3.3 аналогично доказательству леммы 3.2.

Лемма 3.4. При выполнении условий леммы 3.2 существуют ВА B_1^0 и B_2^0, имеющие то же число состояний, что и D_1 и D_2 соответственно (рис.3.2) и являющиеся компонентами параллельной декомпозиции исходного ВА B.

Доказательство. Пусть n – размерность автомата D, а n_1 и n_2 – размерности автомата D_1 и D_2 (рис.3.2) и пусть $n_1\cdot n_2=n$. Пусть сеть на рис.3.2 описывается матрицей H. Согласно леммам 3.I и 3.2 существует разбиение τ, таков, что $H_\tau=H(B)$, где $H(B)$ – матрица ВА B.

Введем множество S^1 состояний ВА B_1: $S^1=\{t_1^1,t_2^1,\dots,t_\alpha^1\}$ и соответственно для ВА B_2 множество состояний $S^2=\{t_1^2,t_2^2,\dots,t_\beta^2\}$. Тогда множество S состояний сети на рис.3.2 есть декартово произведение $S^1\times S^2=S$, т.е. множество пар вида (t_i^1, t_j^2).

Автоматы B_1 и B_2 моделируют в смысле леммы 3.I некоторые ВА B_1^0 и B_2^0, т.е. существуют разбиения τ^1 и τ^2, такие, что $H^1_{\tau^1}=H(B_1^0)$, где H^1 – матрица ВА B_1,

а $H(B_1^0)$ – матрица ВА B_1^0. Аналогично, $H^2_{\tau^2}=H(B_2^0)$. Пусть $\tau^1=(E_1^1,E_2^1,\dots,E_{n_1}^1)$ и $\tau^2(E_1^2,E_2^2,\dots,E_{n_2}^2)$. Введем разбиение $\bar\tau=\tau^1\times\tau^2$ по следующему правилу: $\bar\tau=\{E_i^1\times E_j^2\}$, $i=\overline{1,\alpha}$, $j=\overline{1,\beta}$, т.е. каждый блок $E_i^1\times E_j^2$ разбиения $\bar\tau$ есть декартово произведение блока $E_i^1\in\tau^1$ и блока $E_j^2\in\tau^2$. Легко показать, что введенное таким образом $\bar\tau$ есть не что иное, как τ, по которому сеть изображенная на рис.3.2, моделирует ВА B. Заменяя B_1 на B_1^0 и B_2 на B_2^0, мы получим компоненты параллельной декомпозиции исходного вероятностного автомата.

Рассмотрим случай $n_1\times n_2>n$. В этом случае автомат D изоморфен некоторому подавтомату прямого произведения автоматов D_1 и D_2. Но для сети, состоящей из автомата g, последовательно соединенного с автоматом $D_1\times D_2$, справедливо изложенное выше утверждение о возможности замены B_1 и B_2 на B_1^0 и B_2^0 размерности n_1 и n_2 соответственно. Исходный же автомат B изоморфен некоторому подавтомату прямого произведения автоматов B_1 и B_2.

Аналогичная лемма легко может быть доказана для последовательного соединения двух автоматов.

Пусть теперь имеем разложение ВА B, $B\to(g,D)$ и пусть D допускает беспетельную декомпозицию в сеть C, состоящую из автоматов $D_1,D_2,\dots,D_N$ с числом состояний n_1, $n_2,\dots,n_N$, связанных друг с другом определенным образом. Найдем условия, дополнительно налагаемые на датчик g, при которых ВА B допускает беспетельную декомпозицию на ВА $B_1,B_2,\dots,B_N$, соединенные точно так же, как и автоматы $D_1,D_2,\dots,D_N$ и с теми же числами состояний $n_1,\dots,n_N$.

Пусть D_α – автомат из C. Обозначим через $1,2,\dots,(n(\alpha)+1)$ входные каналы D_α, а буквы, поступающие по этим каналам, обозначим через $x_i, y^1, y^2,\dots,y^{n(\alpha)}$. Вектор $(x_i, y^1_{i_1}, y^2_{i_2},\dots,y^{n(\alpha)}_{i_{n(\alpha)}})$ есть входная буква для D_α.

Введем разбиения $\pi_\alpha=(B_1^\alpha,B_2^\alpha,\dots,B_{\tau_\alpha}^\alpha)$, множества Z состояний автомата g, задаваемые соответственно автоматами $D_1,D_2,\dots,D_N$, следующим образом:

$s_i, s_j\in B_t^\alpha$, $D_\alpha(x_i, y^1_{i_1}, y^2_{i_2},\dots,y^{n(\alpha)}_{i_{n(\alpha)}})=$

$= D_\alpha(x_j, y^1_{i_1}, \ldots, y^{n(\alpha)}_{i_{n(\alpha)}}), \alpha = \overline{1,N}, t = \overline{1,\tau_\alpha}$.

Т е о р е м а 3.3: Автономный ВА B допускает беспетельную декомпозицию на ВА $B_1, \ldots, B_N$, связанные так же, как и ДА $D_1, \ldots, D_N$, входящие в разложение детерминированной части ВА B и с теми же числами состояний $n_1, n_2, \ldots, n_N$, если разбиения $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N$ независимы в совокупности и $\prod_{\alpha=1}^{N} \pi_\alpha = 0$.

Докажем теорему по индукции по числу N автоматов, составляющих детерминированную часть D разложения $(g \to D)$ автомата B.

Для случая $N=2$ теорема доказана (см. леммы 3.2 – 3.4). Предположим, она верна для любого ВА B, у которого детерминированная часть разлагается в беспетельную сеть C из N автоматов $D_1, \ldots, D_N$. Докажем, что тогда теорема справедлива и для произвольного ВА $\overline{B}$, детерминированная часть которого разложима в сеть $\overline{C}$ из $N+1$ автоматов $D_1, \ldots, D_N, D_{N+1}$.

Очевидно, что всегда можно выделить в сети $\overline{C}$ один автомат (его и будем обозначать D_{N+1}) так, чтобы можно было рассматривать $\overline{C}$ как последовательное (параллельное) соединение сети C из N автоматов и ДА D_{N+1}. Пусть π_C – разбиение, определяемое на g сетью C, рассматриваемой как один автомат. Покажем, что если $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{N+1}$, удовлетворяют условиям теоремы, то π_C и π_{N+1} удовлетворяют условиям леммы 3.2 или 3.3 в зависимости от вида соединений автоматов C и D_{N+1}.

Пусть $\pi_C = (A_1, \ldots, A_p)$. Положим без ограничения общности, что C и D_{N+1} соединены параллельно. Имеем: $\forall s_i, s_j \in Z$

$$s_i, s_j \in A_\gamma \leftrightarrow D_c(x_i) = D_c(x_j), \ \gamma = \overline{1,p},$$

а это выполняется, если и только если одновременно

$$D_\alpha(x, y^1_{i_1}, \ldots, y^{n(\alpha)}_{i_{n(\alpha)}}) = D_\alpha(x_j, y^1_{i_1}, \ldots, y^{n(\alpha)}_{i_{n(\alpha)}}), \alpha = \overline{1,N},$$

т.е. $\pi_C = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_N$. Тогда с учетом условий теоремы 3.3 $\pi_C \pi_{N+1} = 0$. Независимость π_C и π_{N+1} прямо следует из совокупной независимости $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{N+1}$ и того, что $\pi_C = \pi_1 \cdots \pi_N$.

Таким образом, автомат $\overline{B} = (\bar{g} \to \overline{C})$ можно заменить двумя параллельно (последовательно) соединенными автоматами B и B_{N+1}. Но согласно предположению индукции, B разлагается в беспетельную сеть из $B_1, \ldots, B_{N-1}, B_n$. Следовательно, и $\overline{B}$ также можно заменить беспетельной сетью из $B_1, \ldots, B_N, B_{N+1}$. Теорема доказана.

Перейдем к обратной задаче. Рассмотрим беспетельную сеть C, состоящую из N ВА $B_1, \ldots, B_N$ с числом состояний $n_1, \ldots, n_N$. Представим каждый B_i в виде $B_i \to (g_i, D_i)$. Заменим в сети C автоматы B_i на (g_i, D_i) и обозначим полученную сеть через C'. Введем датчик g, состоящий из N параллельно работающих датчиков $g_1, \ldots, g_N$. Выход g пусть нагружен на автоматы D_i и представляет собой вектор X, компоненты которого $x^1, \ldots, x^N$ – буквы, генерируемые датчиками $g_1, \ldots, g_N$. Каждый из автоматов воспринимает только те компоненты вектора X, которые генерируются датчиками, подведенными к D_i в сети C'. Таким образом, справедлива

Л е м м а 3.5. Произвольная беспетельная сеть C может быть смоделирована на сети той же конфигурации с детерминированными компонентами той же (или на единицу большей) размерности, что и в сети C и с общим датчиком g.

Из леммы 3.5 следует, что для беспетельной декомпозиции ВА в сеть данной конфигурации необходимо существование такого разложения $B \to (g, D)$, при котором соответствующий автомат D допускает декомпозицию того же вида (имеется в виду характер связей и число состояний автоматов-компонент).

Лемма 3.5 и теорема 3.3 доставляют необходимые и достаточные условия беспетельной декомпозиции автономного вероятностного автомата. Если условия теоремы и леммы 3.5 выполняются для каждой буквы входного алфавита, то они применимы и к неавтономному автомату. Пример. Пусть B – автономный ВА, заданный матрицей

$$\frac{1}{40}\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 0 & 5 & 15 \\ 5 & 0 & 15 & 5 & 0 & 15 \\ 15 & 5 & 0 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Согласно лемме 3.I B можно представить в виде $B \to (g, D)$, где g – четырехбуквенный датчик, имеющий матрицу перехода

$$\frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 15 & 5 & 15 \\ 5 & 15 & 5 & 15 \\ 5 & 15 & 5 & 15 \\ 5 & 15 & 5 & 15 \end{bmatrix},$$

состояния s_1, s_2, s_3, s_4 и выходные буквы x, y, z, t, D – ДА с четырьмя матрицами переходов:

$$D(x)=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad D(y)=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$D(z)=\begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad D(t)=\begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Легко видеть, что D раскладывается на последовательно соединенные автоматы D_1 и D_2 (рис.3.3)

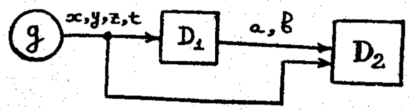


Рис.3.3.

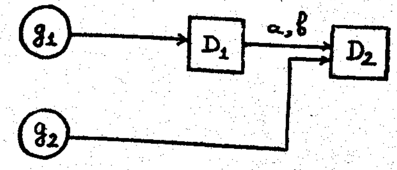


Рис.3.4.

Автомат D_1 с состояниями a и b описывается матрицами:

$$D_1(x)=\begin{bmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{bmatrix}, \ D_1(y)=\begin{bmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{bmatrix}, \ D_1(z)=\begin{bmatrix} 0&1 \\ 1&0 \end{bmatrix}, \ D(t)=\begin{bmatrix} 0&1 \\ 1&0 \end{bmatrix}.$$

Автомат D_2 описывается матрицами:

$$D_2(x,a)=D_2(z,a)=\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}, \ D_2(x,b)=D_2(z,b)=\begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$D_2(y,a)=D_2(t,a)=\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}, \ D_2(y,b)=D_2(t,b)=\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$$

Автоматы D_1 и D_2 определяют рассмотренным выше образом на множестве состояний датчика g разбиения

$$\pi_1 = (\overline{s_1, s_2}\ ; \overline{s_3, s_4}), \quad \pi_2 = (\overline{s_1, s_3}\ ; \overline{s_2, s_4})$$

Нетрудно видеть, что π_1 и π_2 независимы и $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$, т.е. выполнены условия леммы 3.3. Тогда датчик g разлагается на датчики g_1 и g_2, работающие параллельно и описываемые соответственно матрицами:

$$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Следовательно, сеть на рис.3.3 может быть заменена сетью, приведенной на рис. 3.4.

Но $g_1 \to D_1$ реализует автомат B_1 с матрицей

$$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

а $g_2 \to D_2$ - автомат B_2, описываемый матрицами

$$\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Согласно леммы 3.4 автоматы B_1 и B_2 могут быть заменены автоматами B_1° и B_2° с теми же числами состояний, что и D_1 и D_2. Матрицы ВА B_1° и B_2° имеют вид:

$$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

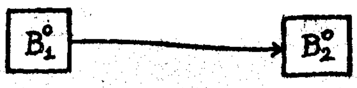


Рис.3.5.

Поэтому реализация рис.3.4 заменяется реализацией, приведенной на рис.3.5.

Легко видеть, что полученные таким образом B_1° и B_2° являются компонентами обычной последовательной декомпозиции исходного ВА B.

Г Л А В А 4

Декомпозиция с расщеплением состояний

В главе I мы уже вводили понятие декомпозиции с расщеплением состояний. Здесь мы рассматриваем ряд задач, в которых именно расщепление состояний позволяет декомпозировать различные автоматы на системы "малых" подавтоматов, соединенных различным спосообом. Следует отметить, что в прикладных вопросах теории декомпозиции, например таких, как введение избыточности в автоматы с целью повышения их надежности, а также в структурной теории вероятностных автоматов [20], [21] , именно принцип расщепления состояния и понятие накрытия, введенное нами вместе с концепцией случайного растяжения тактности [22] , оказывается решающим.

4.I. Петельная декомпозиция стохастических систем.

Под произвольной или петельной декомпозицией мы понимаем такую декомпозицию, когда на соединение автоматов в системе декомпозиции не наложены ограничения или, другими словами, каждый из автоматов может быть связан с каждым.

Т е о р е м а 4.I. Каждый ВА допускает произвольную декомпозицию с расщеплением состояний , [22].

Доказательство. Рассмотрим автономный вероятностный автомат A с матрицей перехода $H_{n\times n}$. Пусть z - общий знаменатель чисел, заполняющих H . Тогда, как это нетрудно увидеть,

$$H = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{z} D_i = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{z-1} D_i + \frac{1}{z} D_z , \qquad (I.I)$$

где D_i - стохастические матрицы с элементами 0 и 1 . Умножим и разделим матрицы D_i , $i = \overline{1, z-1}$ на $z-1$. Перепишем соотношение (I) в виде

$$H = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{z} D_i = \frac{z-1}{z}\sum_{i=1}^{z-1} D_i' + \frac{1}{z} D_z , \qquad (I.2)$$

где $D_i' = \frac{1}{z-1} D_i$. $\sum_{i=1}^{z-1} D_i'$ образует стохастическую матрицу. Разложим ее так же, как H , согласно (I.I) и подставим в (I.2):

$$\frac{z-1}{z}\cdot\frac{z-2}{z-1}\sum_{i=1}^{z-2} D_i'' + \frac{z-1}{z} \times$$
$$\times \frac{1}{z-1} D_{z-1} + \frac{1}{z} D_z ,$$

$$\text{где} \quad D_i'' = \frac{1}{z-2} D_i' . \qquad (I.3)$$

Рассмотрим автономный ВА. B_1 с двумя состояниями, генерирующий на выходе буквы y_1^1 и y_2^1 с вероятностями $\frac{z-1}{z}$ и $\frac{1}{z}$ соответственно, и автомат B_2 , для которого y_1^1 и y_2^1 - входные буквы. При букве y_1^1 на выходе B_2 появляются буквы y_1^2 и y_2^2 с вероятностями $\frac{z-2}{z-1}$ и $\frac{1}{z-1}$, при букве y_2^1 появляется y_3^2 с вероятностью 1 . Таким образом, на выходе B_2 генерируются буквы y_1^2 , y_2^2 , y_3^2 с вероятностями $\frac{z-1}{z}\cdot\frac{z-2}{z-1}$, $\frac{z-1}{z}\cdot\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{z}$. Пусть теперь выход B_2 является входом для автомата B_3 , матрицы переходов которого для букв y_1^2 , y_2^2 , y_3^2 есть соответственно $\sum_{i=1}^{z-2} D_i''$, D_{z-1}, D_z. Нетрудно увидеть, что автоматы B_1 , B_2 , B_3 ведут себя так же, как исходный вероятностный автомат A .

Проделав с матрицей $\sum_{i=1}^{z-2} D_i''$ то же, что с H , мы получим выражение типа (I.3). Тогда ВА A разложится на автоматы B_1' , B_2' , B_3' , имеющие по два состояния, и B_4' с числом состояний n . Продолжая эту процедуру, мы в конце придем к разложению A на ВА: $B_1, B_2, \dots, B_{z-1}$, имеющие по два состояния, и ДА. B_z с n состояниями, который согласно предыдущей теореме допускает произвольную декомпозицию на подавтоматы с числом состояний 2.

Согласно теореме 4.I автономный ВА A декомпозируется в систему, состоящую из вероятностных автоматов $B_1, B_2, \dots, B_{z-2}, B_{z-1}$ и детерминированного автомата B_z . Пусть автомат B_z декомпозируется на последовательно соединенные автоматы B_z^1 и B_z^2 . Тогда можно говорить о беспетельной декомпозиции ВА A на автоматы $B_1, B_2, \dots, B_{z-1}$, B_z^1 , B_z^2

Т е о р е м а 4.2. Необходимым и достаточным условием беспетельной декомпозиции ВА A с расщеплением состояний на автоматы $B_1, B_2, \ldots, B_{21}, B_2^1, B_2^2$ является наличие у автомата A по крайней мере одного нетривиального разбиения со свойством подстановки, [22].

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из теоремы 4.I. Действительно, если $A_{n\times n}$ обладает разбиением τ с СП, то, как это нетрудно показать, каждая матрица D_i в разложении (4.I), включая конечную матрицу, будет обладать СП по τ и, следовательно, B_2 допускает последовательную декомпозицию. Необходимость очевидна.

Рассмотрим стохастическую систему $A=(S,\{A(x)\}), A(x)=[a_{ss'}(x)], s,s'\in S$. Другими словами система A описывается множеством цепей Маркова $M_1(A), \ldots, M_m(A)$, где $m=|X|$ – мощность X. Пусть $B=(S_1\times S_2\times\cdots\times S_k,\{C(x)\})$ – система, описывающая совокупность k систем $A_i, i=\overline{1,k}$: $A_1=(S_1,\{A_1(x,s_2,s_3,\ldots,s_k)\}), A_2=(S_2,\{A_2(x,s_1,s_3,\ldots,s_k)\}), \ldots, A_k=(S_k,\{A_k(x,s_1,s_2,\ldots,s_{k-1})\})$, где входным алфавитом и множеством матриц, например для A_1, являются $X\times S_2\times\cdots\times S_k$ и $\{[a^1_{s_1s_1'}(x,s_2,\ldots,s_k)]\}$ и $[c_{s_1s_2\ldots s_k,s_1's_2'\ldots s_k'}(x)]=$ $=[a^1_{s_1s_1'}(x,s_2,\ldots,s_k)\ldots a^k_{s_ks_k'}(x,s_1,\ldots,s_{k-1})]$.

Иначе говоря система B допускает петельную декомпозицию на системы $A_1,\ldots,A_k$.

Система B над алфавитом X накрывает систему A над тем же алфавитом X мощности m, если существует одно-однозначное отображение $f(x): X\to X$ и разбиение τ множества состояний системы B на непересекающиеся подмножества такие, что имеет место $M^{\tau}_{x_i}(B)=M_{f(x_i)}(A)$ для всех $x_i\in X$, где запись M^{τ} означает укрупнение цепи M по разбиению τ.

Пусть задана система $A=(S,\{A(x)\})$ мощности n, $(|S|=n)$. Как мы уже сказали, любая система A мощности n петельно декомпозируема на две системы мощности 2 и $n-1$ или, продолжая декомпозицию – на $n-1$ систем мощности 2, [13].

Мы рассмотрим общий случай петельной декомпозиции системы A мощности n на две системы мощности m и $n-\ell$, $m<n$, [23].

Теорема 4.3. Система A мощности n допускает петельную декомпозицию на две системы мощности m и $n-\ell$ если $m-\ell\geqslant 1$.

Доказательство. Рассмотрим две петельно связанные системы $A_1=(S_1,\{[a^1_{ij}(x,s_2)]\})$ и $A_2=(S_2,\{[a^2_{ij}(x,s_1)]\})$ мощности m и $n-\ell$, где $\ell=m-1$. Пусть $s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^m$ и $s_2^1, s_2^2, \ldots s_2^{n-\ell}$ – состояния систем A_1 и A_2. Введем следующее кодирование состояний $s^1, s^2, \ldots, s^{m(n-\ell)}$ системы $B=(S_1\times S_2,\{[c_{ij}(x)]\})$: $s^1=(s_1^1,s_2^1)$, $s^2=(s_1^1,s_2^2), \ldots, s^{n-\ell}=(s_1^1,s_2^{n-\ell}), s^{n-\ell+1}=(s_1^2,s_2^1), s^{n-\ell+2}=(s_1^2,s_2^2), \ldots, s^{2(n-\ell)}=$

$$=(s_1^2,s_2^{n-\ell}),\ldots, s^{(m-\ell)(n-\ell)+1}=(s_1^m,s_2^1),\ldots, s^{m(n-\ell)}=(s_1^m,s_2^{n-\ell}). \quad (I.4)$$

Тогда первая строчка матрицы $[c_{ij}(x)]$ будет иметь вид: $a^1_{11}a^2_{11}, a^1_{11}a^2_{12},\ldots, a^1_{11}a^2_{1n-\ell}, a^1_{12}a^2_{11},\ldots, a^1_{12}a^2_{1n-\ell},\ldots, a^1_{1m}a^2_{11},\ldots, a^1_{1m}a^2_{1n-\ell-1}, a^1_{1m}a^2_{1n-\ell}$. Пусть $\tau_{11},\tau_{12},\ldots,\tau_{1n}$ –

первая строчка матрицы $A(x)$. Введем следующее разбиение τ множества $S_1\times S_2$: $\tau=(\overline{s^1};\overline{s^2};\ldots;\overline{s^{n-\ell}};\overline{s^{n-\ell+1},\ldots,s^{2(n-\ell)}};\ldots;\overline{s^{(m-\ell)(n-\ell)+1},\ldots,s^{m(n-\ell)}}$ и, полагая $\ell=m-1$, составим систему уравнений

$$\begin{cases} a^1_{11}a^2_{1i}=\tau_{1i}, & i=1,\ldots,n-m+1 \\ a^1_{1j}=\tau_{1n-m+1+j}, & j=2,\ldots,m \end{cases} \quad (I.5)$$

Решение ее имеет вид: $a^1_{11}=\sum_{i=1}^{n-m+1}\tau_{1i}$,

$$a^2_{1i}=\tau_{1i}/a^1_{11}, \quad i=1,\ldots,n-m+1.$$

Решая аналогичные системы для остальных строчек $A(x)$, мы определим все элементы матриц систем A_1 и A_2. Таким образом, A петельно декомпозировалась на A_1 и A_2 мощности m и $n-m+1$, откуда очевидным образом следует справедливость теоремы для любых $\ell>m-1$.

Теперь мы приведем примеры существования системы A мощности n, не удовлетворяющей условиям теоремы и не допускающей петельной декомпозиции на две системы мощности 2 и $n-2$.

Во-первых, при $n=4$ система петельно декомпозируется на две системы мощности 2 и 2 только при выполнении условий петельной декомпозиции, приведенных в [8], а именно при условии если существуют два разбиения τ_1 и τ_2 такие, что:

I. τ_1 и τ_2 взаимонезависимы; [8],

2. $\tau_1 \cdot \tau_2 = 0$ (I.6)

Прежде, чем рассмотреть второй пример приведем следующее утверждение:

Утверждение 4.I. Система B накрывает систему A при любом способе кодирования тогда и только тогда, когда она накрывает A по крайней мере для одного какого-нибудь способа кодирования.

Действительно, выбор кодирования, отличного от способа (I.4), по существу означает одно-однозначное отображение множества $S_1 \times S_2$ на себя и связанную с этим перестановку строк и столбцов матриц $\{[c_{ij}(\alpha)]\}$ и выбор соответствующего разбиения множества $S_1 \times S_2$. Поэтому если B накрывает A для одного какого-нибудь способа кодирования, то B накроет A и для любого другого способа. Пусть теперь не существует такого разбиения множества $S_1 \times S_2$, при котором B накрывает A при заданном способе кодирования (например, способе (I.4)). Предположим, однако, что найдется такой способ кодирования и такое разбиение множества $S_1 \times S_2$, что B будет накрывать A. Тогда, согласно вышесказанному B накроет A и для любого другого кодирования и, в частности, для кодирования (I.4), что противоречит допущению.

Пусть теперь некоторая матрица системы A' мощности 5 из множества $\{A'(\alpha)\}$ такова, что для каких-нибудь двух ее строчек i и j имеет место

$$\tau_{i1} = \tau_{i2} = \tau_{i3} = \tau_{i4} \neq \tau_{i5}\ , \quad \tau_{j1} \neq \tau_{j2} = \tau_{j3} = \tau_{j4} = \tau_{j5}\ .$$

Рассмотрим строчку i. Простой проверкой легко убедиться, что существует множество разбиений для способа кодирования (I.4) такое, что каждое разбиение из этого множества содержит два состояния в последнем блоке и по одному состоянию в остальных блоках и система уравнений, определяемая каждым таким разбиением, имеет решение для строчки i. Если же рассматривать строчку j, то любое разбиение,

для которого соответствующая система уравнений будет иметь решение, таково, что два состояния должны находиться в первом блоке разбиения. Отсюда следует, что при способе кодирования (I.4) не существует никакого разбиения для которого две системы уравнений для строки i и j соответственно имели бы решение. Тогда, согласно утверждению 4.I, вышесказанное справедливо и для любого другого способа кодирования.

Поскольку для каждой системы A мощности n существует система B, состоящая из петельно соединенных систем $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ и накрывающая A, $n-1$ можно считать верхней оценкой числа систем A_i мощности 2, $i = \overline{1, n-1}$.

Утверждение 4.2. Существует система A, для которой система B, накрывающая ее требует ровно $n-1$ петельно связанных систем мощности 2.

Действительно, система A' из второго примера, приведенного нами, декомпозируется только на системы A'_1 и A'_2 мощности 2 и 4. В свою очередь система A'_2 петельно декомпозируется только при выполнении условий (4.6).

4.2. Некоторые частные задачи декомпозиции с расщеплением состояний. Декомпозиция бернуллиевского датчика

Рассмотрим автономный В[illegible] A_m, описываемый стохастической матрицей H_m. Представим H_m в виде:

$$H_m = \sum_{i=1}^{k} q_i D_i\ , \qquad (2.I)$$

где $0 < q_i \leq 1$, $k \leq n^2 - n + 1$, D_i – элементарные матрицы.

Как уже говорилось, автомат A_m можно представить как два последовательно соединенных автомата A_1^0 и A_2^0, где A_1^0 – бернуллиевский датчик букв α_i с вероятностями q_i, $(i = \overline{1, k})$; A_2^0 – детерминированный автомат, описываемый матрицами D_i.

Определим условия, при которых A_1^0 разлагается на два последовательно соединенных автомата A_{11}^0 и A_{12}^0, полагая $k \geqslant n$. Пусть H_1 – матрица автомата A_1^0. Строки матрицы H_1 одинаковы. Введем матрицы $Q_1 = [p_{ij}]_{m_1 \times m_1}$ и $\{Q_2\} = \{[\tau_{ij}]_{m_2 \times m_2}\}$, описывающие автоматы A°_{11} и A°_{12} соответственно, где m_1 – число состояний автомата A°_{11} ; m_2 – число состояний A°_{12} ; $\{Q_2\}$ – множество матриц переходных вероятностей автомата A°_{12}. Обозначим $m_1 \times m_2 = k$ и введем матрицу Q , описывающую последовательное соединение автоматов A°_{11} и A°_{12}.

Пусть $s_1, s_2, \dots, s_{m_1}$ – состояния автомата A°_{11} , $s'_1, s'_2, \dots, s'_{m_2}$ – состояния A°_{12} и $R_1, R, \dots, R_k$ – состояния автомата $(A^{\circ}_{11} \cdot A^{\circ}_{12})$, описывающего последовательное соединение A°_{11} и A°_{12} . Состояния $R_1, \dots, R$ кодируем следующим образом:

$$\begin{gathered} R_1 = s_1 s'_1 , \ R_2 = s_1 s'_2 , \dots , R_{m_2} = s_1 s'_{m_2}, R_{m_2+1} = s_2 s'_1, \\ R_{m_2+2} = s_2 s'_1 , \dots , R_{2m_2} = s_2 s'_{m_2} , \dots , \\ R_{k-m_2} = s_{m_1} s'_1 , R_{k-m_2+1} = s_{m_1} s'_2 , \dots , R_k = s_{m_1} s'_{m_2} . \end{gathered} \tag{2.2}$$

При кодировании (2.2) произвольная строка матрицы имеет вид:

$$P_{11}\tau_{11}, P_{11}\tau_{12}, \dots, P_{11}\tau_{1m_2}, P_{12}\tau_{11}, \dots, P_{12}\tau_{1m_2}, \dots, P_{1m_1}\tau_{11}, \dots, P_{1m_1}\tau_{1m_2} \tag{2.3}$$

Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_k \ - \tag{2.4}$$

строки матрицы H_1 .

Потребуем поэлементного совпадения строк (2.3) и (2.4)

$$\begin{gathered} P_{11}\tau_{11} = a_1 , \ P_{11}\tau_{12} = a_2 , \dots , P_{11}\tau_{1m_2} = a_{m_2} , \\ P_{12}\tau_{11} = a_{m_2+1} , \dots , P_{12}\tau_{1m_2} = a_{2m_2} , \dots , P_{1m_1}\tau_{1m_2} = a_k \end{gathered} \tag{2.5}$$

Используя условие нормировки $\sum_{i=1}^{m_2} \tau_{1i} = 1$, получим

$$\begin{gathered} P_{11} = a_1 + a_2 + \dots + a_{m_2} , \ P_{12} = a_{m_2+1} + \dots + a_{2m_2} , \\ \dots , P_{1m_1} = a_{k-m_2+1} + \dots + a_k . \end{gathered} \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) получим условия представления автомата A°_1 в виде последовательно соединенных автоматов A°_{11} и A°_{12}, каждый из которых также является бернуллиевским датчиком:

$$\tau_{11} = \frac{a_1}{a_1 + \dots + a_{m_2}} = \frac{a_{m_2+1}}{a_{m_2+1} + \dots + a_{2m_2}} = \dots = \frac{a_{k-m_2+1}}{a_{k-m_2+1} + \dots + a_k}$$

$$\tau_{12} = \frac{a_2}{a_1 + \dots + a_{m_2}} = \frac{a_{m_2+2}}{a_{m_2+1} + \dots + a_{2m_2}} = \dots = \frac{a_{k-m_2+2}}{a_{k-m_2+1} + \dots + a_k}$$

. . . .

$$\tau_{1m_2} = \frac{a_{m_2}}{a_1 + \dots + a_{m_2}} = \frac{a_{2m_2}}{a_{m_2+1} + \dots + a_{2m_2}} = \dots = \frac{a_k}{a_{k-m_2+1} + \dots + a_k} .$$

Выполнение этих условий гарантирует разбиение автомата A°_1 на автоматы A°_{11} и A°_{12} .

Пусть $z = m'_1 \times m'_2$ – общий знаменатель элементов матрицы H_m , а значит и H_1 ; m'_1, m'_2 – натуральные числа и пусть $m'_1 \leq n-1$, $m'_2 \leq n-1$. Разукрупним [11] H_1 до матрицы H_2 так, чтобы каждый элемент матрицы H_2 был равен $1/z$.

Для матрицы H_2 приведенное условие декомпозируемости выполняется, и поэтому H_2 можно представить как декартово произведение двух матриц, описывающих два последовательно соединенных автомата. С другой стороны, укрупнение H_2 дает H_1 и, следовательно, эти два автомата моделируют автомат A°_1 .

Если H_m может быть укрупнена по разбиению τ , всегда можно найти такое разложение H_m в виде (2.I), что каждую матрицу D_i можно будет укрупнить по тому же разбиению τ . Таким образом, исходный в.а. A_m допускает каскадную декомпозицию при выполнении условий следующей теоремы.

Т е о р е м а 4.4, [22] : Достаточным условием декомпозируемости с расщеплением состояний автономного ВА на четыре каскадно-соединенных автомата, последние два из которых детерминированные, является возможность укрупнения матрицы переходных вероятностей автомата по некоторому нетривиальному разбиению и выполнение условия: $z = m'_1 \times m'_2$; $1 < m'_1 \leq n-1$; $1 < m'_2 \leq n-1$ (z – общий знаменатель элементов матрицы автомата, m'_1 , m'_2 – натуральные числа).

Рассмотрим матрицу H_1 , описывающую автономный ВА, который представляет собой бернуллиевский датчик.

Обозначим $a_1, \dots, a_k$ элементы произвольной строчки матрицы H_1 . Рассмотрим два бернуллиевских датчика B_1

и B_2 с матрицами переходов $G_1 = [p_{ij}]_{(k-1)(k-1)}$ и $G_2 = [\tau_{ij}]_{(k-1)(k-1)}$ соответственно.

Обозначим через $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ состояния датчика B_1, а $s_1', s_2', \ldots, s_{k-1}'$ – состояния датчика B_2. Пусть датчики B_1 и B_2 работают параллельно и M – матрица, описывающая их работу. Состояния результирующего датчика закодируем следующим образом: $s_1 s_1' = R_1,\ s_1 s_2' = R_2, \ldots, s_1 s_{k-1}' = R_{k-1}$, $s_2 s_1' = R_k, \ldots, s_2 s_{k-1}' = R_{2(k-1)}, \ldots, s_{k-1} s_1' = R_{(k-1)^2-k+1}, \ldots, s_{k-1} s_{k-1}' = R_{(k-1)^2}$.

Пусть матрица G_1 имеет вид: $p_{s_i s_1} = p_{i1} = a_1 + a_2\ (\forall i = \overline{1,k-1})$ $p_{s_i s_2} = p_{i2} = a_3,\ p_{s_i s_3} = p_{i3} = a_4, \ldots, p_{s_i s_{k-1}} = p_{ik-1} = a_k$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$, а матрица G_2: $\tau_{s_i' s_1'} = \tau_{i1} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}\ (\forall i = \overline{1,k-1})$. Выбор $\tau_{s_i' s_2'} = \tau_{i2},\ \tau_{s_i' s_3'} = \tau_{i3}, \ldots, \tau_{s_i' s_{k-1}'} = \tau_{i,k-1}$ — произвольный.

Переходные вероятности первой строки матрицы M при этом следующие: $P_{R_1 R_1} = p_{s_1 s_1} \tau_{s_1' s_1'} = a_1,\ P_{R_1 R_2} = p_{s_1 s_1} \tau_{s_1' s_2'} = (a_1 + a_2) \times \tau_{s_1' s_2'}, \ldots, P_{R_1 R_{k-1}} = p_{s_1 s_1} \tau_{s_1' s_{k-1}'} = (a_1 + a_2) \tau_{s_1' s_{k-1}'}$;

$P_{R_1 R_k} = p_{s_1 s_2} \tau_{s_1' s_1'} = a_3 \tau_{s_1' s_1'},\ P_{R_1 R_{k+1}} = p_{s_1 s_2} \tau_{s_1' s_2'} = a_3 \tau_{s_1' s_2'}, \ldots,$

$P_{R_1 R_{2(k-1)}} = p_{s_1 s_2} \tau_{s_1' s_{k-1}'} = a_3 \tau_{s_1' s_{k-1}'}, \ldots, P_{R_1 R_{(k-1)^2}} = p_{s_1 s_{k-1}} \times \tau_{s_1' s_{k-1}'} = a_k \tau_{s_1' s_{k-1}'}$.

На множестве $R_1, R_2, \ldots, R_{k-1}$ введем разбиение $\tau = (R_1; R_2, \ldots, R_{k-1}; \ldots; R_{(k-1)^2-k+1}, \ldots, R_{(k-1)^2})$ Матрица M, укрупненная по разбиению τ, дает матрицу H_1. Таким образом справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4.5, [24] : Произвольный автомат, описывающий бернуллиевский датчик, допускает параллельную декомпозицию с расщеплением состояний.

Введем укрупнение стохастического вектора-строки $\ell = p_1, p_2, \ldots, p_n$ по разбиению $\tau = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$ как операцию получения стохастического вектора-строки $(\ell)_\tau = q_1, q_2, \ldots, q_k$ по правилу:

$$q_j = \sum_{i \in B_j} p_i, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Пусть $\{(\ell)_\tau\}$ – множество всех возможных строк $(\ell)_\tau$, получаемых из стохастического вектора-строки ℓ при укрупнении ее по различным разбиениям. Примем, что H – матрица, все строки которой принадлежат множеству $\{(\ell)_\tau\}$ и пусть W – класс всех таких различных матриц.

Пусть число состояний автоматов A_1 и A_2 равно $n-1$ и $H_{(n-1)^2 \times (n-1)^2}$ описывает работу автоматов A_1 и A_2, соединенных последовательно, где A_1 – вероятностный, A_2 – детерминированный. Матрица $H_{(n-1)^2 \times (n-1)^2}$ имеет в каждой строке не более $(n-1)$ отличных от нуля элементов. При этом ненулевые элементы произвольной строки расположены либо в клетках строчки с номерами $1 + (n-1)i$, либо в клетках с номерами $2 + (n-1)i$ и т.д., либо в клетках с номерами $(n-1) + (n-1)i$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, (n-2)$. Строки матрицы $H_{(n-1)^2 \times (n-1)^2}$ будем называть строкой типа j, если ненулевые элементы этой строки расположены в клетках с номерами $j + (n-1)i$ $(i = 0, \ldots, n-2)$. Всего различных типов строк окажется $n-1$.

Т е о р е м а 4.6, [24] : Автономный вероятностный автомат A, матрица переходных вероятностей которого $H_{n \times n} \in W$, допускает декомпозицию с расщеплением состояний в виде двух последовательно соединенных автоматов A_1 – вероятностного и A_2 детерминированного, если в матрице $H_{n \times n}$ автомата A совпадают произвольные две строки и в каждой строке матрицы имеется хотя бы один нулевой элемент.

Доказательство. Пусть $\ell = p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ – строка матрицы H_n, из которой получаются все остальные ее строки $a^i = q_1^i, q_2^i, \ldots, q_{n-1}^i$ при укрупнении ℓ по некоторому разбиению $\tau = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$.

Рассмотрим первую строку a^1. Внесем в блок B_j разбиения τ индекс элемента, находящегося в клетке j строки a^1; если этот элемент нулевой, то блок B_j оставляется пустым. Если в клетке записан элемент, равный сумме некоторых элементов из строки ℓ, то в блок записываются индексы элементов, составляющих данную сумму. Далее, индексы $1, 2, \ldots, n-1$, внесенные в блоки заменим числами $1, 1+(n-1)\cdot 1, 1+(n-1)\cdot 2, \ldots, 1+(n-1)(n-2)$. Аналогично поступим с элементами второй строки a^2 матрицы $H_{n \times n}$, но внесенные в блоки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ индексы заменим числами $2, 2+(n-1)\cdot 1, 2+(n-1)\cdot 2, \ldots, 2+(n-1)(n-2)$.
Такое построение проводится для всех строк матрицы $H_{n \times n}$.

В итоге получим разбиение $\tau=(B_1,B_2,\ldots,B_n)$.

Пусть в матрице $H_{n\times n}$ совпадают строки a_i и a_j. Строки матрицы $H_{(n-1)^2\times(n-1)^2}$ с номерами, входящими в блоки $B_1,B_2,\ldots,B_i,\ldots,B_{j-1}$ будем считать строками типа $1,2,\ldots,i,\ldots,j-1$ соответственно; строки, входящие в блок B_j – i-го типа; строки, входящие в блоки $B_{j+1},\ldots,B_n$ – строками типа $j,j+1,\ldots,n-1$ соответственно.

Рассмотрим i-ю строку матрицы $H_{(n-1)^2\times(n-1)^2}$. Пусть j –тип этой строки; $q^j_1,q^j_2,\ldots,q^j_n$ – элементы j-й строки матрицы $H_{n\times n}$. В клетку $j+(n-1)\cdot 0$ записывается элемент q^j_i, в клетку $j+(n-1)\cdot 1$ – элемент q^j_2 и т.д., в клетку $j+(n-1)(n-2)$ – элемент q^j_n. Отсюда $H_{n\times n}=(H_{(n-1)^2\times(n-1)^2})_\tau$. Матрицы переходных вероятностей автоматов A_1 и A_2 можно найти из $H_{(n-1)^2\times(n-1)^2}$.

4.3. Декомпозиция при неполной укрупняемости

Мы рассмотрим метод декомпозиции вероятностного автомата, в котором обычные условия декомпозиции, рассмотренные в главе I ослаблены, [25].

Пусть $H=[p_{ij}]$ – стохастическая матрица размерности $n\times n$. Рассмотрим систему разбиений $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\pi$ множества состояний вероятностного автомата на непересекающиеся подмножества:

$\tau_i=(B_1(\tau_i),B_2(\tau_i),\ldots,B_m(\tau_i))$; $i=1,2,\ldots,m$; $B_j(\tau_i)$-j-ый блок разбиения τ_i ; $\pi=(B_1(\pi),\ldots,B_m(\pi))$. Пусть матрица H относительно этой системы удовлетворяет условиям

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in B_\tau(\tau_1)} p_{ij}=\mathrm{const.}\quad \forall\ i\in B_1(\pi),\ \tau=\overline{1,m} \\
&\sum_{j\in B_\tau(\tau_2)} p_{ij}=\mathrm{const.}\quad \forall\ i\in B_2(\pi),\ \tau=\overline{1,m} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\sum_{j\in B_\tau(\tau_m)} p_{ij}=\mathrm{const.}\quad \forall\ i\in B_m(\pi),\ \tau=\overline{1,m}
\end{aligned}
\tag{4.I}
$$

Под неполной укрупняемостью стохастической матрицы H

мы подразумеваем выполнение для нее условий (4.I) относительно системы разбиений $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\pi$. Нетрудно видеть, что условия (4.I) при $\tau_1=\tau_2=\tau_3=\cdots=\tau_m=\pi$ превращаются в обычные условия укрупняемости стохастической матрицы.

Л е м м а 4.I. *Существует матрица* $H'=[p'_{ij}]$ *такая, что для нее найдется система разбиений* $\tau_1',\tau_2',\ldots,\tau_m',\pi'$, удовлетворяющая условиям (4.I) и при этом $\tau'=\tau_1'=\tau_2'=\cdots=\tau_m'$ и некоторое разбиение β такое, что матрица H', укрупненная по β, даст матрицу H, $H'_\beta=H$.

Рассмотрим матрицу $E=[q_{ij}]$ размерности $n\times mn$. Укажем процедуру заполнения i-й строки матрицы. Пусть $i\in B_j(\pi)$. Элементы q_{ij} положим равными 0, $\tau=1,2,\ldots,n$, за исключением q_{ik}, которые совпадают с p_{ik}, $k\in B_1(\tau_j)$. Далее, все элементы $q_{i\tau}$, $\tau=n+1,\ldots,2n$ положим равными 0, за исключением q_{ik}, которые совпадают с $p_{i(k-n)}$, $(k-n)\in B_2(\tau_j)$ и т.д. Элементы $q_{i\tau}$, $\tau=(m-1)n+1,\ldots,mn$ положим равными 0, за исключением q_{ik}, которые совпадают с $p_{i[k-(m-1)n]}$, $k-(m-1)n\in B_m(\tau_j)$. Составим матрицу E_1 добавлением $n(m-1)$ строк к матрице E следующим образом: $(kn+i)$-я строка матрицы E_1 совпадает с i-й строкой матрицы E для всех $i=\overline{1,n}$ и $k=0,1,\ldots,m-1$.

Введем разбиение

$$\beta_1=(\overline{1,n+1,\ldots,(m-1)n+1}\,;\,\overline{2,n+2,\ldots,(m-1)n+2}\,;\cdots;\,\overline{n,2n,\ldots,mn}).$$

В матрице E вычеркнем столбцы, состоящие только из нулей. Соответственно вычеркиваются строки с номерами этих столбцов. Полученную матрицу обозначим через H'. Введем систему разбиений $\tau_1^0,\ldots,\tau_m^0,\pi^0$; $\tau_1^0=\cdots=\tau_m^0=\tau^0=(\overline{1,\ldots,n};\cdots;\overline{(m-1)n+1,\ldots,mn})$. Рассмотрим произвольный блок $B_j(\pi)$. Пусть этот блок содержит состояния $i_1,i_2,\ldots,i_\tau$. Тогда соответствующий блок π^0 запишется в виде i_1,i_1+n, $i_1+2n,\ldots,i_1+(m-1)n$, i_2, $i_{2+n},\ldots$, $i_{2+(m-1)n},\ldots,i_\tau,i_{\tau+n},\ldots,i_\tau+(m-1)n$. Наконец, вычеркивая из разбиений τ^0, π^0 и β_1 номера состояний, совпадающие с номерами вычеркнутых строк и столбцов матрицы E_1, получим разбиения $\tau_1',\tau_2',\ldots,\tau_m',\pi',\beta$, относительно которых матрица H' удовлетворяет условиям леммы I.

Нетрудно указать размерность d матрицы H', $d = \sum_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_j(\tau_i)\right)$, где $\left|\bigcup_{i=1}^{m} B_j(\tau_i)\right|$ – число элементов множества $\bigcup_{i=1}^{m} B_j(\tau_i)$.

Л е м м а 4.2. Существует матрица D такая, что для нее найдется разбиение τ'', по которому D обладает свойством подстановки, и разбиение γ, такое, что $D_\gamma = H$.

Рассмотрим матрицу $H' = [p'_{ij}]$ и для блока $B_1(\tau')$ образуем следующие суммы:

$$S_f = \sum_{j \in B_1(\tau')} p'_{ij} \; ; \quad f = \overline{1,m} \quad ; \; i \in B_f(\tau')$$

Пусть $S_k = \min\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ и $b(\tau')$ – подмножество $B_1(\tau')$, состоящее из τ' элементов. Рассмотрим i-ю строку, $i \in B_1(\tau')$. Элементы p'_{ij} этой строки $j \in b(\tau')$ представим в виде $p'_{ij} = x_{ij} + y_{ij}; x_{ij}, y_{ij} \geq 0$ так, чтобы выполнялось

$$S_f - \sum_{j \in b(\tau')} y_{ij} - S_k \tag{4.2}$$

Найдем $b(\tau') \subseteq B_1(\tau')$, удовлетворяющее (4.2) с минимально возможным $\tau' = \tau_1$. В матрице H' добавим $|B_1(\tau')| = Z$ столбцов с номерами $d+1$, $d+2, \dots, d+Z$. Элементы x_{ij} оставим в клетках i, j, а элементы y_{ij} запишем в добавленных клетках с номерами $i, j+d$ строки i. Под H' припишем строки с номерами, входящими в $B_1(\tau')$. И после этого в полученной матрице вычеркнем нулевые столбцы и строки с номерами этих столбцов. В результате получим матрицу размерности $d+\tau_1$ (D^1) в которой $\sum_{j \in B_1(\tau')} p_{ij} = const.$ для всех $i = 1, 2, \dots, d+\tau_1$. Пусть для простоты элементами $b(\tau_1)$ являются $1, 2, \dots, t$. Тогда D^1 будет укрупнима по $\alpha_1 = (B_1(\alpha_1), \dots, B_d(\alpha_1))$, где $B_j(\alpha_1) = j, j+d$, $j = 1, \dots, t$; $B_i(\alpha_1) = i$, $i = t+1, \dots, d$. Для блоков $B_2(\tau'), \dots, B_m(\tau')$ образуются соответствующие суммы типа (4.2) так же как и для $B_1(\tau')$ и определяются $b(\tau_2), \dots, b(\tau_m)$.

Легко показать, что полученная матрица D будет укрупнима по разбиению $\tau'' = \tau''_1 = \dots = \tau''_{m+1}$. При этом $B_i(\tau'') = B_i(\tau')\ \forall \overline{1,m}$, а $B_{m+1}(\tau'')$ будет состоять из состояний с номерами $d+1, d+2, \dots, d+\tau$, где $\tau = \sum_{i=1}^{m} \tau_i$. По-

добно тому, как мы определили разбиение для D^1, можно найти разбиение α, такое, что $D_\alpha = H$. Блоки разбиения γ имеют вид $B_j(\gamma) = \bigcup_{i \in B_j(\rho)} B_i(\alpha)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть заданы автономный вероятностный автомат A, описываемый матрицей H, и система разбиений $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m, \pi$, удовлетворяющая условиям (4.I). Согласно лемме 4.2 найдем матрицу размерности $n + \tau + d$ и разбиение γ, $D_\gamma = H$. Кроме того, D укрупнима по τ''.

Т е о р е м а 4.7. Автомат A декомпозируется на два последовательно соединенных автомата, если :

I) найдется разбиение μ, такое, что τ'' и μ окажутся независимыми;

2) $\tau + d < n$

3) система уравнений $\{p_{ij} = x_{ij} + y_{ij}\}$ имеет решение $x_{ij} \geq 0$, $y_{ij} \geq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $j \in \bigcup_{k=1}^{m} b(\tau_k)$.

4.4. Условия декомпозиции при расщеплении состояний

Рассмотрим вероятностный автомат $A = (X, S = (s_1, \dots, s_n), \{H(x) = [p_{ij}(x)]\})$. В случае автономного вероятностного автомата будем писать $A = (S, H)$.

Пусть M – некоторая стохастическая матрица, укрупнимая по разбиению π. Обозначим через $(M)_\pi$ матрицу, полученную в результате укрупнения.

ВА A π-укрупним, если π – укрупнимы все матрицы $H(x)$, $x \in X$. Автомат $(X, S_0 = (s_1, s_2, \dots, s_c), \{(H(x))_\pi\})$, полученный в результате укрупнения будем обозначать через $(A)_\pi$.

Пусть состояния $s_m, s_q, \dots, s_\tau$ множества S расщеплены и заменяются каждое на состояния $s_m^1, \dots, s_m^{\overline{m}}$; $s_q^1, \dots, s_q^{\overline{q}}; \dots; s_\tau^1, \dots, s_\tau^{\overline{\tau}}$, соответственно, где $\overline{m}$ – число состояний, на которое расщеплено s_m. Разбиение множества S', полученного таким образом из S, на непересекающиеся блоки будем называть покрытием множества S. Ясно, что по заданному покрытию можно однозначно восстановить, какие состояния из S и на сколько расщеплены. На-

Например, если покрытие $\Theta = (\overline{s_1^1, s_2, s_3^2}; \overline{s_1^2, s_1^3, s_3^1, s_4^1}; \overline{s_4^2})$, то ясно, что s_1 расщеплено на s_1^1, s_1^2, s_1^3; s_3 – на s_3^1, s_3^2; s_4 – на s_4^1, s_4^2. Для каждого покрытия Θ введем покрытие $\bar\Theta$ следующим образом: состояния $s_m^1, \dots, s_m^\tau$ поместим в один блок, состояния $s_q^1, s_q^2, \dots, s_q^\tau$ в другой и т.д. состояния $s_\tau^1, \dots, s_\tau^\tau$ – также в отдельный блок. Кроме того, будем считать, что каждое нерасщепленное состояние из S тоже образует блок. Для рассматриваемого примера $\bar\Theta = (\overline{s_1^1, s_1^2, s_1^3}; \overline{s_3^1, s_3^2}; \overline{s_4^1, s_4^2}; \overline{s_2})$ Ясно, что каждую стохастическую матрицу H можно [11], разукрупнить по любому покрытию Θ и не единственным образом, т.е. построить некоторую матрицу M такую, что $(M)_{\bar\Theta} = H$. Матрицу, полученную в результате разукрупнения H по покрытию Θ будем обозначать через ${}_\Theta(H)$. Тогда $({}_\Theta(H))_{\bar\Theta} = H$. Вероятностный автомат, полученный в результате разукрупнения всех матриц ВА A, будем обозначать ${}_\Theta(A)$. Аналогично будем писать $({}_\Theta(A))_{\bar\Theta} = A$.

Ниже будут рассмотрены условия последовательной и параллельной декомпозиции автономного ВА с расщеплением состояний. Результаты применимы и к неавтономным автоматам, если условия декомпозиции имеют место для всех букв входного алфавита.

Пусть в ВА A состояния $s_m, s_q, \dots, s_\tau$ расщепляются каждое на два. Рассмотрим покрытие $\Theta = (B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_j, \dots, B_k)$ в котором расщепленные состояния расположены только в двух блоках B_i и B_j. Без потери общности можно считать, что состояния $s_m^1, s_q^1, \dots, s_\tau^1$ расположены в блоке B_i, а состояния $s_m^2, s_q^2, \dots, s_\tau^2$ в B_j. В H под произвольной строчкой ℓ, $s_\ell \in B_j$ впишем строчки, совпадающие со строчками с номерами $m, q, \dots, \tau$, обозначив их через $m^2, q^2, \dots, \tau^2$, а строчки с номерами $m, q, \dots, \tau$ переобозначим и будем писать $m^1, q^1, \dots, \tau^1$. Справа от столбца с номером ℓ припишем нулевые столбцы (столбец нулевой, если все элементы его равны 0) по числу состояний $s_m, s_q, \dots, s_\tau$ и обозначим их номерами $m^2, q^2, \dots, \tau^2$. Как и для строк, столбцы с номерами $m, q, \dots, \tau$ переобозначим и будем писать $m^1, q^1, \dots, \tau^1$. Полученную таким образом матрицу обозначим через H'. В матрице H' образуем суммы:

$$R_j = \sum_{\ell \in B_i} p_{j\ell}, \quad j = 1, 2, \dots, m^1, q^1, \dots, \tau^1, \dots, m^2, q^2, \dots, \tau^2, \dots, n$$

$$\Delta_j = R_j - (p_{jm^1} + p_{jq^1} + \dots + p_{j\tau^1}), \quad j = \overline{1,n}$$

Введем обозначения:

$$\Delta^1 = \max_{j \in B_1} \Delta_j, \; \Delta^2 = \max_{j \in B_2} \Delta_j, \dots, \Delta^i = \max_{j \in B_i} \Delta_j, \dots,$$

$$\Delta^j = \max_{j \in B_j} \Delta_j, \dots, \Delta^k = \max_{j \in B_k} \Delta_j .$$

По заданному Θ построим $\bar\Theta = (\overline{s_1}; \overline{s_2}; \dots; \overline{s_{m^1}, s_{m^2}}; \overline{s_{q^1}, s_{q^2}}; \dots; \overline{s_{\tau^1}, s_{\tau^2}}; \dots; \overline{s_n})$. Ясно, что $(H')_{\bar\Theta} = H$ или ${}_\Theta(H) = H'$. Введем, кроме того, покрытие $\Theta' = (B_1, B_2, \dots, B_i \cup B_j, \dots, B_k)$.

Л е м м а. Для существования автономного ВА $({}_\Theta(A))_\Theta$, $A = (S, H)$, необходимо и достаточно существования ВА $({}_\Theta(A))_{\Theta'}$ и выполнение следующих неравенств:

$$\forall s_a \in B_1, \; R_a - \Delta^1 \geq 0; \; \forall s_b \in B_2, \; R_b - \Delta^2 \geq 0;$$
$$\dots; \; \forall s_\ell \in B_i, \; R_\ell - \Delta^\ell \geq 0; \dots; \; \forall s_t \in B_j,$$
$$R_t - \Delta^j \geq 0; \dots; \; \forall s_z \in B_k, \; R_z - \Delta^k \geq 0 .$$

Доказательство. Рассмотрим два произвольных блока, например B_ℓ и B_m покрытия Θ и в матрице H' выделим прямоугольную подматрицу, определяемую этими блоками, с числом строк $|B_\ell|$, числом столбцов $|B_m|$, где $|B|$ – обозначение числа элементов в блоке B, и элементами p_{ab}, где $s_a \in B_\ell$ и $s_b \in B_m$. Обозначим эту подматрицу через $B_\ell B_m$. Подматрицу, определяемую блоками разбиения, будем называть правильной, если поэлементная сумма строк ее одинакова для всех ее строк, и неправильной в противном случае.

Согласно условию леммы, т.е. существованию автомата $({}_\Theta(A))_\Theta$ в матрице H' все подматрицы кроме подматриц $B_d B_i$ и $B_d B_j$, $d = \overline{1,k}$, являются правильными. Рассмотрим строчку с номером f подматрицы $B_\ell B_i$, $1 \leq \ell \leq k$. Вероятность перехода p_{fm^1} из состояния s_f в состояние s_{m^1} запишем в виде суммы двух слагаемых $p_{fm^1} = x^1_{m^1}(f) + x^2_{m^1}(f)$. Аналогично запишем вероятности:

$P_{fq^1} = x^1_{q^1}(f) + x^2_{q^1}(f), \ldots, P_{f\tau^1} = x^1_{\tau^1}(f) + x^2_{\tau^1}(f)$.
Поскольку, для всех $s_j \in B_\ell$ имеет место $R_j - \Delta^\ell \geqslant 0$, мы можем в рассматриваемой строчке f вместо P_{fm^1}, $P_{fq^1}, \ldots, P_{f\tau^1}$ записать чис та $x^1_{m^1}(f), x^1_{q^1}(f), \ldots, x^1_{\tau^1}(f)$ выбрав их так, чтобы сумма элементов строчки была равна Δ^ℓ. Поступим аналогично и с другими строчками подматрицы $B_\ell B_i$. В подматрице $B_\ell B_j$ в строчке f элементы $P_{fm^2}, P_{fq^2}, \ldots, P_{f\tau^2}$ положим равными соответственно $x^2_{m^1}(f), x^2_{q^1}(f), \ldots, x^2_{\tau^1}(f)$. Так же дополним остальные строчки. Нетрудно видеть, что преобразованные таким образом подматрицы $B_\ell B_i$ и $B_\ell B_j$ окажутся правильными. Аналогичным образом преобразуем все подматрицы $B_d B_i$ и $B_d B_j$, $d = \overline{1,K}$. Полученную в результате матрицу обозначим через H''. Поскольку все подматрицы в H' являются правильными, имеет место существование автомата $(_\theta(A))_\theta$.

Теперь докажем необходимость. Рассмотрим ВА $\bar{A} = (X, \bar{S}, M = [q_{ij}])$. Пусть число состояний ВА $\bar{A}$ равно числу состояний ВА $_{\bar{\sigma}}(A)$ и состояния ВА $\bar{A}$ обозначены точно так же, как и состояния ВА $_{\bar{\sigma}}(A)$. Пусть, кроме того, ВА $\bar{A}$ укрупним по покрытиям $\bar{\sigma}$ и Θ. В матрице M попарно сложим столбцы с номерами m^1 и m^2, q^1 и q^2, $\ldots, \tau^1$ и τ^2, заменим столбцы $m^1, q^1, \ldots, \tau^1$ столбцами, полученными в результате сложения, а столбцы $m^2, q^2, \ldots, \tau^2$ оставим нулевыми. Преобразованную матрицу обозначим через $M' = [q'_{ij}]$. В M' рассмотрим подматрицу $B_\ell B_i$, $1 \leqslant \ell \leqslant K$, определяемую покрытием Θ. Нам следует показать, что $\forall s_f \in B_\ell$, $R'_f - \Delta'^\ell \geqslant 0$, где $R'_f = \sum_{t \in B_i} q'_{ft}$, $\Delta'_f = R'_f - (q'_{fm^1} + \cdots + q'_{f\tau^1})$, $\Delta'^\ell = \max_{s_f \in B_\ell} \Delta'^f$. Действительно, поскольку подматрица $B_\ell B_i$ в M является правильной, $\forall s_f \in B_\ell$, $R_f - \Delta^\ell \geqslant 0$, где $R_f = \sum_{t \in B_i} q_{ft}$, $\Delta_f = R_f - (q_{fm^1} + q_{fq^1} + \cdots + q_{f\tau^1})$, $\Delta^\ell = \max_{s_f \in B_\ell} \Delta_f$.

Ясно, что $\Delta^\ell = \Delta'^\ell$ и $\forall s_f \in B_\ell$, $R'_f \geqslant R_f$, откуда следует справедливость неравенств $R'_f - \Delta'^\ell \geqslant 0$.

Рассмотрим покрытие $\Theta_1 = (B_1, B_2, \ldots, B'_i, \ldots, B'_j, \ldots, B_K)$, в котором расщепленные состояния помещены только в блоки B'_i и B'_j, причем состояния $s_m, s_q, \ldots, s_\tau$ расщеплены каждое не на два, а на произвольное число состояний. Такое расщепление можно провести в два этапа. Сначала расщепить состояния $s_m, s_q, \ldots, s_\tau$ согласно покрытию Θ, как мы это сделали в лемме, а затем расщепленные состояния расщепить вновь. Конечный результат будет соответствовать расщеплению по Θ_1.

Если задано Θ_1, будем строить Θ следующим образом. В блок B_1 запишем все нерасщепленные состояния, входящие в B'_1. Если в B'_1 помещена часть состояний, на которое расщеплено состояние s_m, то в B_1 запишем s_{m^1} вместо всех этих состояний, а в B_2, вместо оставшейся части, запишем s_{m^2}. Аналогичным образом поступим со всеми расщепляемыми состояниями $s_q, \ldots, s_\tau$ и с блоком B_2.

З а м е ч а н и е I. Необходимые и достаточные условия существования ВА $(_{\Theta_1}(A))_{\Theta_1}$ сводятся к необходимым и достаточным условиям существования ВА $(_\Theta(A))_\Theta$.

Действительно, пусть имеет место существование ВА $(_\Theta(A))_\Theta$. Обозначим матрицу, полученную из H в результате разукрупнения по Θ_1, через L. Ясно, что L будет укрупнима и по Θ_1, а $(L)_{\bar{\Theta}_1} = H$. Наоборот, пусть заданы некоторая матрица L', Θ_1 и $\bar{\Theta}_1$, $\Theta_1(H) = L'$ и L' укрупнима по Θ_1. Мы можем L' укрупнить до некоторой матрицы $H'_1 = (L')_{\Theta_2}$ по покрытию Θ_2, в котором нерасщепленные состояния помещены в отдельные блоки каждое, все состояния, на которые расщеплено s_{m^1}, помещены в отдельный блок, все состояния на которые расщеплено s_{m^2} и т.д. все состояния, на которые расщеплено s_{τ^2}, помещены в отдельные блоки. Мы приходим к случаю, когда каждое состояние $s_m, s_q, \ldots, s_\tau$ расщеплено на два состояния, описываемому покрытием Θ. Ясно, что H'_1 будет укрупнима по покрытию Θ.

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно убедиться, что если в автомате нет ни одного расщепленного состояния, то тогда выполнение условий леммы означает, что автомат укрупним по Θ.

Т е о р е м а 4.8,[26]. Для декомпозиции с расщеплением состояний ВА $A = (S = (s_1, \ldots, s_n), H)$ на два автомата A_1 и A_2, соединенных последовательно и имеющие первый два, а второй ℓ состояний, $\ell < n$, необходимо и достаточно существование покрытия $\Theta_1 = (B'_1, B'_2)$, а следовательно, и покрытия $\Theta = (B_1, B_2)$, определяемого через Θ_1 и покрытия $\tau = (D_1, D_2, \dots, D_\ell)$ с числом блоков $\ell = \max(|B_1|, |B_2|)$ таких, что

I. $\Theta_1 \tau = 0$,

2. $\forall s_a \in B_1$, $R_a - \Delta^1 \geq 0$,

$\forall s_b \in B_2$, $R_b - \Delta^2 \geq 0$,

т.е. матрицу H можно разукрупнить до матрицы $M = [q_{ij}]$ такой, что она укрупнима по Θ_1;

3.
$$q_{i1} = \Big(\sum_{j \in B_1'} q_{ij}\Big)\Big(\sum_{t \in D_1} q_{it}\Big),$$
$$q_{i2} = \Big(\sum_{j \in B_1'} q_{ij}\Big)\Big(\sum_{t \in D_2} q_{it}\Big),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$q_{i\ell} = \Big(\sum_{j \in B_1'} q_{ij}\Big)\Big(\sum_{t \in D_\ell} q_{it}\Big).$$

Доказательство. Положим, что условие 2 выполнено. Это означает, что ВА A мы разукрупнили до некоторого ВА A', который укрупняем по покрытию Θ_1. Согласно (т.I.3), для декомпозиции его на два последовательно соединенные автоматы A_1 и A_2 необходимо и достаточно существования покрытия такого, что выполняются условия I и 3 теоремы. Если же выполнены условия I и 3 теоремы, то опять-таки согласно (т.2.I3) для существования декомпозиции необходимо и достаточно, чтобы ВА A' был укрупним по Θ_1. Условия укрупнимости по Θ_1 доставляют лемма и замечание I и записаны в виде условия 2 теоремы.

Если в теореме потребовать укрупнимость матрицы M и по покрытию τ, мы получим условия декомпозиции ВА на параллельно расположенные автоматы.

Далее мы покажем как использовать вышеприведенную лемму для выяснения условий декомпозируемости в случае проверки на укрупняемость по покрытию, состоящему более, чем из двух блоков, на примере трехблочного покрытия. Рассмотрим некоторое трехблочное покрытие $\gamma = (E_1, E_2, E_3)$. Образуем, аналогично лемме, для матрицы H' следующие системы выражений:

$$\Big\{R_j^1 = \sum_{i \in E_1 \cup E_2} p_{ji}\Big\} \quad j \in E_1,$$
$$\Big\{R_j^2 = \sum_{i \in E_1 \cup E_2} p_{ji}\Big\} \quad j \in E_2,$$
$$\Big\{R_j^3 = \sum_{i \in E_1 \cup E_2} p_{ji}\Big\} \quad j \in E_3,$$

$$\Big\{\Delta_j^1 = R_j^1 - (p_{jm^1} + \dots + p_{j\tau^1})\Big\},\ j \in E_1;\ \Delta^1 = \max_{j \in E_1} \Delta_j^1,$$

$$\Big\{\Delta_j^2 = R_j^2 - (p_{jm^1} + \dots + p_{j\tau^1})\Big\},\ j \in E_2;\ \Delta^2 = \max_{j \in E_2} \Delta_j^2,$$

$$\Big\{\Delta_j^3 = R_j^3 - (p_{jm^1} + \dots + p_{j\tau^1})\Big\},\ j \in E_3;\ \Delta^3 = \max_{j \in E_3} \Delta_j^3.$$

Ясно, что если не выполняется следующее условие: $\forall s_a \in E_1$, $R_a^1 - \Delta^1 \geq 0$; $\forall s_a \in E_2$, $R_a^2 - \Delta^2 \geq 0$; $\forall s_a \in E_3$, $R_a^3 - \Delta^3 \geq 0$, мы не сможем от матрицы H' перейти к какой-либо матрице H'' так, как это показано при доказательстве леммы, чтобы она была укрупнима по γ. Наоборот, если эти условия выполнены, мы можем построить некоторую матрицу $H'' = [p_{ij}'']$ такую, что в ней подматрицы $E_1(E_1 \cup E_2)$, $E_2(E_1 \cup E_2)$, $E_3(E_1 \cup E_2)$ окажутся правильными. Далее составим выражения:

$$\Big\{F_j^1 = \sum_{i \in E_1} p_{ji}''\Big\},\ j \in E_1;\ \Big\{F_j^2 = \sum_{i \in E_1} p_{ji}''\Big\},\ j \in E_2;$$

$$\Big\{F_j^3 = \sum_{i \in E_1} p_{ji}''\Big\},\ j \in E_3;$$

$$\Big\{\alpha_j^1 = F_j^1 - \sum_{i \in L \cap (E_1 \cup E_2)} p_{ji}''\Big\},\ j \in E_1,\ L = (s_{m^1}, \dots, s_{\tau^1}),$$

$\alpha^1 = \max_{j \in E_1} \alpha_j^1$ и т.д., аналогично определяем $\alpha^2 = \max_{j \in E_2} \alpha_j^2$, $\alpha^3 = \max_{j \in E_3} \alpha_j^3$. При выполнении $F_a^1 - \alpha^1 \geq 0$, $\forall s_a \in E_1$;

$F_a^2-\alpha^2\geq 0, \forall s_a\in E_2$; $F_a^3-\alpha^3\geq 0, \forall s_a\in E_3$; согласно лемме мы можем перейти от матрицы H'' к матрице H_3, в которой все подматрицы E_iE_j, $i,j=1,2,3$, окажутся правильными, то есть H_3 окажется укрупнимой по γ. Тогда при существовании некоторого покрытия τ такого, что $\gamma\tau=0$ и выполнении условия независимости для этих покрытий, то есть условия 3 теоремы, записанного для каждой пары блоков γ_i, τ_j, где γ_i, τ_j – блоки покрытий γ и τ соответственно, мы сможем осуществить декомпозицию.

Пример. Пусть задан автономный ВА $A=(S=(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5),H)$, где

$$H=\begin{bmatrix} 0.26 & 0.04 & 0.16 & 0.3 & 0.24\\ 0.2 & 0.08 & 0.24 & 0.12 & 0.36\\ 0.1 & 0.04 & 0.32 & 0.06 & 0.48\\ 0.06 & 0.04 & 0.36 & 0 & 0.54\\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим покрытия $\Theta_1=(\overline{s_1^1,s_2,s_3};\overline{s_1^2,s_4,s_5})$ и $\tau=(\overline{s_1^1,s_4};\overline{s_2,s_1^2};\overline{s_3,s_5})$, $\Theta_1\tau=0$. Образуем суммы: $R_1=0.26+0.04+0.16=0.46$, $R_2=0.2+0.08+0.24=0.42$

$R_3=0.1+0.04+0.32=0.46$. Соответственно, $\Delta_1=0.26, \Delta_2=0.2$, $\Delta_3=0.1$; $\Delta^1=\max(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3)=0.26$; $R_4=0.46$;

$R_5=0.4$; $\Delta_4=0.06$, $\Delta_5=0$, $\Delta^2=0.06$. Условие 2 теоремы выполняется т.к. $R_i-\Delta^1\geq 0$, $i=1,2,3$ и $R_j-\Delta^2\geq 0$, $j=4,5$. Разукрупним согласно Θ_1 матрицу H до матрицы H', расщепляя состояние s_1 на два состояния s_1^1 и s_1^2:

$$H'=\begin{array}{c} s_1^1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\\ s_1^2\\ s_5 \end{array}\begin{bmatrix} x_{11}^1 & 0.04 & 0.16 & 0.3 & x_{11}^2 & 0.24\\ x_{21}^1 & 0.08 & 0.24 & 0.12 & x_{21}^2 & 0.36\\ x_{31}^1 & 0.04 & 0.32 & 0.06 & x_{31}^2 & 0.48\\ x_{41}^1 & 0.04 & 0.36 & 0 & x_{41}^2 & 0.54\\ x_{51}^1 & 0.04 & 0.16 & 0.3 & x_{51}^2 & 0.24\\ x_{61}^1 & 0 & 0.4 & 0 & x_{61}^2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

где $x_{11}^1+x_{11}^2=0.26$, $x_{21}^1+x_{21}^2=0.2,\dots,x_{61}^1+x_{61}^2=0$.

Условие 3 теоремы для рассматриваемого примера имеет вид:

$$x_{11}^1=(x_{11}^1+0.04+0.16)(x_{11}^1+0.3)$$

$$x_{21}^1=(x_{21}^1+0.08+0.24)(x_{21}^1+0.12)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{61}^1=(x_{61}^1+0+0.4)(x_{61}^1+0).$$

Решением первого уравнения с учетом условия $x_{11}^1+x_{11}^2=0.26$ является $x_{11}^1=0.2$. Аналогично определяются $x_{21}^1,\dots,x_{61}^1$. Построим автомат $A'=(S'=(s_1^1,s_2,s_3,s_4,s_1^2,s_5),M)$, где

$$M=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.04 & 0.16 & 0.3 & 0.06 & 0.24\\ 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.12 & 0.12 & 0.36\\ 0.04 & 0.04 & 0.32 & 0.06 & 0.06 & 0.48\\ 0 & 0.04 & 0.36 & 0 & 0.06 & 0.54\\ 0.2 & 0.04 & 0.16 & 0.3 & 0.06 & 0.24\\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Автомат A' декомпозируем согласно т.I.3 на два автомата A_1 и A_2, соединенные последовательно. Матрица переходных вероятностей ВА A_1 имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6\\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Матрицы переходных вероятностей ВА A_2 , по числу состояний ВА A_1 , имеют вид

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Наконец, ВА A' укрупним по покрытию $\bar{\Theta}_1 = (\overline{s_1^1, s_1^2}; \bar{s}_2; \bar{s}_3; \bar{s}_4; \bar{s}_5)$ и $(A')_{\bar{\Theta}_1} = A$.

ГЛАВА 5

Статистические оценки декомпозиции вероятностных автоматов

5.I. Введение. Статистическим оценкам изоморфной декомпозируемости детерминированных автоматов посвящена работа [27] . Настоящая глава [28] , [29] , [30] , является обобщением этих результатов на случай вероятностных автоматов с рациональными вероятностями переходов. Определяются асимптотические оценки числа автоматов, допускающих тот или иной вид декомпозиции во множестве всех автоматов некоторого класса при определенных соотношениях его параметров.

Произвольный вероятностный автомат $A = (X, Y, S, P_i, F)$, где X и Y - входной и выходной алфавит, $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ - множество состояний, P_i - матрицы переходов по числу букв входного алфавита $(i = 1, 2, \ldots, p = |X|)$ и F - функции выхода, будем интерпретировать как последовательное соединение бернуллиевского k_i - буквенного датчика и некоторого детерминированного автомата, если:

$$P_i = \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} D_{ij} \;, \qquad (I.I)$$

где $k_i \leq n^2 - n + 1$, $0 < \alpha_{ij} < 1$, $\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} = 1$, D_{ij} - элементарные матрицы $n \times n$.

Будем различать два вида декомпозиции, декомпозицию с выделениями бернуллиевского датчика и последующей декомпозицией детерминированного автомата D , описываемого матрицами D_{ij} , и обычную изоморфную декомпозицию вероятностного автомата, описанную в главе I. Полученные результаты справедливы для обоих видов декомпозиции.

Выделим класс (n, ℓ, p) вероятностных автоматов, где n - число состояний автомата, p - число входных букв и ℓ - параметр, характеризующий вероятностные свойства класса следующим образом: каждая вероятность перехода p_{ij} в стохастических матрицах этого класса представима как a/ℓ , где $a = 0, 1, 2, \ldots, \ell$. Аналогично введем класс (n, ℓ) для стохастических матриц $n \times n$, удовлетворящих условиям: для любой матрицы из класса (n,ℓ)

$$p_{ij} = a/\ell \ , \ a = 0,1,\dots,\ell.$$

Автомат, принадлежащий классу (n,p,ℓ), обозначим через $A(n,p,\ell)$.

Пусть $B_1, B_2, \dots, B_K$ – непересекающиеся классы разбиения π множества состояний автомата, $\bigcup_{i=1}^{K} B_i = S$. Пусть разбиение π нетривиально и множество стохастических матриц $\{P_i\}$ обладает свойством подстановки по разбиению π, то есть для любой пары B_γ и B_δ и каждой входной буквы автомата выполняется условие

$$P_{s_\alpha B_\gamma} = \sum_{s_i \in B_\gamma} P_{s_\alpha s_i} = const., \ \forall s_\alpha \in B_\delta ,$$

где $P_{s_\alpha s_i}$ – вероятность перехода из состояния s_α в состояние s_i.

Л е м м а 5.I. Необходимым и достаточным условием того, чтобы каждая матрица D_{ij} в разложении (I.I) обладала СП по разбиению π, является наличие СП по тому же разбиению π у исходной матрицы P_i.

Л е м м а 5.2. Чтобы вероятностный автомат $A(n,p,\ell)$ допускал декомпозицию первого вида, причем автомат D допускал последовательную декомпозицию, необходимо и достаточно, чтобы на множестве его состояний существовало нетривиальное разбиение π со свойством подстановки.

Доказательство леммы 5.I очевидно. Справедливость леммы 5.2 следует из теоремы о последовательной декомпозиции детерминированного автомата [6] и леммы 5.I.

<u>5.2. Последовательная декомпозируемость</u> I. С р е д н е е ч и с л о С П - р а з б и е н и й . Разбиению π множества $S = (s_1, \dots, s_n)$ состояний автомата на классы $B_1, \dots, B_K$ с числом элементов в каждом $n_1, n_2, \dots, n_K$ соответственно сопоставим разложение $\Psi(n)$ целого числа n на сумму K слагаемых $n_1, n_2, \dots, n_K$. Для полного определения разбиения π кроме задания мощностей классов $B_1, B_2, \dots, B_K$, т.е. $\Psi(n)$, необходимо указать, какие именно состояния объединены в каждом из классов. Пусть $\mathcal{P}(\Psi)$ – число различных разбиений π, соответствующих одному и тому же $\Psi(n) = (n_1, \dots, n_K)$.

Пусть $\pi = (B_1, \dots, B_K)$ – разбиение множества состояний автомата $A(n,p,\ell)$, соответствующее разложению $\Psi(n) = (n_1, \dots, n_K)$. Обозначим через $Q(\Psi,\ell,p)$ число автоматов $A(n,p,\ell)$, для которых π обладает СП. Обозначим также $Q(\Psi, p=1, \ell) = Q(\Psi,\ell)$.

Л е м м а 5.3.

$$Q(\Psi,\ell,p) = \Big\{ \prod_{\alpha=1}^{K} \Big[\sum_{i_1=0}^{\ell} [R(n_1,i_1)]^{n_\alpha} \times \sum_{i_2=0}^{\ell-i_1} [R(n_2,i_2)]^{n_\alpha} \times \dots \times \sum_{i_K=0}^{\ell-i_1-\dots-i_{K-1}} [R(n_K,i_K)]^{n_\alpha} \Big\}^{p}.$$

Доказательство. Число автоматов $A(n,p,\ell)$, для которых π обладает СП, определяется числом стохастических матриц в классе (n,ℓ), обладающих СП. Обозначим через $R(n,\ell)$ число различных строчек матриц класса (n,ℓ). Определение $R(n,\ell)$ сводится к нахождению числа способов размещения ℓ предметов по n местам. Тогда число всех возможных матриц $n \times m$, составленных из таких строчек, есть:

$$[R(n,\ell)]^{m} = [C_{n+\ell-1}^{\ell}]^{m}. \qquad (2.I)$$

Рассмотрим некоторый класс B_α разбиения π. Переход из класса B_α, допустим, в класс B_1 описывается подматрицей $n_\alpha \times n_1$, сумма элементов каждой строки которой, согласно определению СП, есть i_1/ℓ $(i_1 = 0,\dots,\ell)$. Число таких подматриц, согласно (2.I), $\sum_{i_1=0}^{\ell} [R(n_1,i_1)]^{n_\alpha}$.

Пусть число i_1 зафиксировано (число предметов, размещенных на n_1 местах). Тогда аналогично, число подматриц, описывающих переход из B_α в B_2, есть $\sum_{i_2=0}^{\ell-i_1} [R(n_2,i_2)]^{n_\alpha}$, где $\ell - i_1$ – число оставшихся предметов и т.д. Для последнего, K-го класса число матриц $n_\alpha \times n_K$ будет $\sum_{i_K=0}^{\ell-i_1-\dots-i_{K-1}} [R(n_K,i_K)]^{n_\alpha}$. Учитывая, что $\alpha = 1,2,\dots,K$, получим

$$Q(\Psi,\ell) = \prod_{\alpha=1}^{K} \Big[\sum_{i_1=0}^{\ell} [R(n_1,i_1)]^{n_\alpha} \cdots \sum_{i_K=0}^{\ell-i_1-\dots-i_{K-1}} [R(n_K,i_K)]^{n_\alpha}. \qquad (2.2)$$

Формула (2.2) справедлива для каждой из p входных букв. Поэтому окончательно

$$Q(\Psi,p,\ell)=[Q(\Psi,\ell)]^{p}. \qquad (2.3)$$

Обозначим через $\beta[A(n,p,\ell)]$ число нетривиальных разбиений с СП автомата $A(n,p,\ell)$. Аналогично [27], $\beta[A(n,p,\ell)]$ будем рассматривать как случайную величину, определенную на множестве автоматов класса (n,p,ℓ) и равномерно распределенную.

Т е о р е м а 5.I. Среднее число нетривиальных разбиений автомата $A(n,p,\ell)$, обладающих СП, определяется формулой

$$E(n,p,\ell)=\sum_{\Psi\in\Psi_n} p(\Psi)\left[\frac{Q(\Psi,\ell)}{(C^{\ell}_{n+\ell-1})^{n}}\right]^{p}, \qquad (2.4)$$

где Ψ_n – множество всех возможных $\Psi(n)$.

Доказательство. Согласно определению математического ожидания,

$$E(n,p,\ell)=\sum_{A(n,p,\ell)}[C^{\ell}_{n+\ell-1}]^{-np}\beta[A(n,p,\ell)]$$

или

$$E(n,p,\ell)=[C^{\ell}_{n+\ell-1}]^{-np}\sum_{\pi}M(\pi),$$

где $M(\pi)$ – число автоматов в (n,p,ℓ), для которых разбиение π обладает СП; сумма берется по всем нетривиальным разбиениям π. Однако при фиксированном π, согласно (2.3), $M(\pi)=[Q(\Psi,\ell)]^{p}$, откуда получаем (2.4).

2. А с и м п т о т и ч е с к а я д е к о м п о з и р у е м о с т ь. Введем разбиение $\tau_j=(s_j;S/s_j)$. Разбиение π будем называть элементарным, если существует $s_j\in S$ такое, что $\pi=\tau_j$ и $P_{s_i s_j}=0$ для всех $s_i\in S$. Ясно, что элементарное разбиение нетривиально и обладает СП.

Л е м м а 5.4. Среднее число элементарных разбиений $A(n,p,\ell)$ равно

$$L(n,p,\ell)=n[R(n-1,\ell)]^{np}/[R(n,\ell)]^{np}=n[(n-1)/(n+\ell-1)]^{np}. \qquad (2.5)$$

Доказательство. Из теоремы 5.I:

$$L(n,p,\ell)=[R(n,\ell)]^{-np}\sum_{j=1}^{n}N(\tau_j),$$

где $N(\tau_j)$ – число автоматов $A(n,p,\ell)$, для которых τ_j элементарно. Согласно определению элементарного разбиения и формуле (2.I), $N(\tau_j)=[R(n-1,\ell)]^{np}$, откуда следует (2.5).

Л е м м а 5.5. Дисперсия числа элементарных разбиений $A(n,p,\ell)$ задается формулой

$$V(n,p,\ell)=L(n,p,\ell)+(n^2-n)\{[(n-1)(n-2)]/[(n+\ell-1)(n+\ell-2)]\}^{np}-L^2(n,p,\ell). \qquad (2.6)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение матрицу $\|e_{ij}\|$, $i=1,2,\dots,[C^{\ell}_{n+\ell-1}]^{np}$, $j=1,\dots,n$, где $e_{ij}=1$, если разбиение τ_j элементарно для $A_i(n,p,\ell)$. В противном случае $e_{ij}=0$.

Обозначим $[C^{\ell}_{n+\ell-1}]^{np}=a^{np}$. Тогда $V(n,p,\ell)=\sum_{i=1}^{a^{np}}a^{-np}\times(\sum_{j=1}^{n}e_{ij})^2-L^2(n,p,\ell)=a^{-np}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{a^{np}}e_{ij}e_{i\ell}-L^2(n,p,\ell)$. Но $\sum_{i=1}^{a^{np}}e_{ij}e_{i\ell}$ можно интерпретировать как число автоматов $A(n,p,\ell)$, для которых оба разбиения τ_j и τ_ℓ элементарны, т.е. в матрицах которых столбцы j и ℓ нулевые. Отсюда $\sum_{i=1}^{a^{np}}e_{ij}e_{i\ell}=[R(n-1,\ell)]^{np}$, если $j=\ell$ и $\sum_{i=1}^{a^{np}}e_{ij}e_{i\ell}=[R(n-2,\ell)]^{np}$, если $j\neq\ell$. Следовательно,

$$V(n,p,\ell)=a^{-np}\Big\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{a^{np}}e_{ij}e_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{a^{np}}e_{ij}e_{i\ell}\Big\}-L^2(n,p,\ell)=$$

$$=a^{-np}\{n[R(n-1,\ell)]^{np}+(n^2-n)[R(n-2,\ell)]^{np}\}-L^2(n,p,\ell)=$$

$$=L(n,p,\ell)+(n^2-n)\{[(n-1)(n-2)]/[(n+\ell-1)(n+\ell-2)]\}^{np}-L^2(n,p,\ell).$$

Л е м м а 5.6. $V(n,p,\ell)<L(n,p,\ell)$.

Доказательство. Имеем:

$$V(n,p,\ell)<L(n,p,\ell)+n^2\{[(n-1)(n-2)]/[(n+\ell-1)(n+\ell-2)]\}^{np}-$$

$$-L^2(n,p,\ell)=L(n,p,\ell)+n^2\{([(n-1)(n-2)]/[(n+\ell-1)(n+\ell-2)])^{np}-$$

$$-[(n-1)/(n+\ell-1)]^{2np}\}<L(n,p,\ell)$$

, так как из того, что $(n-2)/(n+\ell-2)<(n-1)(n+\ell-1)$, следует, что и $\{[(n-2)(n-1)]/[(n+\ell-2)(n+\ell-1)]\}^{np}<[(n-1)/(n+\ell-1)]^{2np}$.

Пусть $\text{Вер}(U)$ – вероятность события U, а $\varepsilon[A(n,p,\ell)]$ число элементарных разбиений автомата $A(n,p,\ell)$. Тогда справедлива следующая лемма [27].

Л е м м а 5.7. $\text{Вер}\{\varepsilon[A(n,p,\ell)]<1/2\,L(n,p,\ell)\}<4/L(n,p,\ell)$.

Доказательство. $\text{Вер}(\varepsilon<\tfrac12 L)\leqslant\text{Вер}(|\varepsilon-L|>\tfrac12 L)\leqslant\text{Вер}(|\varepsilon-L|>\tfrac12 L^{1/2}V^{1/2})$, так как по лемме 6 $L>V$. Используя неравенство Чебышева, получим $\text{Вер}(|\varepsilon-L|>\tfrac12 L^{1/2}V^{1/2})<(\tfrac12 L^{1/2})^{-2}=4L$.

Т е о р е м а 5.2. Пусть $p=p(n)$ и $\ell=\ell(n)$ – натуральнозначные функции такие, что $\lim_{n\to\infty}(p(n)\ell(n)/\ln n)<1$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} E(n,p(n),\ell(n))=\infty$ и для любого целого $k>0$
$\lim\limits_{n\to\infty} \text{Вер}\{\rho[A(n,p(n),\ell(n)]\leqslant k\}=1$.

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} E(n,p(n),\ell(n)) \geqslant \lim L(n,p(n),\ell(n)) =$

$$= \lim_{n\to\infty} n[(n-1)/(n+\ell(n)-1)]^{p(n)} = \exp\lim_{n\to\infty}\{\ln n + np(n)\ln[1-$$

$$-\ell(n)/(n+\ell(n)-1)]\} = \exp\lim_{n\to\infty}[\ln n - np(n)\ell(n)/(n+\ell(n)-1)] =$$

$$= \exp\lim_{n\to\infty}(\ln n - p(n)\ell(n)) =$$

$$= \exp\lim_{n\to\infty}\ln n[1-p(n)\ell(n)/\ln n] = \exp\lim_{n\to\infty} c\ln n = \infty,\ c=\text{const.},\ 0<c<1.$$

Принимая во внимание лемму 5.7, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\text{Вер}\{\beta[A(n,p(n),\ell(n)]\geqslant k\} \geqslant \lim_{n\to\infty}\text{Вер}\{\varepsilon[A(n,p(n),\ell(n))]\geqslant$$

$$\geqslant 1/2\, L(n,p(n),\ell(n))\} = \lim_{n\to\infty}(1-\text{Вер}\{\varepsilon[A(n,p(n),\ell(n))]<$$

$$< \tfrac{1}{2} L(n,p(n),\ell(n))\}) \geqslant 1-\lim_{n\to\infty}(4/L(n,p(n),\ell(n))=1.$$

Т е о р е м а 5.3: Если $p(n)$ и $\ell(n)$ таковы, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n/\ell(n)p(n))=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} E(n,p(n),\ell(n))=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\text{Вер}(\rho[A(n,p(n),\ell(n))])=1$.

Полагая в теореме 5.3 $\ell(n)=1$, получаем условия теоремы 4.I, приведенной в [27] для детерминированных автоматов. Утверждение теоремы 5.3 легко следует из теоремы 4.I с учетом лемм 5.I и 5.2.

Неформальный смысл теоремы 5.2 состоит в том, что при выполнении ее условий почти любой наугад взятый автомат декомпозируем на последовательно соединенные автоматы. Наоборот, при выполнении условий теоремы 5.3 почти для каждого автомата из класса (n,p,e) последовательная декомпозиция невозможна.

Заметим, что теоремы 5.2 и 5.3 легко распространяются на случаи декомпозиции второго вида. Действительно, необходимым и достаточным условием последовательной декомпозиции является наличие у автоматных матриц разбиений π и τ таких, что π обладает СП, $\pi\cdot\tau=0$ и для π и τ выполняется условие независимости:

$$\sum_{j\in B_\pi\cap B_\tau} p_{ij} = \sum_{j_1\in B_\pi} p_{ij_1}\sum_{j_2\in B_\tau} p_{ij_2} \quad \forall i\in S, \qquad (2.7)$$

где $B_\pi\in\pi$, $B_\tau\in\tau$.

Теперь нетрудно видеть, что для автоматных матриц, обладающих элементарным разбиением π (в смысле данного ранее определения), можно всегда найти разбиение τ, которое вместе с π удовлетворяет условию (2.7) и $\pi\cdot\tau=0$. В частности, если $\pi=(\overline{s_i};\overline{s_{i_1},\ldots,s_{i_n}})$ в качестве τ можно взять $\tau=(\overline{s_i,s_j};\overline{s_{i_1}};\ldots;\overline{s_{i_n}})$. Отсюда сразу следует справедливость теоремы 5.2 для последовательной декомпозиции второго вида. Распространение теоремы 5.3 на случай декомпозиции второго вида совершенно очевидно, так как автомат, допускающий декомпозицию второго вида, допускает и декомпозицию первого вида.

5.3. Параллельная декомпозируемость

Л е м м а 5.8. Необходимым условием параллельной декомпозиции первого вида для автомата $A(n,p,e)$ является наличие у него свойства подстановки по двум разбиениям π_1 и π_2 и выполнение условия $\pi_1\cdot\pi_2=0$.

Пару разбиений $\omega=\{\pi_1,\pi_2\}$ назовем элементарной для *автомата* $A(n,p,e)$, *если выполнены два условия:*

I. $\pi_1=(B_1,B_2,\ldots,B_{n-1})=(\overline{s_\alpha,s_\beta},\overline{s_{i_1}},\ldots,\overline{s_{i_n}})$, B_1 содержит два произвольных элемента s_α и s_β, остальные элементы s_{i_j} входят в разбиение в качестве самостоятельных блоков: $\pi_2=(B_1',B_2')=(\overline{s_\alpha,s_\gamma,\ldots,s_\mu};\overline{s_{i_1},\ldots,s_{i_n}})$, т.е. B_1' содержит x произвольных элементов и в том числе один из элементов блока B_1, например s_α, а остальные $n-x$ состояний образуют блок B_2'.

2. $\forall s_i\in S$, $P_{s_i B_1'}=0$.

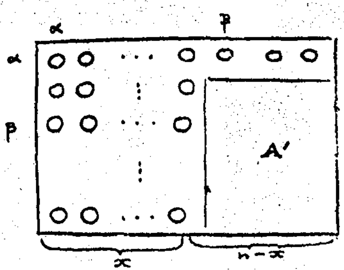
Очевидно, что $\pi_1\cdot\pi_2=0$.

Л е м м а 5.9: Если стохастическая матрица обладает СП по некоторой элементарной паре ω, то ее можно разложить на сумму детерминированных матриц так, чтобы все D_i $(i=\overline{1,\ell})$ обладали СП по той же элементарной паре.

Не теряя общности, рассмотрим π_1 и π_2 вида

$$\pi_1=(\overline{s_1,s_{x+1}};\overline{s_2};\ldots;\overline{s_n}),\quad \pi_2=(\overline{s_{x+1},\ldots,s_n};\overline{s_1,\ldots,s_x}).$$

Разбиениям π_1 и π_2 соответствует матрица A:



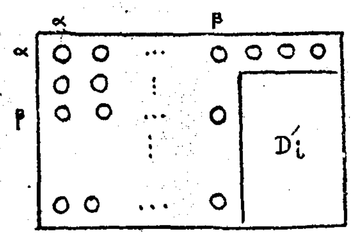
В матрице A строчки α и β одинаковы, первые x столбцов нулевые, а выделенная полужирным подматрица A' – произвольная стохастическая матрица размерности $(n-1)(n-x)$. Так как все элементы A' имеют вид $p_{ij}=a/\ell$ в силу того, что исходная матрица A принадлежит классу (n,ℓ), то ее легко можно разложить:

$$A' = \ell^{-1}\sum_{i=1}^{\ell} D_i' , \qquad (3.I)$$

где D_i' – детерминированные автоматные матрицы. С учетом (3.I) A можно представить в виде

$$A = \ell^{-1}\sum_{i=1}^{\ell} D_i . \qquad (3.2)$$

Ниже показана матрица D_i, подматрица D_i' выделена полужирным:



Строка α в матрице D_i заполнена так же, как строка β. Легко видеть, что (3.2) является искомым разложением.

Л е м м а 5.I0. Среднее число элементарных пар разбиений автомата определяется формулой

$$L(n,p,\ell) = 2C_n^2 C_{n-1}^{x} R^{(n-1)p}(n-x,\ell)/R^{np}(n,\ell). \qquad (3.3)$$

Доказательство. Число способов выбрать π_1 есть C_n^2, число способов выбрать π_2, после того как π_1 уже выбрано так, чтобы $\pi_1\cdot\pi_2=0$, есть $2C_{n-1}^{x}$. Общее число способов выбрать элементарное разбиение ω есть $2C_n^2 C_{n-1}^{x}$. Общее число автоматов в классе (n,p,ℓ) есть $R^{np}(n,\ell)$, а число автоматов с СП по какому-либо ω есть $R^{(n-1)p}(n-x,\ell)$, откуда следует (3.3).

Л е м м а 5.II. Дисперсия числа элементарных пар разбиений автомата A определяется формулой $V(n,p,\ell) = L(n,p,\ell) + a^{-np}\sum_{j=1}^{6} S - L^2(n,p,\ell)$ (смысл обозначений будет приведен в ходе доказательства).

Доказательство. Обозначим через $\omega_1, \omega_j, \dots, \omega_b$ элементарные пары, $b = 2C_n^2 C_{n-1}^{x}$. Введем в рассмотрение матрицу $\| e_{ij} \|$, $i=1,2,\dots,[C_{n+\ell-1}^{\ell}]^{np}$, $j=1,\dots,b$, где $e_{ij}=1$, если автомат $A_i(n,p,\ell)$ обладает СП по ω_j, $e_{ij}=0$ в противном случае. Обозначим также $[C_{n+\ell-1}^{\ell}]^{np}=a^{np}$.

По формуле дисперсии имеем $V(n,p,\ell)=\sum_{i=1}^{a^{np}} a^{-np}(\sum_{j=1}^{b} e_{ij})^2 - L^2(n,p,\ell) = a^{-np}\sum_{j=1}^{b}\sum_{\ell=1}^{b}\sum_{i=1}^{a^{np}} e_{ij}e_{i\ell} - L^2(n,p,\ell)$. Но $\sum_{i=1}^{a^{np}} e_{ij}e_{i\ell}$ можно интерпретировать как общее число автоматов $A(n,p,\ell)$, которые обладают СП и по ω_j и по ω_ℓ. Отсюда $\sum_{i=1}^{a^{np}} e_{ij}e_{i\ell} = R^{(n-1)p}(n-x,\ell)$, если $j=\ell$.

Рассмотрим случай $j\neq\ell$. Пусть

$$\omega_j = \begin{cases} (\overline{s_\alpha, s_\beta}\,;\ \overline{s_{j_1}}\,;\ \cdots\,;\ \overline{s_{j_n}}) = \pi_{1j} \\ (\underbrace{\overline{s_\alpha, s_\mu, \dots, s_y}}_{x}\,;\ \underbrace{\overline{s_\beta, s_{i_1}, \dots, s_{i_n}}}_{n-x}) = \pi_{2j} = (B_x, B_{n-x}), \end{cases}$$

$$\omega_\ell = \begin{cases} (\overline{s_\gamma, s_\delta}\,;\ \overline{s_{\ell_1}}\,;\ \cdots\,;\ \overline{s_{\ell_n}}) = \pi_{1\ell} \\ (\underbrace{\overline{s_\gamma, s_\tau, \dots, s_\varphi}}_{x}\,;\ \underbrace{\overline{s_\delta, s_{k_1}, \dots, s_{k_n}}}_{n-x}) = \pi_{2\ell} = (A_x, A_{n-x}). \end{cases}$$

Неравенство $\omega_j \neq \omega_\ell$ может выполняться в следующих случаях.

I. $\pi_{1j}=\pi_{1\ell}$; $\pi_{2j}\neq\pi_{2\ell}$ – за счет того, что в блоках B_x и A_x и B_{n-x} и A_{n-x} находятся разные элементы.

П. $\pi_{1j}\neq\pi_{1\ell}$; $\pi_{2j}=\pi_{2\ell}$ – за счет того, что либо $s_\alpha=s_\gamma$, $s_\beta\neq s_\delta$ ($s_\alpha\neq s_\gamma$, $s_\beta=s_\delta$), либо $s_\alpha\neq s_\gamma$, $s_\beta\neq s_\delta$.

Ш. $\pi_{1j}\neq\pi_{1\ell}$; $\pi_{2j}\neq\pi_{2\ell}$.

Итак, $V = L + a^{-np} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{b} \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a^{np}} e_{ij} e_{i\ell} - L^2$. Обозначим $S = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}} \sum_{i=1}^{a^{np}} e_{ij} e_{i\ell}$ – число автоматов, обладающих СП по ω_j и ω_ℓ при фиксированном ω_j и переменном ω_ℓ. В соответствии со случаями I–III можем написать $S = \alpha_1 R^{(n-1)p}(n-x+1,\ell) + \alpha_2 R^{(n-1)p}(n-x-2,\ell) + \cdots$
$\cdots + \alpha_x (R^{(n-1)p}(n-2x,\ell) + \beta_1 R^{(n-2)p}(n-x,\ell) + \beta_2 R^{(n-2)p}(n-x,\ell) +$
$+ \gamma_1 R^{(n-2)p}(n-x-1,\ell) +$
$+ \gamma_2 R^{(n-2)p}(n-x-2,\ell) + \cdots + \gamma_x R^{(n-2)p}(n-2x,\ell)$, где α_i – число способов выбрать $\pi_{2\ell}$ так, чтобы блоки A_x и B_x и A_{n-x} и B_{n-x} отличались друг от друга i элементами (случай I); β_i – число способов выбрать $\pi_{1\ell}$ так, чтобы оно отличалось от π_{1j} (случай II); γ_i – число способов выбрать ω_ℓ так, чтобы при произвольных, но отличных друг от друга $\pi_{1\ell}$ и π_{1j}, каждый блок $\pi_{2\ell}$ отличается от соответствующего блока π_{2j} ровно в i состояниях.

Оценим коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$:

$$\alpha_1 = C_x^1 \cdot C_{n-x-1}^1, \quad \beta_1 < n-2, \quad \gamma_1 < \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 = \gamma_1',$$

$$\alpha_2 = C_x^2 \cdot C_{n-x-1}^2, \quad \beta_2 < C_{n-2}^2, \quad \gamma_2 < \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_2 = \gamma_2',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_x = C_x^x \cdot C_{n-x-1}^x; \qquad \gamma_x < \beta_1\alpha_x + \beta_2\alpha_x = \gamma_x'$$

Тогда $S < S_1 = \alpha_1 R^{(n-1)p}(n-x-1,\ell) + \cdots + \alpha_x R^{(n-1)p}(n-2x,\ell) +$
$+ \beta_1 R^{(n-2)p}(n-x,\ell) + \beta_2 R^{(n-2)p}(n-x,\ell) + \gamma_1' R^{(n-2)p}(n-x-1,\ell) +$
$+ \cdots + \gamma_x' R^{(n-2)p}(n-2x,\ell)$.
Эта оценка потребуется в дальнейшем.

Итак, $V = L + a^{-np} \sum_{j=1}^{b} S - L^2 = L + a^{-np} b S - L^2$.

Л е м м а 5.I2: Пусть $\ell(n)$ и $p(n)$ – натуральнозначные функции натурального аргумента такие, что $\lim (\ell(n)p(n)/\ln n) = c = const., 0 < c < 1$. Тогда, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} L(n, p(n), \ell(n)) = \infty$ достаточно взять $x \approx \ln^a n$, где $a \geqslant 2$.

Мы не приводим доказательство леммы 5.I2, поскольку, несмотря на всю громоздкость выкладок, принципиальной сложности оно не представляет и сводится к нахождению $\lim\limits_{n\to\infty} L(n,p(n),\ell(n))$ при $x = \ln^a n$, $a \geqslant 2$.

В дальнейшем везде вместо $p(n)$, $\ell(n)$ будем писать p, ℓ.

Л е м м а 5.I3. $V(n,p,\ell) < L(n,p,\ell)$.

Доказательство. Из леммы 5.II $V(n,p,\ell) < L(n,p,\ell) + a^{-np} b S_1 - L^2(n,p,\ell)$. Докажем, что $a^{-np} b S_1 < L^2(n,p,\ell)$, тем самым лемма 5.I3 будет доказана.

Очевидно, что главными членами суммы S_1 являются первые x членов. Они в свою очередь имеют примерно одинаковый порядок (с небольшим возрастанием ближе к средним членам), который и определяет порядок всей суммы S_1. Поэтому при рассмотрении отношения $a^{-np} b S_1 / L^2(n,p,\ell)$ можно положить $S_1 \simeq T x$, где T – первый член суммы S_1. Для доказательства леммы достаточно, таким образом, показать, что отношение $a^{-np} b x \alpha_1 R^{(n-1)p}(n-x-1,\ell) / L^2(n,p,\ell)$ стремится к нулю и при n, стремящемся к бесконечности. Доказательство этого факта опущено по тем же соображениям, что и в лемме 5.I2.

Л е м м а 5.I4 (аналог леммы 5.7). Обозначим через $\Theta[A(n,p,\ell)]$ число элементарных пар разбиений наугад выбранного автомата $A(n,p,\ell)$. Тогда $\text{Вер}\{\Theta[A(n,p,\ell)] < \frac{1}{2} L(n,p,\ell)\} < 4/L(n,p,\ell)$.

Т е о р е м а 5.4. Пусть $p = p(n)$, $\ell = \ell(n)$ таковы, что $\lim\limits_{n\to\infty} (p(n)\ell(n)/\ln n) = c = const, 0 < c < 1$. Тогда $\lim E(n,p(n),\ell(n)) = \infty$, где $E(n,p(n),\ell(n))$ – среднее число нетривиальных пар $\{\pi_1, \pi_2\}$ разбиений множества состояний автомата $A(n,p,\ell)$, одновременно обладающих СП, и для любого целого $k > 0$ $\lim \text{Вер}\{\beta'[A(n,p,\ell)] \geqslant k\} = 1$, где $\beta'[A(n,p,\ell)]$ – число нетривиальных пар $\{\pi_1, \pi_2\}$, имеющих СП наугад выбранного автомата $A(n,p,\ell)$.

Доказательство. Справедливость первой части теоремы следует из леммы 5.I2. Докажем вторую часть. Принимая во внимание лемму 5.I4, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Вер}\{\beta'[A(n,p,\ell)] \geqslant k\} \geqslant \lim_{n\to\infty} \text{Вер}\{\varepsilon[A(n,p,\ell)] \geqslant k\} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \text{Вер}\{\varepsilon[A(n,p,\ell)] \geqslant \tfrac{1}{2} L(n,p,\ell)\} = \lim_{n\to\infty}\{1 - \text{Вер}(\varepsilon[A(n,$$

$$p,\ell)] < \tfrac{1}{2} L(n,p,\ell))\} \geqslant 1 - \lim (4/L(n,p,\ell)) = 1.$$

Т е о р е м а 5.5: Если $p(n)$ и $\ell(n)$ таковы, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln n/\ell(n)p(n)) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} E(n,p,\ell)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \text{Вер}\{\beta'[A(n,p,\ell)] = 0\} = 1$.

Доказательство. Возможность параллельной декомпозиции автомата $A(n,p,\ell)$ связана с наличием пары разбиений $\{\pi_1,\pi_2\}$, по которым он одновременно обладает СП. Но сравнивая условия теоремы 5.5 с условиями теоремы 5.3, мы видим, что при их выполнении даже единичные разбиения π с СП очень редки. Поэтому утверждение теоремы 5.5 тем более справедливо для пар разбиений. Аналогичное рассуждение справедливо и для $\beta'[A(n,p,\ell)]$.

В заключение заметим, что для автоматов, обладающих элементарной парой $\omega=(\pi_1,\pi_2)$, удовлетворяются условия параллельной декомпозируемости второго вида. Действительно, как это следует из определения элементарной пары, π_1 и π_2 обладают СП, $\pi_1\cdot\pi_2=0$ и π_1,π_2 независимы. Таким образом, теоремы 5.4 и 5.5 оказываются верными и для случая декомпозиции второго вида.

5.4. Статистические оценки параметра разложения стохастических матриц.

Пусть матрица P представлена в виде (I.I) и для ее разложения требуется k слагаемых. Будем называть это число параметром разложения.

В некоторых прикладных задачах, например, при синтезе вероятностных генераторов [31] или при нахождении степеней стохастических матриц [32] желательно иметь разложение P с наименьшим возможным параметром разложения. В связи с этим представляется интересным определение нижней и верхней асимптотических оценок параметра разложения для матриц.

Ниже приводится решение этой задачи в классе (n,ℓ), [33]. Произвольный набор чисел α_i, удовлетворяющий условию $0<\alpha_i<1$, $i=\overline{1,k}$, $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$, $\alpha_i=d_{ij}/\ell$, $d_{ij}=0,1,\dots,\ell$, будем называть вектором разложения и обозначать $R_j=(\alpha_1^j,\alpha_2^j,\dots,\alpha_k^j)$. Введем вектор элементарных матриц $D_j=(D_1^j,\dots,D_k^j)$ и следующую формальную запись (I.I):

$$R_jD_j=(\alpha_1^j,\dots,\alpha_k^j)(D_1^j,\dots,D_k^j)\equiv\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^jD_i^j. \qquad (4.I)$$

Ясно, что число различных векторов D_j равно n^{nk}. Введем $Q(k,\ell)$ – число различных, с точностью до перестановки компонент векторов R_j. Определение $Q(k,\ell)$ сводится к определению числа способов разложения числа ℓ на k слагаемых. Кроме того, легко видеть, что мощность множества всех матриц в классе (n,ℓ) есть $[C_{n+\ell-1}^{n-1}]^n$.

Пусть $Q_k(RD)$ – число стохастических матриц, допускающих разложение (I.I) с параметром k. Ясно, что

$$Q_k(RD)<n^{nk}\,Q(k,\ell)$$

и

$$\sum_{i=1}^{k}Q_i(RD)<\sum_{i=1}^{k}n^{ni}Q_i(i,\ell)<\sum_{i=1}^{k}n^{nk}Q_i(i,\ell). \qquad (4.2)$$

Введем отношение этого числа к общему числу матриц в классе (n,ℓ):

$$n^{nk}\sum_{i=1}^{k}Q_i(i,\ell)\Big/[C_{n+\ell-1}^{n-1}]^n. \qquad (4.3)$$

Перепишем (4.3), используя неравенство $Q_i(i,\ell)<C_{\ell-1}^{i-1}$ и формулу Стирлинга:

$$\frac{n^{nk}\sum_{i=1}^{k}Q_i(i,\ell)}{[C_{n+\ell-1}^{n-1}]^n}<\frac{n^{nk}\,2^{\ell-1}(n-1)^{n^2-\frac{n}{2}}\,\ell^{\ell\cdot n+\frac{n}{2}}(\sqrt{2\pi})^n}{(n+\ell-1)^{n^2+\ell\cdot n-\frac{n}{2}}}. \qquad (4.4)$$

Нетрудно показать, что существует некоторая константа c_1, $0<c_1<1$, такая, что при $k=c_1\ell$ предел (4.4) при $\ell=\mathrm{const.}$ и $n\to\infty$ равен 0. Это означает, что почти для всех матриц при их разложении требуется параметр разложения больший, чем $c_1\ell$. Таким образом $c_1\ell$ есть асимптотическая нижняя оценка параметра разложения в классе (n,ℓ) в случае $\ell=\mathrm{const.}$, $n\to\infty$. Верхняя оценка для $c_1\ell$ в этом случае тривиальна и равна ℓ.

Рассмотрим случай $(n=\mathrm{const.},\ell\to\infty)$. Отношение (4.3) представим следующим образом:

$$\frac{n^{nk}\sum_{i=1}^{k}Q_i(i,\ell)}{[C_{n+\ell-1}^{n-1}]^n}<\frac{n^{nk}\,k\cdot C_{\ell-1}^{k-1}}{[C_{n+\ell-1}^{n-1}]^n}. \qquad (4.5)$$

Легко видеть, что при $k\sim n^2-n+1$ предел (4.5) при $\ell\to\infty$, $n=\mathrm{const.}$ равен 0. Отсюда следует, что верхняя и нижняя асимптотические оценки параметра разложения в случае $(\ell\to\infty, n=\mathrm{const.})$ совпадают.

Теорема 5.6. Асимптотические оценки параметра разложения стохастических матриц на элементарные для случаев $(\ell=\mathrm{const.}, n\to\infty)$ и $(n=\mathrm{const.},\ell\to\infty)$ имеют вид: $c_1\ell\leqslant k\leqslant\ell$ и $k=n^2-n+1$ соответственно.

ГЛАВА 6

Декомпозиция вероятностных автоматов в клеточном пространстве

Понятие клеточного автомата или клеточного пространства, или автомата Неймана-Черча было введено Дж. фон Нейманом для исследования условий самовоспроизведения автоматов [34]. В последующих работах Беркса, Мура, Барздиня и др. [35], [36], [37], [38] были исследованы различные постановки и подходы к реализации автоматных отображений клеточными автоматами с различной пространственной структурой. Кроме чисто теоретического и общенаучного интереса, включая и философскую трактовку подобного типа задач, эта проблематика имеет и практическую сторону в связи с инженерными постановками и решениями таких вопросов, как однородные среды, итеративные сети, модульные схемы и т.д.

Поскольку задачи реализации заданных автоматных отображений или автоматов в клеточных пространствах можно рассматривать как задачи декомпозиции определенного типа заданного автомата в систему изоморфных друг другу автоматов, связанных друг с другом определенным образом, мы сочли нужным привести здесь некоторые результаты по реализации вероятностных автоматов в клеточном пространстве Неймана-Черча. Действительно, пользуясь "пространственной избыточностью", т.е. некоторым числом универсальных, базисных автоматов или ячеек (это число и определяет, с учетом числа состояний ячейки, сложность реализации), а также "временной избыточности", т.е., указывая шкалу наблюдения над клеточным пространством, мы получаем возможность реализовать или декомпозировать (здесь уместно применить термин: пространственно-временная декомпозиция) любой вероятностный автомат с рациональными вероятностями переходов в различных по структурной сложности клеточных пространствах.

Прежде, чем перейти к решению задачи реализации вероятностного автомата клеточным автоматом, мы остановимся на одной задаче так называемой итеративной декомпозиции автоматов [38], поскольку с одной стороны она близка к вышеупомянутому кругу вопросов, а с другой стороны является обобщением итеративной декомпозиции детерминированных автоматов на случай вероятностных автоматов.

6.1. Итеративная декомпозиция

В [39] изучаются возможности использования автоморфизмов конечного детерминированного автомата с целью декомпозиции его в систему изоморфных друг другу автоматов, меньших по числу состояний, чем исходный автомат, и связанных так, что граф соединений их представляет собой граф группы. Такую декомпозицию, следуя [39], будем называть итеративной.

В данной работе итеративная декомпозиция исследуется для конечного вероятностного автомата.

Рассмотрим вероятностный автомат (ВА) A как тройку $A = (X, S, \{H_x\})$, где S – множество состояний, $\{H_x\}$ – множество матриц переходных вероятностей по числу букв входного алфавита $x \in X$.

Определение 6.1. Автоморфизм ВА A (или матрицы H_x) есть одно-однозначное отображение g множества S на S, такое, что $p^x_{ij} = p^x_{g(i)g(j)}$ для всех i, j и всех $x \in X$, где p^x_{ij} – элемент матрицы $H_x = \| p^x_{ij} \|_{n \times n}$.

Пусть g_1 и g_2 – автоморфизмы A. Введем произведение $g_1 \cdot g_2$, следующим образом: $g_1 g_2(s) = g_2(g_1(s))$ для всех $s \in S$. Нетрудно видеть, что множество всех автоморфизмов ВА A относительно этой операции дает группу. Обозначим ее через $G(A)$.

Пусть матрица H_x представлена в виде

$$H_x = \sum_{i=1}^{k} q_i D_i \qquad (6.1)$$

где $0 < q_i < 1$, $k \leq n^2 - n + 1$, D_i – стохастические матрицы с элементами 0 и 1, n – размерность матрицы H_x.

Пусть $g_1, g_2, \dots, g_d$ – автоморфизмы для всех матриц D_i $(i = \overline{1,k})$ и всех $x \in X$. Нетрудно видеть, что $g_1, g_2, \dots, g_d$ являются автоморфизмами и для автомата A (матрицы H_x). Рассмотрим обратное. Пусть g – автоморфизм H_x и s_i, s_j, s'_j – состояния автомата, такие, что наличие автоморфизма g требует выполнения условия $P_j = P_{ij'} \neq 0$. В этом случае H_x не разложится в виде (6.I) так, чтобы отображение g являлось автоморфизмом для всех D_i. Действительно, так как $P_j \neq 0$ в одной из матриц D_i, скажем D_i^0, элемент $P_{ij}=1$. Условие $P_{ij} = P_{ij'} \neq 0$ требует, чтобы $P_{ij'}=1$ в D_i^0, что невозможно. И, наоборот, если ограничения типа $P_{ij} = P_{ij'} \neq 0$ отсутствуют при выполнении условий автоморфизма отображений $g_1, g_2, \dots, g_d$, всегда возможно разложение H_x в виде (6.I) такое, чтобы каждая матрица D_i допускала выполнение условий автоморфизмов $g_1, g_2, \dots, g_d$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 6.I. Пусть $g_1, g_2, \dots, g_d$ – автоморфизмы ВА A. Необходимым и достаточным условием разложения $H_x \in \{H_x\}$ в виде (6.I) так, чтобы $g_1, g_2, \dots, g_d$ являлись автоморфизмами для всех $x \in X$ и всех $D_i\ (i=\overline{1,k})$ является отсутствие условий типа $P_{ij} = P_{ij'} \neq 0$ во множестве ограничений, накладываемых автоморфизмами $g_1, g_2, \dots, g_d$ на матрицы H_x.

Пусть проблема декомпозиции ВА ограничена изучением детерминированной части разложения (6.I), т.е. по существу полностью сведена к проблеме декомпозиции детерминированного автомата. При таком подходе условия итеративной декомпозиции ВА определяются теоремой 6.I.

Разбиения π и τ есть пара [6],[8], обозначаемая (π,τ), если и только если для каждой пары блоков π_f и τ_t

$$\sum_{j\in\tau_t} P_{ij}(x) = \sum_{j\in\tau_t} P_{kj}(x)$$

для всех $i,k \in \pi_f \cap \tau_e$ и каждого блока τ_e такого, что $\pi_f \cap \tau_e \neq \emptyset$ и всех $x \in X$. Заметим, что (τ,τ) есть пара тогда и только тогда, когда τ обладает свойством подстановки.

Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ – взаимно независимые разбиения множества S вероятностного автомата $A=(S, X, \{H_x\})$ и $\prod_{i=1}^{m} \tau_i = 0$.

Введем K – подмножество индексов $1, 2, \dots, m$ и $\tau(K) = \prod_{i\in K} \tau_i$. Предположим, что для произвольного τ_i существует $\tau(K_i)$, такое, что $(\tau(K_i), \tau_i)$ – пара.

Рассмотрим декомпозицию ВА A на ВА $A_1, A_2, \dots, A_m$. Автоматы $A_1, A_2, \dots, A_m$ связаны следующим образом. Выход автомата A_j используется как вход A_i, если и только если j есть элемент множества K_i. В случае, когда в качестве $\tau(K_i)$ берется нулевое разбиение, все автоматы $A_1, A_2, \dots, A_m$ связаны друг с другом.

Пусть, например, $\tau_1 = (B_1, \dots, B_\ell)$, B_i – блоки $\tau_1\ (i=\overline{1,\ell})$ и для разбиения τ_1 существует $\tau(K_1) = (B_1', \dots, B_\ell')$ такое, что $(\tau(K_1), \tau_1)$ есть пара. Введем вероятностный автомат

$A_1 = (\tau_1, \tau(K_1) \times X, \{H_{yx}\})$. Здесь τ_1 – множество состояний ВА A_1, в качестве состояний берутся блоки τ_1, входная буква ВА A_1 определяется парой (y_j, x), где y_j – буква, связанная с блоком B_j' разбиения $\tau(K_1)$, а $x \in X$, $\tau(K_1) \times X$ – множество входных букв; H_{yx} – матрица переходных вероятностей, определенная для буквы (y, x).

Построим матрицу M_x^{τ} из матрицы H_x следующим образом. В H_x сложим столбцы, индексы которых образуют блоки разбиения τ_1.

Далее рассмотрим произведение $I_{B_i} = B_i \cap B_j'$, где B_i и B_j' – два произвольных блока разбиений τ_1 и $\tau(K_1)$ соответственно. Если $I_{B_i} = 0$, то i-я строчка матрицы $H_{y_i x}$ заполняется произвольным образом. В матрице $M_x^{\tau_1}$ строчки, определенные элементами, номера которых входят в произведение, одинаковы.

Если $I_{B_i} \neq 0$, то i-я строчка матрицы $H_{y_i x}$ определяется строчкой матрицы $M_x^{\tau_1}$, выделяемой произведением I_{B_i}. Таким образом, вероятность $P(B_i \to B_j, y_j x)$ автомата A_1 перейти из состояния B_i в B_j под воздействием буквы (y_j, x) есть:

$$P(B_i \to B_j, y_j, x) = P(B_i \cap B_j' \to B_j),$$

где $P(B_i \cap B_j' \to B_j)$ – элемент матрицы $M_x^{\tau_1}$. Тем самым нами построен автомат A_1. Автоматы $A_2, A_3, \dots, A_m$ строятся аналогично. Алгоритм построения обозначим через $\mathfrak{M}$.

Определение 6.2. Пусть τ – разбиение множества состояний S ВА A и g – автоморфизм. Определим разбиение τ_g следующим образом: $[i]_{\tau_g} = [j]_{\tau_g}$, если и только если

$[g(i)]_\tau = [g(j)]_\tau$, где $[i]_f$ – обозначение блока разбиения f, содержащего состояние i.

Нетрудно проверить [39], что если π и τ – разбиения множества S, g_1 и g_2 – автоморфизмы ВА A, то справедливо

$$\tau_{g_1 g_2} = (\tau_{g_2})_{g_1}, \quad (\pi \cdot \tau)_g = \pi_g \tau_g . \qquad (6.2)$$

Лемма. Пусть (π, τ) – пара разбиений ВА A и g –автоморфизм. Тогда (π_g, τ_g) также является парой.

Доказательство. Пусть $\pi(B_{1\pi}, B_{2\pi}, \ldots, B_{k\pi})$ – блоки разбиения π. Элементы, входящие в блоки π, будем обозначать буквами $a, b, c, \ldots$. Аналогично введем $\pi_g = (B'_{1\pi}, B'_{2\pi}, \ldots, B'_{k\pi})$ и элементы блоков $a', b', c', \ldots$. Введем также $\tau = (B_{1\tau}, \ldots, B_{m\tau})$ и $\tau_g = (B'_{1\tau}, \ldots, B'_{m\tau})$. Согласно определению 2. $a = g a'$, $a' = g^{-1} a$, $g g^{-1} = 1$. Поскольку (π, τ) – пара, для произвольных $B_{t\pi}, B_{s\tau}$ и $B_{t\tau}$ и произвольных $i, d \in B_{t\pi} \cap B_{s\tau}$ и всех $x \in X$ имеем

$$\sum_{j \in B_{t\tau}} p_{ij}(x) = \sum_{j \in B_{t\tau}} p_{dj}(x) . \qquad (6.3)$$

Пусть $g B_{i\pi}$ означает выполнение преобразования g для всех элементов, входящих в блок $B_{i\pi}$. Перепишем (6.3) следующим образом:

$$\sum_{g^{-1}(j) \in g^{-1} B_{t\tau}} p_{g^{-1}(i) g^{-1}(j)}(x) = \sum_{g^{-1}(j) \in g^{-1} B_{t\tau}} p_{g^{-1}(d) g^{-1}(j)}(x) . \qquad (6.4)$$

Равенство (6.4) выполняется для произвольных $g^{-1} B_{t\pi}$, $g^{-1} B_{s\tau}$, $g^{-1} B_{t\tau}$, произвольных $g^{-1}(i), g^{-1}(d) \in g^{-1} B_{t\pi} \cap g^{-1} B_{s\tau}$ и всех $x \in X$. С учетом $a' = g^{-1}(a)$ (6.I4) переписывается в виде

$$\sum_{j' \in g^{-1} B_{t\tau}} p_{i'j'}(x) = \sum_{j' \in g^{-1} B_{t\tau}} p_{d'j'}(x) . \qquad (6.5)$$

Это соотношение справедливо для произвольных $B_{t\pi_g}$, $B_{s\tau_g}$, $B_{t\tau_g}$ и $i', d' \in B_{t\pi_g} \cap B_{s\tau_g}$, $x \in X$, что доказывает лемму.

Пусть для автомата A существует разбиение τ, такое, что $\tau_{g_1}, \tau_{g_2}, \ldots, \tau_{g_\tau}$ – взаимно независимые разбиения, $\prod_{i=1}^{\tau} \tau_{g_i} = 0$; $g_1, g_2, \ldots, g_\tau$ – автоморфизмы подгруппы G группы автоморфизмов $G(A)$ ВА A. Пусть существует E – подмножество G, такое, что $(\tau(E), \tau)$

есть пара. Используя результат (6.2) и доказанную лемму, можно показать, что $(\tau(gE), \tau_g)$ также является парой, где gE есть множество $\{ g g_i \mid g_i \in E \}$.

Введем автомат $A_g = (\tau_g, \tau(gE) \times X, \{H^g\})$, где τ_g – множество состояний ВА A_g и состояниями его являются блоки разбиения τ_g; $\tau(gE) \times X$ – входной алфавит ВА A_g; $\{H^g\}$ – соответствующие матрицы переходных вероятностей; $g \in G$. Пусть e – единица подгруппы G. Тогда $A_e = (\tau, \tau(E) \times X, \{H^e\}$, так как $\tau_e = \tau$. Докажем, что автоматы $A_g, g \in G$ изоморфны автомату A_e. Введем пару отображений (f_1, f_2) следующим образом: $f_1 : \tau \to \tau_g$; $f_2 : \tau(E) \times X \to \tau(gE) \times X$, такие, что

$$f_1([i]_\tau) = [g^{-1}(i)]_{\tau_g}, \quad f_2([i]_{\tau(E)}, x) = ([g^{-1}(i)]_{\tau(gE)}, x) .$$

Введем $P([i]_\tau \to [j]_\tau, [i]_{\tau(E)}, x)$ вероятность автомата A_e перейти из состояния $[i]_\tau$ в $[j]_\tau$, под воздействием входа $[i]_{\tau(E)}, x$. Нам следует показать, что

$$P([i]_\tau \to [j]_\tau, [i]_{\tau(E)}, x) = P\{ f_1([i]_\tau) \to f_1([j]_\tau), f_2([i]_{\tau(E)}, x) \} .$$

Действительно, согласно алгоритму $\mathfrak{M}$ и определению автоморфизма ВА имеем

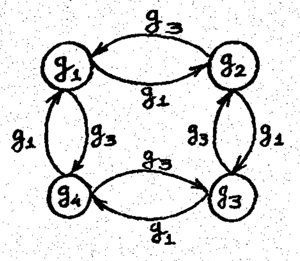
$$P([i]_\tau \to [j]_\tau, [i]_{\tau(E)}, x) = P([i]_\tau \cap [i]_{\tau(E)} \to [j]_\tau) =$$

$$= P([g^{-1}(i)]_{\tau_g} \cap [g^{-1}(j)]_{\tau(gE)} \to [g^{-1}(j)]_{\tau_g}) =$$

$$= P\{ f_1([i]_\tau) \to f_1([j]_\tau), f_2([i]_{\tau(E)}, x) \} .$$

Окончательный результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 6.2. Пусть $A = (X, S, \{H_x\})$ – конечный вероятностный автомат с числом состояний больше двух; $G(A)$ – нетривиальная группы автоморфизмов ВА A.



Если существует нетривиальная подгруппа G группы $G(A)$ и разбиение τ, такое, что $\tau_{g_1}, \tau_{g_2}, \ldots, \tau_{g_r}$ – множество взаимно независимых разбиений, удовлетворяющая условию $\prod_{i=1}^{r} \tau_{g_i} = 0$, то имеет место итеративная декомпозиция автомата A.

Пример. Итеративная декомпозиция автономного вероятностного автомата

$$H = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$G = G(A) = (g_1, g_2, g_3, g_4).$$

$g_1 = (1234)$, $g_2 = (13)(24)$, $g_3 = (1432)$, $g_4 = (1)(2)(3)(4)$,

$\tau = (\overline{1,2}; \overline{3,4})$, $\tau_{g_1} = (\overline{1,4}; \overline{2,3})$, $\tau_{g_2} = (\overline{3,4}; \overline{1,2})$,

$\tau_{g_3} = (\overline{2,3}; \overline{1,4})$, $\tau_{g_4} = (\overline{1,2}; \overline{3,4})$,

$E = (g_1, g_3)$,

$g_1E = (g_2, g_4)$, $g_2E = (g_3, g_1)$,

$g_3E = (g_4, g_2)$, $g_4E = (g_1, g_3)$.

Парами являются: $(\tau_{g_i}, \tau(g_iE))$, $i = 1,2,3,4$.

$$M^{\tau_1} = M^{\tau_3} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^{\tau_2} = M^{\tau_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Определим матрицы H_1^i, H_2^i – матрицы переходных вероятностей автоматов A_i $(i = 1,2,3,4)$

$$H_1^1 = H_1^3 = H_1^2 = H_1^4 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2^1 = H_2^2 = H_2^3 = H_2^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Граф соединений приведен на рисунке.

6.2. Реализация детерминированных отображений клеточными автоматами с ячейкой с четырьмя состояниями

Мы рассмотрим реализацию заданного детерминированного автоматного отображения клеточным автоматом. Будет проведено описание универсальной ячейки, из которой строится клеточный автомат и метод построения самого клеточного автомата. Для любого автоматного отображения или любого детерминированного автомата мы укажем универсальный метод реализации его клеточным автоматом, состоящим из одинаковых ячеек с числом состояний равным 4, [40].

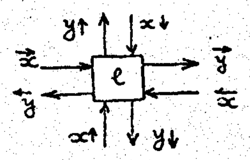
Пусть Σ_x и Σ_y – входной и выходной конечный алфавиты, Σ_x^τ (соответственно Σ_y^τ) – множество всех входных (выходных слов в алфавите Σ_x (Σ_y) и Σ_x^*(Σ_y^*) – множество всех входных (выходных) слов в этих алфавитах. Отображение $\mathcal{L}$ множества $\bigcup_{\tau=1}^{\infty} (\Sigma_x^\tau \times \Sigma_y^\tau)$ в отрезок $[0, 1]$ будем называть вероятностным отображением, если для произвольного τ $(\tau = 1,2,\ldots)$ и любого слова $\bar{x} \in \Sigma_x^\tau$ отображение $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{\bar{y} \in \Sigma_y^\tau} \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}) = 1,$$

где $\mathcal{L}(\bar{y}, u)$ – отображение пары слов $(\bar{y}, \bar{u})$ в отрезок $[0,1]$. В случае детерминированного отображения отрезок $[0,1]$ заменяется множеством $\{0,1\}$.

Пусть ℓ – автомат, имеющий четыре входных канала – $\vec{x}, x\downarrow, \overleftarrow{x}, x\uparrow$ и четыре выходных канала – $\overleftarrow{y}, y\uparrow, \vec{y}, y\downarrow$ – такой, что выходной сигнал, индуцированный входным сигналом, поступившим в момент t, появляется в моменте или такте

Вид ячейки ℓ приведен на рисунке.



Пусть M – множество целочисленных точек на плоскости. Клеточным автоматом A_M над ℓ будем называть плоскую логическую сеть, построенную следующим образом (в этой вводной части основные определения взяты из [41]). В каждую точку множества M помещается ячейка ℓ . Входные и выходные каналы ячейки, помещенные в точку (i,j), соединяются с соответствующими входными и выходными каналами ячеек, помещенных в точках $(i-1,j)$; $(i+1,j)$; $(i,j-1)$ $(i,j+1)$. Если в этих точках ячейка не помещена, то входные и выходные каналы ячейки $\ell(i,j)$ считаются входными и выходными каналами всей сети.

Пусть Σ_p и Σ_g – конечные алфавиты и пусть α – отображение слов алфавита Σ_p в слова алфавита Σ_g . Для того, чтобы говорить о реализации отображения α некоторым клеточным автоматом, необходимо закодировать буквы алфавитов Σ_p и Σ_g наборами из прямого произведения (или части прямого произведения) алфавитов входных и выходных каналов клеточного автомата. Клеточный автомат A_M реализует отображение α с растяжением T и кодированием (F,G), где F – отображение из Σ_p на часть прямого произведения алфавитов входных и выходных каналов A_M , а G – отображение из части прямого произведения этих алфавитов на Σ_g , если найдется число d, набор $\bar\xi$, принадлежащий части прямого произведения алфавитов входных каналов A_M такие, что для для любого слова $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_{k-1}},\sigma_{i_k}$ в алфавите Σ_p , клеточный автомат перерабатывает последовательность

$$F(\sigma_{i_1})\underbrace{\bar\xi\cdots\bar\xi}_{T-1}F(\sigma_{i_2})\bar\xi\cdots\bar\xi F(\sigma_{i_k})\bar\xi\cdots\bar\xi$$

в последовательность $\overbrace{\cdots}^{d}\tau_{m_1}\cdots\tau_{m_2}\overbrace{\cdots}^{T-1}\tau_{m_k}$, такую, что $G(\tau_{m_1})G(\tau_{m_2})\cdots G(\tau_{m_k})=\alpha(\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k})$ (определения реализации взято из [41]).

Мы приведем отличный от [41] способ реализации детерминированного автомата клеточным автоматом, при котором кроме поведения автомата, то есть вход-выходного соответствия, моделируется также и его внутренняя структура – вид соединения подавтоматов, на которые декомпозируется исходный автомат. Этот способ опирается на предварительное разложение исходного ДА без выхода (что не ограничивает общности, так как любой автомат с выходом можно заменить автоматом без выхода) в сеть из автоматов с 2-мя состояниями q^1 и q^2 , каждый из которых, в общем случае, может быть связан с каждым. Возможность такого разложения, с числом автоматов в моделирующей сети $m-1$ при m состояниях у исходного автомата, вытекает из [6] . Более того, как это показано в [22] , эти автоматы можно подобрать изоморфными друг другу. Сеть из 3 автоматов с двумя состояниями, моделирующая данный ДА, изображена на рис.I.

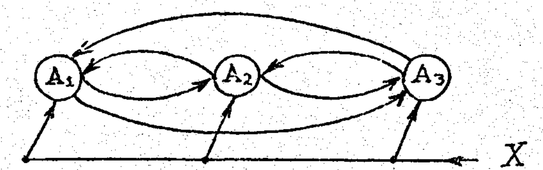


Рис.I

Предлагаемый способ реализации дает возможность выделять в клеточном пространстве области, моделирующие каждый из автоматов $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Итак, пусть имеем ДА с входным алфавитом $X=\{x_1,\ldots,x_p\}$, разложенный в сеть вида рис.I из n компонент-автоматов. При этом одному состоянию исходного автомата соответствует набор состояний сети из рис.I.

Опишем универсальную ячейку-автомат ℓ , из которой будет построен клеточный автомат.

Ячейка ℓ имеет 4 двухкомпонентных состояния – (00), (0I), (I0), (II). По каждому каналу ячейки ℓ могут передаваться буквы 0,I,I*, причем буква I* может поступать на ячейку только сверху ($x\downarrow = 1^*$) или появляться на нижнем выходном канале ($y\downarrow = 1^*$).

Функции переходов из состояния в состояние и выходов ячейки представлены в таблице. Выходной сигнал, индуцированный входным сигналом в такте t, появляется в такте $t+1$. В таблице и всюду далее используются следующие сокращения. Вместо $\vec{x}=1$ будем писать $\vec{1}$, вместо $x\uparrow=1$ – $1\uparrow$, вместо $\overleftarrow{y}=0$ – $\overleftarrow{0}$ (если из контекста ясно о входном или выходном сигнале идет речь) и т.д. При указании входных и выходных комбинаций нулевые значения будем опускать, так что вместо $\vec{x}=0$, $x\downarrow=0$, $\overleftarrow{x}=1$, $x\uparrow=1$ будем писать $\overleftarrow{1}, 1\uparrow$ и т.д. Комбинацию типа $\vec{0}\,0\downarrow\,\overleftarrow{0}\,0\uparrow$ будем обозначать $\overleftarrow{0}$.

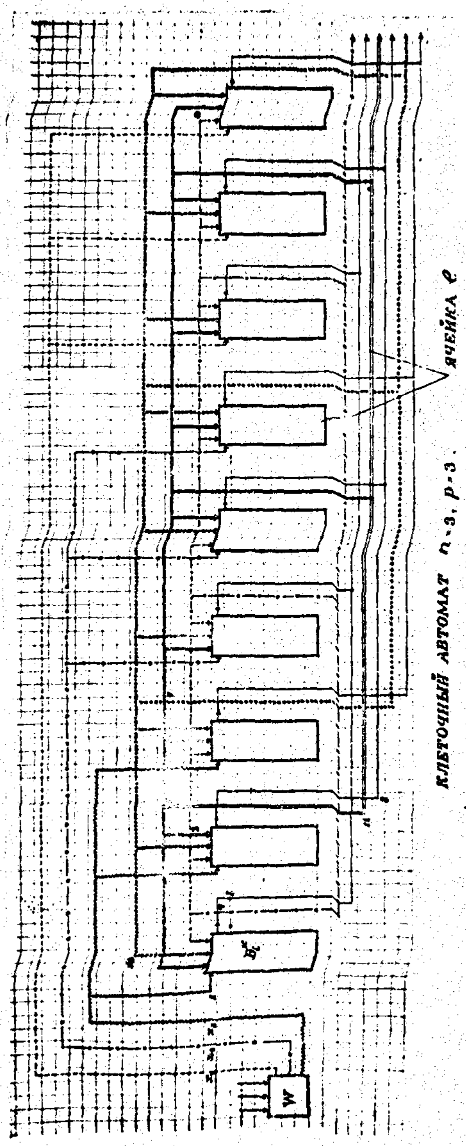
Для заданной сети из n компонент с 2-мя состояниями и p входными буквами построим реализующий эту сеть клеточный автомат. За ходом построения будем следить по клеточному автомату, приведенному на рис.2 *для случая* $n=3$, $p=3$. При этом, как это нетрудно заметить, общность метода не будет потеряна. Входные буквы сети рис.I закодируем двоичными наборами длины $]\log_2 p[$.

Принцип работы сети из n компонент, в который каждый автомат A_i связан, в общем случае, с каждым, состоит в том, что под действием общего входа X и в зависимости от состояний других компонент, каждый автомат A_i переходит в одно из своих двух состояний q^1 или q^2. *Если обозначить состояние* A_i *через* q_i, *то функция* перехода f_i автомата A_i будет иметь вид:

$$q_i^t = f_i(q_1^{t-1}, q_2^{t-1}, \dots, q_n^{t-1}, x_k), \; i=\overline{1,n}; \; k=\overline{1,p}.$$

Будем считать, что если компонента A_i сети переходит в состояние q_1, то она посылает своим соседям сигнал I, *а если переходит в* q^2, то – 0.

Из вида переходной функции f_i следует, что в клеточном автомате нам понадобятся p^n блоков, соответствующих работе каждого автомата A_i при каждой входной букве x_k. Обозначим эти блоки B_i^k, $k=1,2,\dots,p$, $i=1,2,\dots,n$. Мы наберем также из группы ячеек ℓ блок W, распознающий входные символы x_k. Необходимы также шины, передающие информацию о поступившем входном сигнале и



КЛЕТОЧНЫЙ АВТОМАТ $n=3$, $p=3$

РИС. 2

$q \backslash x$	$\bar{0}$	$\vec{1}$	$1\downarrow$	$1^*\downarrow$	$1\uparrow$	$\overleftarrow{1}$	$1\downarrow\overleftarrow{1}$	$\vec{1}\,1\downarrow$	$\vec{1}\,1\uparrow$	$1\downarrow 1\uparrow$	$\vec{1}\,\overleftarrow{1}$	$1\uparrow\overleftarrow{1}$	$\vec{1}\,1\uparrow\overleftarrow{1}$	$\vec{1}\,1\downarrow 1\uparrow$
00	00 $\bar{0}$	00 $\vec{1}$	01 $1\downarrow$	00 $\vec{1}$	00 $\overleftarrow{1}\vec{1}$	00 $\overleftarrow{1}$	00 $\bar{0}$		00 $\bar{0}$					
01	00 $\bar{0}$	01 $1^*\downarrow$	01 $1\downarrow$	01 $1^*\downarrow$	01 $\bar{0}$	01 $\bar{0}$	01 $1\downarrow$		01 $\vec{1}$	01 $\vec{1}$	01 $1\uparrow 1\downarrow$	01 $1\uparrow$	01 $\vec{1}$	01 $\vec{1}$
10	10 $\overleftarrow{1}$	10 $\vec{1}$	10 $1\downarrow$	10 $1^*\downarrow$	10 $1\uparrow$	10 $1\uparrow$			10 $1\uparrow\vec{1}$					
11	11 $\bar{0}$	11 $\vec{1}$	11 $1\downarrow$	11 $\vec{1}$	11 $1\uparrow$	11 $\overleftarrow{1}$	11 $1\downarrow\overleftarrow{1}$	11 $1\downarrow\vec{1}$	11 $1\downarrow\vec{1}$				11 $1\downarrow\overleftarrow{1}$	

Таблица переходов и выходов ячейки ℓ.

Пример: ячейка ℓ **, находясь** в состоянии 0I при комбинации входных сигналов $\overset{\circ}{0}$ слева, 0 **снизу, 1 сверху,** 1 справа (обозначение этой комбинации - $1\downarrow\overleftarrow{1}$) **переходит в состояния 0I и** выдает на нижнем канале $1\downarrow$.

шины, по которым блоки B_i^k (моделирующие работу компонет A_i при входе x_k) будут "узнавать" о состояниях друг друга, а также выдавать сигналы о своем состоянии. Шина - по существу - совокупность ячеек, работающих как "соединительные провода", т.е. распространяющих направленно сигналы от блока B_i^k к B_j^k . Из таблицы переходов ячейки ℓ видно, что будучи установлена в соответствующее состояние, она может как сохранить направление полученного сигнала, так и изменять его нужным образом и даже раздваивать.

Из рис.2 ясен, в общих чертах, принцип работы клеточного автомата, реализующего сеть типа рис.I. На вход клеточного автомата через определенные промежутки времени T (в остальное время подается 0) поступают двоичные коды букв входного алфавита. Буква x_k распознается блоком W , и по соответствующим шинам на вход k -ой группы блоков B_i^k поступает возбуждение ($\vec{1}$). После этого блоки в этой группе начинают имитировать переход в состояния q^1 или q^2 , в зависимости от того, куда в такой ситуации перешел бы автомат A_i согласно функции f_i , и передают информацию об этом переходе на выходные шины.

Опишем более подробно работу отдельных участков схемы. На рис.3 приведен блок B^k_i , имитирующий автомат A_i . Кружками обозначены ячейки. Число ячеек - $(2^{n+1})n$. В строке число ячеек равно n - по числу компонент $q_1, \dots, q_n$, от которых помимо входной буквы x_k зависит состояние автомата A_i . В каждой j -ой строке блока первые компоненты состояний ячеек устанавливаются равными j -ому набору возможных значений $q_1, \dots, q_n$. Значение i -го элемента вектора для удобства записано в последней ячейке каждой строки блока. Возможные значения вектора $q_1, \dots, q_n$ расположены в строчках $1, 2, \dots, 2^{n+1}$ в порядке возрастания от $00 \dots 0$ до $11 \dots 1$.

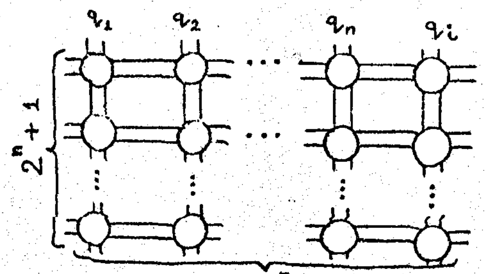


Рис. 3

На входы $x\downarrow$ ячеек первой строки блока B_i^k в виде таких же двоичных наборов поступает информация о состоянии всех других блоков, то есть значение вектора $q_1, q_2, \dots, q_n$ в такте $t-1$ моделируемого автомата. Значение сигналов на остальных входных каналах ячеек блока B_i^k в этот момент равно 0. В соответствии с таблицей переходов, эти символы $(x\downarrow)$ формируют вторую компоненту состояний ячеек блока B_i^k следующим образом: вторая компонента состояния ячейки e совпадает с компонентой пришедшего набора (если первая компонента состояния есть 0 и с 1, если первая компонента есть 1. Таким образом, в столбцах блока B_i^k встречаются состояния вида $00, 01$ и 11). Выход $y\downarrow$ ячеек каждой строки повторяет значение входа $x\downarrow$. Таким образом информация распространяется вниз.
В момент, когда заведомо известно, что информация о входном наборе, то есть о состоянии других блоков, спустилась ниже первой строки (что достигается подбором соответствующего числа тактов T - *растяжения*) *на вход* $\vec{x}$ *левой верхней* ячейки блока поступает сигнал, который действует таким образом, что происходит сравнение значений первой и второй компоненты состояния ячеек первой строки. Этот сигнал распространяется вправо до тех пор, пока эти компоненты совпадают. В случае несовпадения, что происходит всегда на ячейке, находящейся в состоянии 0I (пусть эта ячейка расположена в j -ом столбце), она выдает $1^*\downarrow$, что побуждает продолжать сравнение в следующей строчке, начиная с j -ой

ячейки этой строчки.

Таким образом, сигнал $\vec{1}$, продвигаясь вправо и вниз, как бы диагонально читает информацию, записанную в блоке и появляется на выходе B_i^k в крайнем правом столбце в той строчке, вторые компоненты состояний ячеек которой совпадали с первыми компонентами. Далее, пройдя вспомогательный столбец ячеек, состояния которых суть все 00, этот сигнал возбуждает шины q^1 или q^2 в соответствии с состоянием q_i^t, определенным по f_i и $q_m^{t-1}, m=\overline{1,n}$, для входной буквы x_k. По этим шинам возбуждение поступает вверх и вниз и оттуда на вход всех остальных блоков и на выход (см. рис.2).

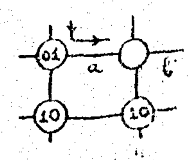
Аналогичным образом действует блок W, распознающий входные символы. По шинам, идущим от этого блока, распространяется возбуждение, вызывающее работу группы блоков B_i^k, если на вход системы поступила буква x_k. Передача сигналов по шинам достигается особой их "настройкой" - установлением ячеек, из которых они состоят, в специальные состояния. Для передачи информации слева направо и справа налево ячейка устанавливается в состояние 00, а для передачи сигнала снизу вверх и сверху вниз - в состояние II.

Особо необходимо рассмотреть узлы на шинах, места пересечения проводящих каналов и места разветвлений и поворотов сигналов.

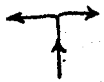
Всего может быть выделено около 20 видов узлов, но из них некоторые могут быть получены друг из друга применением группы ячеек, названных нами заглушками. Описание заглушек будет приведено ниже. Все типы узлов могут быть сведены к узлам, помеченным на рис.2 цифрами от I до II.

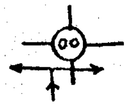
Рассмотрим их последовательно.

I. – поворот сверху направо:

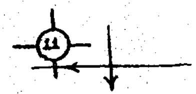


Здесь кружками обозначены ячейки. В них вписаны состояния, которые позволяют сигнал, воспринимаемый ячейкой a, передавать на вход ячейки b, то есть, осуществить поворот направо сигнала, идущего сверху.

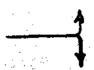
2.  – разветвление идущего снизу сигнала направо и налево:

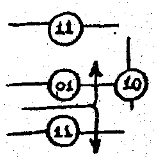


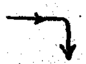
3.  – пересечение вертикального и горизонтального каналов с возможностью одновременного прохождения сигналов возбуждения в узле:

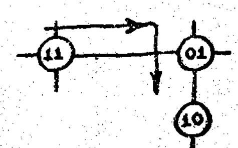


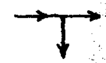
Например, пусть сигнал возбуждения поступает на ячейку сверху и справа. Тогда ячейка, находящаяся в состоянии II, пропустит эти сигналы внизу и налево.

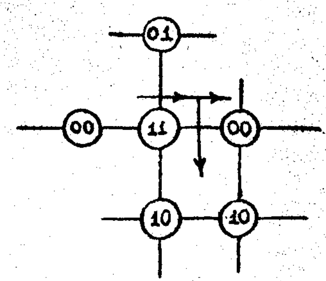
4.  – Разветвление идущего слева сигнала наверх и вниз



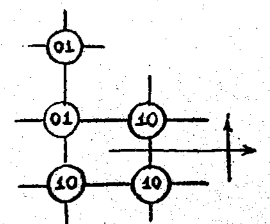
5.  – Поворот идущего слева сигнала вниз

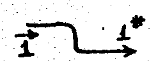


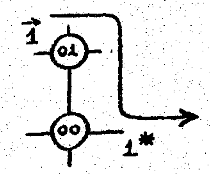
6.  – Разветвление сигнала, идущего справа или слева на такой же и направленный вниз



7.  Пересечение шины, передающей сигнал снизу вверх с шиной, по которой сигнал идет слева направо или справа налево с возможностью одновременного прохождения возбуждений:

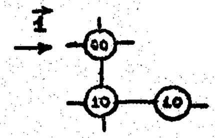


8.  Поворот с перекодировкой

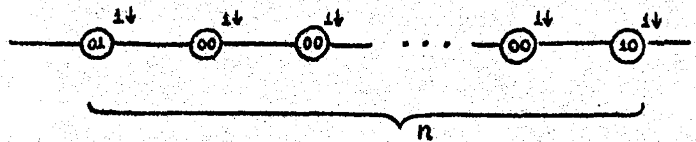


9. Левая заглушка – не пропускает сигнал $\vec{1}$

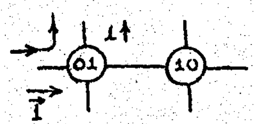
10. Правая заглушка – не пропускает сигнал $\vec{1}$



11. Нижняя заглушка. Поскольку состояния ячеек нижней строки блоков B_i^k и W пропускает сигнал $1\downarrow$ на нижележащие слои, то необходимо непосредственно под этими блоками поместить слой ячеек, не пропускающий далее сигнал $1\downarrow$. Этот слой ячеек с указанием состояний, в которые их следует поместить, показан на нижнем рисунке.



12. В блоке W поворот слева наверх.



6.3. Универсальный клеточный вероятностный автомат

В работе [42] мы описывали способ моделирования случайных последовательностей на клеточных вероятностных автоматах. Продолжением этой работы явилась работа [43], в которой было показано как, воспользовавшись этим способом, построить универсальный клеточный вероятностный автомат, реализующий любой конечный вероятностный автомат с рациональными вероятностями переходов.

Здесь мы предлагаем более простой способ реализации вероятностного автомата клеточным вероятностным автоматом и

приводим соответствующие оценки сложности реализации и времени растяжения. В основу способа мы положили работу [44], но можно использовать и метод реализации детерминированных автоматов в клеточном пространстве Неймана-Черча, описанный нами в предыдущем параграфе.

Пусть C – ячейка детерминированного клеточного автомата.

Определение клеточного вероятностного автомата аналогично определению детерминированного клеточного автомата и отличается лишь конструкцией ячейки. Преобразуем ячейку C в вероятностную ячейку a следующим образом. Множество состояний ячейки C увеличим на два состояния s_i и s_j и вероятности переходов между ними положим равными $P_{s_i s_i} = P_{s_i s_j} = P_{s_j s_i} = P_{s_j s_j} = 1/2$. Переходы между остальными состояниями ячейки a совпадают с переходами между соответствующими состояниями в ячейке C. Выходные буквы, связанные с состояниями s_i и s_j, совпадают с теми выходными буквами ячейки C, которые используются в качестве входного алфавита всего детерминированного клеточного автомата.

Понятие реализации или моделирования ВА на клеточном ВА отличается от определения моделирования, приведенного в [41] и повторенного нами, лишь правилом введения входных букв, которое будет дано ниже.

Пусть задан ВА $A = (X, Y, S, \{H(x_i)\}, F)$, где $X = (x_1, \dots, x_k)$ – входной алфавит, $Y = (y_1, \dots, y_m)$ – выходной алфавит, S – множество состояний мощности n, $\{H(x_i)\}$ – множество матриц переходных вероятностей, F – выходная функция, которую вначале положим детерминированной (ниже будет сказано несколько слов о том, как обобщить предлагаемый способ на случай вероятностной выходной функции).

Рассмотрим уже использованное нами разложение матриц $H(x)$:

$$H(x_j) = \sum_{i=1}^{\tau(j)} q_i(x_j) D_i(x_j), \quad 0 < q_i(x_j) < 1,$$

$$\sum_{i=1}^{\tau(j)} q_i(x_j) = 1, \quad \tau(j) = \tau(x_j) \leqslant n^2 - n + 1,$$

где $D_i(x_j)$ – стохастические квадратные матрицы размерности n с элементами 0 и 1.

Введем обозначения: $d = \sum_{j=1}^{n} \tau(x_j)\,\ell_i$ – общий знаменатель чисел $q_1(x_i),\ldots,q_{\tau(i)}(x_i)$ и $\ell = \max_i \ell_i$. Образуем систему G параллельно функционирующих генераторов Бернулли с двумя равновероятными исходами в количестве $b =]\log_2 \ell[$. С каждым состоянием j системы G свяжем выходную букву z_j. Для каждой буквы x_i из числа $f = 2^b$ букв z выделим первые ℓ_i букв и введем разбиение

$$\pi_i = (\overline{1,2,\ldots,h_1(i)};\ \overline{h_1(i)+1,\ldots,h_2(i)};\ \ldots$$
$$\ldots\ \overline{h_{\tau(i)-1}(i)+1,\ldots,h_{\tau(i)}(i)};\ \overline{h_{\tau(i)}(i)+1}) =$$
$$= (B_1^i, B_2^i, \ldots, B_{\tau(i)}^i, B_\Lambda^i),$$

где $h_j(i) = q_j(x_i)\ell_i$, $j = 1,2,\ldots,\tau(i)$. Блоки $B_1^i,\ldots,B_{\tau(i)}^i$ назовем значащими. Построим детерминированный автомат D', для которого входными буквами являются пары (x_i, z_j), $i = \overline{1,k+1}$, $j = \overline{1,f}$ и $x_{k+1} = \Lambda$ – пустая буква. Метод реализации иллюстрируется рис.I. Канал, на который подаются буквы x_i, назовем основным. Выходной алфавит D' образуем

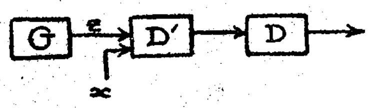


Рис.I

буквами $u_1, u_2, \ldots, u_d, \Lambda$. Автомат D' однозначно сопоставляет каждому значащему блоку из разбиений $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ одну из букв u_i, $i = \overline{1,d}$, а всем блокам B^i_Λ – пустую букву Λ. Пусть на D' подана пара (x_i, z_j) такая, что z_j принадлежит одному из значащих блоков π_i. В этом случае на выходе D' должна появиться буква, сопоставленная с этим блоком. Если же z_j не входит в значащие блоки π_i, на выходе D' должна появиться буква Λ. В этом случае на основной канал подается буква Λ до тех пор, пока на выходе D' не появится значащая буква. Таким

образом, на выходе D' при подаче x_i будут появляться либо буквы $u_{\tau(i-1)+1}, u_{\tau(i-1)+2}, \ldots, u_{\tau(i)}$ с вероятностями $q_1(x_i), q_2(x_i), \ldots, q_{\tau(i)}(x_i)$, либо буква Λ.

Построим теперь автомат D следующим образом. Входным алфавитом автомата D объявим буквы $u_1, u_2, \ldots, u_d, \Lambda$. В качестве переходных матриц, связанных с буквами u_1, $u_2, \ldots, u_{\tau(1)}$ возьмем матрицы $D_1(x_1), D_2(x_1), \ldots, D_{\tau(1)}(x_1)$ разложения матрицы $H(x_1)$. С буквами $u_{\tau(1)+1}, \ldots, u_{\tau(2)}$ свяжем матрицы $D_1(x_2), \ldots, D_{\tau(2)}(x_2)$ и т.д. С буквой Λ свяжем диагнональную матрицу.

Нетрудно видеть, что система G вместе с автоматами D' и D воспроизводит работу ВА A. Кроме того, с помощью ячейки a несложно промоделировать все три автомата G, D' и D на вероятностном клеточном автомате, используя приемы, приведенные в [44]. Выпишем параметры автомата D'. Для него $(k+1)2^{]\log_2 \ell[}$ – число входных букв, k – число состояний, $d+1$ – число выходных букв. $d+1$, n, m – соответствующие параметры автомата D. Согласно [44], сложность реализации автоматов D' и D есть

$$L(D',D) = k(k+1)\,2^{]\log_2 \ell[}\cdot \log_2 k(d+1) + (d+1)\,n \log_2 mn .$$

Поскольку число ячеек типа a, используемых при построении ВА G есть $]\log_2 \ell[$, сложность $L(A)$ реализации в.а. A на клеточном вероятностном автомате будет

$$L(A) = L(D',D) +]\log_2 \ell[.$$

Пусть $t(D',D)$ – растяжение тактности, которое необходимо для реализации, согласно [44] системы д.а. D', D на клеточном автомате. Согласно [45], математическое ожидание поступления значащих букв в ВА G равно 2. Тогда для растяжения тактности $T(A)$ при реализации ВА на клеточном ВА предложенным способом справедливо

$$T(A) < 2t(D',D).$$

В случае, когда выходная функция автомата вероятностная, можно выходной вероятностный преобразователь (интерпретируя его как вероятностный автомат) заменить генератором Бернулли и последовательно соединенным с ним детерминированным автоматом так, как это было проделано для ВА A, и далее следовать описанной выше процедуре реализации.

ГЛАВА 7

Декомпозиция с растяжением тактности

7.I. Случайное растяжение тактности. Моделирование и декомпозиция

Пусть ВА A декомпозирован в сеть A_N, состоящую из автоматов $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Мы уже рассмотрели различные виды декомпозиции, однако при этом мы никак не оговаривали моменты наблюдения за функционированием сети A_N, полагая, что тактность ее совпадает с тактностью автоматов A_i. Покажем, что задание закона наблюдения за автоматом может в некоторых случаях быть весьма существенным и, поэтому, принципиальным в постановке задач по декомпозиции автоматов.

Пусть задан ВА $A = (H, S)$ и

$$H = \begin{bmatrix} 0.235 & 0.225 & 0.225 & 0.285 \\ 0.15 & 0.31 & 0.15 & 0.39 \\ 0.265 & 0.185 & 0.305 & 0.245 \\ 0.2125 & 0.2375 & 0.2375 & 0.3125 \end{bmatrix}.$$

Матрица H может быть укрупнена по разбиению $\tau = (\overline{1,2}\ ; \overline{3,4})$. Можно показать, что не существует разбиения π такого, чтобы $\pi \cdot \tau = 0$ и π и τ были независимыми.

Действительно, выпишем все нетривиальные разбиения π_i: $\pi_i \cdot \tau = 0$; $\pi_1 = (\overline{1,3}\ ; \overline{2,4})$; $\pi_2 = (\overline{1,4}\ ; \overline{2,3})$.

Согласно условию независимости, для всех $B_\ell \in \tau$ и $B_f \in \pi_i$ должно выполняться:

$$\sum_{j \in B_\ell \cap B_f} P_{ij} = \Big(\sum_{k \in B_\ell} P_{ik}\Big)\Big(\sum_{l \in B_f} P_{il}\Big), \ \forall\, i = \overline{1,4}$$

Пусть $B_1 = (\overline{1,2})$, $B_3 = (\overline{1,3})$, $B_1 \cap B_3 = 1$, $P_{11} \neq (P_{11} + P_{12})(P_{11} + P_{13}) = (0.235 + 0.225)(0.235 + 0.255) = 0.46 \cdot 0.49 = 0.2254 \neq P_{11}$, так как $P_{11} = 0.235$.

Точно так же проверим условие независимости для τ и

π_2. Выберем блоки B_1 и B_5 : $p_{11} \neq (p_{11}+p_{12})(p_{11}+p_{14}) = 0.46 \cdot 0.52 = 0.2392 \neq p_{11}$.

Таким образом, автомат A не разлагается на два последовательно соединенных автомата.

Введем автомат $A_m = (H_m, S)$,

$$H_m = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Можно видеть, что $H_m^2 = H$ и автомат A_m разлагается на два последовательно соединенных автомата.

Действительно, рассмотрим разбиение $\tau = (\overline{1,2}\,;\overline{3,4})$ и $\pi = (\overline{1,3}\,;\overline{2,4})$ относительно матрицы H_m. Условие независимости выполняется. Будем наблюдать автомат A_m через каждый такт – тогда мы фактически будем иметь дело с автоматом A, поскольку $H = H_m^2$, но автомат A_m, как это было показано, декомпозируется. В таких случаях мы будем говорить о декомпозиции с растяжением тактности.

Докажем следующее у т в е р ж д е н и е : растяжение тактности детерминированного автомата не расширяет класс декомпозируемых в обычном смысле автоматов.

Действительно, пусть A_1 и A_2 – детерминированные автоматы и H_m -матрица, описывающая работу автоматов A_1 и A_2, соединенных последовательно. Пусть растяжение тактности равно d. Тогда H_m^d – матрица, моделирующая некоторый автомат A' с растяжением d. Но возможность укрупнения по разбиениям матрицы H_m сохраняется и для матрицы H_m^d, откуда следует, что A' декомпозируется и без растяжения тактности.

Мы привели этот пример, чтобы показать, что развитие идей декомпозиции в случае вероятностных автоматов приводит к особенностям, которые заставляют переосмыслить общие представления о декомпозиции.

В предыдущих главах, рассматривая различные подходы к задачам декомпозиции, мы каждый раз имели дело только с пространством состояний автомата. Можно сказать, что изучали "пространственную" декомпозицию вероятностных автоматов (пространственную потому, что моделирование или накрытие на системе автоматов осуществлялось путем введения избыточности в общее число состояний). Фактор времени, возможность наблюдения моделирующего автомата в такты, не совпадающие с тактами моделируемого автомата, позволяет принципиально и существенно расширить концепцию декомпозиции и получить результаты, представляющие интерес как для самой теории декомпозиции, так и для ее приложений практического характера. В частности в этой главе, пользуясь временным фактором, то есть рассматривая наряду с "пространственной" декомпозицией и "временную" декомпозицию, мы дадим некоторое толкование простоты автомата и теоремы Крона-Роудза о полной декомпозиции детерминированных автоматов применительно к вероятностному случаю.

Пусть M_P -эргодическая цепь Маркова с множеством состояний S и переходной матрицей $P = [p_{ij}]$. Эргодическая цепь (то же справедливо относительно эргодичности стохастической матрицы) – цепь, в которой все множество состояний эргодично, или цепь, в которой из любого состояния можно попасть в любое другое. ВА будем называть эргодическим, если все матрицы переходных вероятностей его эргодичны. Будем наблюдать цепь M_P только в те моменты, когда она находится в некотором подмножестве $S_0 \subset S$. Мы получим новую цепь Маркова. Обозначим ее $M_{\bar{P}} = (S_0, \bar{P}, [\bar{p}_{ij}])$. Одному шагу в этой цепи будет соответствовать некоторое случайное число шагов цепи M_P. Пусть s_i и s_j – два состояния из S_0. Определим вероятность перехода $\bar{p}_{ij}$ из s_i в s_j для новой цепи как вероятность того, что цепь M_P, начиная из s_i, впервые попадет в s_j, минуя все остальные состояния множества S_0. Или иначе,

$$\bar{p}_{ij} = \sum_{d=1}^{\infty} \bar{p}_{ij}(d), \qquad (7.1)$$

где $\bar{p}_{ij}(d)$ – вероятность цепи M_P из состояния s_i впервые попасть в s_j в такте d, ни разу не побывав во множестве S_0 в предыдущих тактах $d-1, d-2, \ldots, 1$.

Ясно, что $\sum\limits_{s_j \in S_0} \bar{p}_{ij} = 1$ для всех $s_i \in S_0$ и, поэтому, $\bar{P} = [\bar{p}_{ij}]$ – стохастическая матрица размерности $|S_0| \times |S_0|$. Воспользовавшись результатами [11], можно показать, что

$$\bar{P} = T + U(I-Q)^{-1}R . \qquad (1.1)$$

где матрица I – *единичная матрица, а матрицы* T , U , Q и R – подматрицы матрицы P , записанной в блочном виде:

$$P = \begin{array}{c} \\ S \\ S_0 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} S & S_0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} T & U \\ R & Q \end{pmatrix} \end{array} .$$

Рассмотрим эти результаты применительно к эргодическим автоматам, составляя для каждой матрицы $P(x)$ автомата $A = (X, S, Y, \{P(x) = [p_{ij}(x)]\}, F)$ матрицы $\bar{P} = [\bar{p}_{ij}^{x}]$, согласно (1.1).

Будем наблюдать автомат A только в те такты, когда он находится в состоянии множества S_0 , и называть эти такты значащими. Пусть автомат находится в $s_i \in S_0$ и на вход подана буква $x \in X$ в такте t . Если автомат переходит в состояние $s_k \in S - S_0$, то на вход в такте $t+1$ подается та же буква x . Подача x продолжается до тех пор, пока в некотором такте $t+u$, где u – случайная величина, автомат впервые не перейдет в состояние $s_j \in S_0$. В такте $t+u+1$ можно подавать любую букву из X .

Определение 7.1. Автомат A моделирует со случайным растяжением тактности автомат $A_0 = (X_0, S_0, Y_0, \{\bar{P}(x)\}, F_0)$, при этом, $X_0 \subseteq X$, $Y \subseteq Y$; функция выхода $F_0 \subseteq F$ определена в значащие такты.

Определение 7.2. ВА A_0 с числом состояний n_0 декомпозируется со случайным растяжением тактности, если существует некоторый ВА A , моделирующий A_0 со случайным растяжением тактности и декомпозируемый (в смысле одного из определений декомпозиции, приводимых нами ранее в предыдущих главах) на автоматы A_i с числом состояний $n_i < n$:

Пример. Рассмотрим автономный ВА A , описываемый стохастической матрицей

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} .$$

и разбиения $\pi = (\overline{1,2}; \overline{3,4})$ и $\tau = (\overline{1,3}; \overline{2,4})$. Легко видеть, что $\pi \cdot \tau = 0$ и разбиения независимы. Пусть состояния 1,2,3 образуют множество S_0 . Вычислим вероятности $\bar{p}_{ij}$ согласно (1.1),

$$\bar{p}_{ij} = p_{ij} + p_{i4}p_{4j}(1 + p_{44} + p_{44}^2 + \dots) = p_{ij} + p_{i4}p_{4i} \cdot 4/3 .$$

Составим матрицу

$$H_0 = [\bar{p}_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{8} & \frac{4}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{8} & \frac{4}{8} & \frac{2}{8} \end{bmatrix} .$$

Автомат A_0 , описываемый матрицей H_0 моделируется автоматом A с растяжением. В свою очередь, автомат A декомпозируем на два параллельно соединенные автоматы A_1 и A_2 с *матрицами переходов* H_1 *для автомата* A_1 и H_2^1 и H_2^2 – для автомата A_2 .

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} , \quad H_2^1 = H_2^2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} .$$

Таким образом, хотя автомат A_0 в рассматриваемом примере не допускает, как это нетрудно проверить, декомпозиции на каскадно соединенные автоматы, он декомпозируем со случайным растяжением тактности, ибо он моделируется с растяжением на системе, состоящей из автоматов A_1 и A_2 .

Декомпозиция автономного ВА, по существу, осуществляется моделированием одной цепи Маркова на другой. При этом моделирование можно понимать по-разному. Например, из матрицы, описывающей моделирующую цепь, выделяется подматрица исходной цепи или к исходной цепи приводит объединение состояний (укрупнение) моделирующей цепи, или моделирование осуществляется с помощью растяжения тактности (о нем речь пойдет дальше). Во всех этих случаях моделирующая цепь должна обладать определенными свойствами, которые и позволяют осуществить декомпозицию и с необходимостью содержать не более $n^2 - 1$ (в случае декомпозиции на два автомата) состояний моделируемой цепи. Пусть, например, автомат $A(n)$, n – число состояний, моделируется с растяжением тактности на автомате $A(N), N>n$. При этом потребуем декомпозицию $A(N)$ на автоматы $A(N_1)$ и $A(N_2)$, $N_1, N_2 <$. Пусть $A(N_1 \times N_2)$ – автомат, описывающий совместную работу $A(N_1)$ и $A(N_2)$. Число состояний $A(N_1 \times N_2)$ есть $N_1 \cdot N_2$. Ясно, что если $N_1 \cdot N_2 > n^2-1$, мы не сможем моделировать $A(N)$ *на автоматах* $A(N_1)$ *и* $A(N_2)$ *даже с растяжением тактности.* Можно, однако, доказать, что произвольная эргодическая цепь Маркова с n состояниями моделируется с растяжением тактности на цепи с $2n$ состояниями и возможно в дальнейшем изучить свойства этой матрицы, необходимые для декомпозиции соответствующего автомата.

Т е о р е м а 7.1: Произвольная цепь Маркова с n состояниями моделируется с растяжением тактности на цепи Маркова с $2n$ состояниями.

Доказательство. Рассмотрим стохастическую матрицу $H^q_{n\times n}$ с элементами q_{ij}. Пусть β – минимальное и отличное от 0 число среди чисел q_{ij}. Выберем некоторое число столбцов матрицы $H^q_{n\times n}$ и образуем множества ω_i, $i=1,2,\dots,n$, i-ых элементов этих столбцов. Пусть m -минимальное число столбцов в $H^q_{n\times n}$, для которых каждое ω_i содержит по крайней мере один, отличный от 0, элемент. Для простоты будем считать, что это первые m столбцов в $H^q_{n\times n}$. Пусть q_{ik_i} -первое число, отличное от 0 в последовательности $q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{im}$. Построим матрицу $H^p_{N\times N}$, где $N=n+m$, с элементами p_{ij} следующим образом: $p_{ij}=q_{ij}$ для всех $i=\overline{1,n}$ и всех $j=\overline{1,m}$, кроме $j=k_i$, $p_{ik_i}=q_{ik_i}-\beta$, $p_{ir}=\beta$, $r=n+k_i$, $p_{i,n+g}=0$ для всех $i=\overline{1,n}$ и всех $g=\overline{1,m}$ кроме $g=k_i$.

Далее, $p_{n+g,k_i}=1$ для всех $g=\overline{1,m}$, $p_{n+g,j}=0$ для всех $g=\overline{1,m}$ и всех $j=\overline{1,n+m}$ кроме $j=k_i$.

Пусть, построенная таким образом, матрица $H^p_{N\times N}$ описывает цепь Маркова M_p. Легко увидеть, что M_p моделирует M_q, для которой матрицей переходов служит $H^q_{n\times n}$ и вероятности p_{ij}, q_{ij} соответствующих матриц удовлетворяют условию моделирования. Положив $m=n$ мы доказываем теорему.

Рассмотрим класс цепей Маркова $M(n,\ell)$, описываемых матрицами $n\times n$, в которых $p_{ij}=d/\ell$, $d=0,1,\dots,\ell$. Пусть Q_n -мощность класса $M(n,\ell)$ и Q^1_n -мощность подкласса $M(n,\ell)$, содержащего матрицы $n\times n$, в которых по крайней мере один столбец нулевой. В этом случае цепь Маркова, соответствующая матрице из этого подкласса, моделируема на цепи с $n+1$ состояниями. Нетрудно увидеть, что

$$Q_n = [C^{\ell}_{n+\ell-1}]^n, \quad Q^1_n > [C^{\ell-1}_{n+\ell-2}]^n.$$

Пусть $\ell=\ell(n)$ – некоторая функция n. Легко показать, что если

$$\lim_{n\to\infty} n^2/\ell(n) = 0, \text{ то } \lim_{n\to\infty} Q_n/Q^1_n = 1.$$

Действительно, если

$$\lim_{n\to\infty} n^2/\ell(n) = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{Q^1_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+\ell(n)-1}{\ell(n)}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\exp\left[\frac{(n-1)^2}{\ell(n)} - \frac{(n-1)^3}{2\ell^2(n)} + \frac{(n-1)^4}{3\ell^3(n)} - \cdots\right]\right\} = 1.$$

Таким образом доказана

Т е о р е м а 7.2. В классе $M(n,\ell)$ при условии $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\ell(n)}=0$ подавляющее большинство цепей Маркова допускает моделирование на цепях класса $M(n+1,\ell)$.

Т е о р е м а 7.3. Автономный вероятностный автомат A_0 с матрицей перехода $[p_{ij}]_{n\times n}$ допускает последовательную декомпозицию со случайным растяжением тактности, если:

1) в матрице переходов найдется столбец (для простоты будем считать, что это последний n -й столбец), который содержит *по крайней мере один нулевой элемент, например,* $p_{nn}=0$;

2) для каждой строки i существует подмножество Ω_i множества значений индекса j таков, что

$$\sum_{t\in\Omega_i} p_{it} + p_{in} = c = \text{const.}, \quad \forall\, i=1,2,\dots,n-1;$$

пусть $p_{kn}=\max_i\{p_{in}\}$, тогда $\sum_{t\in\Omega_k} p_{kt} = \min_i\{\sum_{t\in\Omega_t} p_{it}\}$;

3) найдутся числа $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ такие, что в каждом Ω_i имеется индекс $\eta(i)$ такой, что $p_{i\eta(i)} \geqslant x_i$ и

$$\sum_{t\in\Omega_i} p_{it} - x_i = \sum_{t\in\Omega_k} p_{kt}.$$

Доказательство. Построим матрицу B размерности $2n-2$ с элементами q_{ij} следующим образом:

$$q_{ij} = p_{ij}\ ,\ \forall\ i,j = 1,2,\dots,n\ ,$$

кроме $q_{i\eta(i)} = p_{i\eta(i)} - x_i, q_{j\,n+1} = x_i, q_{i\,n+2} = q_{i\,n+3} = \dots = q_{i\,2n-2}$. Для $i = n+2,\dots,2n-2$, $j = 1,2,\dots,2n-2$ (кроме $q_{i\eta(i)} = 1$) $q_{ij} = 0$. Вероятностный автомат A с матрицей B моделирует вероятностный автомат A_0 со случайным растяжением тактности. Нетрудно увидеть, что матрица B обладает свойством подстановки по разбиению $\pi = (\overline{1,2,\dots,n-1}\ ;\ \overline{n,n+1,\dots,2n-2})$. Согласно теореме 1.5 автомат A декомпозируем на последовательно соединенные автоматы с числом состояний меньше n. Таким образом, автомат A_0 декомпозируем со случайным растяжением.

Пример. Рассмотрим в.а. A_0 с матрицей

$$[p_{ij}] = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 13 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 9 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Условие I теоремы выполнено для последнего столбца. Условие 2 теоремы для данного примера имеет вид

$$p_{12} + p_{13} + p_{16} = p_{21} + p_{22} + p_{26} =$$

$$= p_{32} + p_{33} + p_{35} + p_{36} = p_{43} + p_{44} +$$

$$+ p_{46} = p_{52} + p_{56} = 15\ .$$

Условие 3 теоремы выполняется для $x_1 = 5, x_2 = 10$, $x_3 = 13$, $x_4 = 8$, $x_5 = 0$.
Соответствующая матрица $B = [q_{ij}]_{10\times 10}$ имеет вид:

$$[q_{ij}] = \frac{1}{20}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 8 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Для матрицы B разбиение $\pi = (\overline{1,2,3,4,5}\ ;\ \overline{6,7,8,9,10})$ обладает СП.

7.2. Декомпозиция бернуллиевского датчика со случайным растяжением тактности. Синтез вероятностных автоматов

Бернуллиевский датчик G_n или генератор, или автономный ВА, описывается стохастической матрицей

$$H_n = |h_1, h_2, \dots, h_n|\ ,$$

все строчки которой одинаковы и равны

$$h_1, h_2, \dots, h_n .$$

Рассмотрим датчики G_m и G_k, где $km > n, k < n, m < n$, описываемые матрицами $L_m = |\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m|$ и $F_k = |f_1, f_2, \dots, f_k|$ соответственно.

Рассмотрим прямое произведение $L \otimes F$ матриц L_m и F_k. Строчки матрицы $L \otimes F$ имеют вид

$$f_1\ell_1, f_1\ell_2, \dots, f_1\ell_m, f_2\ell_1, \dots, f_2\ell_m, \dots, f_k\ell_1, f_k\ell_2, \dots, f_k\ell_m .$$

Рассмотрим первые n состояний цепи Маркова, описываемой матрицей $L \otimes F$ и обозначим множество этих состояний через S_n. Поскольку неподвижный вектор матрицы $L \otimes F$ совпадает с ее строкой, а неподвижный вектор подматрицы

$$p = |f_1\ell_1, \dots, f_1\ell_m, f_2\ell_1, \dots, f_2\ell_m, \dots, f_d\ell_q|\ ,$$

где $(d-1)m + q = n$, матрицы $L \otimes f$, согласно [11], есть

$$f_1\ell_1\gamma, \dots, f_1\ell_m\gamma, f_2\ell_1\gamma, \dots, f_2\ell_m\gamma, \dots, f_d\ell_q\gamma,$$ где

$$\gamma = 1/(f_1\ell_1 + \dots + f_1\ell_m + f_2\ell_1 + \dots + f_2\ell_m + \dots + f_d\ell_q),$$

можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} P_1 = f_1\ell_1\gamma \\ P_2 = f_1\ell_2\gamma \\ \dots \\ P_m = f_1\ell_m\gamma \\ P_{m+1} = f_2\ell_1\gamma \\ \dots \\ P_{2m} = f_2\ell_m\gamma \\ \dots \\ P_n = f_d\ell_q\gamma \end{cases} \qquad (I)$$

Из первых m уравнений системы (I) имеем

$$\begin{cases} \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{\ell_2}{\ell_1} \\ \dfrac{P_3}{P_1} = \dfrac{\ell_3}{\ell_1} \\ \dots \\ \dfrac{P_m}{P_1} = \dfrac{\ell_m}{\ell_1} \end{cases} \qquad (2)$$

Из (2) определяем $\ell_1 = P_1(P_1 + \dots + P_m)$. Аналогично находятся $\ell_i = P_i/(P_1 + \dots + P_m)$ для $i = \overline{2,m}$. Подставив ℓ_i в (I), получим

$$\begin{cases} f_1\gamma = b_1 \\ f_2\gamma = b_2 \\ \dots \\ f_d\gamma = b_d \end{cases} \qquad (3)$$

где $b_1 = P_1 + \dots + P_m$, $b_2 = P_{m+1}\ell/P_1, \dots, b_d = P_n b_1/P_q$.

Из (3) имеем

$$\begin{cases} f_2 = \dfrac{b_2}{b_1} f_1 \\ f_3 = \dfrac{b_3}{b_1} f_1 \\ \dots \\ f_d = \dfrac{b_d}{b_1} f_1 \end{cases} \qquad (4)$$

Положим $f_1 = b_1(b_1 + \dots + b_d)$, тогда

$$f_{d+1} = f_{d+2} = \dots = f_k = 0.$$

Таким образом нами доказана теорема, [45] .

Т е о р е м а 7.4. Произвольный бернуллиевский датчик G_n декомпозируется с растяжением времени на два параллельно работающих датчика G_m и G_k, где m и k – произвольные натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $k \cdot m > n$, $k < n$, $m < n$.

Как следствие теоремы, можно показать, что произвольный датчик G_n декомпозируется с растяжением времени на параллельно работающие датчики $G_{n_1}, G_{n_2}, \dots, G_{n_i}$, $n_1, n_2, \dots, n_i < n$, $\prod_{j=1} n_j > n$.

Цепь Маркова, описываемую матрицей $L \otimes F$, укрупним по разбиению

$$\pi = (\overline{1,2,\dots,n}\,;\ \overline{n+1,\dots,mk}).$$

Матрица, описывающая полученную в результате укрупнения цепь Маркова, будет иметь вид

$$(L \otimes F)_\pi = \begin{bmatrix} 1/\gamma & (\gamma-1)\gamma \\ 1/\gamma & (\gamma-1)\gamma \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим вопрос, касающийся выяснения среднего времени, за которое система из состояния s_i впервые попадет в состояние s_j. Для регулярной ц.Маркова время первого достижения есть функция f_j, равная числу шагов (тактов), за которое цепь впервые из начального состояния попадет в s_j. Напомним, что цепь регулярна тогда и только тогда, когда за конечное число шагов из любого состояния можно попасть в любое. Обозначим $M_i[f_j]$ математическое ожидание функции f_i. Математическое ожидание для всех пар (i,j) запишем в виде матрицы $M = [m_{ij} = M_i[f_j]]$. Из [41] известно, что для цепи Маркова, описываемой матрицей $P = [P_{ij}]$,

$$M = (I - Z + E Z_{dg}) D,$$

где I – единичная матрица, $Z = (I - (P - A))^{-1}$ – фундаментальная матрица регулярной цепи с предельной матрицей A. Z_{dg} – матрица, диагональные элементы которой совпадают с соответствующими диагональными элементами матрицы Z, а все остальные элементы равны 0, E – матрица, все элементы которой равны 1, D – диагональная матрица с элементами $d_{ii} = 1/a_i$, где a_i – элемент неподвижного вектора $a_1, a_2, \dots, a_n$ матрицы P. При начальном распределении π вместо M будем иметь πM.

Вычисляя эти матрицы в случае, когда цепь описывается матрицей $(L \otimes F)_{\pi}$, то есть вычисляя матрицу средних времен, (обозначим ее для рассматриваемого случая через $M(L,F)$) получим

$$M(L,F) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma/\gamma-1 \\ \gamma & \gamma/\gamma-1 \end{bmatrix}.$$

Матрица дисперсий момента первого достижения также легко вычисляется с помощью матрицы M, [11],[45], и для нашего случая имеет вид

$$\begin{bmatrix} \gamma^2-\gamma & \gamma/(\gamma-1)^2 \\ \gamma^2-\gamma & \gamma/(\gamma-1)^2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия растяжения времени при моделировании датчика G_n на системе параллельно работающих датчиков G_m и G_k есть γ и $\gamma^2-\gamma$ соответственно.

Рассмотрим датчик G_n и матрицу $H_n = |h_1, \dots, h_n|$. Пусть z -общий знаменатель чисел h_i, $i=\overline{1,n}$. Образуем датчик G_z, описываемый матрицей $H_z = |1/z, \dots, 1/z|$. Нетрудно видеть, что укрупняя состояния датчика G_z по разбиению

$$\tau = (\overline{1,2,\dots,h_1 z}\,; \overline{h_1 z+1,\dots,h_2 z}\,; \dots; \overline{h_{k-1}z+1,\dots,h_k z}),$$

имеем возможность моделировать датчик G_n на G. В свою очередь, можно показать, воспользуясь приведенной теоремой, что датчик G_z можно декомпозировать с растяжением времени на два датчика $G_{[\frac{z}{2}]+1}$ и G_2 при этом матрица датчика G_2 будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Продолжая декомпозицию датчика $G_{[\frac{z}{2}]+1}$ и последующих получаемых датчиков размерности более 2, мы в конце концов придем к параллельно работающим датчикам $(1/2, 1/2)$, число которых равно $[\log_2 n]+1$ при $n=2^t, n=2^t+1$ и $[\log_2 n]+2$ в остальных случаях. Растяжение и дисперсия такой декомпозиции вычисляется аналогично случаю декомпозиции датчика G_n на датчики G_m и G_k.

Этот результат дает нам, по существу, возможность синтеза вероятностных автоматов с рациональными переходными вероятностями. Действительно, накроем заданный ВА A, согласно § 3,2 последовательным соединением соответствующего датчика G и детерминированного автомата D. Выберем некоторый базис β реализации конечных детерминированных автоматов. Образуем новый базис $\beta' = \beta \cup G_2$. Ясно, что любой конечный ВА, может быть реализован в базисе β' со случайным растяжением тактности. Вопросу синтеза ВА посвящены работы [20], [21].

7.3. Моделирование со случайным растяжением тактности бернуллиевских последовательностей на итеративной сети. Пусть задан ВА $A = (X, \Upsilon, S, \{A(x)\}, F)$. Из ВА A построим ячейку (клетку) C следующим образом:

Ячейка C есть вероятностный автомат C, у которого $X = S \times S$, $Y = S$ и $F(s) = s, s \in S$. Предполагается, что ячейка имеет два входных канала - левый и правый. Подача на вход ячейки C буквы $x = (s', s'')$ будет означать, что по левому каналу подается буква s', а по правому - s'' $(s', s'' \in S)$, см. рис.I.

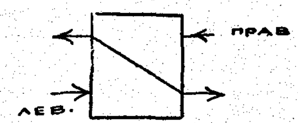


Рис.7.I. Ячейка.

Сеть, составленную из упорядоченной последовательности $C_1, C_2, \dots, C_N$ копий ячейки C путем присоединения левого (правого) входного канала ячейки C_{ij}, $i = \overline{1,N}$ к выходному каналу ее соседа слева (справа)(левый (правый) входной канал ячейки $C_1(C_N)$ присоединяется к ее выходному каналу), назовем вероятностной N -сетью над C. На рис.7.2 изображена итеративная 5-сеть над C.

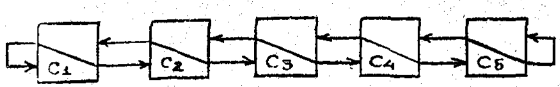


Рис. 7.2.

Если состояние ячейки C_i, $i=\overline{1,N}$ в момент времени t обозначить через $s_i(t)$, то набор $\tilde{s}(t)=(s_1(t), s_2(t),\dots,s_N(t))$ задаст состояние N -сети в момент времени t.

Рассмотрим последовательность независимых испытаний с n исходами $B(p_1,p_2,\dots,p_n)$ - случайную бернуллиевскую последовательность.

Случайную бернуллиевскую последовательность $B(p_1,\dots,p_n)$ назовем (n,ℓ) -последовательностью, если p_i $(i=\overline{1,n})$ -рациональные числа, и наименьшее общее кратное знаменателей p_i равно ℓ.

Моделирование (n,ℓ)-последовательностей на итеративных сетях. Рассмотрим итеративную N -сеть над которой ячейкой C, и пусть $\tilde{s}_0$ есть состояние сети в начальный момент времени. Выделим на N -сети $k(n,\ell)$ $(k<N)$ последовательных ячеек и объявим последовательность их выходных каналов выходом N -сети. Выходным алфавитом N -сети будет множество $S^k=S\times S\times\dots\times S$. В S^k выделим некоторое непустое подмножество выходных букв, которые будем называть рабочими выходными буквами. В процессе функционирования N -сети будем следить только за рабочими выходными буквами. Последовательности рабочих выходных букв будем называть рабочими последовательностями.

Рабочая последовательность, вырабатываемая на выходе N -сети, является случайной последовательностью. Если она окажется (n,ℓ) -последовательностью, будем говорить, что N -сеть моделирует эту последовательность.

В общем случае на выходе N -сети могут вырабатываться и те буквы, которые не являются рабочими. Их появление будет интерпретироваться как паузы между буквами рабочей последовательности.

Число пауз между двумя последующими рабочими буквами на выходе есть случайная величина, зависящая от состояния $\tilde{s}$ N-сети в момент появления первой из этих букв. Обозначим эту слу-

чайную величину через $\xi(\tilde{s})$, а ее математическое ожидание - через $T(\tilde{s})$. Пусть

$$T(n,\ell)=\max_{\tilde{s}} T(\tilde{s}).$$

Будем говорить, что N -сеть моделирует (n,ℓ) -последовательность B с растяжением $T(n,\ell)$.

Под сложностью $L(n,\ell)$ итеративной сети, моделирующей данную последовательность, будем подразумевать число составляющих ее ячеек (N).

Будем говорить, что располагаем методом моделирования (n,ℓ) -последовательностей на вероятностных итеративных сетях, если для произвольной (n,ℓ) -последовательности B конструктивно можно указать N -сеть над некоторой фиксированной для всего класса рациональных бернуллиевских последовательностей ячейкой C, начальное состояние $\tilde{s}_0$ N-сети, выход N -сети и рабочие буквы выхода, такие что данная (n,ℓ)-последовательность B моделируется построенной N -сетью.

Пусть $B(p_1,p_2,\dots,p_n)$ есть некоторая (n,ℓ) -последовательность.

Нормализованным представлением вектора $(p_1,p_2,\dots,p_n)$ будем называть такую запись этого вектора, в которую компоненты p_i, $i=\overline{1,n}$, входят приведенными к общему знаменателю ℓ.

Займемся решением следующей задачи. Требуется построить такой конечный направленный диграф G_ℓ с некоторым выделенным подмножеством "выходных" вершин Ω, чтобы для любого (n,ℓ)-вектора $(p_1,p_2,\dots,p_n)$ можно было указать n непересекающихся подмножеств Ω_i; $\Omega_i\subset\Omega$; $i=\overline{1,n}$, таких, что если из каждой вершины q диграфа G_ℓ равновероятен переход в те вершины, в которые втекают дуги, исходящие из q, то вероятность перехода (за какое-либо число шагов) из произвольной вершины, принадлежащей множеству $\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i$ в какую-либо вершину множества Ω_k, минуя вершины множества $\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i$, была бы равна p_k; $k=\overline{1,n}$. Кроме того, диграф G_ℓ должен состоять из возможно меньшего числа ребер.

Рассмотрим конечное $]\log_2\ell[$ ярусное дерево (рис.7.4) с корнем q_0, из каждой вершины которого исходят две дуги, ориентированные от корня.

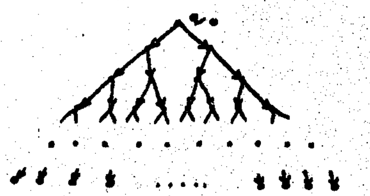


Рис. 7.4.

Над деревом проделаем следующую операцию. Каждую вершину α последнего яруса свяжем с каждой вершиной второго яруса дугой, исходящей из α, и устраним корень q_0 дерева с вытекающими из него дугами. Получим некоторый связной диграф (рис.7.5).

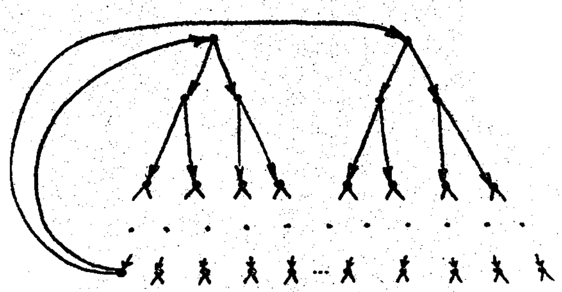


Рис.7.5.

В силу конструкции построенного графа переходы между любыми ершинами одного и того же яруса могут осуществляться только исло шагов, кратное $]\log l[$.

Множество вершин Ω последнего яруса объявим выходны ершинами. Покажем, что при вышеуказанной вероятностной интерпретации это – G_l.

Пусть $B(p_1,p_2,\dots,p_n)$-некоторая (n,l)-последовательность и $(a_1/l, a_2/l,\dots,a_n/l)$ – запись этого вектора в нормализованном виде. Упорядочим множество Ω выходных вершин: $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{2^{]\log l[}}$. Множество $\Omega(l)$ первых l вы-

ходных вершин разобьем на n непересекающихся подмножеств:

$$\Omega_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{a_1}\},$$

$$\Omega_2=\{\alpha_{a_1+1},\dots,\alpha_{a_1+a_2}\},$$

$$\dots$$

$$\Omega_n=\{\alpha_{a_1+\dots+a_{n-1}+1},\dots,\alpha_l\}.$$

Покажем, что вероятность $P_{\Omega(l)}(\Omega_j/\alpha)$ перехода (за какое-либо число шагов) из произвольной вершины α множества $\Omega(l)$) в одну из вершин множества Ω_j, минуя вершины из $\Omega(l)$, равна p_j, $j=\overline{1,n}$.

Пусть $P^{(k)}_{\Omega(l)}(\Omega_j/\alpha)$ есть вероятность, исходя из вершины α перейти в одну из вершин множества Ω_j, минуя вершины из $\Omega(l)$ и при этом ровно k раз попасть в одну из вершин множества $\Omega\setminus\Omega(l)$.

Нетрудно видеть, что

$$P_{\Omega(l)}(\Omega_j/\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}P^{(k)}_{\Omega(l)}(\Omega_j/\alpha).$$

Далее,

$$P^{(k)}_{\Omega(l)}(\Omega_j/\alpha)=\Big[1-\sum_{i=1}^{n}P^{(0)}_{\Omega(l)}(\Omega_i/\alpha)\Big]^{k-1}\cdot P^{(0)}_{\Omega(l)}(\Omega_j/\alpha).$$

Но

$$P^{(0)}_{\Omega(l)}(\Omega_j/\alpha)=a_j/2^{]\log l[}.$$

Поэтому

$$P_{\Omega(l)}(\Omega_j/\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(1-\sum_{i=1}^{n}a_i/2^{]\log l[}\Big)^{k-1}\cdot a_j/2^{]\log l[}=a_j/l.$$

Следовательно, описанный выше диграф является G_l-графом. Легко видеть, что он содержит $2(2^m-1)$, $m=2^{]\log l[}$, вершин.

Случайная величина ξ, равная числу циклов (прохождений дерева) до первого попадания в одну из вершин множества $\Omega(l)$ имеет следующее распределение:

$$p(\xi=t)=\big(1-l/2^{]\log l[}\big)^{t-1}\cdot l/2^{]\log l[},\quad t=1,2,\dots$$

Математическое ожидание этой случайной величины

$$T(\ell)=\sum_{t=1}^{\infty} t\,p(\xi=t) = 2^{]\log_2\ell[}/\ell.$$

Отсюда имеем, что

$$T(\ell) \leq \max_{\ell} 2^{]\log_2\ell[}/\ell < 2.$$

Описанная ниже процедура лежит в основе предлагаемого метода моделирования (n,ℓ)-последовательностей на итеративных сетях.

Каждую пару исходящих из одной вершины ветвей G_ℓ-графа пометим соответственно нулем и единицей (правую – нулем, левую – единицей). Тогда с каждой выходной вершиной α_i, $i=\overline{1,2^{]\log_2\ell[}}$ можно ассоциировать последовательность из нулей и единиц длиною $]\log_2\ell[$, такую, что если исходить из любой выходной вершины G_ℓ графа и следовать пути, предписываемому этой последовательностью, мы придем в вершину α_i.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}$ суть последовательности (двоичные слова, соответствующие выходным вершинам G_ℓ-графа $\alpha_1, \alpha_{a_1+1}, \alpha_{a_1+a_2+1}, \ldots, \alpha_{\ell+1}$ соответственно. Очевидно, что $b_1 = 11\cdots1$.

Располагая датчиком Бернулли, на выходе которого равновероятно вырабатываются буквы 0 и I, мы можем этот набор двоичных слов использовать для моделирования случайной (n,ℓ)-последовательности $B(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Для этого генерируемую на выходе датчика последовательность d будем разбивать на слова длины $]\log_2\ell[$: $d=d_1,d_2\cdots$. Далее, каждое новое слово d_i, полученное на выходе датчика, будем сравнивать со словами b_i из нашего набора. Если $d_i \leq b_{n+1}$, то будем считать, что никакое событие еще не произошло (это интерпретируется как пауза), если же $b_j \leq d_i < b_{j+1}$, $j=\overline{1,n}$, то мы будем говорить, что произошло j-ое событие. Легко видеть, что вероятность такого события априори равна p_j, т.е. описанная процедура действительно задает реализацию (n,ℓ)-последовательности $B(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

На рис.7.6 представлена блок-схема начального состояния N – сети, моделирующей (n,ℓ)-последовательность $B(p_1, \ldots, p_n)$.

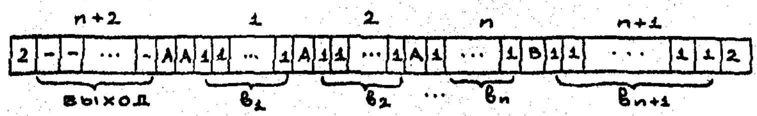


Рис. 7.6.

Начальная конфигурация состоит из $(n+2)$ зон, между которыми помещены "буферные" ячейки.

Каждая из этих зон составлена из $]\log_2\ell[$ ячеек. Зоны $1, 2, \ldots, n+1$ "хранят" информацию о двоичных числах b_1, $b_2, \ldots, b_{n+1}$ соответственно, причем записанная в них информация сохраняется и в процессе функционирования итеративной сети.

Буферные клетки, связывающие между собой зоны с первой по n-ую установлены в некоторое специальное состояние A, а буферная клетка, расположенная между n-ой и $(n+1)$-ой зонами, находится в некотором другом состоянии B.

Зона $(n+2)$, расположенная в левом конце итеративной сети, является ее выходной областью и коммутируется с первой зоной сети через две буферные клетки, установленные в начальный момент времени в состояние A.

Сеть функционирует следующим образом: активность вначале возникает лишь в $(n+1)$-ой зоне. Там начинается формирование некоторого двоичного слова d_1 длины $]\log_2\ell[$, причем 0 и 1 во всех разрядах слова d_1 вырабатываются равновероятно. Далее в $(n+1)$-ой зоне происходит суммирование прогенерированного слова d_1 с записанным в "памяти" зоны двоичным числом $a_{n+1} = (10^{]\log_2\ell[} - (b_{n+1}+1)$, при этом запись числа d_1 не утрачивается. Если суммирование кодов d_1 и a_{n+1} произойдет без переноса единицы в старшем разряде, т.е. если $d_1 > b_{n+1}$, то двоичное число d_1 будет передано через буферную ячейку B в зону n, а в зоне $n+1$ начнется формирование очередного кода d_2. Если же суммирование кодов d_1 и a_{n+1} произойдет без переноса, т.е. если $d_1 < b_{n+1}$, то в этом случае под воздействием буферной ячейки B слово d_1 будет стерто и зона $(n+1)$ приступит к формированию слова d_2. Таким образом из $(n+1)$-ой зоны в зону n через буферную ячейку B могут пройти ℓ кодов, причем равновероятно.

Зона n поступающие в нее коды d_i обрабатывает следующим образом: пусть в нее поступило двоичное число d_i.

Оно будет просуммировано с числом $a_n = (10^{]\log_2 \ell[} - (b_n + 1))$, записанным в памяти зоны. Если суммирование произойдет с переносом в старшем разряде, то код d_i через левую буферную клетку A зоны n будет передано дальше, в $(n-1)$-ую зону, а зона n вновь будет готова к приему очередного кода d_{i+1}. В случае же отсутствия переноса в результате суммирования в $(n-1)$-ую зону сети будет послан код n-го события, который в частности может совпадать с числом a_n. Далее этот код беспрепятственно пройдет через все остальные зоны в выходную область итеративной сети. Аналогичным образом функционируют $(n-1), (n-2), \ldots, 1$ зоны итеративной сети, моделирующей (n, ℓ)-последовательность $B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$. Всякий раз, если суммирование происходит с переносом, т.е. если $d_i > b_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, код d_i пропускается налево в следующую зону, если же переноса нет, т.е. $d_i < b_j$, то это событие идентифицируется тем, что на выход сети посылается код соответствующей зоны.

В процессе моделирования может возникнуть ситуация, когда некоторый код d_i еще не идентифицирован, т.е. передается из зоны в зону с последующим сравнением, а код d_{i+1}, посланный из зоны $(n+1)$ вслед за d_i, уже идентифицирован в некоторой зоне. Код соответствующего события будет послан в направлении выходной зоны. Однако скорость продвижения этого кода значительно выше, чем у кода d_i, т.е. код d_i проходит в каждой зоне процедуру сравнения (суммирования). Поэтому, во избежание осложнений, связанных с параллельной обработкой информации в зонах, будем требовать, чтобы информация "просачивалась" через буферные клетки только тогда, когда принимающая зона вернулась в исходное состояние. Таким образом, в вышеупомянутом случае код события будет задержан на подступах к той зоне, в которой еще находится код d_i.

Теперь приступим к более подробному описанию нашей конструкции.

В начальной конфигурации d_i ячейки, составляющие все зоны, кроме выходной, установлены либо в состояние $(0 * *)$, либо в состояние $(1 * *)$. Эти состояния в j-ой зоне $j = \overline{(1, n+1)}$ чередуются в соответствии с двоичным числом a_j. Например, если $a_j = 11101$, то в j-ой зоне будет следующая комбинация состояний:

$$(1 * *)\ (1 * *)\ (1 * *)\ (0 * *)\ (1 * *).$$

Справа к $(n+1)$-ой зоне примыкает стартовая ячейка, постоянно пребывающая в состоянии $(0 * *)$.

На рис.7.7 показано, как формируется число d_i, в $(n+1)$-ой зоне, в предположении, что $]\log_2 \ell[= 5$ и $a_{n+1} = 111000$.

t=0	B	(1 * *)	(1 * *)	(1 * *)	(0 * *)	(0 * *)	(0 0 *)
t=1	B	(1 * *)	(1 * *)	(1 * *)	(0 * *)	(0 1 *)	(0 0 *)
t=2	B	(1 * *)	(1 * *)	(1 * *)	(0 1 *)	(0 1 0)	(0 0 *)
t=3	B	(1 * *)	(1 * *)	(1 0 *)	(0 1 0)	(0 1 0)	(0 0 *)
t=4	B	(1 * *)	(1 0 *)	(1 0 0)	(0 1 0)	(0 1 0)	(0 0 *)
t=5	B	(1 0 *)	(1 0 0)	(1 0 0)	(0 1 0)	(0 1 0)	(0 0 *)
t=6	B	(1 0 0)	(1 0 0)	(1 0 0)	(0 1 0)	(0 1 0)	(0 0 *)

Рис.7.7

Прежде, чем пояснить рис.7.7, классифицируем состояния, участвующие в этом фрагменте.

$$\left.\begin{matrix}(1 * *)\\(0 * *)\end{matrix}\right\}\ \text{состояния типа I},$$

$$\left.\begin{matrix}(0 0 *)\\(0 1 *)\\(1 0 *)\\(1 1 *)\end{matrix}\right\}\ \text{состояния типа II},$$

$$\left.\begin{matrix}(0 0 0)\\(0 1 0)\\(1 0 0)\\(0 1 1)\\(1 0 1)\\(1 1 1)\end{matrix}\right\}\ \text{Состояния типа III}.$$

Первые компоненты состояний всех трех типов служат для хранения одного разряда кодов типа a_i, $i=\overline{1,n+1}$, вторые компоненты – соответственно для запоминания одного разряда кодов типа d_j, третьи же компоненты фиксируют факт наличия или отсутствия переноса при суммировании из данного разряда. Для состояний (00*) и (11*) несущественно, будет или нет перенос при сложении из предшествующего разряда, т.к. из данного разряда в случае состояния (00 *) перенос всегда отсутствует, а в случае состояния (11*) – напротив, всегда есть.

После пуска сети в $(n+1)$ -ой зоне под воздействием стартовой ячейки состояния типа I в ее ячейках последовательно сменяются справа налево состояниями типа II, причем переход из состояния (i * *) в состояние (i0*) и (i1*), где $i=0,1$, равновероятен. Вслед за этим процессом начинается суммирование двоичных кодов, записанных в первых двух компонентах состояний ячеек, что отражено на рис.7.7 сменой состояний типа II состояниями типа III. Напомним, что важен не результат сложения, как таковой, а лишь факт о наличии переноса и это нашло свое отражение в правилах смены состояний.

На рис.7.7 слово d_1 подобрано таким образом, чтобы переноса не было. Поэтому зона $(n+1)$ должна вернуться в исходное состояние с тем, чтобы сформировать очередное слово d_2. Этот процесс иллюстрируется рис.7.8. Пусть $d_2 = 01010$.

t=6	B	(100)	(100)	(100)	(010)	(010)	(00*)
7	B	(1**)	(100)	(100)	(010)	(010)	.
8	B	(1**)	(1**)	(100)	(010)	(010)	.
9	B	.	(100)	(1**)	(010)	(010)	.
10	B	.	(1**)	(111)	(0**)	(010)	.
11	B	.	(111)	(1**)	(010)	(0**)	.
12	B	.	(1**)	(111)	(0**)	(00*)	.
13	B	.	(111)	(1**)	(01*)	(000)	.
14	B	.	(1**)	(10*)	(010)	(000)	.
15	B	(1**)	(11*)	(100)	(010)	(000)	.
16	B	(10*)	(111)	(100)	(010)	(000)	.
17	B	(101)	(111)	(100)	(010)	(000)	(00*)

Рис.7.8

Из рис.7.8 видно, что суммирование чисел d_2 и a_{n+1} приводит к переносу единицы в старшем разряде. Поэтому, как уже было оговорено, код d_2 должен быть передан в зону n. Этот процесс иллюстрирован рис.7.9 в предположении, что $a_n = 11000$.

Зона n — Зона $n+1$

		Зона n						Зона n+1					
t=17	A	(1**)	(1**)	(0**)	(0**)	(0**)	B	(101)	(111)	(100)	(010)	(000)	(00*)
18	A	(1**)	(1**)	(0**)	(0**)	(0**)	(0**)	(101)	(111)	(100)	(010)	(000)	(00*)
19	A	(1**)	(1**)	(0**)	(0**)	(0**)	(000)	(1**)	(111)	(100)	(010)	(000)	.
20	A	(1**)	(1**)	(0**)	(0**)	(000)	(0**)	(111)	(1**)	(100)	(010)	(000)	.
21	.	(1**)	(1**)	(0**)	(000)	(0**)	(010)	(1**)	(100)	(1**)	(010)	(000)	.
22	.	(1**)	(1**)	(000)	(0**)	(010)	(0**)	(100)	(1**)	(111)	(0**)	(000)	.
23	.	(1**)	(100)	(0**)	(010)	(0**)	(000)	(1**)	(111)	(1**)	(000)	(0**)	.
24	.	(10*)	(1**)	(010)	(0**)	(000)	(0**)	(111)	(1**)	(100)	(0**)	(01*)	.
25	.	(10*)	(11*)	(0**)	(000)	(0**)	(010)	(1**)	(100)	(1**)	(01*)	(010)	.
26	.	(10*)	(11*)	(00*)	(0**)	(010)	(0**)	(100)	(1**)	(10*)	(010)	(010)	.
27	.	(10*)	(11*)	(00*)	(01*)	(0**)	(000)	(1**)	(11*)	(100)	(010)	(010)	.
28	.	(10*)	(11*)	(00*)	(01*)	(00*)	(0**)	(10*)	(111)	(100)	(010)	(010)	.
29	A	(10*)	(11*)	(00*)	(01*)	(00*)	B	(101)	(111)	(100)	(010)	(010)	(00*)

Рис.7.9.

По рис.7.9 легко проследить, что вслед за передачей кода 01010 в зону n в $(n+1)$ -ой зоне было прогенерировано очередное слово $d_3 = 01011$ и произведено сложение. Так как сложение дает перенос в старшие разряды, это слово должно быть передано в зону n. Однако, n -ой зоне предстоит обработка предшествующего кода d_2. Поэтому слово d_3 будет задержано в $(n+1)$ -ой зоне, пока не сработает n -ая зона. На следующем рисунке показано функционирование зоны n итеративной сети.

t 29	A	(10*)	(11*)	(00*)	(01*)	(00*)	B
30	A	(10*)	(11*)	(00*)	(01*)	(000)	B
31	A	(10*)	(11*)	(00*)	(010)	(000)	B
32	A	(10*)	(11*)	(000)	(010)	(000)	B
33	A	(10*)	(111)	(000)	(010)	(000)	B
34	A	(101)	(111)	(000)	(010)	(000)	B

Рис. 7.I0

Суммирование чисел a_n и d_i в зоне n, как это видно из рис.7.I0, произошло с переносом, поэтому слово d_i должно быть передано дальше, в $(n-1)$-ую зону, а в зону n поступит следующее слово d_3 (см. рис.II). Предположим, что a_{n-1} = 10001.

		Зона n-1						Зона n					
t 34	A	(1**)	(0**)	(0**)	(0**)	(1**)	A	(101)	(111)	(000)	(010)	(000)	B
35	A	(1**)	(0**)	(0**)	(0**)	(1**)	(0**)	(101)	(111)	(000)	(010)	(000)	B
36	·	(1**)	(0**)	(0**)	(0**)	(1**)	(000)	(1**)	(111)	(000)	(010)	(000)	B
37	·	(1**)	(0**)	(0**)	(0**)	(100)	(0**)	(111)	(1**)	(000)	(010)	(000)	B
38	·	(1**)	(0**)	(0**)	(000)	(1**)	(010)	(1**)	(100)	(0**)	(010)	(000)	B
39	·	(1**)	(0**)	(000)	(0**)	(111)	(0**)	(100)	(1**)	(010)	(0**)	(000)	B
40	·	(1**)	(000)	(0**)	(010)	(1**)	(000)	(1**)	(111)	(0**)	(000)	(0**)	B
41	·	(10*)	(0**)	(010)	(0**)	(100)	(0**)	(111)	(1**)	(000)	(0**)	(0**)	
42	·	(10*)	(01*)	(0**)	(000)	(1**)	(010)	(1**)	(100)	(0**)	(0**)		
43	·	(10*)	(01*)	(00*)	(0**)	(111)	(0**)	(100)	(1**)	(0**)			
44	·	(10*)	(01*)	(00*)	(01*)	(1**)	(000)	(1**)	(1**)				
45	·	(10*)	(01*)	(00*)	(01*)	(10*)	(0**)	(1**)					
46	A	(10*)	(01*)	(00*)	(01*)	(10*)	A						

Рис. 7.II

Как легко видеть, передача кода d_i из n -ой зоны в $n-1$ -ую зону происходит почти так же, как и из $n+1$-ой зоны в зону n, с той лишь только разницей, что здесь ой механизм восстановления исходного состояния A буферй ячейки (см. рис.7.9). Незаполненный правый угол в таблице II указывает на то, что соответствующие ячейки либо остаются состояниях типа I, либо уже воспринимают очередной код d_{i+1}.

Аналогичным образом протекает передача кода d_i из зоны j в зону $j-1$, если суммирование кодов d_i и a_j произойдет с переносом единицы в старшем разряде, $j = \overline{2, n}$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда сложение кодов d_i и a_j происходит без переноса в старшем разряде.

t=t'	A	(1**)	(0**)	(0**)	(0**)	(1**)	A	(100)	(010)	(100)	(100)	(010)
t'+1	[illegible]	(1**)	(0**)	(0**)	(0**)	(1**)	B	(1·1)	(010)	(100)	(100)	(010)
t'+2	A	(1**)	(0**)	(0**)	(0**)	(1**)	C_1	(1**)	(0·1)	(100)	(100)	(010)
t'+3	A	(1**)	(0**)	(0**)	(0**)	(1·1)	C_1	(1·0)	(0**)	(1·1)	(100)	(010)
t'+4	A	(1**)	(0**)	(0**)	(0·1)	(1**)	C_0	(1**)	(0·1)	(1**)	(1·1)	(010)
t'+5	A	(1**)	(0**)	(0·1)	(0**)	(1·0)	C_0	(1·1)	(0**)	(1·1)	(1**)	(0·0)
t'+6	A	(1**)	(0·1)	(0**)	(0·0)	(1**)	C_1	(1**)	(0·1)	(1**)	(1·0)	(0**)
t'+7	A	(1·1)	(0**)	(0·0)	(0**)	(1·1)	C_1	(1·1)	(0**)	(1·0)	(1**)	(0**)
t'+8	A	(1·1)	(0·0)	(0**)	(0·1)	(1**)	C_1	(1**)	(0·0)	(1**)	(1**)	
t'+9	A	(1·1)	(0·0)	(0·1)	(0**)	(1·1)	C_1	(1·0)	(0**)	(1**)		
t'+10	A	(1·1)	(0·0)	(0·1)	(0·1)	(1**)	C_0	(1**)	(0**)			
t'+11	A	(1·1)	(0·0)	(0·1)	(0·1)	(1·0)	C_0	(1**)				
t'+12	A	(1·1)	(0·0)	(0·1)	(0·1)	(1·0)	A					
				зона j-1						зона j		

Рис. 7.I2

В выборке и передаче кода идентифицированного события участвует также шесть новых состояний:

$\left.\begin{matrix} C_0 \\ C_1 \end{matrix}\right\}$ состояния буферных ячеек ,

$\left.\begin{matrix} (0\cdot0) \\ (0\cdot1) \\ (1\cdot0) \\ (1\cdot1) \end{matrix}\right\}$ состояния типа IУ .

Первая компонента состояний типа IУ, как и в состояниях первых трех типов, служит для запоминания одного разряда кода a_i, вторая же компонента несет информацию о передаваемом символе.

Таблица 7.I2 составлена в предположении, что $(j-2)$-ая зона не свободна, поэтому код события j (10110) задерживается в $(j-1)$-ой зоне. После выборки кода a_j зона j либо возвращается в свое исходное состояние, либо начинает воспринимать очередной код d_{i+1} или код некоторого события $\kappa, \kappa > j$) из $(j+1)$ – ой зоны.

Следующие две таблицы иллюстрируют случаи прохождения кода события a_i в свободную зону, причем рис.7.13 поясняет прохождение кода a_i с предварительной задержкой в предшествующей зоне, а рис.7.14 – без задержки.

t'	A	(0**)(1**)(1**)(1**)(1**)	A	(1·1)(0·0)(0·1)(0·1)(1·0)
t'+1	A	(0**)(1**)(1**)(1**)(1**)	B	(1·1)(0·0)(0·1)(0·1)(1·0)
t'+2	A	(0**)(1**)(1**)(1**)(1**)	C_1	(1**)(0·0)(0·1)(0·1)(1·0)
t'+3	A	(0**)(1**)(1**)(1**)(1·1)	C_1	(1·0)(0**)(0·1)(0·1)(1·0)
t'+4	A	(0**)(1**)(1**)(1·1)(1**)	C_0	(1**)(0·1)(0**)(0·1)(1·0)
t'+5	A	(0**)(1**)(1·1)(1**)(1·0)	C_0	(1·1)(0**)(0·1)(0**)(1·0)
t'+6	A	(0**)(1·1)(1**)(1·0)(1**)	C_1	(1**)(0·1)(0**)(0·0)(1**)
t'+7	A	(0·1)(1**)(1·0)(1**)(1·1)	C_1	(1·1)(0**)(0·0)(0**)(1**)
t'+8		(1·0)(1**)(1·1)(1**)	C_1	(1**)(0·0)(0**)(0**)
t'+9		(1·1)(1**)(1·1)	C_1	(1·0)(0**)(0**)
t'+10		(1·1)(1**)	C_0	(1**)(0**)
t'+11		(1·0)	C_0	(1**)
t'+12			A	

Рис. 7.13.

t'	A	(0**)(0**)(1**)(1**)(1**)	A	(0·1)(1**)(1·0)(1**)(1·1)	C_1
t'+1		(1**)	B	(0·1)(1·0)(1**)(1·1)(1**)	C_1
t'+2		(1**)	C_1	(0**)(1·0)(1·1)(1**)(1·1)	C_1
t'+3		(1·1)	C_1	(0·0)(1**)(1·1)(1·1)(1**)	C_0
t'+4		(1**)	C_0	(0**)(1·1)(1**)(1·1)(1·0)	C_0
t'+5		(1·0)	C_0	(0·1)(1**)(1·1)(1**)(1·0)	A
t'+6		(1**)	C_1	(0**)(1·1)(1**)(1·0)(1**)	A
t'+7		(1·1)	C_1	(0·1)(1**)(1·0)(1**)(1**)	
t'+8		(1**)	C_1	(0**)(1·0)(1**)(1**)	
t'+9		(1·1)	C_1	(0·0)(1**)(1**)	
t'+10		(1**)	C_0	(0**)(1**)	
t'+11		(1·1)	C_0	(0**)	
t'+12			A		

Рис. 7.14

Наконец, дадим описание выходной зоны. Выходная зона составляется из $]\log \ell[$ ячеек, установленных в состоянии типа IУ. Слева к выходной зоне примыкает еще одна ячейка, установленная в состояние (00*) .

На приведенном ниже рисунке 7.15 показано прохождение на выход сети кода события, идентифицированного в некоторой зоне, отличной от первой.

t'	(00*)	(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)	AA	(0·1)(0**)(0·0)(0**)(0·1)
t'+1	(00*)	(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)	AB	(0·1)(0·0)(0**)(0·1)(0**)
t'+2	·	(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)	BC_1	(0**)(0·0)(0·1)(0**)(0·1)
t'+3	·	(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)(01*)	C_1B	(0·0)(0**)(0·1)(0·1)(0**)
t'+4	·	(0·0)(0·0)(0·0)(01*)(0·1)	BC_0	(0**)(0·1)(0**)(0·1)(0·0)
t'+5	·	(0·0)(0·0)(01*)(0·1)(0**)	C_0B	(0·1)(0**)(0·1)(0**)(0·0)
t'+6	·	(0·0)(01*)(0·1)(0**)(0·0)	BC_1	(0**)(0·1)(0**)(0·0)(0**)
t'+7	·	(01*)(0·1)(0**)(0·0)(0**)	C_1B	(0·1)(0**)(0·0)(0**)(0**)
t'+8	·	(0·1)(0**)(0·0)(0**)(0·1)	BC_1	(0**)(0·0)(0**)(0**)
t'+9	·	(0·1)(0·0)(0**)(0·1)(0**)	C_1B	(0·0)(0**)(0**)
t'+10	·	(0·1)(0·0)(0·1)(0**)(0·1)	BC_0	(0**)(0**)
t'+11	·	(0·1)(0·0)(0·1)(0·1)(0**)	C_0B	(0**)
t'+12	·	(0·1)(0·0)(0·1)(0·1)(0·0)	BA	
t'+13	(00*)	(0·1)(0·0)(0·1)(0·1)(0·0)	AA	

Рис. 7.15

Рис. 7.16 иллюстрирует подачу на выход сети кода первого события, идентифицированного в зоне I.

t'	(00*)	(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)	AA	(000)(010)(000)(010)(000)	A
$t'+1$	(00*)	(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)	AB	(0·0)(010)(000)(010)(000)	A
$t'+2$	(00*)	(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)(0·0)	BC_0	(0**)(0·0)(000)(010)(000)	A

Рис. 7.16.

Дальше, функционирование сети происходит согласно правилам переходов, которые были введены в таблицах 7.12 и 7.15.

Таким образом, нами доказана следующая

Т е о р е м а 7.5, [42]. Существует конструктивный метод моделирования (n, ℓ) -последовательностей на итеративных сетях, построенных над некоторой ячейкой с 20 состояниями, такой, что

$$T(n,\ell) \leqslant \log \ell \; ; \; L(n,\ell) \leqslant n \log \ell \; ; \; K(n,\ell) =]\log \ell[.$$

При этом ячейка реализуется в базисе, содержащем функциональные элементы $\&$, $\vee$, Γ, элемент задержки и бернуллиевский датчик $B(1/2, 1/2)$.

Т е о р е м а 7.6: Для произвольного метода моделирования (n, ℓ) -последовательностей на итеративных сетях

$$T(n,\ell) \geqslant \log \ell \; ; \; L(n,\ell) \geqslant n \log \ell \; ; \; K(n,\ell) \geqslant]\log n[.$$

Доказательство теоремы приведено в [42].

7.4. Аналог теоремы Крона-Роудза для вероятностных автоматов. Полная декомпозиция

Для изложения результатов этого параграфа важными являются следующие два определения.

Определение 4.1. ВА A накрывает ВА $B = (X, S', \{B(x)\})$, если для всех $x \in X$ имеет место

$$A(x) K = K B(x) ,$$

где K - некоторая матрица ранга m, m - максимальный ранг матриц $\{B(x)\}$.

Определение 4.2. Автомат называется простым, если не существует системы каскадно соединенных автоматов, накрывающей его, кроме системы, один из автоматов которой накрывает исходный автомат.

Теорема Крона-Роудза по существу утверждает, что произвольный конечный детерминированный автомат накрывается системой каскадно соединенных простых автоматов. Нашей целью является выяснение вопроса о существовании аналога этой теоремы в случае вероятностных автоматов [47].

Рассмотрим вероятностный автомат (в дальнейшем мы будем называть его генератором)

$$G^K = (X, S, \{G^K(x)\}) .$$

Все строчки матрицы $G^K(x)$ одинаковы, $x \in X$. Введем краткую запись для $G^K(x)$:

$$G^K(x) = (p_1(x), p_2(x), \dots, p_K(x)) .$$

У т в е р ж д е н и е 4.1: Произвольный автономный генератор $G_1^2 = (p, 1-p)$ накрывается генератором $G^4 = G_2^2 \otimes G_3^2$, определяемым прямым произведением матриц $G_2^2 = (a, 1-a)$ и $G_3^2 = (b, 1-b)$, где величина $b = (p+a-1)/(2a-1)$ выбор определяется условиями $a > 1/2$, $p + a \geqslant 1$, $p \leqslant a$ или $a < 1/2$, $p + a \leqslant 1$, $p \geqslant a$ и при этом

$$G^4 K = K G_1^2 ,$$

где

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Нам понадобится

У т в е р ж д е н и е 4.2: (доказательство мы приводим в гл.IV). Произвольный автономный генератор $G_1^K = (p_1, p_2, \dots, p_K)$ накрывается генератором

$$G^{(K-1)(K-1)} = G_2^{K-1} \otimes G_3^{K-1} .$$

У т в е р ж д е н и е 4.3: Произвольный ВА $A = (X, S, \{A(x)\})$ накрывается системой (G^m, D) последовательно соединенных автоматов-генераторов

$$G^m = (X, S', \{G^m(x) = (q_1(x), \dots, q_m(x))\})$$

и детерминированного автомата $D = (X, S, \{D(x)\})$

таких, что для всех $x \in X$

$$A(x) = \sum_{i=1}^{m} q_i(x) D_i(x), \quad 0 \leq q_i(x) < 1. \qquad (4.I)$$

Рассмотрим ВА A_5 с двумя входными буквами 0 и 1, числом состояний 5 и матрицами переходных вероятностей $A_5(0) = [a_{ij}]$ и $A_5(1)$, и при этом

$$a_{12}(0) = a_{23}(0) = a_{34}(0) = a_{45}(0) = 1, \; a_{51}(0) = q_1(0)$$

$$a_{52}(0) = a_{53}(0) = 0, \; a_{54}(0) = q_2(0), \; a_{55}(0) = q_3(0);$$

матрица $A_5(1)$ произвольная. Нетрудно видеть, что разложение $A_5(0)$ в виде (4.I) с необходимостью содержит детерминированную матрицу

$$D(0) = [d_{ij}(0)]$$

с элементами

$$d_{12} = d_{23} = d_{34} = d_{45} = d_{51} = 1.$$

Согласно утверждению 4.3, накроем рассматриваемый ВА A_5 двумя автоматами

$$D^5 = (X = (0,1), S = (s_1, s_2, \ldots, s_5), \{D(0), D(1)\}),$$

$$G^{\tau} = (X = (0,1), S' = (s'_1, \ldots, s'_{\tau}), \{G^{\tau}(0), G^{\tau}(1)\}),$$

где $A_5(0) = \sum_{i=1}^{\tau} q_i(0) D_i(0)$, $q_1(0) + q_2(0) + q_3(0) = 1$;
$D_j(0) = E$, $j = 4, 5, \ldots, \tau$,
E – единичная матрица и

$$A_5(1) = \sum_{i=1}^{\tau} q_i(1) D_i(1).$$

Утверждение 4.4: Необходимым условием накрытия ВА A системой C каскадно соединенных автоматов является существование систем детерминированных автоматов, соединенных так же, как автоматы в системе C, и накрывающей автомат D из системы (G^m, D), накрывающей A согласно утверждению 4.3.

Согласно теореме Крона-Роудза и утверждению 4.4 ВА A_5 можно накрыть только либо системой (G^{τ}, D^5), либо некоторой системой (G', D^5), где G' – генератор, накрывающий G^{τ}. Используя результат утверждения 2, в качестве G' можно выбрать систему параллельно соединенных генераторов $\{G_j^2\}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{\tau-2}$. Далее, легко видеть, что произвольный

автономный генератор G_1^2 можно накрыть произвольным автономным генератором G_2^2. Действительно, матричное уравнение

$$G_2^2 K = K G_1^2 = G_1^2$$

всегда разрешимо и матрица K совпадает с матрицей, описывающей G_1^2. Заменим один из генераторов в системе $\{G_j^2\}$, например генератор G_1^2, согласно утверждению 4.I, генераторами G_a^2 и G_b^2. Пусть $G_1^2(0)$ и $G_1^2(1)$ – матрицы, описывающие генератор G_1^2, а $G_a^2(0)$ и $G_a^2(1)$ – матрицы, описывающие G_a^2. Не существует матрицы K такой, чтобы одновременно имели место равенства

$$G_a^2(0) K = G_1^2(0), \quad G_a^2(0) K = G_1^2(1),$$

так как $G_1^2(0) \neq G_1^2(1)$. Таким образом, G_a^2 не накрывает G_1^2. Аналогично, G_b^2 не накрывает G_1^2. Это означает, что G_1^2 не является простым. Далее, каждый из генераторов G_a^2 и G_b^2 накрывается системой из двух генераторов, согласно утверждению 4.3 и не является простым по доказанному выше, а каждый из вновь полученных генераторов можно снова накрыть системой из двух параллельно расположенных генераторов и т.д.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему в рамках двух основных определений – накрытия и простоты.

Теорема 7.7. Вероятностные автоматы простого типа не существуют.

Далее мы приведем более общее, с нашей точки зрения, определение накрытия и покажем, что при таком определении накрытия простые вероятностные автоматы существуют и, в частности, простым является генератор $G^2 = (1/2, 1/2)$.

Пусть заданы ВА $B = (X, S, \{B(x)\})$ и $A = (X', S', \{A(x')\})$, где $X \subset X'$. Пусть мы умеем однозначно в зависимости от x и выходной реакции A вводить в A некоторую последовательность букв $\varphi(x)$ до тех пор, пока на выходе A не появится одно из заранее фиксированных слов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, где n – число состояний ВА A. Тогда мы можем говорить о вероятности $p(i, u_j, \varphi(x))$ впервые получить на выходе A слово u_j, под воздействием последовательности $\varphi(x)$, если исходным состоянием ВА A было состояние i; обозначим матрицу этих вероятностей через $A'(\varphi(x))$. Будем говорить, что A накрывает B с растяжением тактности, если для всех $x \in X$ имеет место $A'(\varphi(x))K = K B(x)$ и K имеет тот же смысл, что и в определении 4.1. Ясно, что растяжение тактности может быть как детерминированным, так и случайным.

Пусть A – произвольный ВА, не содержащий поглощающего подмножества состояний такого, что все переходы между состояниями этого подмножества являются детерминированными. В противном случае автомат *с вероятностью 1 через конечное число* тактов попадет в это подмножество и дальше будет функционировать как детерминированный.

Теорема 7.8: ВА A накрывает со случайным растяжением тактности генератор /1/2, 1/2/.

Доказательство. В ВА A можно всегда найти два таких состояния, допустим s_i и s_j, что существуют пути $\mathcal{L}_{ij}$ между s_i и s_j и $\mathcal{L}_{ji}$ между s_j и s_i такие, что существует, отличная от 0, вероятность попадания автомата A из $s_i(s_j)$ в $s_j(s_i)$. Под путем мы подразумеваем последовательность состояний, проходимых автоматом. Мы будем выбирать s_i и s_j из сильносвязанного подмножества S' состояний ВА A. Множество сильносвязано, если для любых $s', s'' \in S'$ вероятность из s' когда-либо попасть в s'' равна 1. Пусть P_1 – вероятность из s_i попасть в s_j по пути $\mathcal{L}_{ij}$, а P_2 – вероятность из s_j попасть в s_i по пути $\mathcal{L}_{ji}$. Пусть ВА A находится в произвольном начальном состоянии таком, что через некоторое случайное число тактов ВА окажется в одном из состояний s_i или s_j. Пусть, например, он оказался в состоянии s_i. Если в последующие такты автомат пройдет по пути $\mathcal{L}_{ij}$, а затем $\mathcal{L}_{ji}$, мы будем говорить, что произошло событие u_1. Вероятность его есть $P_1 \cdot P_2$. Если же автомат из s_i будет следовать пути, отличному от $\mathcal{L}_{ij}\mathcal{L}_{ji}$, мы будем ждать (растяжение времени) прихода автомата в s_i или s_j. С проходом пути $\mathcal{L}_{ji}\mathcal{L}_{ij}$ мы свяжем событие u_2. Вероятность его также есть $P_1 \cdot P_2$. Назовем событием u всевозможные другие переходы (не по путям $\mathcal{L}_{ij}\mathcal{L}_{ji}$ или $\mathcal{L}_{ji}\mathcal{L}_{ij}$). Тогда вероятность его равна $1-2P_1P_2$. Вычислим вероятность наступления события u_1 впервые после запуска автомата из s_i:

$$\text{Вер}(u_1) = P_1P_2 + (1-2P_1P_2)P_1P_2 + (1-2P_1P_2)^2 P_1P_2 + \dots = P_1P_2 \sum_{n=0}^{\infty} (1-2P_1P_2)^n = 1/2 .$$

Отсюда ясно, что вероятности событий u_1 и u_2 равны 1/2. Вероятность такого события u_1 складывается из вероятности автомата сразу, начиная из s_i пройти путь $\mathcal{L}_{ij}\mathcal{L}_{ji}$, *либо попасть из* s_i *в* s_j *по другому пути (вероятность* этого есть $1-2P_1P_2$), а потом попасть снова в s_i по пути $\mathcal{L}_{ij}\mathcal{L}_{ji}$, либо из s_i попасть снова в s_i не по пути $\mathcal{L}_{ij}\mathcal{L}_{ji}$ дважды, а затем пройти путь $\mathcal{L}_{ij}\mathcal{L}_{ji}$ и т.д.

Это означает простоту генератора $(1/2, 1/2)$ в смысле определения 4.2.

Теперь мы можем сформулировать теорему, которая может считаться в свете нового подхода к проблеме декомпозиции (привлечении концепции временного растяжения тактности и временной декомпозиции) аналогом теоремы Крона-Роудза для вероятностных автоматов.

Теорема 7.9: Генератор $(1/2, 1/2)$ является простым, а произвольный вероятностный автомат допускает декомпозицию со случайным растяжением тактности в системе каскадно соединенных автоматов простого типа.

ГЛАВА 8

λ - декомпозиция вероятностных автоматов

8.1. Введение

В этой главе мы рассматриваем проблему декомпозиции вероятностных автоматов с принципиально новой точки зрения, связывая ее с проблемой представимости событий в автоматах, [15], [16].

Пусть ВА A представляет некоторое событие E с точкой сечения λ'. Допустим нам удалось найти некоторую систему B автоматов, числа состояний которых меньше числа состояний ВА A и удовлетворяющую наперед заданным ограничениям на связи между автоматами в системе B, такую, что в B можно выделить некоторый подавтомат B_0, представляющий то же событие E, но с точкой сечения λ, в общем случае не обязательно совпадающей с λ'. Декомпозицию такого вида мы будем называть λ-декомпозицией.

Такой подход, как это нетрудно видеть, в принципе отличен от общепринятого подхода к проблеме декомпозиции, поскольку в основе одного из главных понятий в теории автоматов, и в частности в проблеме декомпозиции - понятии моделирования здесь лежит не принцип накрытия, а некоторая мера "близости" или "схожести", выражаясь неформально, между моделирующим и моделируемыми автоматами, а именно тот факт, что оба эти автомата "делают" одно и то же - представляют одно и то же событие, правда, может быть "по-разному" - с различными точками сечения.

Сначала мы рассмотрим случай квазиукрупняемости вероятностного автомата, подразумевая под термином "квазиукрупняемость" возможность изменения вероятностей перехода (малые возмущения переходных вероятностей, [48] таким образом, что измененный автомат оказывается укрупнимым по некоторому нетривиальному разбиению, сохраняя при этом способность представлять то же событие с той же точкой сечения, что и исходный автомат.

Мы будем рассматривать автономные вероятностные автоматы с целью простоты изложения результатов. Случай многобуквенного автомата здесь принципиальных осложнений не вызывает.

8.2. Квазиукрупняемость и декомпозиция

Пусть $A=(S,H)$ - автономный вероятностный актуальный автомат, представляющий событие E с точкой сечения λ. Автомат называется актуальным, если все его переходные вероятности $p_{ij}(x)\neq 0$. Для этого класса автоматов М.Рабиным [48] была поставлена и решена так называемая проблема устойчивости, заключающаяся в определении возможности таких изменений чисел $p_{ij}(x)$, когда автомат, полученный в результате, представляет с той же точкой сечения то же событие, что и исходный.

Для заданного ВА A и нетривиального разбиения $\mathcal{J}$ мы найдем условия перехода от ВА к ВА A', укрупнимого по $\mathcal{J}$ и представляющего событие E с той же точкой сечения λ. Пусть для ВА A такой автомат найден. Тогда мы можем декомпозировать ВА A', воспользовавшись условием теоремы об λ-декомпозиции (гл.1), достаточности укрупнимости по нетривиальному разбиению.

Известно, [48], что для актуальных автоматов существует ε, $\varepsilon>0$, такое, что, каждый автомат A', отличающийся от A переходными вероятностями измененными на величину меньшую, чем ε представляет то же событие, что и ВА A. Пусть для автономного актуального ВА $A=(S,H=[p_{ij}])$ каждую из вероятностей p_{ij} можно увеличить или уменьшить на величину $\varepsilon'_{ij}\leqslant\varepsilon$. Пусть задано разбиение $\mathcal{J}=(B_1, B_2,\dots,B_m)$. Рассмотрим подматрицу матрицы H размерности $|B_t|\times n$ с элементами p_{ij} такими, что $i\in B_t$, $j=\overline{1,n}$. Образуем суммы:

$$R_1^{i_1}(t)=\sum_{j\in B_1}p_{i_1j},\ R_1^{i_2}(t)=\sum_{j\in B_1}p_{i_2j},\dots,R_1^{i_{k(t)}}(t)=\sum_{j\in B_1}p_{i_{k(t)}j},$$

$$i_1,i_2,\dots,i_{k(t)}\in B_t;\quad k(t)=|B_t|;$$

$$R_2^{i_1}(t)=\sum_{j\in B_2}p_{i_1j},\dots,R_2^{i_{k(t)}}(t)=\sum_{j\in B_2}p_{i_{k(t)}j};$$

. . . .

. . . .

$$R_m^{i_2}(t) = \sum_{j\in B_m} P_{i_2 j}, \ldots, R_m^{i_{k(t)}}(t) = \sum_{j\in B_m} P_{i_{k(t)} j}.$$

Пусть $R_j^0(t) = \min\{R_j^{i_1}(t),\ldots,R_j^{i_{k(t)}}(t)\}$, $R_j^1(t) = \max\{R_j^{i_1}(t),\ldots,R_j^{i_{k(t)}}(t)\}$, $j=1,2,\ldots,m$. Обозначим $\Delta_j^0(t) = \min\{R_j^0(t)+k(j)\varepsilon,\ R_j^1(t)-k(j)\varepsilon\}$, $\Delta_j^1(t)=\max\{R_j^0(t)+k(j)\varepsilon,\ R_j^1(t)-k(j)\varepsilon\}$, $R_t^1=\sum_{j=1}^m \Delta_j^1(t)$ и $R_t^0=\sum_{j=1}^m\Delta_j^0(t)$.

Для каждого блока $B_t\in\mathcal{J}$ составим условия:

$$\text{I:}\ \left\{\begin{aligned} R_1^1(t)-R_1^0(t) &\le 2k(1)\varepsilon\\ R_2^1(t)-R_2^0(t) &\le 2k(2)\varepsilon\\ &\ldots\\ R_m^1(t)-R_m^0(t) &\le 2k(m)\varepsilon \end{aligned}\right\}\ t=1,2,\ldots,m;$$

$$2:\ \{R_t^1\ge 1,\ R_t^0\le 1;\ t=1,2,\ldots,m\}.$$

Т е о р е м а 8.1. Условия I и 2 являются необходимыми и достаточными для получения стохастической матрицы $H'_{n\times n}=[P'_{ij}]$ из матрицы H изменением ее элементов P_{ij} на величину $\varepsilon'_{ij}\le\varepsilon$ такой, что H' будет укрупнима по разбиению $\mathcal{J}$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть не имеет место $R_1^1(t)-R_1^0(t)\le 2k(1)\varepsilon$. Ясно, что не существуют числа α_1^1 и α_1^0 такие, что $R_1^1(t)-\alpha_1^1=R_1^0(t)+\alpha_1^0$, где $0<\alpha_1^1$, $0<\alpha_1^0$ и $\alpha_1^0,\alpha_1^1\le k(1)\varepsilon$. Пусть теперь усл.I выполнено, но для некоторого блока $B_f\in\mathcal{J}$, $R_f^0>1$. Поскольку усл.I выполнено, мы можем в H изменить $P_{i_1 j}$, $i_1\in B_f$, $j\in B_1$; $P_{i_2 j}$, $i_2\in B_f$, $j\in B_2$; ...; $P_{i_{k(f)} j}$, $i_1\in B_f$, $j\in B_m$ так, что в H' будет иметь место

$$\forall i\in B_f,\ \sum_{j\in B_1}P'_{ij}=\text{const.}=c'_1,$$

$$\forall i\in B_f,\ \sum_{j\in B_2}P'_{ij}=\text{const.}=c'_2,$$

$$\ldots$$

$$\forall i\in B_f,\ \sum_{j\in B_m}P'_{ij}=\text{const.}=c'_m.$$

Нетрудно видеть, что $\sum_{i=1}^m c'_i \ge R_f^0$, но $R_f^0>1$ и поэтому $\sum_{i=1}^m c'_i>1$, что нарушает стохастичность. Пусть выполнено усл.I, но $R_f^1<1$. Поскольку $\sum_{i=1}^m c'_i\le R_f^1$, а $R_f^1<1$, то $\sum_{i=1}^m c'_i<1$, что также нарушает стохастичность H'.

Докажем достаточность. Пусть усл.I и 2 выполнены. Поскольку усл.I выполнено, для блока B_f (все дальнейшие рассуждения справедливы и для любого другого блока разбиения $\mathcal{J}$) мы можем числа $c'_1,\ldots,c'_m$ выбрать равными $\Delta_1^0(f),\ldots,\Delta_m^0(f)$. К ним мы можем добавить числа $\delta_1(f),\ldots,\delta_m(f)$, где каждое из этих чисел может быть положительным или отрицательным, так, чтобы $\sum_{i=1}^m(\Delta_i^0(f)+\delta_i(f))=1$. Это можно сделать в силу усл. $R_f^1\ge 1$. Но числа $c'_1,\ldots,c'_m$ сами получены следующим образом: $c'_i=\sum_{j\in B_i}(P_{ij}+\alpha_{ij})$, где $|\alpha_{ij}|\le\varepsilon$. Тогда для любого $i\in B_f$:

$$\sum_{i=1}^m(c'_i+\delta_i(f)) = \sum_{i=1}^m\Big(\sum_{j\in B_i}P_{ij}+\alpha_{ij}+\delta_i(f)\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^m\sum_{j\in B_i}P_{ij}+\sum_{i=1}^m\sum_{j\in B_i}(\alpha_{ij}+\delta_i(f))=1$$

Поскольку $\sum_{i=1}^m\sum_{j\in B_i}P_{ij}=1$, то $\sum_{i=1}^m\sum_{j\in B_i}(\alpha_{ij}+\delta_i(f))=0$.

8.3. Некоторые условия λ-декомпозиции

Рассмотрим ОА $A^0=(X,S,\{M(x)\},g_0,f_0)$, представляющий событие E с точкой сечения 0 (определение точки сечения для обобщенных автоматов см. в [5]). Пусть A^0 декомпозируем на два параллельно соединенные автоматы $A_1^0=(X,S^1=(s_1^1,\ldots,s_m^1),\{M_1(x)\},g_0^1)$ и $A^2(X,S^2=(s_1^2,\ldots,s_k^2),\{M_2(x)\},g_0^2\}$, $S^1\times S^2=S$, $M_1(x)\otimes M_2(x)=M(x)$; $x\in X$; $g_0=g_0^1\otimes g_0^2$.

Построим матрицы $M_1'(x)$ порядка $n+2$ следующим образом, $x \in X$, аналогично [49]:

$$M_1'(x) = \left[\begin{array}{ccc} \boxed{M_1(x)} & \begin{matrix}\alpha_1(x)\\ \vdots \\ \alpha_m(x)\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ \beta_1(x)\cdots\beta_m(x) & \beta_0(x) & 0\end{array}\right],$$

где $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(x)$ подобраны так, что суммы по строкам и столбцам матрицы $M_1'(x)$ – нулевые. Введем $g_0^{1'} = (P_1, P_2, \ldots, P_{m+1}, 0)$, где P_i – элементы вектора g_0^1, $P_{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} P_i$.

Пусть α_1, $\alpha_1 > 0$, такое число, что элементы вектора $\alpha_1 g_0^{1'}$ и элементы всех матриц $M_1'(x)$, $x \in X$, меньше по модулю числа $1/m+2$; кроме того, пусть $\overline{1/(m+2)}$ – вектор длины $m+2$ с элементами $1/(m+2)$, а $[1/(m+2)] = D_1$ – матрица со строками, равными $\overline{1/(m+2)}$. Построим автомат $A_1^{0'}$ с начальным вектором $\alpha_1 g_0^1 + 1/(m+2) = g_0^{1''}$, матрицами $M_1''(x) = \alpha_1 M(x) + D_1$, множеством входных букв X и множеством состояний $S^{1'} = (s_1^1, s_2^1, \ldots, s_m^1, s_{m+1}^1, s_{m+2}^1)$. Автомат $A_1^{0'}$ является вероятностным. Аналогично введем автомат $A_2^{0'}$.

Рассмотрим автомат A', задаваемый матрицами $H(x)$:

$$H(x) = \begin{bmatrix} M_1''(x)\otimes M_2''(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1''(x)\otimes D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_2''(x)\otimes D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1\otimes D_2 \end{bmatrix}$$

множествами $X, S^{1'} \otimes S^{2'}$, начальным распределением $g_0'/4$, $g_0'/4$, $g_0'/4$, $g_0'/4$, где $g_0' = g_0^{1''} \otimes g_0^{2''}$, и векто-

ром конечных состояний (записанным в строчку) f_0', $-f_0'$, $-f_0'$, f_0', где множества $S^{i'}$, $i=1,2$, имеют на два состояния больше, чем соответствующие множества S^i, а f_0' – получен из вектора f_0 вставлением двух нулевых элементов через каждые k элементов вектора f_0, причем последние $2(k+2)$ элемента вектора f_0' берутся также равными 0. Нетрудно видеть, что матрица $H(u)$ для любого входного слова u будет иметь такой вид, что и $M(x)$ (вместо x везде надо будет написать u). Простой проверкой легко также убедиться, что автомат A' представляет то же событие, что и A^0, кроме того, он является последовательным соединением детерминированного автомата с 4 состояниями и переходами $b_{ii} = 1$, $i = 1,2,3,4$ с системой двух параллельно расположенных автоматов с числом состояний $m+2$ и $k+2$ соответственно. При проверке следует воспользоваться тем фактом, что $M_i'(u)[1/(m+2)] = [1/(m+2)]M_i'(u) = [0]$ – матрица, все элементы которой равны 0.

Если A^0 представляет E с точкой сечения $\lambda \neq 0$, матрицы $M_i'(x)$, $i = 1,2$, преобразуем, добавляя одно состояние. Например, для $i = 1$ преобразованная матрица – $\overline{M}_1'(x)$ имеет вид:

$$\overline{M}_1'(x) = \left[\begin{array}{cccc} \boxed{M_1(x)} & \begin{matrix}\alpha_1(x)\\ \vdots \\ \alpha_m(x)\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1(x)\cdots\beta_m(x) & \beta_0(x) & 0 & 0 \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Кроме того, в качестве начального распределения для нового автомата $A_1^{0''}$ следует брать распределение $P_1'/(m+2), \ldots, P_{m+2}'/(m+2), m+1/m+2$, где $P_i' = \alpha_1 P_i + 1/(m+2)$ и, аналогично для автомата $A_2^{0''}$ – $q_1'/(k+2), \ldots, q_{k+2}'/(k+2), k+1/k+2$, где $q_j' = \alpha_2 q_j + 1/(k+2)$, $i = \overline{1, m+2}$, $j = \overline{1, k+2}$. В качестве матрицы перехода автомата $A_1^{0''}$, для буквы x берется

$$\begin{bmatrix} \boxed{\alpha_1 M_1(x)} & \begin{matrix} \alpha_1\alpha_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_1\alpha_m(x) \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1\beta_1(x) \cdots \alpha_1\beta_m(x) & \alpha_1\beta_0(x) & 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{D} & \begin{matrix} d \\ \vdots \\ d \end{matrix} & \begin{matrix} d \\ \vdots \\ d \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ d \cdots d & d & d & 0 \\ d \cdots d & d & d & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

где $d = 1/(m+2)$, D – матрица $m \times m$, все элементы которой равны $1/(m+2)$. Вектор конечных состояний строится расширением вектора f_0' нулями, которые вставлены в него через каждые $k+2$ элемента, последний элемент берется равным $\lambda / \frac{(k+1)(k+2)}{(m+1)(m+2)}$, все остальные элементы равны 0.

Проверкой можно убедиться, что автомат $A_1^{o\,\prime\prime} \otimes A_2^{o\,\prime\prime}$, где $A_2^{o\,\prime\prime}$ – аналогичное преобразование автомата $A_2^{o\,\prime}$, представляет событие E с точкой сечения 0 при соответствующем выборе начального распределения и вектора конечных состояний.

Рассмотрим теперь случай последовательного соединения двух автоматов: A – стохастического и B^o – обобщенного, когда выход A является входом для B^o. Проводя аналогичные параллельному соединению построения, можно убедиться, что при соответствующем выборе начального распределения и вектора конечных состояний, можно построить систему вероятностных автоматов, представляющую то же событие E, что и последовательное соединение $A \circ B^o$ автоматов A и B^o, с точкой сечения 0. Эта система представляет собой последовательное соединение детерминированного автомата с 2 состояниями и переходами $\delta_{ii} = 1$ с системой двух последовательно соединенных автоматов, первый из которых есть A, а второй – автомат с числом состояний $n+3$, где n – число состояний ОА B^o.

Таким образом, если допустить произвольность выбора вектора конечных состояний, т.е. не считать для вероятност-

ного автомата обязательным равенство 0 или 1 элементов вектора конечных состояний, мы можем сформулировать следующую теорему:

Т е о р е м а 8.2. Для параллельного соединения обобщенных автоматов A^o и B^o (последовательного соединения вероятностного автомата A и обобщенного автомата B^o) существует система каскадно соединенных детерминированных и вероятностных автоматов такая, что она представляет то же событие что и автомат $A^o \otimes B^o$ ($A \circ B^o$) и при этом число состояний каждого из автоматов в этой системе превышает на три число состояний автомата, соответствующего ему в системе исходных автоматов.

В некоторых случаях оказывается возможным при построении подобной системы вероятностных автоматов, использовать для представления события вектор конечных состояний с элементами, равными только 0 или 1.

Теорему можно применять к ВА и исследовать возможности декомпозиции его на систему обобщенных автоматов с тем, чтобы затем перейти от обобщенных автоматов к некоторым вероятностным автоматам, так, чтобы при определении выбора начального и конечного вектора, система вероятностных автоматов представляла то же событие, что и исходный ВА.

Автономный ВА A с матрицей M_A и последовательно соединенный с ним ОА B^o с матрицами $M^1_{B^o}$ и $M^2_{B^o}$,

$$M_A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}, \quad M^1_{B^o} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 0.8 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad M^2_{B^o} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

моделирует в некотором смысле ВА A', описываемый матрицей

$$\begin{bmatrix} 1/12 & 2/12 & 3/12 & 2/12 & 4/12 \\ 8/30 & 1/30 & 3/30 & 16/30 & 2/30 \\ 2/30 & 7/30 & 3/30 & 4/30 & 14/30 \\ 1/16 & 2/16 & 4/16 & 3/16 & 6/16 \\ 5/40 & 3/40 & 8/40 & 15/40 & 9/40 \end{bmatrix}.$$

Аналогичные примеры можно привести и для ВА A' с числом состояний n, представляющего событие E с точкой сечения λ' и не декомпозируемого обычными методами, но для которого можно найти такие ВА A с числом состояний m и ОА B° с числом состояний κ, соединенные последовательно, что переход к системе вероятностных автоматов с числом состояний не более m или $\kappa+3$ дает возможность представления того же события E с точкой сечения λ. При этом автоматы в системе будут соединены каскадным образом и будет выполняться основное условие декомпозируемости: $m<n$, $\kappa+3<n$.

ГЛАВА 9

Схемная декомпозиция вероятностных автоматов

При схемной реализации абстрактного вероятностного автомата, в связи с необходимостью растяжения тактности при реализации, число состояний схемы, реализующей автомат в некотором базисе, оказывается больше числа состояний исходного автомата. Поэтому при декомпозиции вероятностного автомата на схемном уровне возникают особенности, которые приводят к некоторым изменениям понятия декомпозиции, [52] .

9.I. Схемная реализация.

Рассмотрим конечный вероятностный автомат (ВА) типа Мура

$$A=(S,X,Y,\{P(x)\},F), \tag{I.I}$$

где $X=(x_1,x_2,\dots,x_\tau)$ – входной и $Y=(y_1,y_2,\dots,y_m)$ – выходной алфавиты; $S=(s_1,s_2,\dots,s_n)$ – множество состояний; $\{P(x)\}$ – конечное множество стохастических матриц размерности $n\times n$ по числу букв входного алфавита; F – детерминированная функция, отображающая S в Y.

Абстрактной вероятностной сетью (АВС) B будем называть конечное множество автоматов $A_1,A_2,\dots,A_\kappa$ $(\kappa=1,2\dots)$ заданных в виде (I.I), с указанием связей между ними.

Естественно, что АВС B сама является конечным вероятностным автоматом.

Пусть $B=(S',X,Y,\{H(x)\},F')$. Рассмотрим подмножество S_0' множества S' такое, что в матрицах $H(x)$ можно выделить стохастические подматрицы $H_0(x)$, определяемые состояниями подмножества S_0'. В этом случае будем говорить, что автомат B моделирует некоторый автомат $B_0=(S_0',X,Y,\{H_0(x)\},F_0')$, где F' – функция отображения S_0' в Y.

Будем говорить также, что автомат A допускает абстрактную декомпозицию на автоматы $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (или иначе АВС B), если: $n_i < n$ $(i = \overline{1,k})$, n_i – число состояний автомата A_i, автомат A изоморфен автомату B_0 и на связи между автоматами A_i наложены определенные ограничения.

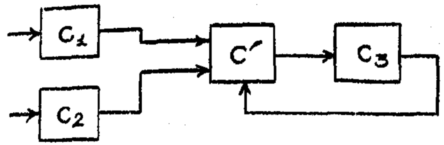
Пусть каждый из автоматов A_i синтезируется по правилу R в базисе β , в результате чего он реализуется в виде схемы c_i , а АВС B – в виде схемы c , в которой связи между схемами c_i точно такие же , как и связи между автоматами A_i в B .

Рассмотрим вопрос реализации АВС. Пусть выбор R и β определен алгоритмом синтеза вероятностного автомата, описанным в [20] . Известно, что реализацию произвольного ВА с рациональными вероятностями переходов можно осуществить только с растяжением тактности [21] . Согласно алгоритму реализации и базису, предлагаемому в [20] , для реализации ВА A строится автомат A' такой, что его входной и выходной алфавиты содержат, кроме значащих букв, пустые буквы Λ' и Λ . Существует следующее правило введения букв в автомат A' . Пусть в такте t на вход подана буква x_j (значащая буква). Число тактов до получения значащей буквы на выходе (реакция на x_j) является случайной величиной. Если реакция имела место в такте $t+\eta$, то в такты $t+1, t+2, \ldots, t+\eta-1$ каждый раз подавалась некоторая специальная буква Λ' . Выходные буквы в эти такты являются незначащими и обозначаются Λ . Факт необходимости растяжения тактности определяет картину перехода от АВС к ее реализации. Рассмотрим АВС из d последовательно соединенных автоматов $A_1, A_2, \ldots, A_d$. Перейдем к соответствующей схемной реализации этой сети, т.е. к автоматам $c_1, c_2, \ldots, c_d$ Каждый из автоматов c_i $(i = \overline{1,d})$ кроме матриц переходных вероятностей по числу значащих выходных букв автомата c_{i-1} должен содержать матрицу, соответствующую пустой букве Λ , на которую автомат реагирует тем, что остается в том же состоянии, в котором он был за такт до поступления буквы Λ .

Рассмотрим теперь автоматы $A_1, A_2, \ldots, A_k$, выходы которых являются входами автомата A_{k+1} и перейдем к схем-

ной реализации или к автоматам $c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}$, соединенным так же, как и автоматы $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$. Автомат c_{k+1} сработает только в том случае, когда на его входах в некотором такте оказываются поданными значащие выходные буквы автоматов $c_1, c_2, \ldots, c_k$ одновременно. Это означает, что если на некоторые из входных каналов автомата c_{k+1} поданы значащие, а на остальные – пустые буквы, автомат c_{k+1} должен оставаться в том же состоянии, а значащие буквы следует запомнить до того момента, когда на всех входных каналах значащие буквы поданы одновременно. Следовательно, необходимо осуществить синхронизацию поступления значащих букв по всем входным каналам. С этой целью между автоматами $c_1, c_2, \ldots, c_k$ и автоматом c_{k+1} введем дополнительный автомат-синхронизатор, соединенный с c_{k+1} обратной связью. На рисунке приведены автоматы c_1 и c_2 , выходы которых подаются на автомат c_3 через синхронизатор c' . В таблице описаны переходы и функции выходов автомата-синхронизатора c' .

состояния	Λ,Λ,Λ	Λ,a,Λ	Λ,c,Λ	Λ,d,Λ	a,Λ,Λ	a,a,Λ	a,c,Λ	a,d,Λ	b,Λ,Λ	b,a,Λ	b,c,Λ	b,d,Λ	$\Lambda,\Lambda,\varepsilon$
1	1 Λ,Λ	2 Λ,Λ	3 Λ,Λ	4 Λ,Λ	5 Λ,Λ	7 a,a	7 a,c	7 a,d	6 Λ,Λ	7 b,a	7 b,c	7 b,d	
2	2 Λ,Λ				7 a,a				7 b,a				
3	3 Λ,Λ				7 a,c				7 b,c				
4	4 Λ,Λ				7 a,d				7 b,d				
5	5 Λ,Λ	7 a,a	7 a,c	7 a,d									
6	6 Λ,Λ	7 b,a	7 b,c	7 b,d									
7	7 Λ',Λ'												1 Λ,Λ



Пусть $\{\Lambda, a, b\}$ – выходной алфавит автомата c_1, $\{\Lambda, a, c, d\}$ – выходной алфавит автомата c_2. Выходной алфавит автомата c_3 содержит значащие буквы, которые синхронизатор воспринимает как одну букву ε и пустую букву Λ. На вход синхронизатора могут поступать только следующие буквы: $(\Lambda,\Lambda,\Lambda)$, (Λ,a,Λ), (Λ,c,Λ), (Λ,d,Λ), (a,Λ,Λ), (a,a,Λ), (a,c,Λ), (a,d,Λ), (b,Λ,Λ), (b,a,Λ), (b,c,Λ), (b,d,Λ), $(\Lambda,\Lambda,\varepsilon)$.

Выходными буквами синхронизатора будут (Λ,Λ), (a,a), (a,c), (a,d), (b,a), (b,c), (b,d), (Λ',Λ').

Пусть на вход синхронизатора, находящегося в состоянии 1, подана буква $(\Lambda,\Lambda,\Lambda)$. Тогда синхронизатор остается в исходном состоянии и посылает на вход c_3 букву (Λ,Λ), под воздействием которой c_3 не меняет своего состояния. На выходе c_3 при этом наблюдается буква Λ. Если на вход синхронизатора подана, например, буква (Λ, a), синхронизатор запоминает символ a тем, что переходит в состояние 2 и находится в этом состоянии до тех пор, пока и по другому входному каналу не поступит значащий символ. При этом на выходе синхронизатора все время будет пустая буква (Λ,Λ).

При наступлении такта, в котором на вход синхронизатора поступит и второй значащий символ, например b, синхронизатор перейдет в состояние 7 и пошлет на вход c_3 букву (b,a). Пусть это произошло в такте t. Автомат c_3 работает с растяжением тактности и поэтому значащая буква на его выходе появится через случайное число тактов, например, в такте $t+\tau$. Начиная с $(t+1)$-го и до $(t+\tau)$-го такта, синхронизатор подает на c_3 букву (Λ',Λ'), оставаясь в состоянии 7. В такте $t+\tau$ значащий символ ε поступит в синхронизатор и переведет его в исходное состояние 1.

Таким образом, реализация ABC в виде схемы требует включения детерминированных автоматов-синхронизаторов между вероятностными автоматами так, как это было описано выше.

9.2. Оценка временного растяжения тактности.

Естественно поставить вопрос о нахождении временного растяжения тактности автомата C, если известны $T_1, T_2, \ldots, T_k$ – временные растяжения подавтоматов $c_1, c_2, \ldots, c_k$, составляющих схему C, т.е. математические ожидания времен появления значащей буквы на выходах подавтоматов, после того как на их входы была подана значащая буква. Для определения T разорвем все обратные связи в C и будем считать их висячими каналами, на которых имеются значащие буквы. Тогда в C можно выделить различные цепи из подавтоматов. Пусть $\{\mu\}$ – множество всех цепей, оканчивающихся подавтоматами, выходные каналы которых одновременно являются выходными каналами схемы C. Обозначим через T^j временное растяжение j-й цепи и через $T_1^j, T_2^j, \ldots, T_{k_j}^j$ – временные растяжения подавтоматов этой цепи (k_j – число подавтоматов). Справедлива следующая теорема.

Теорема 9.I.

$$T = \max_{j\in\{\mu\}} T^j = \max_{j\in\{\mu\}} (T_1^j + T_2^j + \ldots + T_{k_j}^j).$$

Действительно, пусть значащая буква, поданная на вход начального подавтомата в цепи j в такте t, появляется на выходе его в такте η_1, а на выходах последующих подавтоматов значащие буквы появляются в тактах $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_k$. На выходе цепи j значащая буква появится через время $(\eta_1 - t) + (\eta_2-\eta_1) + \cdots + (\eta_{k_j} - \eta_{k_j-1})$, являющееся случайной величиной с математическим ожиданием

$$M[(\eta_1-t)+\cdots+(\eta_{k_j}-\eta_{k_j-1})] = M(\eta_1-t)+\cdots + M(\eta_k-\eta_{k_j-1}) = T_1^j + T_2^j + \cdots + T_{k_j}^j. \tag{2.I}$$

Появление значащей буквы на выходе C означает появление значащих букв на всех выходных полюсах цепей множества $\{\mu\}$. Следовательно, вычисляя временное растяжение каждой цепи из $\{\mu\}$ согласно (2.I), и взяв затем максимум по вычисленным величинам, получим значение T.

9.3. Схемная декомпозиция автоматов

Поставим задачу о декомпозиции автомата A на уровне схемной реализации следующим образом. Пусть m – число состояний схемной реализации по правилу R автомата A в базисе β, а $m_1, m_2, \dots, m_k$ – числа состояний автоматов $C_1, C_2, \dots, C_k$, представляющих собой реализации автоматов $A_1, \dots, A_k$, на которые абстрактно декомпозируется автомат A. Пусть при этом требуется введение q автоматов-синхронизаторов и τ_j – число состояний j-го синхронизатора.

Определение: *Автомат A допускает декомпозицию на уровне реализации правилом R в базисе β, если* $m_i < m$ $(i=\overline{1,k})$ и $\tau_j < m$ $(j=\overline{1,q})$.

Далее рассмотрим определенный класс вероятностных автоматов и приведем некоторые результаты по схемной декомпозиции. Приведенные ниже утверждения предшествуют доказательству основного результата.

Пусть

$$0.\delta_1\delta_2\cdots\delta_k(\delta_{k+1}\cdots\delta_\ell),\ \delta_i\in\{0,1\} \qquad (3.I)$$

есть двоичное представление рациональных дробей вида $0\le m/n\le 1$. В скобках содержится периодическая часть данного представления.

Лемма 9.I. Всякая $0\le m/n\le 1$ дробь, допускающая представление (3.I) может быть записана либо в виде $m'/2^\ell$, либо $m''/2^k(2^{\ell-k}-1)$.

Доказательство. Если в (3.I) отсутствует период, то $0.\delta_1\cdots\delta_\ell = \delta_1 2^{-1}+\delta_2 2^{-2}+\dots+\delta_\ell 2^{-\ell} = m'/2^\ell$, $m'=\delta_1 2^{\ell-1}+\delta_2 2^{\ell-2}+\dots+\delta_\ell$.

В противном случае

$$0.\delta_1\delta_2\cdots\delta_k(\delta_{k+1}\cdots\delta_\ell) = 0.\delta_1\delta_2\cdots\delta_k + 0.\underbrace{00\cdots0}_{k}\underbrace{\delta_{k+1}\cdots\delta_\ell}_{\ell-k} + 0.\underbrace{00\cdots0}_{k+\ell-k}\underbrace{\delta_{k+1}\cdots\delta_\ell}_{\ell-k} +$$

$$+\,0.\underbrace{00\cdots0}_{k+2(\ell-k)}\underbrace{\delta_{k+1}\cdots\delta_\ell}_{\ell-k}+\dots = \frac{m'}{2^k}+\frac{1}{2^k}\left(\frac{\delta_{k+1}}{2^1}+\frac{\delta_{k+2}}{2^2}+\dots+\frac{\delta_\ell}{2^{\ell-k}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2^{k+\ell-k}}\left(\frac{\delta_{k+1}}{2^1}+\dots+\frac{\delta_\ell}{2^{\ell-k}}\right)+\frac{1}{2^{k+2(\ell-k)}}\left(\frac{\delta_{k+1}}{2^1}+\dots+\frac{\delta_\ell}{2^{\ell-k}}\right)+\dots$$

$$\dots = \frac{m'}{2^k}+\frac{m_1}{2^{\ell-k}}\cdot\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^{1(\ell-k)}}+\frac{1}{2^{2(\ell-k)}}+\dots\right)=$$

$$=\frac{m'}{2^k}+\frac{m_1}{2^k(2^{\ell-k}-1)}=\frac{m''}{2^k(2^{\ell-k}-1)},$$

$$m'=\delta_1 2^{k-1}+\delta_2 2^{k-2}+\dots+\delta_k,\quad m_1=\delta_{k+1}2^{\ell-k-1}+\delta_{k+2}2^{\ell-k-2}+\dots+\delta_\ell,$$

$$m''=m'(2^{\ell-k}-1)+m_1.$$

Из множества всех $0\le m/n\le 1$ дробей выделим класс $\{\ell\}$, представляющий собой совокупность всех дробей, представление которых в виде (3.I) содержит не более чем ℓ двоичных символов. Рассмотрим все возможные знаменатели чисел $m'/2^k$ и $m''/2^k(2^{\ell-k}-1)$: $q_0=2^0(2^\ell-1)=2^\ell-1$, $q_1=2^1(2^{\ell-1}-1)=2^\ell-2^1$, $\dots$, $q_{\ell-1}=2^{\ell-1}(2^1-1)=2^\ell-2^{\ell-1}$, $q_\ell=2^\ell$. Выделим из класса $\{\ell\}$ элементы со знаменателями $q_i=2^i(2^{\ell-i}-1)$ и образуем подкласс $\{q_i\}$.

Определение: Стохастическая матрица $H=[p_{ij}]$ принадлежит классу $\{n,\ell\}$, если ее размерность – $n\times n$, $p_{ij}\in\{\ell\}$.

Рассмотрим i-ю строку матрицы H, $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}$, и перепишем ее в виде $p'_{i1}/t, p'_{i2}/t, \dots, p'_{in}/t$, где t – общий знаменатель чисел строки i. Пусть по крайней мере два элемента, например p_{ij} и p_{ik} принадлежат разным подклассам $\{\ell\}$. Могут быть два случая: либо t определяет один из подклассов класса $\{\ell\}$, либо подкласс, не входящий в $\{\ell\}$. Отсюда справедлива следующая лемма.

Лемма 9.2. Все элементы i-й строки H принадлежат одному подклассу класса $\{\ell\}$.

Из леммы 2 следует, что операция укрупнения матрицы из класса $\{\ell\}$ приводит к матрице того же класса.

Пусть ВА A абстрактно декомпозируется на автоматы A_1 и A_2, соединенные последовательно. Пусть $\{P(x)=[p_{ij}(x)]\}$, $\{Q(x)=[q_{\alpha\beta}(x)]\}$ и $\{R(x,\alpha)=[r_{fg}(x,\alpha)]\}$ –

множества матриц переходных вероятностей автоматов A, A_1 и A_2 соответственно, где (x,α) – входная буква автомата A_2, определяемая входом x и состоянием α автомата A_1. Пусть матрицы $P(x) \in \{n,\ell\}$. Матрица $Q(x)$ получается из матрицы $P(x)$ укрупнением последней по некоторому разбиению. Тогда, в силу следствия леммы 9.2, матрицы $Q(x)\in \{n_1,\ell_1\}$, где $\ell_1 < \ell$. Матрицу $R(x,\alpha)$ тоже можно получить некоторой операцией, схожей с операцией укрупнения матрицы $P(x)$ и заключающейся в сложении определенных чисел в матрице $P(x)$. Используя лемму 9.2, можно показать, что $R(x,\alpha)\in\{n_2,\ell_2\}$ и $\ell_2 < \ell$. Кроме того, в силу декомпозируемости автомата A, n_1 и n_2 – числа состояний автоматов A_1 и A_2 соответственно и $n_1, n_2 < n$.

Число состояний m схемной реализации ВА $A \in (n,\ell)$ есть некоторая возрастающая функция $m = \varphi(n,\ell)$. В случае декомпозируемости ВА A на автоматы A и A_2 $m>m_1, m>m_2$, где m_1 и m_2 – числа состояний схемной реализации автоматов A_1 и A_2 соответственно.

Т е о р е м а 9.2. ВА A декомпозируем на схемном уровне по правилу R в базисе β на последовательные автоматы A_1 и A_2, если он декомпозируем на абстрактном уровне и $\tau < m$, где τ – число состояний автомата, синхронизирующего схемные реализации автоматов A_1 и A_2.

Л и т е р а т у р а

I. Р.Г.Бухараев. Вероятностные автоматы. Изд.Казанского Унив. I970.

2. A.Paz. Introduction to Probabilistic Automata.N-Y,London, Academic Press, 1971.

3. P.H.Starke. Theorie Stochastischer Automaten. I,II.Kybernetik, 1, 1965, 5-32, 71-98.

4. A.Salomaa. Canad. J.Math., 20, 1966, 242-251

5. P.Turakainen. Ann.Acad. Sci.Fenn., A 1, 429, 1968.

6. J.Hartmanis, R.E.Stearns. The Algebraic Structure Theory of Sequential Machines. Prentice Hall, 1966.

7. G.Birkhoff. Lattice Theory. Amer.Math. Soc. Colloquium Publ., v.25, 1948.

8. C.G.Bacon. Inf. and Control, 7, 1964, 320-329.

9. Ф.Р.Гантмахер.Теория матриц. Гос.изд.техн.-теор.лит.,М., I953.

I0. A.Ginzburg. Algebraic Theory of Automata. Acad. Press, N-Y., 1968.

II. J.C.Kemeney, J.L.Snell. Finite Markov Chains. Van Nostrand Princeton, N.J., 1960.

I2. S.E.Gelenbe. Inf. and Control, 17, 1970, 414-484.

I3. A.Paz. Technical Rept., 8, 1970., Technion Dept. of Computer Science.

I4. P.Turakainen. Proc.Amer.Math. Society, 21, 2, 1969

I5. А.Х.Гиоргадзе. Проблемы управления и теория информации, 5, I976, 321-327.

I6. А.Х.Гиоргадзе. Труды У Международного симпозиума "Дискретные системы", Дрезден, I977.

I7. А.Х.Гиоргадзе, Л.В.Бурштейн. Сообщения АН ГССР,82, 3, 1976, 565-568.

18. J.P.Cleave. Cybernetica, 5, 1962.
19. А.Х.Гиоргадзе, Г.Э.Якобсон, Л.В.Бурштейн. Проблемы передачи информации, XII, 4, I976, 88-94.
20. Л.В.Макаревич, А.Х.Гиоргадзе. Сообщения АН ГССР, I, I968.
2I. Л.В.Макаревич. СО АН СССР. Дискретный анализ, вып.I5, I969.
22. А.Х.Гиоргадзе, А.Г.Сафиулина. Кибернетика, 2, I975.
23. А.Х.Гиоргадзе, Э.И.Кистаури. Кибернетика, 4, I977.
24. А.Х.Гиоргадзе, А.Г.Сафиулина. Автоматика и вычислительная техника, 5, I974, I-5, Рига.
25. А.Х.Гиоргадзе, Т.Л.Джебашвили. Сообщения АН ГССР, 76, 2, I974.
26. А.Х.Гиоргадзе, Т.Л.Джебашвили. Сообщения АН ГССР, I977.
27. G.R.Putsolu. J. of Computer and System Sciences, 2, 1969, 312-332 .
28. А.Х.Гиоргадзе. Материалы Сибирской конф. по надежности и качеству изделий радиоэлектроники и приборостроения, том I, Новосибирск, I969.
29. А.Х.Гиоргадзе. Сб.трудов конф.молодых ученых по кибернетике, Тбилиси, I969.
30. А.Х.Гиоргадзе, Л.В.Бурштейн. Техническая кибернетика, I, I974.
3I. A.S.Davis. Amer. Math. Monthly, 68, 1961, 264-267.
32. A.Gill. J.Franklin. Inst., 1, 274, 1962, 264-267.
33. А.Х.Гиоргадзе, А.В.Клочко. Сообщения АН ГССР, 67,2, I972.
34. Дж. фон Нейман. Теория самовоспроизводящихся автоматов. "Мир", М., I97I.
35. A.W.Burks. Behavioral Science, 6, 1961, 5-22.

36. Э.Ф. Мур. Сб. "Математ. проблемы в биологии", "Мир", М., I966, 36-62.
37. Я.М.Барздинь. Сб."Проблемы кибернетики", вып.I7, I966, Москва.
38. А.Х.Гиоргадзе, А.Г.Сафиулина. Автоматика и телемеханика, М., 9, I974.
39. J.Jump. Inf. and Control, 15, 1969.
40. А.Х.Гиоргадзе, Л.В.Бурштейн.Тезисы II Всесоюзного симпозиума по вероятностным автоматам, Тбилиси, I976.
4I. А.Я.Макаревский. Кибернетика, 6, I970, 39-47.
42. А.А.Матевосян, А.Х.Гиоргадзе. Сообщения АН ГССР, 74,2, I974. 30I-304.
43. А.А.Матевосян. Сообщения АН ГССР, 84, 2, I974.
44. А.Х.Гиоргадзе, А.А.Матевосян. Сообщения АН ГССР, 8I, 2, I976, 32I-325.
45. А.Х.Гиоргадзе, Э.И.Кистаури. Сообщения АН ГССР, 79, I, I975, 45-47.
46. А.Х.Гиоргадзе, ДАН, 232, 4, I977.
47. А.Х.Гиоргадзе, ДАН, 233, I, I977.
48. M.O.Rabin. Inf. and Control, 6,3,1963, 230-245.
49. Ю.А.Альпин, Р.Г.Бухараев. ДАН СССР, 223, 4, I975.
50. E.S.Santos. Math.Systems Theory, 6, 1972.
5I. A.Heller. Math Systems Theory, 1,3,1967.
52. А.Х.Гиоргадзе, Э.И.Кистаури,Техн.Кибернетика,6, I976.
53. K.Krohn, J.Phodes. Trans. Am. Math. Soc.,116,1965.
54. H.P.Zeiger, Ph. D.Thesis. E.L.Engineering,Dept,1964.
55. H.A.Curtis. J.of the Assos. of Comput. Machinery, 10, 3, 1966.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Напечатано по постановлению Редакционно-издательского совета Академии наук Грузинской ССР

Художник Н.Кикнадзе

Подписано к печати 30.XII.77 Печатных л. 13.65

Уч.-издат.л. 12.08 УЭ 12645 Тираж 550 Заказ 798

1 руб. 35 коп.

Издательство "Мецниереба", Тбилиси, 380060, ул.Кутузова, 19

Тбилисская книжная фабрика Государственного комитета Совета Министров Грузинской ССР по делам издательств полиграфии и книжной торговли, пр.Дружбы, 7